

Puissance électrique en régime sinusoïdal

Sommaire

1.1	Puissance reçue par un dipôle	2
1.1.1	Puissance instantanée et puissance moyenne	2
1.1.2	Valeur efficace	2
1.1.3	Cas usuel des dipôles	2
1.2	Puissance en régime sinusoïdal	2
1.2.1	Impédance complexe	2
1.2.2	Facteur de puissance	3
1.3	Optimisation d'une installation électrique	4
1.3.1	Rappels : représentation de Fresnel	4
1.3.2	Facteur de puissance d'une installation électrique	4
1.3.3	Optimisation du facteur de puissance	5

Questions de cours :

- Facteur de puissance : définition, calcul pour une installation simple.
- Pertes en ligne : définition et optimisation du facteur de puissance.

Capacités exigibles du BO :

- Définir le facteur de puissance, faire le lien avec la représentation des tensions et des courants sur un diagramme de Fresnel.
- Citer et exploiter la relation $P = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi$
- Citer et exploiter les relations $P = \Re(\underline{Z}) I_e^2 = \Re(\underline{Y}) U_e^2$. Justifier qu'un dipôle purement réactif n'absorbe aucune puissance en moyenne.

Avant de chercher à comprendre les enjeux de la conversion de puissance électrique, mécanique, magnétique, voyons comment on la calcule, en particulier dans le cas de circuits électriques.

I. Puissance reçue par un dipôle

I.1 Puissance instantanée et puissance moyenne

La puissance instantanée reçue par un dipôle en convention récepteur est définie par :

$$P(t) = u(t)i(t) \quad (1.1)$$

En régime périodique, c'est-à-dire lorsque courant et tension sont périodiques de période T , on peut alors calculer la valeur moyenne :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)i(t)dt \quad (1.2)$$

avec t_0 quelconque.

I.2 Valeur efficace

On rappelle la définition de la valeur efficace I_e d'un signal $i(t)$ périodique

$$I_e = \sqrt{\langle i^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i^2(t)dt} \quad (1.3)$$

* Si i est une intensité, le sens physique associé est que I_e est l'intensité du courant continu qui produirait le même effet Joule moyen qu'avec le signal $i(t)$ périodique :

$$RI_e^2 = \langle Ri^2(t) \rangle \quad (1.4)$$

Notons que cette grandeur n'est pas spécifique aux signaux sinusoïdaux, même si on rappelle que pour $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, la valeur efficace associée est :

$$I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (1.5)$$

I.3 Cas usuel des dipôles

Exercice

Justifier qu'un condensateur de capacité C ou une bobine d'inductance L consomment une puissance moyenne nulle, en régime périodique.

$$\langle P_c \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u i dt = \frac{C}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) \frac{du}{dt} dt = \frac{C}{T} \left[\frac{1}{2} u^2(t) \right]_{t_0}^{t_0+T} = 0 \quad (1.6)$$

car u est une fonction T -périodique. Il en est de même pour une bobine.

* Pour une résistance, la puissance moyenne est non nulle et vaut $\langle P_R \rangle = RI_e^2$.
Enfin notons qu'un interrupteur idéal ne consomme pas de puissance : soit il est fermé, la tension à ses bornes est nulle ; soit il est ouvert, et l'intensité le traversant est nul, donc la puissance reçue est toujours nulle.

II. Puissance en régime sinusoïdal

Dans toute la suite, on se place en régime sinusoïdal forcé, c'est-à-dire que les signaux sont tous sinusoïdaux de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$.

II.1 Impédance complexe

Rappelons qu'une impédance est définie en régime sinusoïdal forcé par

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \quad (1.7)$$

avec \underline{U} la tension complexe aux bornes du dipôle et \underline{I} l'intensité le traversant. On la décompose comme suit :

$$\underline{Z} = R + jX \quad (1.8)$$

avec R la partie réelle de \underline{Z} ou résistance du dipôle et X la partie imaginaire de \underline{Z} encore appelée **réactance du dipôle**. On peut aussi l'écrire $\underline{Z} = |\underline{Z}| e^{j\varphi}$ avec φ l'argument de \underline{Z} . Rappelons les caractéristiques usuelles des dipôles :

Dipôle	Impédance	Résistance	Réactance	φ
Résistance	R	R	0	0
Condensateur idéal	$\frac{1}{jC\omega}$	0	$-\frac{1}{C\omega}$	$-\frac{\pi}{2}$
Bobine idéale	$jL\omega$	0	$L\omega$	$\frac{\pi}{2}$

On définit également l'admittance \underline{Y} :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \quad (1.9)$$

II.2 Facteur de puissance

Soit un dipôle quelconque d'impédance complexe \underline{Z} . Exprimons la puissance moyenne consommée en régime sinusoïdal. On écrit pour cela la tension à ses bornes $u(t) = U_m \cos(\omega t) = U_e \sqrt{2} \cos(\omega t)$. Comme $\underline{u} = \underline{Z} \underline{i}$, l'intensité a pour forme $i(t) = I_e \sqrt{2} \cos(\omega t - \varphi)$, où φ est le déphasage de la tension par rapport au courant, et $I_e = \frac{U_e}{|\underline{Z}|}$.

La puissance moyenne consommée est alors :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} 2U_e I_e \cos(\omega t) \cos(\omega t - \varphi) dt \quad (1.10)$$

soit en développant :

$$\langle P \rangle = \frac{2U_e I_e}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{1}{2} (\cos(2\omega t - \varphi) + \cos(\varphi)) dt = U_e I_e \cos(\varphi) \quad (1.11)$$

Facteur de puissance

La puissance moyenne reçue par un dipôle en régime sinusoïdal est :

$$\langle P \rangle = U_e I_e \cos(\varphi) \quad (1.12)$$

où $\cos(\varphi)$ est appelé **facteur de puissance** du dipôle, avec φ le **déphasage de la tension par rapport au courant**.

On peut également faire intervenir l'impédance dans le calcul de la puissance moyenne :

- soit en fonction de l'intensité efficace, comme $U_e = |\underline{Z}| I_e$ et $\Re(\underline{Z}) = |\underline{Z}| \cos \varphi$:

$$\langle P \rangle = |\underline{Z}| I_e^2 \cos \varphi = \Re(\underline{Z}) I_e^2 \quad (1.13)$$

- soit en fonction de la tension efficace, comme $\underline{Y} = \frac{1}{|\underline{Z}|} e^{-j\varphi}$:

$$\langle P \rangle = |\underline{Z}| U_e^2 \frac{1}{|\underline{Z}|} \cos \varphi = \Re(\underline{Y}) U_e^2 \quad (1.14)$$

Dans le cas de dipôles purement réactifs (cas des condensateurs et bobines, par exemple), $\cos(\varphi) = 0$ et la puissance moyenne est nulle.

En utilisant les notations complexes, la puissance moyenne s'écrit simplement : $\underline{u}(t) = U_e \sqrt{2} e^{j\omega t}$, $\underline{i}(t) = I_e \sqrt{2} e^{j(\omega t - \varphi)}$. Ainsi :

$$\underline{u} \times \underline{i}^* = 2U_e I_e e^{j\varphi} = 2U_e I_e (\cos(\varphi) - j \sin(\varphi)) \quad (1.15)$$

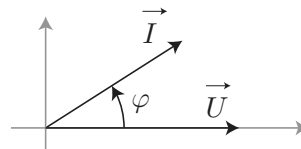
D'où $\langle P \rangle = \frac{1}{2} \Re(\underline{u} \underline{i}^*)$. (Attention néanmoins à ne pas manipuler de grandeurs complexes sans précautions pour des opérations non linéaires telles que les produits!).

III. Optimisation d'une installation électrique

III.1 Rappels : représentation de Fresnel

Afin de conduire des raisonnements graphiques, nous allons utiliser dans la suite la représentation vectorielle de Fresnel des nombres complexes. Elle est particulièrement utile lorsqu'on est amené à sommer différentes grandeurs complexes (tensions ou courants) car on somme des vecteurs.

* On associe aux tensions $u(t)$ et $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé des vecteurs \vec{U} et \vec{I} ayant pour norme les valeurs efficaces (ou les amplitudes). On choisit par convention de tracer horizontalement le vecteur \vec{U} (origine de la phase), et de représenter les autres vecteurs avec un angle dépendant du déphasage avec $u(t)$. L'exemple ci-contre est illustré avec $u(t) = U_e \sqrt{2} \cos(\omega t)$ et $i(t) = I_e \sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$.

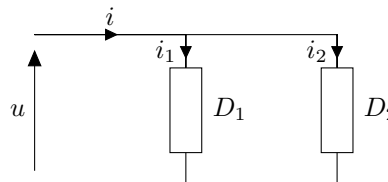


Notons que la projection de \vec{I} sur l'axe horizontal I_p nous donne accès facilement à la puissance moyenne $\langle P \rangle = U_e I_p$.

III.2 Facteur de puissance d'une installation électrique

a) Calcul d'un facteur de puissance

Considérons une installation électrique avec deux dipôles (D_1) et (D_2) branchés en parallèle à l'alimentation générale et consommant une puissance moyenne P_1 et P_2 . Leurs facteurs de puissance sont respectivement $\cos(\varphi_1)$ et $\cos(\varphi_2)$.

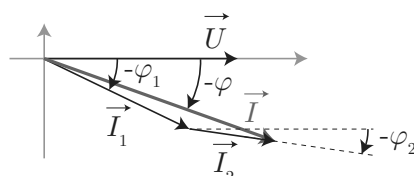


Pour calculer la puissance consommée par le circuit, il faut calculer I_{eff} et le facteur de puissance global de l'installation $\cos(\varphi)$.



Bien que la loi des nœuds s'applique ici, $i(t) = i_1(t) + i_2(t)$, on ne PEUT PAS écrire $I_e = I_{e,1} + I_{e,2}$ (sauf dans le cas particulier où les deux signaux sont en phase).

* On va recourir ici à la construction de Fresnel : à chaque intensité correspond un vecteur, et le courant total est la somme des deux vecteurs (loi des nœuds). On a choisi ici $\varphi_{1,2} > 0$, le courant est donc en retard sur la tension.



