

# Analyse de données - Incertitudes

Timothée de Guillebon  
Département de physique - ENS Paris-Saclay

2 novembre 2020

---

## REMARQUES UTILES

- ⊙ Une **boîte à outils** se trouve à la fin du document, permettant de donner un guide simplifié pour répondre aux différentes situations que l'on peut rencontrer en physique expérimentale, permettant d'obtenir rapidement une aide pour le traitement des données.  
⚠ Attention, ce n'est en aucun cas une recette à appliquer les yeux fermés !
- ⊙ Le meilleur allié du physicien expérimentateur est le BON SENS et son ANALYSE CRITIQUE. Les idées développées dans ce cours doivent seulement guider l'expérimentateur dans l'analyse de l'expérience.
- ⊙ Ce polycopié ne se veut pas complet et absolu sur les thématiques abordées, à savoir l'analyse de données et le traitement des incertitudes. Plusieurs éléments traités ne sont pas nécessaires à la prise en main pratique de données mais permettent une compréhension plus aboutie des stratégies de traitement de données et permettent également d'éviter l'utilisation de formules "boîtes noires" dont l'origine est complètement inconnue. Le lecteur pourra ainsi compléter les informations contenues dans ce polycopié par une lecture attentive de différentes sources qui ont été en partie utilisées pour la rédaction de ce document (liste non exhaustive) :
  - [Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure \(GUM\)](#)
  - [A Practical Guide to Data Analysis for Physical Science Student](#), Louis Lyons
  - [Mesure et incertitudes](#), Eduscol
  - [Measurement and their Uncertainties](#), I. G. Hughes, T. P. A. Hase
  - Probabilité et statistiques, E. Belorizky
  - [Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques](#), J. Taylor
- ⊙ Ce document a vocation à évoluer. Le lecteur repérant une erreur ou ayant une question, remarque ou commentaire peut (doit ?) me contacter<sup>†</sup>.

---

<sup>†</sup>. [timothee.de-guillebon@ens-paris-saclay.fr](mailto:timothee.de-guillebon@ens-paris-saclay.fr)

# 1 De l'utilité d'une analyse d'un résultat de mesure

## 1.1 Dans quel but ?

Dans ce paragraphe, on souhaite rapidement évoquer l'utilité de l'évaluation des incertitudes, intimement liée au concept de la mesure et sa réalisation. Dans le cadre d'une formation en physique, il paraît naturel de mesurer des grandeurs dont on connaît la valeur "attendue". Ainsi, si l'on obtient une valeur proche de la valeur attendue, il suffit de demander à l'enseignant si cela convient, et on s'en tire pour bon compte, en se disant que l'écart "doit bien venir" de quelque part. Cette démarche, si elle paraît fonctionner en séance de travaux pratiques, est scientifiquement invalide !

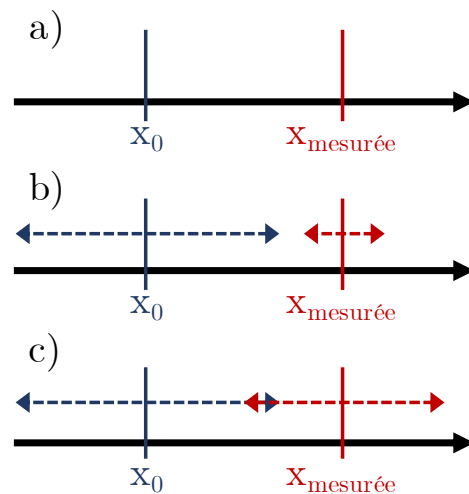
En effet, une mesure d'une grandeur vise la plupart du temps à la comparer à une valeur tabulée ou une autre mesure, à la comparer à une valeur de consigne, à donner une valeur de référence, ...

Comme nous l'illustrons sur la figure ci-contre, il est essentiel de disposer d'une incertitude sur la mesure pour réaliser les opérations listées ci-dessus. En effet, dans le cas où on souhaite comparer notre mesure à une valeur de référence  $x_0$ , on convient aisément que présenter la mesure  $x_{\text{mesurée}}$  sans aucune incertitude (cas a) n'a aucun intérêt (voire aucun sens). Quel sens peut-on donner à cet écart entre la valeur mesurée et la valeur à comparer ? Les cas b) et c) nous donnent des pistes d'amélioration de la présentation du résultat. Dans les deux cas, un *intervalle de confiance*, c'est-à-dire une plage sur laquelle on peut estimer que la grandeur se trouve avec une grande probabilité, est défini. On s'aperçoit qu'avec une mesure identique pour les deux cas, l'analyse du résultat est bien différente. Dans le cas b), les mesures ne coïncident pas.

Il faut donc utiliser notre bon sens de physicien et une analyse rigoureuse pour déterminer la raison de cet écart. Les conditions expérimentales étaient différentes ? La grandeur mesurée est-elle bien identique ? Faut-il revoir le modèle physique ? Au contraire, le cas c) permet d'obtenir une comparaison raisonnable des deux grandeurs. Accessoirement, l'augmentation du nombre de mesures de la grandeur va permettre d'affiner sa connaissance.

Dans la suite, nous définirons plus précisément ce que signifient les flèches en pointillés de la figure. Nous pourrons ainsi répondre à ces différentes questions : comment définit-on une incertitude ? Est-ce un intervalle strict de la probabilité de présence de la grandeur mesurée ? Est-ce que cette grandeur a plus de chances d'être proche de la valeur mesurée ? Comment définir cet intervalle, d'où vient-il ?

Après avoir répondu à ces questions, le lecteur sera convaincu qu'il faut donner autant d'im-



portance, lors d'une expérience de physique, à l'évaluation de l'incertitude qu'à celle donnée à la mesure elle-même !

## 1.2 Pourquoi un résultat ne sera jamais précis à l'infini...

Le concept d'incertitude est intrinsèquement relié à celui d'une mesure. En effet, la mesure d'une grandeur sera systématiquement entachée d'une incertitude. Évidemment, celle-ci dépend de l'outil utilisé. Une longueur mesurée à l'oeil, avec une règle ou avec un dispositif interférométrique ne donnera pas la même précision. Par ailleurs, on aura beau améliorer le dispositif de mesure, d'autres effets vont rentrer en jeu. Par exemple, l'humidité ou la température va jouer sur la longueur que l'on mesure. Ainsi, le modèle physique qui supposait la longueur fixe en fonction du temps n'est qu'une approximation, bien que très bonne pour les mesures de longueurs peu précises.

Finalement, aucune quantité ne peut être connue avec une certitude absolue. Un expérimentateur hors pair disposant de matériel de pointe va réduire les incertitudes au minimum mais ne pourra jamais les éliminer complètement. Les instituts de métrologie visent ainsi à réduire au maximum les incertitudes sur des grandeurs étalons afin de donner des références les plus précises possibles.

## 1.3 ...mais ce n'est pas un problème !

On vient de voir que les incertitudes ne peuvent pas être éliminées. Mais cela n'est pas vraiment un problème ! Elles font intrinsèquement partie de la mesure et la caractérisent.

Dans certains cas, il peut être utile de les réduire au minimum accessible (valeur étalon pour la référence du temps par exemple) mais, la plupart du temps, il suffit d'obtenir une incertitude "raisonnable" en comparaison aux contraintes de l'expérience et de l'utilisation de la grandeur mesurée. Prenons l'exemple d'un maçon. Celui-ci doit placer un carreau dans un espace de  $50 \text{ cm}^2$ . Sa contrainte est qu'il n'a qu'1 cm de marge, ce centimètre étant utilisé pour le joint dont la taille peut être adaptée. Ainsi, l'incertitude sur la mesure de son carreau avant la découpe sera  $50 \pm 0,5 \text{ cm}$  pour chacun des côtés. Il n'a clairement pas besoin d'utiliser une mesure interférométrique de précision d'environ  $10^{-6} \text{ m}$ , il s'agira simplement d'utiliser un mètre gradué au millimètre.

De la même façon, si une quantité à connaître peut être connue à l'aide de deux grandeurs à mesurer, il sera complètement inutile de dépenser de l'énergie à réduire les incertitudes sur la première grandeur si la deuxième est déterminée avec une grande incertitude.

Ainsi, l'analyse scientifique préalable sera nécessaire pour identifier les sources d'incertitudes prépondérantes afin de les réduire aisément. Il s'agira également d'analyser le but de la mesure pour savoir quelle énergie dépenser à réduire l'incertitude de mesure.