Graphiquement, on pourrait donc lire le facteur de puissance et l'intensité efficace totale. Avec

$$I_{e,1} = \frac{P_1}{U_e \cos(\varphi_1)} \quad \text{et} \quad I_{e,2} = \frac{P_2}{U_e \cos(\varphi_2)} \quad (1.16)$$

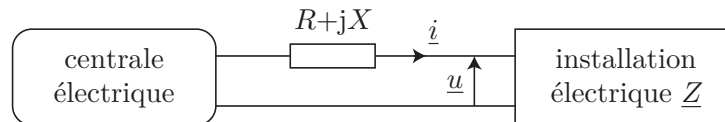
* l'intensité efficace totale est donc liée à la somme vectorielle de \vec{I}_1 et \vec{I}_2 :

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{(I_{e,1} \cos \varphi_1 + I_{e,2} \cos \varphi_2)^2 + (I_{e,1} \sin \varphi_1 + I_{e,2} \sin \varphi_2)^2} \quad (1.17)$$

et le facteur de puissance total vaut :

$$\cos(\varphi) = \frac{P_1 + P_2}{U_e I_e} \quad (1.18)$$

b) Pertes en lignes



Considérons le cheminement de l'électricité depuis une centrale électrique vers une installation électrique d'impédance \underline{Z} . On note $R + jX$ l'impédance de la ligne électrique. Effectuons un bilan de puissance :

- la centrale délivre une puissance moyenne P_g ;
- l'installation électrique consomme une puissance moyenne $P_u = U_e I_e \cos(\varphi)$;
- la ligne électrique consomme enfin une puissance moyenne $P_\ell = R I_e^2$: on parle de **pertes en ligne**.

Le rendement de l'installation s'écrit donc :

$$\eta = \frac{P_u}{P_g} = \frac{1}{1 + \frac{P_\ell}{P_u}} = \frac{1}{1 + \frac{R P_u}{U_e^2 \cos^2(\varphi)}} \quad (1.19)$$

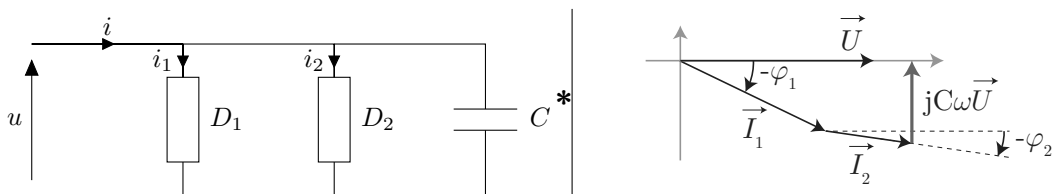
- * La tension d'alimentation est fixée ($U_e = 230 \text{ V}$ sur le réseau électrique français), à puissance fixée il faut augmenter le facteur de puissance $\cos(\varphi)$ pour augmenter le rendement. En particulier, on constate bien que plus le facteur de puissance est faible, plus le courant appelé sur le réseau électrique $I_e = \frac{P_u}{U_e \cos(\varphi)}$ est grand. EDF impose par exemple $\cos(\varphi) > 0,93$ pour limiter les pertes en lignes sur son réseau.

Cela explique également l'utilisation de très hautes tensions pour le transport de l'énergie électrique (et donc en bout de chaîne un transformateur pour abaisser la tension), car cela permet d'augmenter le rendement également !

III.3 Optimisation du facteur de puissance

La plupart des appareils électriques ont un comportement inductif, du fait de l'omniprésence des moteurs. Par conséquent, le facteur de puissance est tel que $\varphi > 0$. Une solution peut consister à rajouter un composant tel qu'on puisse ramener le vecteur \vec{I} total aligné avec \vec{U} (ainsi $i(t)$ est en phase avec $u(t)$ et le facteur de puissance vaut $\cos \varphi = 1$).

- * Il faut donc un dipôle purement réactif tel que le déphasage soit de $+\pi/2$ entre la tension et le courant. Or pour un condensateur, $\underline{i} = jC\omega \underline{u}$. Ainsi si on ajoute un condensateur en parallèle, cela peut régler effectivement le problème :



* Il faut donc que la capacité vérifie, par projection selon l'axe vertical :

$$C\omega U_e = I_{e,1} \sin \varphi_1 + I_{e,2} \sin \varphi_2 \quad (1.20)$$

Exercices

1. 1 Valeurs efficaces

Déterminer la valeur efficace des intensités suivantes :

1. Signal triangulaire symétrique d'amplitude I_m et de période T .
2. Signal rectangulaire entre $-I_m$ et I_m de période T et de rapport cyclique α ($i(t) = I_m$ pour $t \in [0, \alpha T]$, $i(t) = -I_m$ pour $t \in [\alpha T, T]$).
3. Signal rectangulaire entre 0 et I_m de rapport cyclique α ($i(t) = I_m$ pour $t \in [0, \alpha T]$, $i(t) = 0$ pour $t \in [\alpha T, T]$).

1. Calculons la valeur efficace en considérant qu'entre $t = 0$ et $t = T/2$, la fonction s'écrit $i(t) = -I_m + 4I_m \frac{t}{T}$. Étant donné la symétrie du signal, la valeur efficace est identique que l'on intègre entre 0 et T ou entre 0 et $T/2$:

$$I_e^2 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} \left(-I_m + 4I_m \frac{t}{T} \right)^2 dt = \frac{2I_m^2}{T} \left[\left(\frac{4t}{T} - 1 \right)^3 \frac{T}{4 \times 3} \right]_0^{T/2} = \frac{I_m^2}{3} \quad (1.21)$$

Donc $I_e = \frac{I_m}{\sqrt{3}}$.

2. Entre 0 et T , $i(t)^2 = I_m^2$, donc :

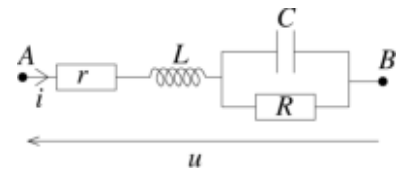
$$I_e^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 dt = I_m^2 \Rightarrow I_e = I_m \quad (1.22)$$

3. On calcule en appliquant la définition :

$$I_e^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^{\alpha T} I_m^2 dt = \alpha I_m^2 \Rightarrow I_e = \sqrt{\alpha} I_m \quad (1.23)$$

1. 2 Puissance consommée par un groupe de dipôles passifs

On considère le groupement de dipôles ci-contre, entre A et B , sous la tension $u(t)$ sinusoïdale et parcouru par un courant d'intensité $i(t)$. Exprimer la puissance moyenne consommée en fonction de r , R , C , ω et de l'intensité efficace I_e .



On utilise la formule démontrée dans le cours : $\mathcal{P} = \operatorname{Re}(Z) I_e^2$. Or l'impédance de l'ensemble vaut :

$$\underline{Z} = r + jL\omega + \frac{\frac{R}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = r + jL\omega \frac{R}{1 + jRC\omega} \quad (1.24)$$

donc la puissance moyenne vaut :

$$\mathcal{P} = \left(r + \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} \right) I_e^2 \quad (1.25)$$

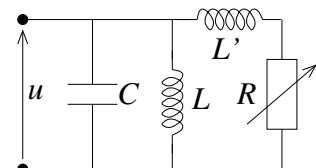
1. 3 Étude énergétique d'un circuit

Considérons le circuit ci-contre, alimenté par une tension sinusoïdale \underline{u} de fréquence f et de valeur efficace U . La résistance R est réglable. On note \mathcal{P} la puissance moyenne consommée par le circuit.

On constate que la puissance est maximale ($\mathcal{P} = \mathcal{P}_M$) pour $R = R_0$, et que pour $R = R_1 > R_0$, le facteur de puissance est égal à 1 et \mathcal{P} à \mathcal{P}_1 .

Données numériques : $U = 220 \text{ V}$, $f = 50 \text{ Hz}$, $L = 1,0 \text{ H}$, $R_0 = 12 \Omega$, $\mathcal{P}_1 = 800 \text{ W}$.

Calculer numériquement \mathcal{P}_M , L' , R_1 et C .



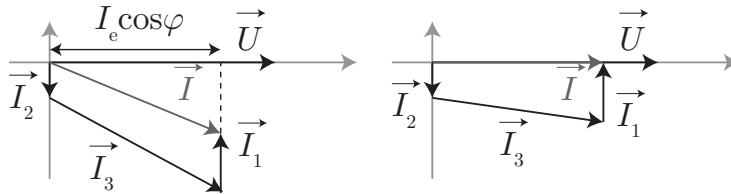
Utilisons un diagramme de Fresnel. On note \vec{I}_1 le courant traversant le condensateur, \vec{I}_2 la bobine d'inductance L et \vec{I}_3 l'association série. Comme ces dipôles sont en parallèle, leur somme donne l'intensité efficace délivrée par le générateur. Exprimons ces vecteurs dans un repère cartésien, avec \vec{U} selon $+\vec{e}_x$:

- $\underline{u} = \frac{1}{jC\omega} \underline{i_1}$ donc $\underline{i_1} = jC\omega \underline{u}$, d'où $\vec{I_1} = +C\omega \vec{e_y}$;
- $\underline{u} = jL\omega \underline{i_2}$ donc $\vec{I_2} = -\frac{1}{L\omega} \vec{e_y}$;
- $\underline{u} = (R + jL'\omega) \underline{i_3}$ donc :

$$\underline{i_3} = \frac{\underline{u}}{R + jL'\omega} = \underline{u} \left(\frac{R}{R^2 + (L'\omega)^2} - j \frac{L'\omega}{R^2 + (L'\omega)^2} \right) \quad (1.26)$$

$$\text{donc } \vec{I_3} = \frac{RU_e}{R^2 + (L'\omega)^2} \vec{e_x} - \frac{L'\omega}{R^2 + (L'\omega)^2} \vec{e_y}$$

L'allure ci-dessous est donnée dans un cas quelconque, et dans le cas d'un facteur de puissance égal à 1.



Traisons d'abord du cas de la puissance maximale. On la détermine en projetant le vecteur \vec{I} selon l'axe des abscisses, car alors

$$\mathcal{P} = U_e \frac{RU_e}{R^2 + (L'\omega)^2} = U_e^2 \frac{R}{R^2 + (L'\omega)^2} \quad (1.27)$$

On peut montrer que cette fonction est maximale lorsque $R = L'\omega = R_0$ donc

$$L' = \frac{R_0}{\omega} = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ H} . \text{ La puissance}$$

maximale vaut alors

$$\mathcal{P}_M = \frac{U_e^2}{2R_0} = 2,0 \text{ kW} .$$

Dans le cas où $R = R_1$, la puissance est connue et nous permet de déterminer R_1 :

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 = \frac{U_e^2 R_1}{R_1^2 + (L'\omega)^2} = \frac{U_e^2 R_1}{R_1^2 + R_0^2} \quad (1.28)$$

permettant d'aboutir au polynôme $R_1^2 - \frac{U_e^2}{\mathcal{P}_1} R_1 + R_0^2 = 0$ de solutions $R_1 = 2,5 \Omega$ ou $R_1 = 58 \Omega > R_0$.