Avec toutes ces considérations sur la mesure et l'incertitude associée, nous allons maintenant préciser quantitativement comment faire pour l'évaluer le plus correctement possible.

## 2 Erreur sur un résultat de mesure

### 2.1 Origine des incertitudes

Les incertitudes sont liées à différents processus qui conduisent à des erreurs aléatoires ou systématiques.

#### Erreurs systématiques :

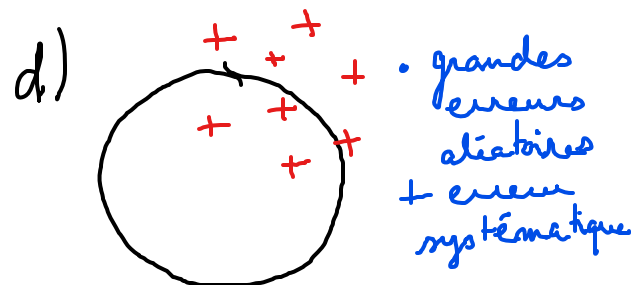
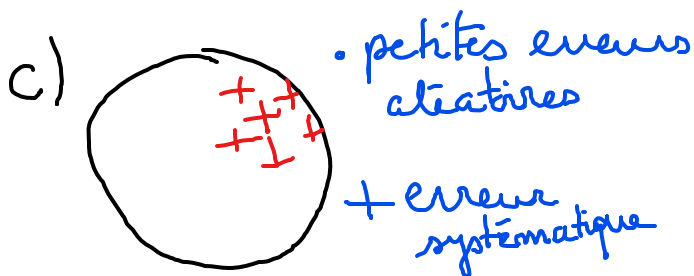
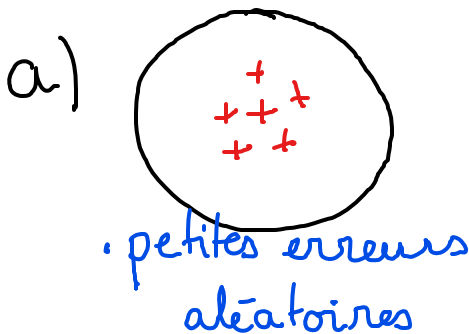
Elles proviennent d'un **biais initial dans la mesure** et **impactent celle-ci toujours de la même façon**. Par exemple, une mesure de résistance *via* des câbles possédant eux-même une résistance ou bien une mesure de masse avec une balance mal tarée ou plus généralement la non prise en compte d'un effet physique constant.

⚠ Ces erreurs systématiques ne peuvent pas être évaluées statistiquement ! Il s'agit de les éliminer par une analyse rigoureuse de l'expérience, soit en amont de l'expérience, soit en aval par une analyse des résultats.

#### Erreurs aléatoires :

Elles balaient un **très large spectre de causes**, parmi lesquelles on peut citer les erreurs de manipulation (**erreur de lecture**), les erreurs dues au dispositifs de mesure (**bruit dans le détecteur**) ou des erreurs liées à des **modifications des paramètres expérimentaux** (température, pression, humidité...). Elles déplacent la valeur mesurée autour de la valeur moyenne de façon aléatoire.

Image : le tir d'une flèche sur une cible.



Comme nous allons le voir, **la grandeur mesurée**, sujette à plusieurs sources d'erreurs aléatoires, **va présenter une erreur globale qui suivra une loi normale**.

## 2.2 La distribution normale

La loi normale (ou gaussienne) est centrale dans la théorie des erreurs. Expérimentalement, on constate qu'excepté dans quelques situations particulières, la distribution des mesures d'une grandeur suit une distribution normale. Ceci peut être justifié par une version simplifiée du théorème central de la limite<sup>1</sup> :

**Théorème central de la limite** : Soit  $X$  la somme de variables aléatoires indépendantes  $\{X_1, \dots, X_n\}$  qui suivent la même distribution inconnue mais de moyenne et écart type finis. Le théorème énonce alors que  $X$  tend vers une loi normale lorsque  $n$  est grand.

Nous pouvons ainsi en donner une interprétation dans le cadre d'une mesure physique. On suppose la grandeur à mesurer sujette à des fluctuations. Celles-ci sont issues de nombreuses causes distinctes (par exemple microscopiques) qui correspondent chacune à une variable aléatoire. Les fluctuations de la grandeur à mesurer, elle-même issue de la somme de variables aléatoires, suivent une distribution normale. Autrement dit, lorsque, lors de mesures, l'addition de plusieurs facteurs aléatoires indépendants (et sensiblement équivalents) induit des erreurs, celles-ci se répartissent selon la loi normale.

Ainsi, le théorème central de la limite nous permet d'expliquer l'observation expérimentale (intuitive) : la variable aléatoire qui modélise l'erreur sur la mesure d'une valeur (soit l'écart de la mesure à sa valeur vraie) suit approximativement une loi normale (à certaines conditions, vérifiées la plupart du temps)<sup>2</sup>.

### Expression mathématique de la distribution normale

L'expression mathématique de la loi normale, fonction de deux paramètres  $\mu$  et  $\sigma$  (avec  $\sigma > 0$ ), est :

$$G(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (1)$$

Nous savons évidemment que  $G(x)$  a une forme de courbe “en cloche”, dénommée usuellement par le physicien “gaussienne”. Cette courbe est symétrique par rapport à  $\mu$  qui correspond à la valeur de  $x$  pour laquelle elle atteint sa valeur maximale. Le paramètre  $\sigma$  caractérise la largeur de la courbe, tandis que le facteur  $\sigma\sqrt{2\pi}$  assure la normalisation de la distribution de probabilité  $d\Pi = G(x)dx$  associée à cette fonction.

---

1. Il y a à peu près autant d'écritures possibles du théorème que d'individus lisant ce polycopié (il ne faut pas trop s'avancer tout de même) mais l'idée derrière la dénomination vient du fait que l'auteur (allemand) considérait que le théorème était central=important dans la branche des probabilités. Il traite ensuite d'une limite mais normalement rien ne relie le mot limite au mot central. La traduction approximative a ensuite fait son œuvre.

2. Il existe pour certains phénomènes, des distributions de valeurs différentes de la loi normale (par exemple : vols de Lévy, sans moyenne ni écart type, phénomènes physiques avec des occurrences rares).

Le paramètre  $\mu$  correspond à la valeur moyenne  $\langle x \rangle$  de la variable  $x$  :

$$\mu = \langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} xG(x)dx. \quad (2)$$

Cette quantité porte également le nom d'espérance mathématique, notée  $\mathbb{E}[x]$ . Nous utiliserons dans la suite de ces notes le terme “moyenne”, comme cela est l'usage pour les statisticiens et les physiciens.

Le paramètre  $\sigma$  correspond à l'écart type, appelé également déviation standard, de la variable  $x$  et défini comme :

$$\sigma^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (3)$$

Le paramètre  $\sigma^2$  est appelé variance  $\mathbb{V}[x]$  de la loi de probabilité, ou encore écart quadratique moyen. Plus  $\sigma$  est petit, plus il est probable qu'on trouve une valeur de  $x$  proche de la moyenne  $\mu$ . L'écart type  $\sigma$  permet par conséquent d'évaluer l'écart à la moyenne, en quantifiant les fluctuations de la variable aléatoire  $x$  autour de la valeur moyenne  $\mu$ . C'est l'évaluation de cette grandeur qui sera centrale dans la détermination de l'incertitude reliée à notre mesure.

### 2.3 Interprétation statistique d'une mesure

Soit  $X$  la grandeur à mesurer. La valeur que nous souhaitons déterminer avec la plus grande précision est  $x_{\text{vraie}}$ , la valeur vraie de  $X$ . Nous souhaitons également (c'est le sujet de ce polycopié!) quantifier correctement l'erreur que l'on commet sur la détermination de cette valeur vraie.

Ainsi, nous donnerons **toujours** le résultat de la détermination de la grandeur  $X$  sous la forme

$$X = x_m \pm \Delta x \text{ unité.} \quad (4)$$

Il est également possible de présenter le résultat sous la forme

$$X \in [x_m - \Delta x ; x_m + \Delta x] \quad (5)$$

Nous pouvons maintenant interpréter correctement les différents termes qui composent l'expression d'un résultat de mesure :

- $x_m$  correspond à la valeur qu'on **estime** être la plus proche de la valeur vraie. Nous verrons dans la suite comment obtenir  $x_m$ , le meilleur estimateur de  $x_{\text{vraie}}$ .
- L'intervalle  $[x_m - \Delta x ; x_m + \Delta x]$  définit un **intervalle de confiance**<sup>1</sup>, associé à une probabilité donnée de contenir la valeur vraie  $x_{\text{vraie}}$  de la grandeur mesurée.

Cette probabilité de trouver la valeur exacte dans l'intervalle de confiance, appelée niveau de confiance, est liée à la probabilité de trouver une valeur de la variable aléatoire qui suit une

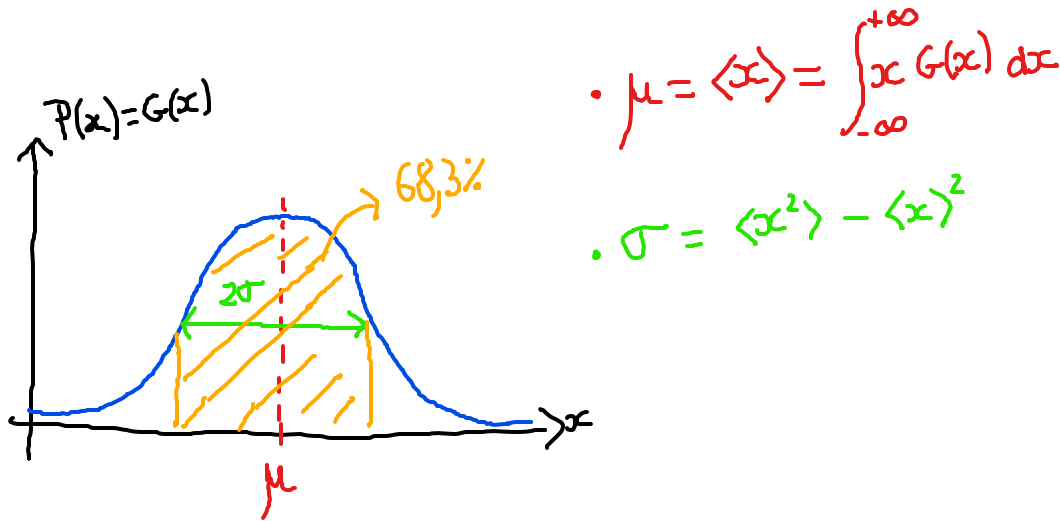
---

1. Cet intervalle peut être communément appelé *barre d'erreur*.

distribution gaussienne. Ainsi, il y a 68,3% de chance de mesurer une valeur de la variable aléatoire qui s'écarte jusqu'à  $1\sigma$  de la valeur moyenne. 95,4% pour les valeurs jusqu'à  $2\sigma$  et 99,7% pour  $3\sigma$ .

- L'incertitude type  $u(x)$  : cette incertitude type correspond à l'évaluation d'une erreur à  $1\sigma$ . Ainsi, notre but lors d'une mesure sera d'évaluer l'incertitude type de notre mesure. Nous pourrons ensuite choisir un facteur d'élargissement  $k = 1 ; 2 ; 3 \dots$  pour définir un intervalle plus large permettant d'être plus confiant sur le fait que la valeur vraie est bien dans cet intervalle.

### Explication graphique de l'intervalle de confiance par la loi normale



Finalement, on présentera le résultat sous la forme

$$X = x_m \pm k \times u(x) \text{ unité.} \quad (6)$$

Usuellement, on présente l'incertitude à 68,3%, soit à  $1\sigma$ . Si l'on souhaite élargir l'intervalle de confiance, alors on présente l'intervalle de confiance élargi en précisant qu'on présente le résultat avec un intervalle de confiance élargi à 2 ou 3  $\sigma$ <sup>1</sup>.

Les considérations évoquées ci-dessus indiquent qu'il convient de faire, pour chaque mesurage, un inventaire précis et rigoureux des causes d'erreur susceptibles de biaiser le résultat. Il faut ensuite

1. Il est déjà assez exceptionnel de présenter un résultat à  $3\sigma$ , cela ne présente plus beaucoup d'intérêt d'aller au-delà.

effectuer les corrections nécessaires et évaluer l'incertitude associée à chaque cause d'erreur, c'est-à-dire évaluer les paramètres (moyenne et écart type) de la distribution sous-jacente aux fluctuations. C'est ce à quoi nous allons nous atteler maintenant.

### 3 Exploitation d'une série de mesures <sup>1</sup>

Nous souhaitons maintenant savoir comment, à partir d'une série de mesure, à savoir la prise de  $N$  valeurs  $\{x_1, \dots, x_N\}$  de la grandeur  $X$  qu'on souhaite déterminer, nous pouvons extraire les informations essentielles en vue de la diffusion du résultat soit en particulier la meilleure estimation de la valeur exacte de la grandeur mesurée ainsi que l'incertitude sur la valeur proposée.

#### 3.1 Maximum de vraisemblance et estimateurs

##### 3.1.1 Principe de la théorie

Dans le but de déterminer la valeur  $x$  la plus proche de la valeur vraie  $x_{\text{vraie}}$  de la grandeur  $X$  ainsi que l'intervalle de confiance  $\Delta x$ , on suppose que le tirage des  $\{x_i\}$  suit une loi de probabilité sous-jacente  $\mathcal{P}(x)$ , déterminée par les paramètres  $\{\theta\}$ . Cette distribution de probabilité correspond à la distribution limite obtenue pour une infinité d'échantillons  $\{x_i\}$ .

En pratique, on souhaite s'approcher au plus près de la connaissance de cette distribution à partir d'un échantillon limité de mesures de la grandeur  $X$  ( $N$  valeurs  $\{x_i\}$ ). Dans ce but, le principe du maximum de vraisemblance, théorie développée par R.A. Fisher <sup>2</sup> en 1922, a pour but de déterminer le tout - la distribution de probabilité - à partir de l'échantillon - les  $\{x_i\}$ .

Pour appliquer cette méthode, on définit la **fonction de vraisemblance** pour le paramètre  $\theta$  :

$$\mathcal{L}(x_1, \dots, x_N, \theta) = \mathcal{P}(x_1|\theta) \times \dots \times \mathcal{P}(x_N|\theta) = \prod_{i=1}^N \mathcal{P}(x_i|\theta), \quad (7)$$

où  $\mathcal{P}(x_i|\theta)$  correspond à la probabilité d'obtenir la valeur  $x_i$  connaissant le paramètre  $\theta$  de la distribution de probabilité  $\mathcal{P}$ .

**Le principe de vraisemblance maximale nous indique alors que pour un ensemble d'observations  $\{x_i\}$ , la valeur  $\theta^*$  qui rend maximal  $\mathcal{L}$  correspond au meilleur estimateur du paramètre  $\theta$  :**

$$\left( \frac{\partial \mathcal{L}(x_1, \dots, x_N, \theta)}{\partial \theta} \right)_{\theta=\theta^*} = 0. \quad (8)$$

Pour reformuler, ce principe établit finalement qu'il faut trouver un compromis, *via* le paramètre  $\theta$ , pour que la probabilité de trouver chacun des  $\{x_i\}$  (ce qui a été réalisé expérimentalement) soit optimale vis-à-vis des autres, ce qui se traduit par maximiser le produit des différentes probabilités

1. En vocabulaire de métrologie, les incertitudes sur une série de mesures sont appelées *Incertitudes de type A*

2. Scientifique anglais qui révolutionna la statistique moderne. Il développa en particulier des outils d'analyse statistique en vue d'optimiser les rendements agronomiques.



de trouver ces  $\{x_i\}$ . Autrement dit, étant donné qu'on a obtenu expérimentalement les  $\{x_i\}$ , le paramètre le plus vraisemblable sera celui qui assure une probabilité maximale pour les  $\{x_i\}$ .

Si ce principe de maximum de vraisemblance peut être appliqué pour n'importe quelle distribution de probabilité sous-jacente, nous nous intéresserons dans la suite uniquement à une distribution de probabilité normale (gaussienne), qui se reproduit le plus souvent dans les situations expérimentales<sup>1</sup>.

$$\mathcal{P}(x_i|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\mu-x_i}{\sigma}\right)^2}, \theta = \{\mu, \sigma\}. \quad (9)$$

⚠ Tous les résultats présentés dans la suite ne sont valables que si la variable aléatoire  $X$  qui est l'objet de notre mesure suit une loi de distribution normale! Cette situation est tout de même retrouvée expérimentalement la plupart du temps.