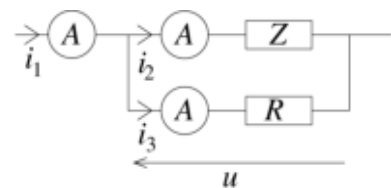
Enfin une projection selon l'axe vertical permet d'en déduire la valeur de la capacité :

$$C\omega = \frac{1}{L\omega} + \frac{L'\omega}{R_1^2 + (L'\omega)^2} \iff C = \frac{1}{L\omega^2} + \frac{R_0}{\omega(R_0^2 + R_1^2)} = 21 \mu\text{F} \quad (1.29)$$

1. 4 Méthode des trois ampèremètres

On peut déterminer le facteur de puissance d'un dipôle (Z quelconque) alimenté en régime sinusoïdal par le montage des trois ampèremètres utilisant une résistance étalon R (cf. figure).

Les ampèremètres donnent les trois intensités efficaces I_{1e} , I_{2e} et I_{3e} .



1. En utilisant la loi des nœuds, déterminer le facteur de puissance du dipôle d'impédance Z en fonction des trois intensités efficaces.
2. En déduire la puissance moyenne consommée par ce dipôle en fonction de R et des intensités efficaces.

1. Par un tracé vectoriel, $\vec{I_1} = \vec{I_2} + \vec{I_3}$ avec $\vec{I_3}$ horizontal dans une représentation de Fresnel. Il vient donc en norme :

$$I_{1e}^2 = (I_{2e} \cos(\varphi_2) + I_{3e})^2 + (I_{2e} \sin \varphi_2)^2 \iff I_{1e}^2 = I_{2e}^2 \cos(\varphi_2)^2 + I_{3e}^2 + 2I_{2e}I_{3e} \cos \varphi_2 + (I_{2e}^2(1 - \cos(\varphi_2)^2)) \quad (1.30)$$

soit après simplification :

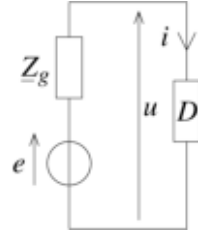
$$\cos \varphi_2 = \frac{I_{1e}^2 - I_{2e}^2 - I_{3e}^2}{2I_{2e}I_{3e}} \quad (1.31)$$

2. La puissance moyenne consommée par ce dipôle vaut alors :

$$\mathcal{P} = U_e I_{2e} \cos \varphi_2 = R I_{3e} I_{2e} \times \frac{I_{1e}^2 - I_{2e}^2 - I_{3e}^2}{2 I_{2e} I_{3e}} = \boxed{\frac{R}{2} (I_{1e}^2 - I_{2e}^2 - I_{3e}^2)} \quad (1.32)$$

1. 5 Adaptation d'impédance

On considère un dipôle D d'impédance $\underline{Z} = R + jX$ alimenté par un générateur de fem $e(t) = E \cos(\omega t)$ et d'impédance interne $\underline{Z}_g = R_g + jX_g$.



1. Calculer la puissance moyenne consommée par D .
2. Pour quel X cette puissance est-elle maximale (R étant considéré fixe) ?
3. Cette condition étant vérifiée, quel R rend la puissance maximale ? Quel est finalement l'expression de \underline{Z} en fonction de \underline{Z}_g rendant la puissance maximale ?

1. La puissance moyenne consommée se calcule via la formule du cours, en fonction du courant efficace :

$$\mathcal{P} = \Re(\underline{Z}) I_e^2 = R I_e^2 \quad (1.33)$$

Déterminons l'intensité du courant efficace :

$$\underline{e} = ((R + R_g) + j(X + X_g)) \underline{i} \quad (1.34)$$

conduisant à :

$$I_e = \frac{\frac{E}{\sqrt{2}}}{\sqrt{(R + R_g)^2 + (X + X_g)^2}} \quad (1.35)$$

Donc la puissance moyenne consommée en fonction des données de l'énoncé vaut :

$$\mathcal{P} = \frac{E^2}{2} \frac{R}{(R + R_g)^2 + (X + X_g)^2} \quad (1.36)$$

2. Si R est fixé, R_g et X_g aussi (lié au générateur), il faut choisir $X = -X_g$ pour avoir la puissance maximale (on minimise le dénominateur).
3. Cette condition étant vérifiée, il faut donc maximiser $\frac{R}{(R + R_g)^2}$. On trouve sans peine $R = R_g$ pour annuler la dérivée de $f(x) = \frac{x}{(x + R_g)^2}$, à savoir $f'(x) = \frac{(x + R_g)^2 - 2x(x + R_g)}{(x + R_g)^4}$. Ainsi $\underline{Z} = R_g - jX_g$ rend la puissance maximale, c'est-à-dire encore $\boxed{\underline{Z} = \underline{Z}_g^*}$

1. 6 Amélioration d'un facteur de puissance

Un moteur électrique est alimenté par un courant alternatif de fréquence 50 Hz sous une tension efficace $U_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$. Sa puissance est $P = 10 \text{ kW}$ et son facteur de puissance est $\cos \varphi = 0,7$.

Le moteur est modélisé par l'association en série d'une bobine d'inductance L et d'un résistor de résistance R .

1. Quelle est la valeur de l'intensité efficace parcourant le moteur ?
2. Déterminer la valeur de R à partir de la valeur du facteur de puissance.
3. Donner l'expression de l'impédance du moteur. En déduire l'expression de $\tan \varphi$ en fonction de R , L et ω , puis en déduire la valeur de l'inductance L .

On souhaite améliorer le facteur de puissance. Pour cela on place un condensateur de capacité C en parallèle avec le moteur. On note $\cos \varphi'$ le nouveau facteur de puissance.

4. Donner l'expression de l'admittance de l'ensemble et en déduire $\tan \varphi'$.
5. Quelle doit être la valeur de C pour que $\cos \varphi' = 0,9$?

$$1. I_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{P}}{U_{\text{eff}} \cos \varphi} = 64,9 \text{ A.}$$

2. À partir de la puissance $\mathcal{P} = RI_{\text{eff}}^2$:

$$RI_{\text{eff}}^2 = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi \iff R = \frac{U_{\text{eff}} \cos \varphi}{I_e} = \boxed{\frac{(U_{\text{eff}} \cos \varphi)^2}{\mathcal{P}} = 2,4 \, \Omega} \quad (1.37)$$

3. $\underline{Z} = R + jL\omega$ donc $\varphi = \arg(\underline{Z}) = \arg(R + jL\omega) = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$. Ainsi après calcul numérique $\varphi = 0,80 \text{ rad}$ et donc $L = \frac{R}{\omega} \tan \varphi = 7,8 \text{ mH}$.

4. L'admittance de l'ensemble, étant donné les éléments en parallèle, vaut :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = jC\omega + \frac{1}{R + jL\omega} \quad (1.38)$$

Or $\arg(\underline{Y}) = -\varphi' = \arg\left(\frac{R}{R^2 + L^2\omega^2} + j\left(C\omega - \frac{L\omega}{R^2 + L^2\omega^2}\right)\right)$, donc

$$\tan(\varphi') = \frac{L\omega}{R} - \frac{C\omega(R^2 + L^2\omega^2)}{R} \quad (1.39)$$

5. La capacité doit vérifier :

$$C = \frac{R}{\omega(R^2 + L^2\omega^2)} (\tan \varphi - \tan \varphi') = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ F} \quad (1.40)$$

Transformateur

Sommaire

2.1 Le transformateur idéal	2
2.1.1 Présentation	2
2.1.2 Lois de fonctionnement en régime alternatif	3
2.1.3 Transformateur réel	4
2.2 Applications d'un transformateur	6
2.2.1 Isolation galvanique	6
2.2.2 Transfert et adaptation d'impédance	6
2.2.3 Limitation des pertes en ligne	7

Questions de cours :

- Présenter le modèle du transformateur idéal et les lois en tension et en courant (en charge).
- Transformateur réel : pertes, rendement et notion de puissance nominale.
- Présenter le principe de l'isolation galvanique et un exemple d'application.
- Passage d'une impédance de charge au primaire d'un transformateur. Application (succincte) à l'adaptation d'impédance.
- Expliquer l'intérêt d'utiliser des transformateurs entre une centrale électrique et une installation électrique.

Capacités exigibles du BO :

- Citer les hypothèses du transformateur idéal.
- Établir les lois de transformation des tensions et des courants du transformateur idéal, en respectant l'algébrisation associée aux bornes homologues.
- Relier le transfert instantané et parfait de puissance à une absence de pertes et à un stockage nul de l'énergie électromagnétique.
- Citer les pertes cuivre, les pertes fer par courant de Foucault et par hystérésis. Décrire des solutions permettant de réduire ces pertes.
- Expliquer le rôle du transformateur pour l'isolement.
- Établir le transfert d'impédance entre le primaire et le secondaire.
- Expliquer l'intérêt du transport de l'énergie électrique à haute tension afin de réduire les pertes en ligne. Expliquer l'avantage d'un facteur de puissance élevé.
- Mettre en œuvre un transformateur et étudier son rendement sur charge résistive.

Nous avons présenté brièvement dans le chapitre précédent l'intérêt d'augmenter la tension pour transporter l'énergie électrique, afin de minimiser les pertes en ligne. Nous allons étudier plus en détail le transformateur, appareil transformant *via* des phénomènes d'induction un couple $(u(t), i(t))$ de tension et courant sinusoïdaux en un autre couple de tensions et courants sinusoïdaux de même fréquence, mais d'amplitudes différentes. On parle de **convertisseur statique**.