Pour chercher le meilleur estimateur, il est plus commode, et équivalent du point de vue mathématique puisque le logarithme est une fonction croissante, de chercher le maximum de  $\ln(\mathcal{L})$ , qu'on notera  $\mathcal{W}$  :

$$\mathcal{W} = \ln(\mathcal{L}) = -N \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\mu - x_i}{\sigma}\right)^2. \quad (10)$$

### 3.1.2 Estimateur de la moyenne

Pour déterminer l'estimateur de la moyenne  $\mu$ , nous calculons donc

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mu} = - \sum_{i=1}^N \frac{\mu - x_i}{\sigma^2}. \quad (11)$$

La condition  $\left. \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial \mu} \right|_{\mu=\mu^*} = 0$  se traduit par  $\sum_{i=1}^N \frac{\mu^* - x_i}{\sigma^2} = 0$ , ce qui permet d'obtenir finalement le meilleur estimateur  $\mu^*$  de  $\mu$  compte tenu des  $\{x_i\}$  obtenus :

$$\mu^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \bar{x} \quad (12)$$

Ainsi, le meilleur estimateur du paramètre  $\mu$ , à partir de la série de mesures  $\{x_i\}$  est

$$\mu^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \text{ moyenne arithmétique des } \{x_i\}.$$

Ce résultat, bien qu'utilisé intuitivement, pour tout jeu de données expérimentales, repose donc sur des arguments mathématiques, notamment celle de supposer une distribution gaussienne sous-jacente. Ce résultat n'est donc pas valable pour n'importe quelle distribution. Par exemple, pour une loi rectangle, on peut montrer que le meilleur estimateur  $\mu^*$  pour cette distribution est égal à la valeur médiane :  $[\max\{x_i\} - \min\{x_i\}]/2$ .

---

1. Voir section 2.2.

**Précision sur l'estimateur de la moyenne** Étant donné le nombre fini de mesures de l'échantillon, l'estimateur sera sujet à des fluctuations lors d'une nouvelle série de mesures  $\{x'_i\}$ , ces fluctuations étant déterminées par une distribution sous-jacente, avec une valeur moyenne et une variance. On souhaite donc déterminer l'espérance  $\mathbb{E}(\mu^*)$  de  $\mu^*$  et sa variance  $\mathbb{V}(\mu^*) = \sigma_{\mu^*}^2$  :

$$\mathbb{E}(\mu^*) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(x_i) = \frac{1}{N} N\mu = \mu, \quad (13)$$

$$\sigma_{\mu^*}^2 = \mathbb{V}(\mu^*) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \mathbb{V}(x_i) = \frac{1}{N^2} N\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N}, \quad (14)$$

où l'égalité représentée par le  $=$  est possible car les  $\{x_i\}$  sont considérés comme indépendants<sup>1</sup>.

Cela correspond à dire que la valeur moyenne d'un ensemble de  $N$  mesures tend à se stabiliser lorsque  $N$  augmente.

### 3.1.3 Estimateur de la variance

On réalise le même raisonnement que précédemment : à partir de la série de mesures  $\{x_i\}$ , quel est le meilleur estimateur  $\sigma^*$  de  $\sigma$  ? On calcule donc la dérivée du logarithme de la fonction de vraisemblance par rapport au paramètre  $\sigma$ , dans le cadre d'une distribution gaussienne sous-jacente :

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} = -\frac{N}{\sigma} + \sum_{i=1}^N \left[ \left( \frac{\mu - x_i}{\sigma} \right) \left( \frac{\mu - x_i}{\sigma} \right) \right] \quad (15)$$

La condition  $\left. \frac{\partial W}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma^*} = 0$  se traduit par  $N = \frac{1}{\sigma^{*2}} \sum_{i=1}^N (\mu - x_i)^2$  ce qui finalement se réécrit sous la forme :

$$\sigma^* = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\sum_{i=1}^N (\mu - x_i)^2} \quad (16)$$

Nous avons donc pu déterminer le meilleur estimateur de la variance de la distribution gaussienne sous-jacente à partir de la série de mesures  $\{x_i\}$ . Cependant, nous ne connaissons pas la valeur vraie  $\mu$  nécessaire pour la connaissance de  $\sigma^*$ . Il faut alors introduire la notion de **biais d'un estimateur**.

**Définition** : On appelle biais d'un estimateur  $\theta^*$  de  $\theta$ , le nombre  $\theta - \mathbb{E}(\theta^*)$ .

Concrètement, ce biais représente l'écart entre la valeur vraie du paramètre  $\theta$  qu'on souhaite déterminer et la valeur de l'espérance de la variable aléatoire<sup>2</sup>  $\theta^*$ . L'estimateur d'un paramètre est

---

1. En particulier, on peut utiliser la loi de combinaison linéaire pour deux variables indépendantes  $X$  et  $Y$  :  $\mathbb{V}(aX + bY) = a^2\mathbb{V}(X) + b^2\mathbb{V}(Y)$

2. C'est une variable aléatoire dont les valeurs possibles dépendent du tirage des  $\{x_i\}$ .

donc sans biais si son espérance correspond exactement à la valeur vraie du paramètre à déterminer. Pour la valeur moyenne  $\mu$  par exemple, nous avons bien  $\mu = \mathbb{E}(\mu^*)$  : l'estimateur  $\mu^*$  pour une loi normale est bien sans biais.

Dans le cas de la variance, au vu de l'expression (16), nous pourrions être tentés d'introduire

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2 \quad (17)$$

comme estimateur de  $\sigma$ , avec  $\bar{x}$  qui est, on le rappelle, la moyenne arithmétique des  $\{x_i\}$  et le meilleur estimateur  $\mu^*$  de la valeur moyenne  $\mu$  de la distribution normale sous-jacente.

Cependant, cet estimateur comporte un biais. En effet, il est possible de montrer que  $\mathbb{E}(S^2) = \frac{N-1}{N} \sigma^2$  (en annexe). Dans ce cadre, l'estimateur sans biais est alors défini comme :

$$s^2 = \frac{N}{N-1} S^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mu^* - x_i)^2 \quad (18)$$

La grandeur  $s$  est appelée **écart type d'échantillon** et est la meilleure estimation de l'écart type de la distribution normale sous-jacente au tirage des  $\{x_i\}$ . Notons également que l'introduction du facteur  $N-1$  est cohérente avec le fait qu'une seule mesure est insuffisante pour déterminer un écart type.

On a donc défini l'écart type de la mesure par :

$$s(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}. \quad (19)$$

Mais attention, cette moyenne  $\bar{x}$ , associée à un nombre fini d'échantillons, est elle-même une variable aléatoire, avec un écart type  $\sigma(\bar{x})$  qui quantifie la dispersion de la moyenne  $\bar{x}$  comme nous l'avons vu au paragraphe 3.1.2. **Finalement, l'incertitude type obtenue sur la mesure de la grandeur  $X$  est donnée par :**

$$\Delta x = \sigma(\bar{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\bar{x} - x_i)^2}. \quad (20)$$

On note donc que plus le nombre de mesures est grand, plus l'incertitude sur celle-ci est réduite. Mais attention, cet effet n'est qu'en  $\sqrt{N}$  ! Ce qui signifie qu'il faut augmenter significativement le nombre de mesures pour obtenir une amélioration notable. Et ceci n'est malheureusement pas possible car au détriment des modifications des conditions expérimentales (fluctuations de température, humidité,...)

**Précision sur l'estimateur de la variance** Nous devons également prendre conscience du fait que la valeur de l'écart type va fluctuer entre deux séries de mesures. De la même façon que pour l'estimateur de la moyenne, il va alors exister une erreur sur la détermination de la variance  $\sigma$  via l'évaluation de  $s$ . On peut montrer que cette erreur notée  $\sigma_s$  vaut

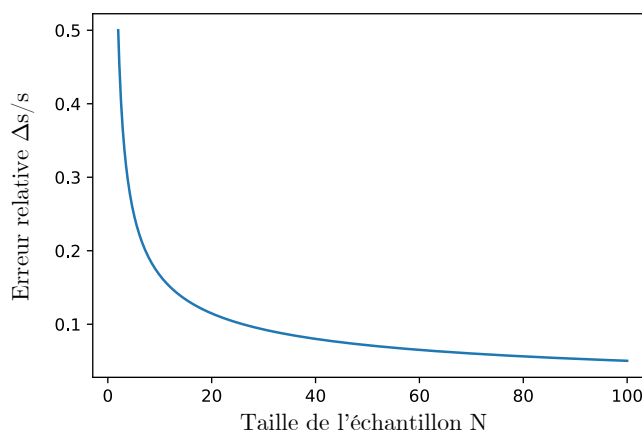
$$\mathbb{V}(s) = \sigma_s^2 = \frac{s^2}{2(N-1)}. \quad (21)$$

La démonstration de ce résultat est loin d'être triviale et le lecteur pourra en trouver une preuve dans la référence *Incertitudes et analyse des erreurs dans les mesures physiques* de J. Taylor, annexe E.