I. Le transformateur

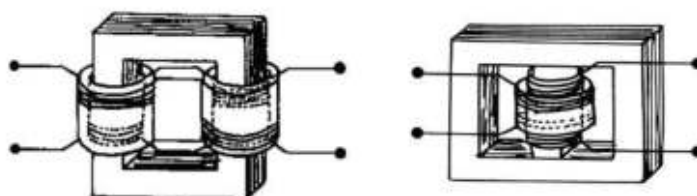
I.1 Présentation

a) Constitution

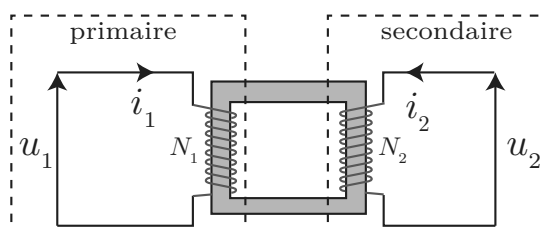
Un transformateur est constitué :

- d'un circuit magnétique (ferromagnétique doux de grande perméabilité) qui canalise le flux magnétique ;
- d'un enroulement primaire de N_1 spires recevant de l'énergie électrique en amont, appelé **circuit primaire** ;
- d'un enroulement secondaire de N_2 spires qui restitue une partie de l'énergie électrique reçue à un circuit aval appelé **circuit secondaire** ou **circuit de charge**.

Plusieurs configurations sont possibles, les deux plus courantes sont données ci-dessous. Dans le second cas, appelé circuit magnétique cuirassé, la colonne centrale porte l'ensemble des bobinages primaires et secondaires, et les colonnes latérales servent à fermer le circuit magnétique.

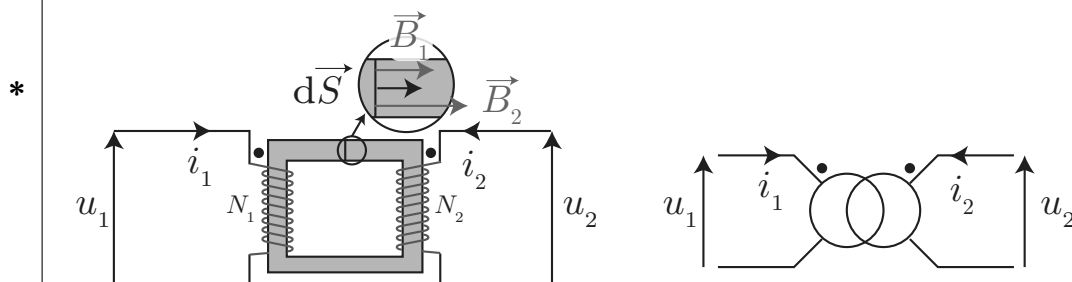


On schématise le transformateur de la manière suivante :



b) Conventions d'orientation

Sachant qu'on est amené à utiliser les lois de l'induction et le théorème d'Ampère, précisons les conventions d'orientation choisies dans toute la suite. Les points qui sont indiqués sur le schéma ci-dessous sont appelés les **bornes homologues** du transformateur. Ils sont tels que si des courants positifs arrivent sur ces bornes, ils créent un flux magnétique de même sens dans le circuit magnétique.



Les bornes homologues sont également précisées sur le symbole du transformateur, permettant de préciser les orientations sans avoir à dessiner le bobinage.

c) Principe de fonctionnement

- * Dans un transformateur, une tension u_1 alimentant le primaire produit un courant i_1 dans l'enroulement primaire qui donne naissance à un champ magnétique dans le circuit magnétique. Il y a donc à un flux magnétique canalisé par le circuit magnétique jusqu'au circuit secondaire où ce flux donne à son tour naissance à une fem induite u_2 dans le circuit secondaire. Si le circuit secondaire est fermé (sur un dipôle, pour ne pas court-circuiter le secondaire), un courant induit circule dans le secondaire, produisant à son tour un champ magnétique qui s'ajoute à celui dû à l'enroulement primaire, nous avons alors deux circuits couplés.

Les deux enroulements sont **isolés électriquement** mais magnétiquement couplés par le flux magnétique φ .

I.2 Lois de fonctionnement en régime alternatif

a) Modèle du transformateur idéal

Les très bons rendements de transfert de puissance électrique du circuit primaire au circuit secondaire par les transformateurs industriels nous permettent d'introduire le concept de transformateur idéal, basé sur les hypothèses suivantes :

- * le circuit magnétique est constitué d'un matériau ferromagnétique doux, utilisé en dehors de la zone de saturation : il se comporte donc de manière linéaire, avec une perméabilité relative élevée. Le modèle idéal inclut l'hypothèse $\mu_r \rightarrow +\infty$ de sorte à **négliger les pertes par hystérésis** ;
- * le circuit magnétique étant de grande perméabilité, on **néglige les fuites de flux de champ magnétique**. Les deux circuits primaires et secondaires sont parfaitement couplés d'un point de vue magnétique ($M^2 = L_1 L_2$) ;
- * on **néglige les pertes Joule dans les enroulements, les pertes par courant de Foucault** dans le matériau ferromagnétique.

b) Transformation des tensions

- * Calculons les fem d'induction dans les circuits primaires et secondaires, en respectant les conventions d'orientation.

$$e_1 = -u_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -N_1 \frac{d\varphi}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -u_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -N_2 \frac{d\varphi}{dt} \quad (2.1)$$

On note φ le flux du champ magnétique à travers une section droite du matériau ferromagnétique car le matériau canalise les lignes de champ, et donc le flux φ à travers une spire du primaire est le même à travers une spire du secondaire. On en tire la loi de transformation des tensions :

$e_i = -u_i$ ($i = 1, 2$) car la fem d'induction est placée dans le circuit dans le même sens que l'intensité du courant. Les tensions u_i sont donc fléchées dans le sens opposé.

Loi de transformation des tensions

Pour un transformateur possédant N_1 spires au primaire et N_2 spires au secondaire, le rapport des tensions vérifie :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2}{N_1} = m \quad (2.2)$$

où m est appelé **rapport de transformation** du transformateur. Suivant la valeur de m , le transformateur abaisse ou élève l'amplitude de la tension au secondaire.



Un transformateur s'utilise exclusivement en régime variable. Si le signal en entrée du transformateur présente une composante continue, le courant engendré dans le primaire peut être très important, du fait de la faible résistance du bobinage ! On place souvent un condensateur sur la branche d'entrée pour éliminer cette composante continue.

c) Transformation des courants en charge

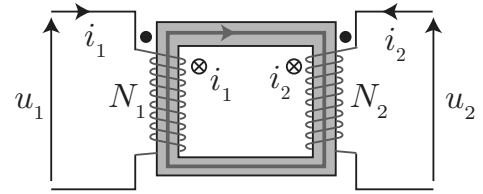


Manipulation

Anneau de fusion : transfo avec une spire au secondaire (coupelle en cuivre). Fort effet Joule, on peut y fondre de petits morceaux d'étain.

Lorsque le secondaire est branché sur un dipôle (encore appelé « charge »), on peut également relier l'intensité au secondaire à celle au primaire. On note ℓ la longueur moyenne du circuit magnétique, et S sa section. Appliquons le théorème d'Ampère sur une ligne de champ magnétique du circuit magnétique :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = H\ell = N_1 i_1 + N_2 i_2 \quad (2.3)$$



* Par ailleurs pour un transformateur idéal, $\mu_r \rightarrow +\infty$, donc $H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \rightarrow 0$. On aboutit à la loi de transformation des courant en charge :

Loi de transformation des courants en charge

Les intensités des courants dans les circuits primaire et secondaire d'un transformateur idéal fonctionnant en régime variable et **en charge** sont reliées au rapport de transformation m :

$$\frac{i_2}{i_1} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m} \quad (2.4)$$

d) Puissances

Ainsi, on constate que, de manière instantanée, on vérifie :

$$u_1(t)i_1(t) = -u_2(t)i_2(t) \iff p_1(t) = p_2(t) \quad (2.5)$$

où $p_1(t) = u_1(t)i_1(t)$ est la puissance reçue par le primaire, et $p_2(t) = -u_2(t)i_2(t)$ représente la puissance instantanée cédée par l'enroulement secondaire en aval de celui-ci, vers la charge. Cette équation traduit donc le fait que l'intégralité de l'énergie fournie au transformateur est cédée **instantanément** à la charge, soit encore que le transformateur idéal a un rendement de :

$$\eta = \frac{\langle p_2(t) \rangle}{\langle p_1(t) \rangle} = 1 \quad (2.6)$$

C'est logique, on a exclu les pertes de la modélisation, et le circuit magnétique ne stocke pas d'énergie.

1.3 Transformateur réel

a) Pertes d'un transformateur

Dans un modèle plus réaliste du transformateur, rappelons les pertes à prendre en compte :

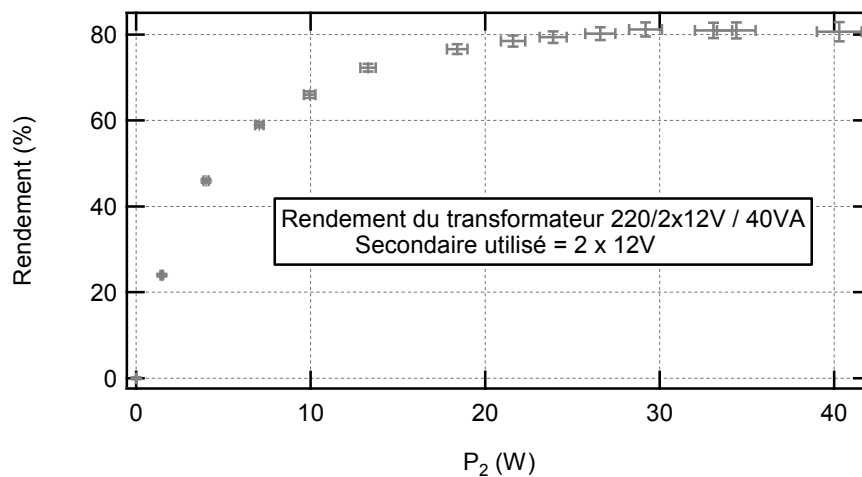
- les pertes cuivre, correspondant à l'ensemble des pertes dans les fils de cuivre du fait de l'effet Joule ;
- les pertes fer, avec deux contributions :
 - les pertes par hystérésis, proportionnelles à l'aire du cycle d'hystérésis et à la fréquence d'utilisation ; elles sont réduites en utilisant un milieu doux, possédant un cycle étroit ;
 - les pertes par courants de Foucault, proportionnelles à la conductivité du milieu ferromagnétique et à f^2 ; on les réduit en feuilletant le circuit magnétique (tôles de 0,2 à 0,3 mm) ;

Actuellement on sait produire des transformateurs ayant un rendement compris entre 95% et 99% (pour les plus grosses machines).

b) Caractéristiques expérimentales

Mesurons le rendement $\eta_m = \frac{P_2}{P_1}$ (fonction des puissances moyennes) d'un transformateur portant l'indication 40 V·A en charge, en fonction de la puissance au secondaire :