Ainsi, l'erreur relative sur la détermination de  $s$  correspond à

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{1}{2\sqrt{N-1}} \quad (22)$$

comme présenté sur la figure ci-contre. On s'aperçoit que pour un échantillon de petite taille, l'estimation de l'écart type se fait avec une erreur d'environ 25%. Cette valeur, non négligeable, doit être prise en compte. Au contraire, à partir d'un échantillon de 20 valeurs environ, l'erreur peut être considérée comme négligeable.



### 3.1.4 Cas d'un petit nombre de mesures : coefficient de Student

Comme nous venons de le voir, dans le cas d'un petit échantillon, l'évaluation de  $\mu$  et  $\sigma$  est plus incertaine. En effet, si, dans une série de mesures, un point est anormalement<sup>1</sup> éloigné des autres, son impact sur l'estimation de  $\mu$  et  $\sigma$  sera d'autant plus grand que l'échantillon est petit. En définissant un intervalle de confiance, la probabilité que la valeur vraie se trouve dedans est diminuée ! Il faut donc revoir la procédure.

Grâce aux travaux de W. S. Gosset (1908)<sup>2</sup>, on peut montrer qu'afin de prendre en compte le caractère réduit de l'échantillon, *le nouvel intervalle de confiance à définir est*

$$\left[ \bar{x} - t_{\alpha}^{N-1} \frac{s}{\sqrt{N}} ; \bar{x} + t_{\alpha}^{N-1} \frac{s}{\sqrt{N}} \right], \quad (23)$$

1. C'est-à-dire que son tirage est très peu probable pour la distribution sous-jacente.

2. Employé de la brasserie Guinness, il développa des tests statistiques pour l'entreprise qu'il publia sous le pseudonyme de Student.

où  $t_{\alpha}^{N-1}$  est le coefficient de Student à  $N - 1$  degrés de libertés,  $N$  étant le nombre de mesures et  $\alpha$  l'élargissement considéré.

$t_{\alpha}^{N-1}$  correspond finalement à un correctif au facteur d'élargissement  $k = 1 ; 2 ; 3$  qu'on aurait choisi si l'on avait souhaité un intervalle de confiance à  $\alpha = 68,3\% ; 95,5\% ; 99,7\%$  respectivement. Vous pourrez trouver dans la littérature les tableaux de coefficient de Student. Sur IGOR, la fonction *StudentT(Prob,DegFree)* donne ces valeurs.

**Exemple :** Un intervalle de confiance à  $\alpha = 95,5\%$  pour  $N = 10$  mesures. Si  $N$  avait été très grand, on aurait choisi un facteur d'élargissement de 2 pour un intervalle de confiance à  $2\sigma$ . Ici, on tape dans IGOR *print StudentT(0.954,9)* et on obtient 2,26. On définit ainsi un intervalle de confiance un peu plus élargi pour prendre en compte le petit nombre de mesures effectuées.

## 4 Cas d'une mesure unique<sup>1</sup>

Nous avons étudié le traitement statistique d'une série de mesures mais il est parfois nécessaire de se limiter à une seule mesure. En effet, une mesure unique peut être soit utilisée ensuite dans une analyse graphique (courbe expérimentale), soit dans un traitement statistique ou tout simplement toute seule (typiquement pour une mesure chronophage ou lorsque les conditions expérimentales sont modifiées). Dans le cas d'une mesure unique, l'incertitude est obtenue par un jugement *a priori*, en amont, de la distribution de probabilité pour la grandeur considérée. Ce jugement est réalisé par l'expérimentateur et doit être soumis à une analyse critique vis-à-vis des conditions expérimentales.

### 4.1 Supposition d'une distribution

Dans le cas d'une mesure unique, il n'est pas possible d'appliquer les raisonnements développés pour une série de mesures. Cette mesure suit une loi de probabilité sous-jacente mais cette fois-ci, il sera impossible d'estimer par une analyse statistique, comme nous l'avons fait précédemment, les paramètres de la loi. Il faut donc réaliser une supposition sur les caractéristiques de la loi de probabilité à partir des informations dont dispose l'expérimentateur.

Si l'on souhaite mesurer la grandeur  $X$ , deux éléments sont à évaluer :

⇒ une estimation raisonnable d'un encadrement de la valeur de la grandeur  $X$  : on suppose que les mesures de  $X$  tomberont "raisonnablement" entre  $x_{mesure} - d/2$  et  $x_{mesure} + d/2$ . Cette évaluation consiste à donner une largeur à la distribution sous-jacente. Gardons bien à l'esprit que si cette évaluation est approximative, elle s'appuie tout de même sur l'analyse critique de l'expérimentateur et permet d'obtenir une évaluation de l'incertitude.

⇒ la loi de distribution sous-jacente. Le choix de la loi est très dépendant de l'expérience. Cependant, l'expérimentateur peut s'appuyer sur certains éléments. Si l'instrument de mesure comprend une indication numérique de résolution  $d$  (dernier digit par exemple), la valeur  $x_{vraie}$  peut

---

1. En vocabulaire de métrologie, les incertitudes sur une mesure unique sont appelées *Incertitudes de type B*

se situer avec une probabilité égale partout sur l'intervalle  $[x_{mesure} - d/2; x_{mesure} + d/2]$ . Il s'agit alors d'utiliser une loi rectangulaire et l'incertitude type est alors  $u(x) = d/(2\sqrt{3})$ . Par ailleurs, si l'instrument de mesure est étalonné ou comporte une indication constructeur, il faut la suivre ! Plus généralement, si on ne dispose pas d'idée précise, on choisira une loi rectangulaire, maximisant l'incertitude.

## 4.2 Quelle incertitude type selon la loi ?

Nous allons présenter ici succinctement les incertitudes types pour quelques lois usuelles. L'écart type  $\sigma$  de ces distributions déterminera l'incertitude type qui devra ensuite être adjointe d'un facteur d'élargissement.

### — Loi rectangulaire (ou loi uniforme) sur un intervalle $[a; b]$ :

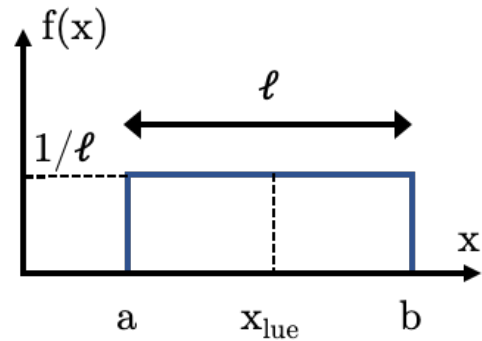
Cette loi de probabilité correspond aux situations pour lesquelles l'incertitude est maximale sur l'intervalle considéré. La valeur vraie a autant de chances d'être située aux extrémités qu'au niveau de la valeur lue/mesurée.

La fonction de densité de probabilité est

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ pour } x \in [a, b] \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

On peut alors déterminer l'espérance  $\mathbb{E}(X)$  et la variance  $\mathbb{V}(X)$  d'une telle distribution :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{b+a}{2} \text{ et } \sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}} = u(x)$$



**Démonstration :**

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2} \quad (24)$$

$$\mathbb{V}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right)^2 = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \left( \frac{b+a}{2} \right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (25)$$

$$\text{et donc } \sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \frac{b-a}{\sqrt{12}} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

### — Loi triangulaire sur un intervalle $[a; b]$ :

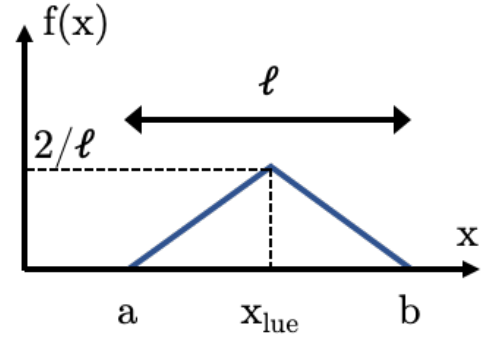
Cette loi de probabilité correspond aux situations pour lesquelles la valeur vraie a plus de chances d'être située au niveau de la valeur lue/mesurée. Elle réduit l'incertitude par rapport à la loi uniforme.

La fonction de densité de probabilité est

$$f(x) = \frac{4(x-a)}{(b-a)^2} \text{ pour } x \in [a, (a+b)/2]$$

$$f(x) = \frac{4(b-x)}{(b-a)^2} \text{ pour } x \in [(a+b)/2, b] \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{b+a}{2} \text{ et } \sigma = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \frac{b-a}{2\sqrt{6}} = u(x)$$



La démonstration, un peu calculatoire, développe les mêmes principes que celle pour la distribution rectangulaire.

#### — Loi normale :

Comme nous l'avons vu, la loi normale est la loi limite de la moyenne de variables aléatoires, lors d'observations répétées de manière indépendante.

Si la variable aléatoire  $X$  à mesurer suit une loi normale de moyenne  $\mu$  et d'écart type  $\sigma$ , on choisira donc l'incertitude type  $u(x) = \sigma$  comme discuté précédemment.

## 5 Ajustement d'une courbe expérimentale

Jusqu'à maintenant, nous avons étudié comment déterminer directement une grandeur à partir d'une série de mesures ou d'une mesure unique. Dans de nombreuses situations, le physicien expérimentateur est confronté à un problème différent : **mesurer une grandeur  $Y$  en fonction d'une autre grandeur  $X$  pour :**

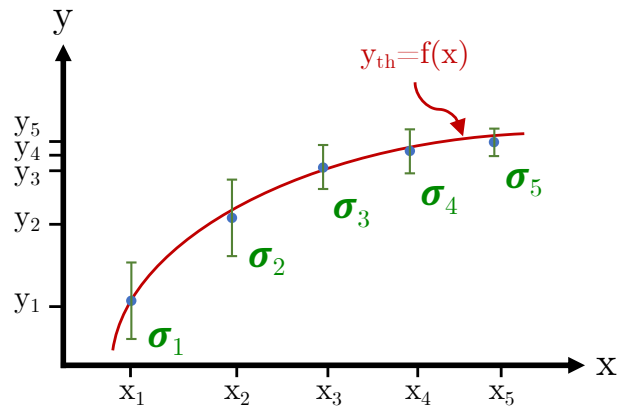
⇒ **établir une loi empirique**

⇒ **déterminer une grandeur inconnue à partir d'une loi connue**

⇒ **valider un modèle théorique**

### 5.1 Principe d'un ajustement

On suppose une loi théorique  $y_{th} = f(x)$  où  $f$  est définie par  $m$  paramètres  $\{\alpha_m\}$ . On relève alors pour  $N$  points  $\{x_1, \dots, x_N\}$  les  $N$  valeurs  $\{y_1, \dots, y_N\}$ . Le but de l'ajustement va être de trouver les meilleures estimations des paramètres de la loi à partir des données expérimentales, de façon similaire aux raisonnements développés pour une série de mesures.



On suppose, pour les mêmes raisons que celles précédemment évoquées, que chaque mesure  $y_i$  est tirée d'une distribution normale sous-jacente de moyenne la valeur vraie  $y_{th,i} = f(x_i)$  et d'écart type  $\sigma_i$ .

Ainsi, la distribution normale sous-jacente pour le point  $(x_i, y_i)$  s'écrit

$$\mathbb{P}(y_i, x_i, \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(y_i - y_{th,i})^2}{2\sigma_i^2}} \quad (26)$$

De la même façon que précédemment, on cherche à minimiser le logarithme de la fonction de vraisemblance soit

$$\mathcal{W} = -\sum_{i=1}^N \ln(\sigma_i \sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - y_{th,i})^2}{\sigma_i^2}. \quad (27)$$

Ainsi, les meilleurs estimateurs  $\{\alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*\}$  des paramètres  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  correspondent à ceux qui minimisent  $\mathcal{W}$  soit qui minimisent la quantité "chi-deux" :

$$\chi^2(\alpha_1^*, \dots, \alpha_m^*) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} (y_i - y_{th,i})^2 \quad (28)$$

Cette minimisation, qui porte le nom de méthode des moindres carrés, permet donc d'obtenir les meilleurs estimateurs des paramètres de la loi.

**Remarques :** • l'expression de  $\chi^2$  contient naturellement la logique de l'ajustement :

→ **minimisation** de la différence entre expérience et théorie.

→ **pondération** : les points les moins "sûrs", c'est-à-dire avec une grande incertitude (dont la loi normale sous-jacente est très large), sont moins pris en compte.

• Si les  $\{x_i\}$  sont également sujets à une incertitude, alors  $\sigma_i^2 = \sigma_{y_i}^2$  est remplacé par  $\sigma_{f(x_i)}^2 + \sigma_{y_i}^2$ .

## 5.2 Exemple dans le cas d'une fonction affine

On suppose une loi affine :  $y_{th,i} = ax_i + b$ . Par ailleurs, on suppose que l'incertitude sur chaque  $y_i$  est la même, c'est-à-dire que pour tout  $i$ ,  $\sigma_i = \sigma$ . La fonction  $\chi^2$  à minimiser s'écrit alors

$$\chi^2(a, b) = \sum_{i=1}^N (ax_i + b - y_i)^2 \quad (29)$$

La minimisation par rapport aux paramètres de la loi donne deux équations :

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial \chi^2}{\partial a} \right|_{a=a^*} = 0 \text{ soit } \sum_{i=1}^N 2x_i(a^*x_i + b^* - y_i) = 0, \\ \left. \frac{\partial \chi^2}{\partial b} \right|_{b=b^*} = 0 \text{ soit } \sum_{i=1}^N 2(a^*x_i + b^* - y_i) = 0, \end{cases} \quad (30a)$$

$$(30b)$$



ce qui donne

$$\begin{cases} a^* \sum_{i=1}^N x_i^2 + b^* \sum_{i=1}^N x_i = \sum_{i=1}^N x_i y_i, \end{cases} \quad (30c)$$

$$\begin{cases} a^* \sum_{i=1}^N x_i + b^* N = \sum_{i=1}^N y_i, \end{cases} \quad (30d)$$

ce qui finalement nous permet d'obtenir, en définissant les moyennes arithmétiques  $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$  et  $\bar{y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i$ , les meilleurs estimateurs des paramètres de la loi affine :

$$a^* = \frac{\sum_{i=1}^N x_i (y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N x_i (x_i - \bar{x})} \text{ et } b^* = \bar{y} - a^* \bar{x} \quad (31)$$

Le même raisonnement permet de trouver également les meilleurs estimateurs si les  $\sigma_i$  sont différents.

### 5.3 Incertitudes sur les paramètres de l'ajustement

On souhaite déterminer les incertitudes sur les paramètres  $a$  et  $b$ .

#### 5.3.1 Si les $\sigma_i$ ont été évalués

On effectue le changement de variable  $x' = x - \bar{x}$  et la loi s'écrit alors  $y = ax' + b'$  avec  $b' = b + a\bar{x}$ . On peut montrer que

$$\begin{cases} \sigma(a)^2 = \left( \sum_{i=1}^N \frac{x_i'^2}{\sigma_i^2} \right)^{-1}, \end{cases} \quad (32a)$$

$$\begin{cases} \sigma(b')^2 = \left( \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \right)^{-1}, \end{cases} \quad (32b)$$

Les incertitudes sur les paramètres  $a$  et  $b'$  sont alors décorréées. On peut obtenir alors l'incertitude sur  $b$ , avec cependant des corrélations entre les incertitudes :

$$\sigma(b)^2 = \sigma(b')^2 + \bar{x}^2 \sigma(a)^2 \quad (33)$$

#### 5.3.2 Si on ne connaît pas les $\sigma_i$

On souhaite estimer une erreur commune  $\sigma$  pour tous les points. On détermine cette incertitude par l'écart des points à la droite affine. On évalue ainsi

$$\sigma^2 = \frac{1}{N-2} \sum_{i=1}^N (a + bx_i - y_i)^2 \quad (34)$$

Il suffit ensuite d'utiliser cette formule dans le paragraphe précédent pour obtenir les expressions des incertitudes sur les paramètres. Cette façon de faire surévalue souvent l'incertitude.