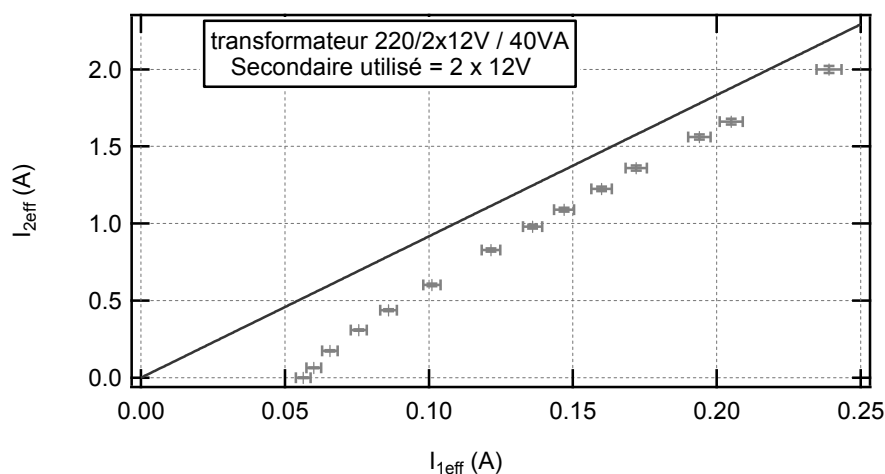
Notons que dans le cas d'un LHI de perméabilité finie, le rendement reste de 1, mais l'égalité de puissance n'est vraie qu'en moyenne, car le circuit magnétique stocke constamment de l'énergie, puis la restitue intégralement de manière périodique.



* On constate que le rendement tend vers une valeur supérieure à 80%, ce qui est tolérable compte tenu des puissances mises en jeu (il s'agit d'un petit transformateur, et non celui d'un poste de transformation EDF). L'indication 40 V·A correspond en fait à la **puissance nominale** (40 W), c'est-à-dire la puissance sous laquelle le transformateur doit normalement fonctionner, et où le rendement est censé être le meilleur.

On observe que pour de faibles puissances de fonctionnement, le rendement est vraiment mauvais : à tension donnée, les pertes fer restent les mêmes quelle que soit la puissance transférée à la charge.

On peut également mesurer le courant efficace au secondaire en fonction de celui au primaire, le résultat n'est pas vraiment conforme à ce que prédit la théorie ($|i_2| = 1/m i_1$) :



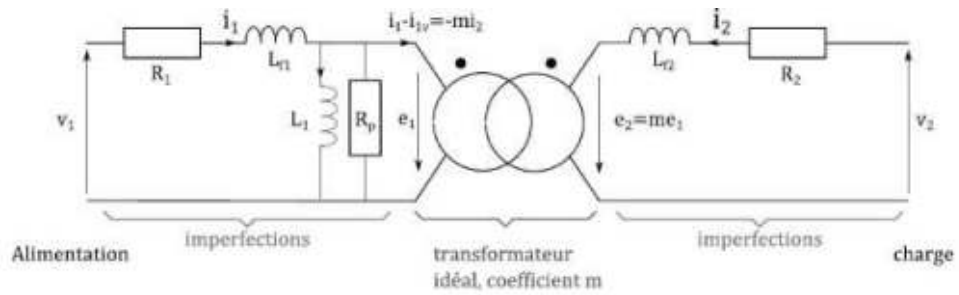
Cela peut s'expliquer par les défauts du circuit magnétique (milieu de perméabilité non infinie). En effet, si on revient à l'application du théorème d'Ampère, mais où l'on considère un MLHI :

*
$$H\ell = N_1 i_1 + N_2 i_2 = \frac{B\ell}{\mu_0 \mu_r} \iff i_2 = -\frac{1}{m} (i_1 - i_{1,v}) \quad (2.7)$$

en posant $i_{1,v} = \frac{B\ell}{N_1 \mu_0 \mu_r}$ le courant à vide (encore appelé courant magnétisant). C'est le courant nécessaire à la magnétisation du matériau ferromagnétique. On aboutit à une caractéristique affine, qui semble mieux correspondre aux mesures expérimentales.

c) Modélisation d'un transformateur réel (HP)

Pour modéliser les défauts d'un transformateur, on peut utiliser le circuit suivant, comprenant un transformateur parfait, des résistances R_1 et R_2 prenant en compte les pertes cuivre, l'inductance L_1 prenant en compte la magnétisation du matériau ferromagnétique, et les inductances $L_{f,1}$ et $L_{f,2}$ les fuites de lignes de champ magnétique :

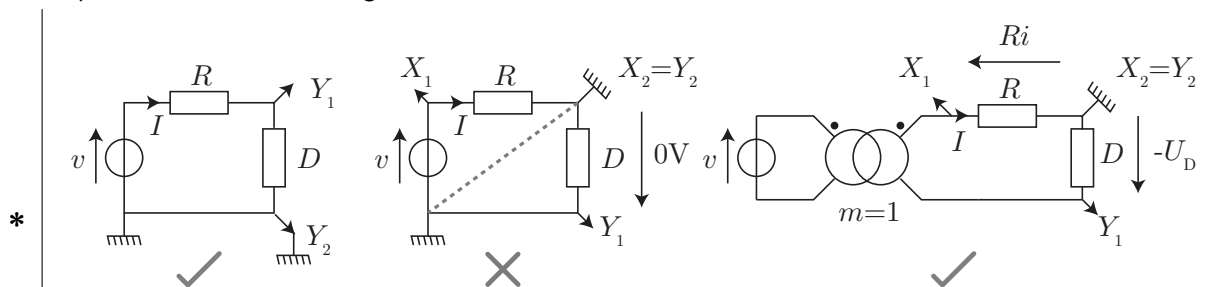


Néanmoins ce modèle est lourd, et ne se justifie que lorsqu'on veut étudier des effets fins d'un transformateur.

II. Applications d'un transformateur

II.1 Isolation galvanique

Outre abaisser ou élever la tension au secondaire, un transformateur peut aussi être conçu de sorte que $m = 1$. L'intérêt est d'obtenir une tension identique au secondaire qu'au primaire, tout en n'ayant aucun contact électrique : cela permet de séparer les masses dans un circuit. Une application concrète est la mesure d'une caractéristique de dipôle : on souhaite mesurer à la fois la tension aux bornes du dipôle, et l'intensité du courant le traversant via la tension d'une résistance en série. Avec un oscilloscope, la difficulté est que le générateur impose une masse, et donc on ne peut mesurer que la tension aux bornes du dipôle dont une borne est également à la masse :

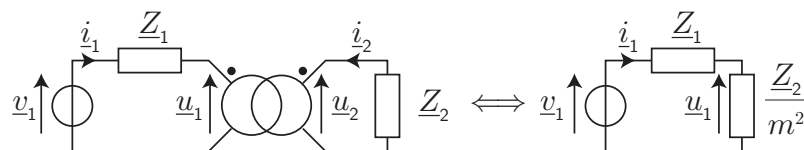


En intercalant le transformateur, on peut venir placer la masse entre les deux composants, les deux voies de l'oscilloscope récupèrent donc les deux tensions souhaitées, et un affichage $X - Y$ permet d'obtenir la caractéristique, en inversant la voie Y .

On peut également utiliser, sur le premier schéma électrique, une **sonde différentielle** branchée aux bornes de la résistance : cette dernière permet de mesurer la tension aux bornes de R sans imposer de masse, comme le ferait un voltmètre.

II.2 Transfert et adaptation d'impédance

Montrons que l'association transformateur + dipôle est équivalente à un dipôle :



Démonstration

D'après les lois de transformations et de la loi d'Ohm : $\underline{u}_2 = m\underline{u}_1 = -\underline{Z}_2 \underline{i}_2$ donc :

$$\underline{u}_1 = -\frac{\underline{Z}_2}{m} \underline{i}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{m^2} \underline{i}_1 \quad (2.8)$$

D'où l'impédance équivalente ramenée au primaire :

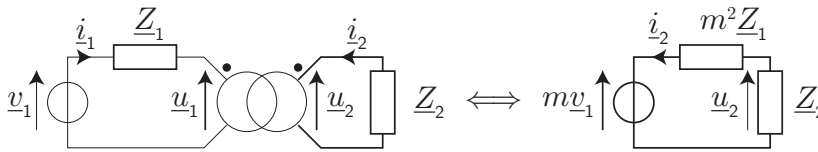
$$\underline{Z}_{\text{prim}} = \frac{\underline{Z}_2}{m^2} \quad (2.9)$$

On peut ainsi modifier l'impédance perçue par un générateur, ce qui peut être utile pour l'**adaptation d'impédance** (cf. exercice CP1.5). On peut maximiser la puissance reçue par \underline{Z} de la part du générateur d'impédance de sortie \underline{Z}_g . Avec \underline{Z} fixé, il peut être possible de s'arranger pour obtenir $\underline{Z}_{\text{prim}} = \underline{Z}_g^*$.

On n'a qu'un degré de liberté avec m : pour effectuer une adaptation d'impédance complexe, il faudra rajouter d'autres composants passifs (inductances et capacités). Néanmoins l'adaptation ne fonctionne généralement que pour une gamme limitée en fréquence.

Exercice

Montrer que l'on peut ramener le primaire comportant la fém \underline{v}_1 et un dipôle d'impédance \underline{Z}_1 au secondaire en précisant la fém et l'impédance équivalente au secondaire.



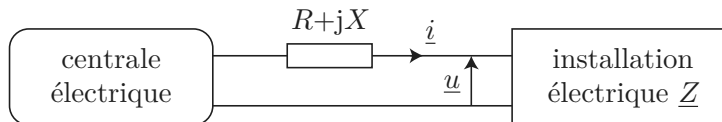
La loi des mailles au primaire s'écrit : $\underline{v}_1 = \underline{Z}_1 \underline{i}_1 + \underline{u}_1$. En injectant les relations du transformateur idéal $\underline{u}_1 = \frac{\underline{u}_2}{m}$ et $\underline{i}_1 = -m \underline{i}_2$:

$$\underline{v}_1 = -\underline{Z}_1 m \underline{i}_2 + \frac{\underline{u}_2}{m} \iff \underline{u}_2 = m \underline{v}_1 + \underline{Z}_1 m^2 \underline{i}_2 \quad (2.10)$$

On a donc de manière équivalente au secondaire un générateur de fém $m \underline{v}_1$ et d'impédance $m^2 \underline{Z}_1$.

11.3 Limitation des pertes en ligne

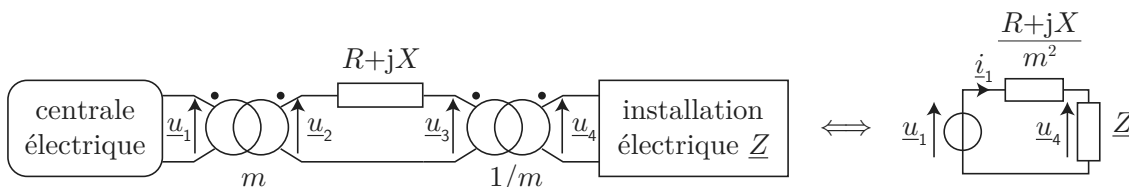
Une application fondamentale du transformateur est la réduction des pertes par effet Joule par un transformateur.



On avait vu dans le chapitre précédent que le rendement d'une installation partant de la centrale électrique vers une installation électrique s'écrit :

$$\eta = \frac{P_u}{P_g} = \frac{1}{1 + \frac{P_\ell}{P_u}} = \frac{1}{1 + \frac{R P_u}{U_e^2 \cos^2(\varphi)}} \quad (2.11)$$

Ainsi, outre la modification du facteur de puissance, il est judicieux d'augmenter grandement U_e : on intercale alors deux transformateurs, l'un entre la centrale et la ligne, l'autre entre la ligne et l'installation électrique.



On peut d'ailleurs appliquer les résultats précédents sur le transfert d'impédance au primaire ou au secondaire. En effet, l'usage de transformateurs diminue grandement l'impédance de la ligne. Si on s'intéresse au second transformateur et que l'on regarde du côté du secondaire, le circuit électrique équivalent fait intervenir un générateur de fém $m\underline{u}_1 \times \frac{1}{m} = \underline{u}_1$ et une impédance de ligne équivalente $(R + jX) \times \frac{1}{m^2}$ considérablement réduite par rapport à l'absence de transformateur.

Exercices

2.1 Détermination des caractéristiques d'un transformateur

On veut construire un transformateur de puissance apparente $1,5 \text{ kV}\cdot\text{A}$ qui, alimenté sous 380 V , 50 Hz ait, en régime nominal, une tension secondaire de 24 V sur charge résistive. Les valeurs fournies sont les valeurs efficaces.

On dispose d'un circuit magnétique torique de section $S = 25 \text{ cm}^2$ et de longueur moyenne $L = 60 \text{ cm}$ présentant une perméabilité magnétique relative pratiquement constante et égale à $\mu_r = 3180$ pour un champ magnétique variant entre 0 et 1 T . On désire faire travailler ce circuit avec un champ magnétique maximal en régime nominal de $0,9 \text{ T}$.

Enfin, on impose une chute de tension relative au secondaire (entre le fonctionnement nominal et le fonctionnement à vide) de 4% .

1. Calculer l'intensité efficace I_2 du courant secondaire nominal.
2. Déterminer la tension secondaire à vide U_{2v} .
3. Déterminer le rapport des nombres de spires : $m = n_2/n_1$
4. Quels doivent être les nombres de spires à donner au primaire n_1 et au secondaire n_2 ?
5. Quelle sera l'intensité efficace du courant au primaire lorsque le secondaire est à vide ??

-
1. Le transformateur délivre une tension secondaire de 24 V en régime nominal sur charge résistive (facteur de puissance = 1), avec une puissance de $1,5 \text{ kW}$, soit donc $I_2 = P/U_2 = 62,5 \text{ A}$.
 2. On a une chute de tension de 4% entre le fonctionnement à vide et nominal, dû à la résistance du bobinage, soit $U_{2,v} = 1,04 \cdot U_{2,\text{Nominal}} = 25 \text{ V}$.
 3. Le rapport du nombre de spires est le rapport des fem induites soit $m = n_2/n_1 = e_2/e_1 = U_{2v}/U_1 = 6,58 \cdot 10^{-2}$.
 4. En régime nominal, $B_{\text{max}} = 0,9 \text{ T}$. On calcule donc la fem induite au primaire, en considérant B uniforme sur la section droite :

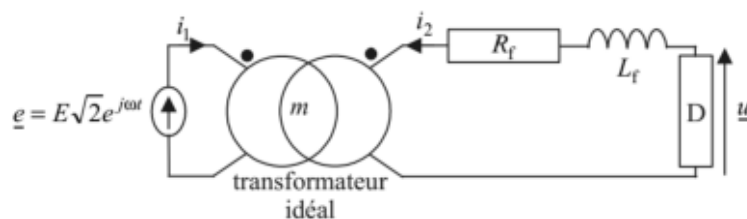
$$U_1 = \sqrt{2} U_{1,\text{eff}} = n_1 S (2\pi f) B_{\text{max}} \iff n_1 = \frac{\sqrt{2} U_{1,\text{eff}}}{2\pi f S B_{\text{max}}} = 1900 \text{ tours} \implies n_2 = 125 \text{ tours} \quad (2.12)$$

5. On applique le théorème d'Ampère pour le fonctionnement à vide, seul le primaire est parcouru par un courant (le courant magnétisant) :

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{r} = n_1 i_{1,v} \iff H\ell = \frac{B\ell}{\mu_0 \mu_r} = n_1 i_{1,v} \iff i_{1,v} = \frac{B_{\text{max}} \ell}{n_1 \mu_0 \mu_r \sqrt{2}} = 26 \mu\text{A} \quad (2.13)$$

Ce courant, appelé courant magnétisant, est heureusement relativement faible devant les courants généralement utilisés pour alimenter le primaire.

2.2 Rendement d'un transformateur réel



On considère le transformateur ci-dessus. Les pertes "fer" sont négligées. La résistance de pertes "cuivre" R_f et l'inductance de fuite L_f sont ramenées au secondaire. Une source idéale de tension de pulsation ω est connectée au primaire, un dipôle linéaire D constitue la charge du secondaire.

1. D est un conducteur ohmique de résistance R . Déterminer la tension \underline{u} à ses bornes et sa valeur efficace $U(\omega)$.
2. Définir et calculer le rendement ρ en puissance du dispositif. Commenter son expression.

-
1. La tension au secondaire, sachant qu'on a un transformateur idéal, est $\underline{e}_2 = m E \sqrt{2} e^{j\omega t}$, tandis que $\underline{i}_2 = -\frac{1}{m} \underline{i}_1$. Par un pont diviseur de tension, avec $D = R$:

$$\underline{u} = \frac{R}{R + R_f + jL_f\omega} \underline{e}_2 \quad (2.14)$$

et sa valeur efficace vaut :

$$U(\omega) = \frac{R}{\sqrt{(R + R_f)^2 + (L_f \omega)^2}} mE \quad (2.15)$$

2. Le rendement en puissance du dispositif s'écrit :

$$\rho = \frac{\langle P \rangle_D}{\langle P \rangle_{\text{primaire}}} \quad (2.16)$$

Notons I_2 la valeur efficace du courant au secondaire. Comme le transformateur est idéal, la puissance fournie par le primaire correspond à la puissance cédée aux trois composants du secondaire. Soit en moyenne :

$$\langle P \rangle_{\text{secondaire}} = \langle P \rangle_{R_f} + \langle P \rangle_{L_f} + \langle P \rangle_R = RI_2^2 + R_f I_2^2 \quad (2.17)$$

car la bobine ne dissipe pas d'énergie en moyenne. D'où :

$$\rho = \frac{RI_2^2}{(R + R_f)I_2^2} = \frac{R}{R + R_f} \quad (2.18)$$

2.3 Facteur de puissance apparent d'un transformateur

Le primaire d'un transformateur est alimenté sous 220 V, 50 Hz. La section droite de son circuit magnétique est de 10 cm^2 et le champ magnétique maximal qui y règne est de 1 T. Le rapport m de transformation est de 0,06.

1. Calculer le nombre de spires de chaque enroulement.
2. Le circuit magnétique du transformateur est modélisé par un milieu linéaire de perméabilité relative $\mu_r = 5000$. Sa longueur moyenne est $\ell = 60 \text{ cm}$. Le secondaire est relié à une résistance $R = 5 \Omega$. Calculer les courants au primaire et au secondaire du transformateur.
3. En déduire alors sa puissance apparente et son $\cos \varphi$ apparent (une grandeur apparente est la valeur de cette grandeur mesurée au primaire du transformateur en charge).

1. On utilise la loi de Faraday pour relier la tension appliquée au primaire \underline{u}_1 au champ magnétique :

$$\underline{u}_1 = -\underline{e}_1 = n_1 S j \omega B \iff u_{1,\text{eff}} \sqrt{2} = n_1 S 2 \pi f B \iff n_1 = \frac{u_{1,\text{eff}} \sqrt{2}}{2 \pi f S B} = 990 \text{ tours} \quad (2.19)$$

2. En appliquant le théorème d'Ampère sur une ligne de champ moyenne du transformateur :

$$\underline{H} \ell = n_1 \underline{i}_1 + n_2 \underline{i}_2 = \frac{B \ell}{\mu_0 \mu_r} \quad (2.20)$$

En se servant de $\underline{i}_2 = -\frac{\underline{u}_2}{R} = -\frac{m \underline{u}_1}{R}$ et $\underline{u}_1 = n_1 S j \omega B$:

$$\frac{\ell}{n_1 S j \omega \mu_0 \mu_r} \underline{u}_1 = n_1 \underline{i}_1 - \frac{n_2 m}{R} \underline{u}_1 \quad (2.21)$$

On peut donc isoler \underline{i}_1 :

$$\underline{i}_1 = \left(\frac{\ell}{n_1^2 S j \omega \mu_0 \mu_r} + \frac{m^2}{R} \right) \underline{u}_1 \quad (2.22)$$

On note que \underline{i}_1 est bien déphasé par rapport à la tension \underline{u}_1 . Puis, sa valeur efficace vaut :

$$i_{1,\text{eff}} = \sqrt{\left(\frac{\ell}{\mu_0 \mu_r n_1^2 \omega S} \right)^2 + \left(\frac{m^2}{R} \right)^2} u_{1,\text{eff}} = 0,172 \text{ A} \quad (2.23)$$

et d'autre part $i_{2,\text{eff}} = \frac{m u_{1,\text{eff}}}{R} = 2,64 \text{ A}$.