Cette procédure est celle réalisée par tous les logiciels usuels de traitement de données. Les incertitudes type fournies par le logiciel représentent donc les grandeurs  $\sigma(a)$  et  $\sigma(b)$  calculées précédemment.

## 5.4 Ce n'est pas toujours aussi simple...

Il n'est pas toujours possible d'utiliser un ajustement linéaire qui convient...

### 5.4.1 Remarques sur les résidus - validation du modèle

Il est évident que le choix d'une fonction modèle pour expliquer l'évolution de  $y$  en fonction de  $x$  reste une interprétation de la situation expérimentale par l'opérateur.

Il peut parfois exister une évolution supplémentaire (par exemple en  $x^2$ , en  $\sin(x)$ , etc). Le physicien expérimentateur doit alors critiquer *a posteriori* la validité de l'interprétation par une évolution affine. Quelques outils se trouvent à sa disposition :

**Coefficient de corrélation** : La droite obtenue par la procédure d'ajustement des moindres carrés porte également le nom de "droite de régression". Il est possible de montrer que la qualité de cet ajustement, ou régression, c'est-à-dire le degré d'alignement des points correspondant aux observations, est caractérisé par le coefficient de corrélation d'expression :

$$r_{xy} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i y_i - \bar{x} \bar{y})}{\sqrt{(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i^2 - \bar{x}^2))(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i^2 - \bar{y}^2))}} \quad (35)$$

Des développements mathématiques permettent de montrer le lien entre ce coefficient de corrélation linéaire et la méthode d'ajustement des moindres carrés. Nous pourrions retenir ces quelques propriétés :

- le coefficient de corrélation  $r_{xy}$  est une quantité comprise entre  $-1$  et  $1$  ;
- usuellement présenté dans les logiciels de traitement de données, le carré du coefficient de corrélation,  $r^2$ , est compris entre  $0$  et  $1$  et caractérise le degré d'alignement des points ;
- un coefficient de corrélation égal à  $-1$  ou  $+1$  indique un alignement parfait, c'est-à-dire une corrélation parfaite entre les deux grandeurs, un coefficient de corrélation de  $0$  indiquant une absence totale de corrélation.
- le signe du coefficient de corrélation indique le signe de la pente de l'alignement.

#### **Les résidus :**

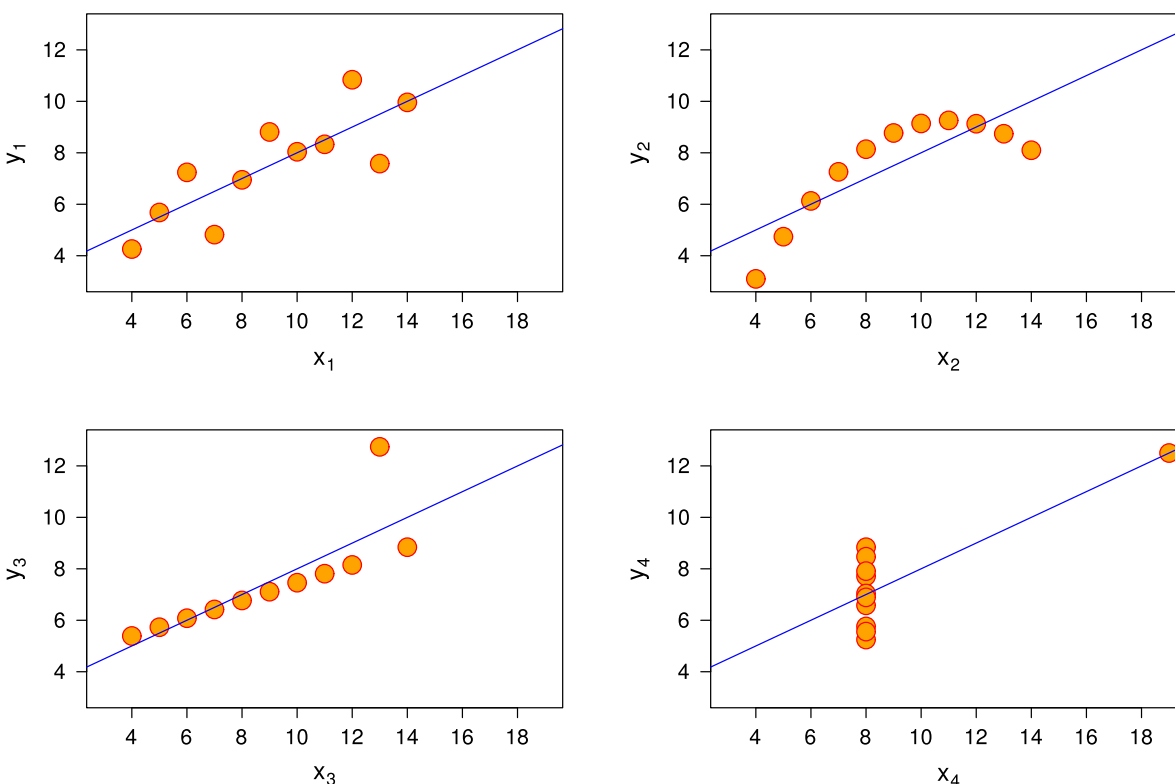
Une solution pour juger de la pertinence du modèle affine est d'évaluer les résidus. Ils correspondent au "reste", c'est-à-dire à la différence entre les points de mesure et l'ajustement :

$$r_i = y_i - ax_i + b \quad (36)$$

En traçant les résidus, l'expérimentateur peut s'apercevoir d'une évolution non prise en compte par l'ajustement affine.

**Remarque :** Le quartet d'Anscombe (Francis de son prénom)

Comme présenté sur la figure ci-contre (source Wikipédia), ce sont quatre ensembles de données différents présentant le même ajustement, accompagné de paramètres d'ajustement identiques, même  $\chi^2$ , même  $r^2$ . Pourtant, l'analyse des ajustements vis-à-vis des données doit pousser un physicien éclairé à remettre en cause le modèle dans certains cas, ou du moins réévaluer l'ajustement et les données. Tracer les résidus dans ce cas permet d'identifier des tendances sous-jacentes.



### 5.4.2 Autres fonctions

Nous avons traité ici de l'ajustement linéaire. Comment faire si la fonction n'est pas affine ?

**Deux solutions :**

→ on revient à un ajustement affine. Exemple : Loi modèle :  $y = Ae^{\lambda x}$ . On trace alors  $\ln(y) = \ln(A) + \lambda x$ .

→ On utilise tout de même l'ajustement avec des fonctions non linéaires. Les logiciels d'ajustement utilisent des algorithmes différents pour des fonctions linéaire. Nous n'aborderons pas ce point ici.

## 6 Des lois utiles

### 6.1 Composition des incertitudes types

Si pour une même grandeur, on évalue plusieurs sources d'incertitudes d'incertitudes types  $u_i(x)$  (ex : incertitude de mesure + incertitude constructeur), alors l'incertitude type totale est donnée par la somme des carrés des incertitudes types :

$$(u(x))^2 = \sum_k (u^k(x))^2. \quad (37)$$

Ce principe s'appuie sur la loi de composition des variances.

### 6.2 Propagation des incertitudes

Lors d'une démarche expérimentale, il est fréquent de devoir mesurer différents paramètres  $(a_1, a_2, \dots)$  afin de déterminer une grandeur  $x$ , *via* une loi mathématique reliant  $x$  et les paramètres  $(a_1, a_2, \dots)$  :  $x = f(a_1, a_2, \dots)$ . La mesure de chacun des  $a_i$  ayant conduit à l'évaluation d'une incertitude type  $u(a_i)$ , on cherche donc à connaître l'incertitude type  $u(x)$  que nous aurons sur la grandeur  $x$  à l'issue des mesures.

On pourra alors utiliser la **formule de propagation des incertitudes, valide uniquement si les incertitudes sur les paramètres  $a_i$  sont indépendantes et aléatoires** :

$$u(x) = \sqrt{\sum_i \left( \frac{\partial x}{\partial a_i} \right)^2 u(a_i)^2} \quad (38)$$

**Démonstration :** En annexe : Pour des raisons de pédagogie, nous supposons que  $x$  ne dépend que de deux paramètres à mesurer  $a_1$  et  $a_2$  :  $x = f(a_1, a_2)$ . Par ailleurs, cette démonstration s'appuie sur quelques éléments de statistique que le lecteur pourra trouver dans la bibliographie.