3. Le plus court pour calculer la puissance apparente est d'utiliser la partie réelle de $\underline{u}_1 \underline{i}_1^*$:

$$\mathcal{P} = \Re \left(\frac{1}{2} \underline{u}_1 \underline{i}_1^* \right) = \frac{1}{2} \Re \left(\underline{u}_1 \left(+j \frac{\ell}{n_1^2 S \omega \mu_0 \mu_r} + \frac{m^2}{R} \right) \underline{u}_1^* \right) = \frac{m^2}{R} u_{1,\text{eff}}^2 = 34,8 \text{ W} \quad (2.24)$$

D'où le facteur de puissance :

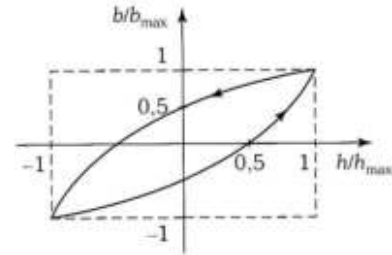
$$\cos \varphi = \frac{\mathcal{P}}{u_{1,\text{eff}} i_{1,\text{eff}}} = 0,92 \quad (2.25)$$

ce qui est un bon facteur de puissance.

2.4 Étude énergétique d'un transformateur

On considère un transformateur monophasé utilisé en régime d'excitation sinusoïdale forcé, le générateur branché au primaire fournissant : $v_p = \sqrt{2}V_p \cos(\omega t)$.

Les nombres de spires des enroulements primaire et secondaire sont notés N_p et N_s et la résistance des bobinages est négligée. Le circuit magnétique présente un cycle d'hystérésis représenté ci-contre.



Forme d'onde

1. Expliquer pourquoi le flux ϕ dans le circuit magnétique est lui aussi sinusoïdal.
2. Le transformateur est refermé sur une charge résistive. Que peut-on dire dans ces conditions sur le courant secondaire i_s ? Le courant primaire est-il sinusoïdal ?
3. Donner l'expression générale de la puissance instantanée absorbée au primaire par le transformateur. Montrer que la valeur moyenne de la puissance fournie ne fait intervenir que l'harmonique d'ordre 1, appelée fondamental, du courant primaire.
4. Le circuit secondaire du transformateur est ouvert. On suppose que malgré l'existence du cycle d'hystérésis, on peut considérer temporairement qu'il n'y a ni perte par hystérésis, ni perte par effet Joule, ni pertes par courants de Foucault. Quelle est dans ce cas la puissance absorbée par le transformateur ? Quel est le déphasage entre la tension v_p et l'harmonique 1 du courant primaire ?
5. À l'aide de la caractéristique $b(h)$ du milieu magnétique représentée en unités absolues sur la figure, préciser les notions de champ coercitif et d'aimantation rémanente. Que peut-on dire du champ coercitif dans un matériau magnétique dur ? Faut-il, pour un transformateur, préférer un fer doux ou un fer dur ? Pour quelle raison ? (le cycle ici est donné par $B = \mu_0 (\mu_r H \pm a(H_m^2 - H^2))$ avec $\mu_m = 1000$).

Mesure du rendement

On considère désormais que les pertes énergétiques ne sont plus négligeables, c'est-à-dire que l'on tient compte des pertes fer et des pertes Joule. La puissance nominale du transformateur est de 2,2 kV·A.

- Essai à vide : le secondaire est ouvert.

On applique au primaire sa tension nominale $V_{mP} = 230$ V. La valeur efficace du courant mesuré au primaire est $I_P = 1$ A ; la puissance mesurée est $P_{10} = 80$ W.

6. À quoi correspond cette puissance fournie au transformateur ? Quel est le déphasage entre l'harmonique 1 du courant primaire et la tension appliquée au primaire ?

- Essai en court-circuit : le secondaire est en court-circuit.

On applique au primaire une tension V_{Pcc} telle que le courant secondaire I_{Scc} soit égale à la valeur nominale du courant que peut débiter le transformateur. Dans ces conditions, la tension au primaire est nettement plus faible que la tension nominale de fonctionnement. La puissance fournie au primaire est $P_{1cc} = 75$ W.

7. À quoi correspond cette puissance fournie au primaire du transformateur ?

- Essai sur charge résistive.

8. Dans les conditions nominales de fonctionnement, on fournit à la charge une puissance $P_2 = 2$ kW. Déduire de l'ensemble des résultats précédents le rendement du transformateur dans les conditions de l'essai réalisé.

1. Si on néglige la résistance des bobinages, au primaire on a donc $v_p = e = -\frac{d\Phi}{dt}$, donc avec v_p sinusoïdal, Φ l'est aussi (et B aussi).
2. La tension au secondaire est sinusoïdale et vaut $v_s = Ri_s$. Donc le courant au secondaire est sinusoïdal. Pour un transformateur parfait, le courant au primaire serait lui aussi sinusoïdal, mais ici le théorème d'Ampère appliqué sur la ligne de champ moyenne du transformateur s'écrit :

$$H\ell = N_p i_p + N_s i_s \quad (2.26)$$

Or, la caractéristique de B en fonction de H n'est pas linéaire : à partir de B sinusoïdal, H ne le sera pas, donc i_p non plus.

3. Il s'agit de $p(t) = v_p(t)i_p(t)$. Or, même si i_p n'est pas sinusoïdal, il est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$, donc on peut le décomposer en série de Fourier :

$$i_p(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} i_{p,k} \cos(k\omega t + \varphi_k) \quad (2.27)$$

En valeur moyenne :

$$\langle p(t) \rangle = \left\langle \sqrt{2} V_P \cos(\omega t) \times \sum_{k=1}^{+\infty} i_{p,k} \cos(k\omega t + \varphi_k) \right\rangle = \frac{V_P i_{p,1}}{\sqrt{2}} \cos \varphi_1 \quad (2.28)$$

et ne fait donc bien intervenir que l'harmonique 1 du courant au primaire.

4. Si le secondaire est ouvert, la puissance absorbée, en négligeant les pertes, est donc nulle. Ainsi d'après ce qui précède, $\cos \varphi_1 = 0$, c'est-à-dire $\varphi_1 = \pm \pi/2$.
5. Cf. cours EM6. On lit $B_{\text{rem}} = \frac{B_{\text{max}}}{2}$, et donc l'aimantation est non nulle pour $H = 0$. Champ coercitif = champ pour lequel on annule le champ magnétique et l'aimantation. De même on lit $H_c = \frac{H_{\text{max}}}{2}$. Dans un ferromagnétique dur, il est difficile de désaimanter, donc l'excitation coercitive est élevée. Pour un transformateur, il faut préférer un fer doux, car on diminue l'aire du cycle d'hystérésis, alors même que les pertes par hystérésis sont proportionnelles à cette aire.
6. La puissance fournie au primaire est celle nécessaire pour aimanter / désaimanter le matériau ferromagnétique, cela correspond approximativement aux pertes fer. Le calcul de la puissance se réécrit avec les grandeurs efficaces :

$$\langle p(t) \rangle = V_{m,P} I_P \cos \varphi_1 \iff \cos \varphi_1 = \frac{P_{10}}{I_P V_{m,P}} = 0,348 \implies \varphi_1 = -69,6^\circ \quad (2.29)$$

le courant étant la réponse du système à la tension d'entrée sinusoïdale, il y a donc forcément un retard.

7. Vu que la tension au primaire est globalement faible, on ne parcourt quasiment pas le cycle d'hystérésis, et par conséquent on limite les pertes fer. Cependant, on appelle un courant important, la puissance fournie au primaire correspond aux pertes cuivre dans les bobinages du primaire, ce qui permettrait de connaître la valeur de la résistance du primaire.
8. Les pertes sont égales à la somme des deux pertes précédentes :
 - les pertes par hystérésis dépendent uniquement de la tension (et l'essai est en tension nominale) ;
 - les pertes cuivre dépendent uniquement du courant (du secondaire), et l'essai est réalisé avec ce courant nominal.

$$\text{Donc } P_{\text{pertes}} = 155 \text{ W, donc } \eta = \frac{P_2}{P_2 + P_{\text{pertes}}} = 92,8\%$$

Conversion de puissance électro-magnéto-mécanique

Sommaire

3.1 Cadre général	3
3.1.1 Types de systèmes	3
3.1.2 Hypothèses de travail et propriétés	3
3.1.3 Objectifs	4
3.2 Le contacteur électromagnétique en translation	4
3.2.1 Expérience introductive	4
3.2.2 Bilan énergétique	5
3.2.3 Expression de l'énergie magnétique	5
3.2.4 Force électromagnétique	6
3.2.5 Applications	7
3.3 Le moteur synchrone	8
3.3.1 Présentation	8
3.3.2 Couple électromagnétique	10
3.3.3 Modélisation électrique d'un moteur synchrone	16
3.3.4 Bilan de puissance du moteur synchrone	17
3.3.5 Fonctionnement en alternateur	18
3.3.6 Applications et avantages / inconvénients	19
3.4 La machine à courant continu (MCC)	20
3.4.1 Présentation	20
3.4.2 Description des champs et des actions mécaniques	22
3.4.3 Modélisation électrique	24
3.4.4 Bilan énergétique	24
3.4.5 Fonctionnement en régime permanent	24
3.4.6 Rendement	26
3.4.7 Étude en régime transitoire	26

Questions de cours :

- Contacteur électromagnétique en translation : constitution, explications qualitative, calcul de la force magnétique à partir de l'expression admise $\vec{F} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_m}{\partial x} \right)_i \vec{e}_x$ pour un déplacement unidimensionnel.
- Machine synchrone bipolaire à pôles lisses : constitution (en précisant les signaux électriques mis en jeu) et explications qualitatives sur son fonctionnement en moteur ou en alternateur.
- Machine synchrone bipolaire : obtention d'un champ glissant rotorique et statorique.
- À partir de l'expression du couple électromagnétique $\Gamma = \Gamma_{\max} \sin(\omega t - \theta_r(t))$ où on définira ces grandeurs, justifier la condition de synchronisme, évoquer la notion de point de fonctionnement, de stabilité, et de démarrage d'un moteur synchrone.
- Donner la modélisation électrique de la phase du stator d'un moteur synchrone ou d'un alternateur synchrone en introduisant les grandeurs mises en jeu. Diagramme de Fresnel (ou de Behn-Eschenburg) associé.
- Établir la relation entre les fcém des phases d'un moteur synchrone et le couple moteur, à l'aide d'un bilan de puissance.
- Machine à courant continu : constitution, champs statoriques, rotoriques, nécessité d'un collecteur.
- À partir de l'expression admise du couple moteur $\Gamma = \Phi_0 I_r$, justifier par un bilan énergétique l'expression de la fcém dans l'induit.
- En fonctionnement moteur, rappeler les relations fondamentales d'une machine à courant continu, tracer la caractéristique en charge lorsque le couple de charge se met sous la forme $\Gamma_c = \Gamma_{c,0} + \alpha \Omega$ (Ω étant la vitesse angulaire du rotor).