Un développement de Taylor, à l'ordre le plus bas, de la fonction  $f$  au voisinage des meilleurs estimateurs  $a_1^*$  et  $a_2^*$  des paramètres  $a_1$  et  $a_2$  obtenus grâce à la mesure, donne

$$x = f(a_1^*, a_2^*) + \left( \frac{\partial f}{\partial a_1}(a_1^*, a_2^*)(a_1 - a_1^*) + \frac{\partial f}{\partial a_2}(a_1^*, a_2^*)(a_2 - a_2^*) \right). \quad (39)$$

Par conséquent,

$$(x - f(a_1^*, a_2^*))^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial a_1}(a_1^*, a_2^*)(a_1 - a_1^*) + \frac{\partial f}{\partial a_2}(a_1^*, a_2^*)(a_2 - a_2^*) \right)^2. \quad (40)$$

On notera que l'incertitude est toujours majorée par la somme simple des incertitudes :

$$u(x) \leq \sum_i \left| \frac{\partial x}{\partial a_i} \right| u(a_i) \quad (41)$$

**Exemple :** la loi d'Ohm :  $R = U/I$

En mesurant  $U$  et  $I$  aux bornes d'une résistance, on peut remonter à la valeur  $R$ . L'incertitude sur cette valeur est alors liée aux incertitudes obtenues sur  $U$  et  $I$  selon :

$$(\Delta R)^2 = \left( \frac{\partial R}{\partial U} \right)^2 (\Delta U)^2 + \left( \frac{\partial R}{\partial I} \right)^2 (\Delta I)^2,$$

$$\text{soit } (\Delta R)^2 = \frac{(\Delta U)^2}{I^2} + \frac{U^2(\Delta I)^2}{I^4}$$

$$\text{et finalement } \left( \frac{\Delta R}{R} \right)^2 = \left( \frac{\Delta U}{U} \right)^2 + \left( \frac{\Delta I}{I} \right)^2$$

### 6.3 Les lois du physiciens

Ce paragraphe vise également à donner quelques clés supplémentaires.

#### 6.3.1 Chiffres significatifs

#### 6.3.2 Le bon sens

## 7 Boîte à outils

⚠ Cette boîte à outil ne saurait se substituer à une **ANALYSE CRITIQUE** de l'expérience et au **BON SENS** de l'expérimentateur, ce n'est pas une recette à appliquer les yeux fermés.

Par ailleurs, il n'est pas toujours judicieux d'explorer de façon complètement exhaustive toutes les sources d'incertitudes. En effet, un bon expérimentateur soumettra son expérience à une analyse préalable pour identifier les causes prépondérantes d'incertitude et négliger celles de faible impact, afin d'éviter une perte de temps non négligeable d'évaluation de nombreuses incertitudes, rajoutant par ce biais des calculs fastidieux eux-mêmes sources d'erreurs !

TOUJOURS présenter un résultat sous la forme  $X = (x \pm \Delta x) \text{ unité}$ . On ne donne **JAMAIS** un résultat d'une mesure sans incertitude. Sans celle-ci, cette mesure n'a aucun sens et ne vaut rien.

$\Delta x = ku(x)$  traduit l'intervalle de confiance, où  $u(x)$  est l'incertitude type et  $k$ , facteur d'élargissement, vaut usuellement 1,2 ou 3. Cela correspond alors respectivement à environ 68,3 %, 95,5%, 99,7% de probabilité que la vraie valeur se trouve dans l'intervalle  $[x - \Delta x ; x + \Delta x]$ .

### SÉRIE DE MESURES

$$\{x_1, \dots, x_N\}$$

- Estimation de la valeur vraie de  $X$  :

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

- écart type de la distribution des  $\{x_i\}$  :

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

- Incertitude type :  $u(x) = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$ .

$$\Rightarrow X = \left( \bar{x} \pm k \times \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \text{ unité}$$

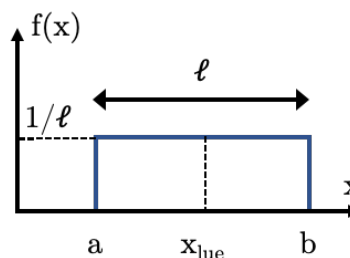
*Rq* : Si l'échantillon est petit (typiquement  $N \lesssim 20$ ), les  $\{x_i\}$  ne reflètent pas parfaitement la distribution sous-jacente. On utilisera alors un facteur d'élargissement égal au coefficient de Student correspondant  $t_{N-1}^\alpha$ , où  $\alpha$  correspond au niveau de confiance souhaité en %.

### UNE MESURE UNIQUE

$$x_{\text{lue}}$$

- Mesure de  $x_{\text{lue}}$
- Choisir une loi de probabilité (ou informations constructeur) : normale, rectangulaire, triangulaire,...
- Incertitude type  $u(x)$  selon la loi.

Sans indication spécifique, on choisira une loi rectangulaire de largeur  $\ell$  ( $u(x) = \ell/\sqrt{12}$ ) :



- Choix d'un facteur d'élargissement  $k$  pour l'intervalle de confiance :

$$\Rightarrow X = (x_{\text{lue}} \pm k \times u(x)) \text{ unité}$$

## AJUSTEMENT DE DONNÉES

$N$  points  $\{y_i\}$  en fonction de  $\{x_i\}$   
éventuellement sur chaque  $y_i$  une incertitude  $\sigma_{y_i}$

→ Obtenir  $a_{\text{optimisé}}$  et  $\Delta a$  du paramètre  $a$   
d'une fonction d'ajustement  $f$  :

- Choisir le modèle  $y = f(x)$ .
- Utiliser le logiciel pour minimiser  $\chi^2$  :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - f(x_i))^2}{\sigma_{y_i}^2}$$

- Obtenir du logiciel l'incertitude type  $u(a)$ .
- Choisir un facteur d'élargissement :

$$\Rightarrow a = (a_{\text{optimisé}} \pm k \times u(a)) \text{ unité}$$

Si  $N$  est petit, on choisira pour facteur d'élargissement le coefficient de Student  $t_{N-N_{\text{paramètres}}}^\alpha$ .

→ Évaluer la qualité d'un ajustement :

- Utiliser **en premier lieu** le bon sens de l'expérimentateur : y a-t-il une évolution sous-jacente qui n'a pas été prise en compte par l'ajustement ? On pourra tracer les résidus  $y_i - f(x_i)$  afin d'observer une éventuelle tendance.
  - Pour un ajustement **affine**, le coefficient de corrélation  $r$  peut être un support pour confirmer la bonne qualité de l'ajustement. En effet, il caractérise le degré d'alignement des points. Le coefficient de détermination  $r^2$  est souvent donné par les logiciels. Plus celui-ci se rapproche de 1, plus l'alignement avec une droite est bon.
- ⚠ Un  $r^2$  proche de 1 n'est pas un blanc-seing pour juger de la pertinence d'un ajustement !

## PROPAGATION DES ERREURS

$a_1, \dots, a_N$  grandeurs mesurées pour  
remonter à  $x = f(a_1, \dots, a_N)$

- Mesurer chacun des  $\{a_i\}$  et évaluer leurs incertitudes type  $\{u(a_i)\}$ .
- On obtient l'incertitude type sur  $x$  par la formule de propagation des erreurs :

$$u(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial a_i} \right)^2 u(a_i)^2}$$

- Choisir un facteur d'élargissement  $k$  pour l'intervalle de confiance :

$$\Rightarrow x = (f(a_1, \dots, a_N) \pm k \times u(x)) \text{ unité}$$

## COMPOSITION DES INCERTITUDES

S'il existe plusieurs sources d'incertitudes évaluées séparément  $\{u^k(x)\}$  pour la détermination de la grandeur  $x$ , il faut appliquer la loi de composition des variances.

Dans le cas où les causes d'erreurs ne sont pas corrélées, on a :

$$(u(x))^2 = \sum_k (u^k(x))^2$$

⚠ Il peut être judicieux d'évaluer *en amont* l'importance de chacune des sources d'erreurs afin d'identifier la source prépondérante et ainsi s'éviter des calculs fastidieux (et eux-mêmes sources d'erreurs!)