Capacités exigibles du BO :

- Exprimer l'énergie magnétique d'un enroulement enlaçant un circuit magnétique présentant un entrefer variable.
- Calculer la force électromagnétique s'exerçant sur une partie mobile en translation en appliquant l'expression fournie $\left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)_i$.
- Sur l'exemple du relais, expliquer le fonctionnement d'un contacteur électromagnétique.
- Décrire la structure d'un moteur synchrone diphasé et bipolaire : rotor, stator, induit, inducteur.
- Pour une machine de perméabilité infinie à entrefer constant, exprimer le champ magnétique dans l'entrefer généré par une spire passant dans deux encoches opposées. Expliquer qualitativement comment obtenir un champ dont la dépendance angulaire est sinusoïdale dans l'entrefer en associant plusieurs spires décalées.
- Justifier l'existence d'un champ glissant statorique lorsque les deux phases sont alimentées en quadrature.
- Justifier l'existence d'un champ glissant rotorique associé à la rotation de l'inducteur.
- Exprimer l'énergie magnétique totale stockée dans l'entrefer en fonction de la position angulaire du rotor.
- Calculer le moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor en exploitant l'expression fournie $\Gamma = \frac{\partial E}{\partial \theta}$.
- En admettant les expressions des coefficients d'inductance, établir les équations électriques vérifiées par les phases de l'induit et donner les représentations de Fresnel associées.
- À l'aide d'un bilan énergétique où seules les pertes cuivre sont envisagées, justifier l'égalité entre la puissance électrique absorbée par les f_{cem} et la puissance mécanique fournie.
- Décrire les conditions d'utilisation de la machine synchrone en alternateur.
- Citer des exemples d'application de la machine synchrone.
- Décrire la structure d'un moteur à courant continu bipolaire à excitation séparée : rotor, stator, induit, inducteur.
- Par analogie avec le moteur synchrone, expliquer que le collecteur établit le synchronisme entre le champ statorique stationnaire et le champ rotorique quelle que soit la position angulaire du rotor.
- Citer l'expression du moment du couple $\Gamma = \Phi i$, établir l'expression de la f_{cem} induite $e = \Phi \Omega$ par un argument de conservation énergétique.
- Décrire qualitativement les pertes existant dans une machine réelle : pertes cuivre, pertes fer, pertes mécaniques.
- Établir les équations électrique et mécanique. Tracer la caractéristique (Ω, Γ) à tension d'induit constante. Analyser le démarrage d'un moteur entraînant une charge mécanique exerçant un moment $-f \cdot \Omega$.
- Décrire les conditions d'utilisation de la machine à courant continu en génératrice. Choisir des conventions d'orientation adaptées.
- Citer des exemples d'application de la machine à courant continu.S

I. Cadre général

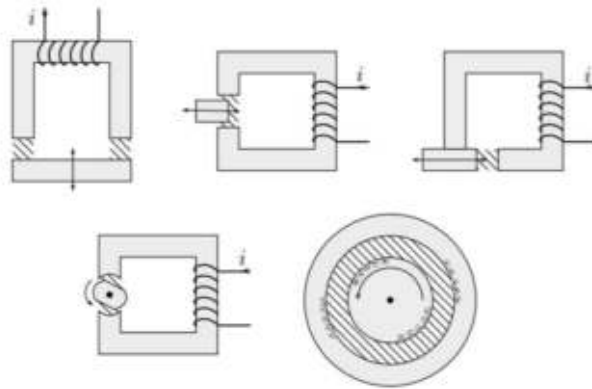
Dans ce chapitre, nous allons étudier des convertisseurs électro-magnéto-mécaniques. En effet, les exemples de conversion électro-mécaniques de première année ne suffisent plus lorsqu'il faut développer une puissance mécanique importante : en particulier la modélisation d'un moteur à courant continu comme un cadre mobile parcouru par un courant dans un champ magnétique permanent doit clairement prendre en compte les matériaux ferromagnétiques qui l'entourent. Dans toute la suite, on se placera dans le cadre de l'ARQS magnétique.

I.1 Types de systèmes

Tous les systèmes que l'on va étudier dans ce chapitre ont la même structure, où l'on retrouve les éléments suivants :

- un **circuit magnétique ouvert ou fermé**, composé de matériaux ferromagnétiques. Généralement il y a une partie fixe et une partie mobile, susceptible d'avoir un mouvement de translation ou de rotation autour d'un axe fixe ;
- un **entrefer**, de l'air en général considéré comme du vide, dans lequel se concentre la majorité de l'énergie électromagnétique ;
- un ou plusieurs **circuits électriques**, généralement enroulés sur le circuit magnétique (le circuit ferromagnétique présente des parties encochées dans lesquels on retrouve le bobinage de cuivre).

Ci-dessous sont représentés quelques exemples de systèmes de puissances très variables : de quelques mW pour des relais jusqu'à quelques MW pour de gros moteurs électriques de TGV. En grisé le circuit magnétique, et en hachuré l'entrefer :



I.2 Hypothèses de travail et propriétés

Établissons les hypothèses et connaissances sur lesquelles on va se baser dans ce chapitre :

- les circuits magnétiques sont constitués de matériaux ferromagnétiques doux fonctionnant en régime linéaire (MLHI), c'est-à-dire $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, avec $\mu_r \gg 1$. Cela a pour conséquences :
 - les lignes de champs sont parfaitement canalisées par le matériau ;
 - les lignes de champ sont orthogonales à l'interface entrefer - MLHI ;
 - la majorité de l'énergie électromagnétique est stockée dans l'air ;
- dans l'ARQS, le théorème d'Ampère s'écrit sur un contour (Γ) fermé orienté :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{\text{libre, enlacé}} \quad (3.1)$$

- $\text{div } \vec{B} = 0$, donc \vec{B} est à flux conservatif, les lignes de champ de \vec{B} sont fermées, et le flux de \vec{B} est le même à travers toute section d'un tube de champ ;
- l'énergie magnétique totale est :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint_{\text{ferro}} \frac{B^2}{2\mu_0 \mu_r} d\tau + \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau \quad (3.2)$$

- en notant Φ le flux de \vec{B} à travers le circuit électrique parcouru par un courant i , l'inductance associée est $L = \frac{\Phi}{i}$ et $\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \Phi i$

I.3 Objectifs

Pour les différents systèmes étudiés, les objectifs sont alors :

- d'une part de calculer l'énergie magnétique emmagasinée par le système :
 - soit par intégration directe de l'énergie volumique ;
 - soit par calcul intermédiaire de l'inductance L puis de l'énergie magnétique $\frac{1}{2}Li^2$ lorsque le matériau n'est pas saturé.
- d'autre part d'étudier les variations de cette énergie lors de la variation d'un paramètre de position linéaire (x, y, z) ou angulaire (θ) de sorte à en déduire l'expression des actions mécaniques.

On admettra les résultats suivants :

Actions électromagnétiques

- Lorsque la partie mobile a un mouvement possible de translation, paramétré par l'abscisse x , alors la force électromagnétique qui s'exerce sur la partie mobile est

$$\vec{F}_{\text{em}} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_i \vec{e}_x \quad (3.3)$$

*

- lorsque la partie mobile a un mouvement possible de rotation autour d'axe fixe (Oz) , paramétré par l'angle θ , alors le couple électromagnétique projeté sur l'axe de rotation subi par cette partie mobile est :

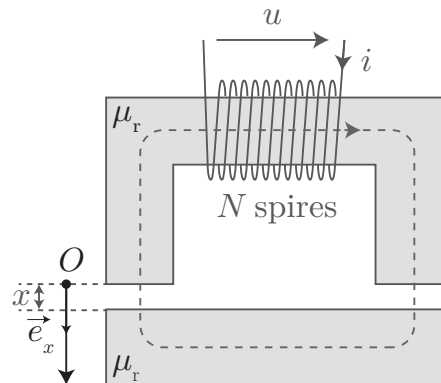
$$\Gamma_{\text{em}} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial \theta} \right)_i \quad (3.4)$$

Sur l'exemple qui suit, on justifiera la première expression, même si la démonstration n'est pas exigible, et la formule vous sera toujours rappelée !

II. Le contacteur électromagnétique en translation

II.1 Expérience introductive

On va s'intéresser à un contacteur électromagnétique constitué d'un noyau de fer doux en forme de U sur lequel est bobiné un circuit de $N = 500$ spires. On applique un courant sinusoïdal $i(t)$ de fréquence 50 Hz de valeur efficace I_{eff} . On ferme le circuit magnétique à l'aide d'un barreau de fer doux rectiligne de même section S que le noyau en U , de masse $m \simeq 2$ kg.



Manipulation

Réaliser l'expérience avec un courant élevé. Effectuer l'enregistrement audio du son émis par les vibrations du barreau et l'analyser sous Audacity. Observer la fréquence de 100 Hz.

On observe expérimentalement :

- que le barreau est bien soumis à une force qui le plaque contre le noyau ;
- le barreau semble vibrer légèrement, une acquisition sonore permet d'obtenir la fréquence associée, de 100 Hz ;
- cette force permet de maintenir le barreau à condition d'avoir un courant suffisamment élevé : $I_{\text{eff}} \geq 60$ mA. Cela doit correspondre à la limite où le poids est compensé par la force électromagnétique.

Notons que l'observation de cette fréquence laisse à penser que la force électromagnétique est reliée à $i^2(t)$, ce qui explique la vibration à $2f$.

II.2 Bilan énergétique

On va conduire un bilan énergétique de sorte à justifier l'expression de la force électromagnétique. On peut difficilement se servir de l'intégration de $(\vec{M} \cdot \text{grad}) \vec{B}$ pour obtenir la résultante, d'où l'emploi des énergies. Distinguons trois systèmes sur lesquels on va conduire un bilan d'énergie :

i) Système complet : circuit magnétique fixe + mobile + enroulement + air

Si on applique le premier principe à ce système durant une transformation élémentaire entre t et $t + dt$, à température constante (donc énergie interne constante) :

$$dE_c + dE_{\text{magn}} = \delta W_{\text{elec}} + \delta W_{\text{méca,ext}} + \delta Q \quad (\text{E1})$$

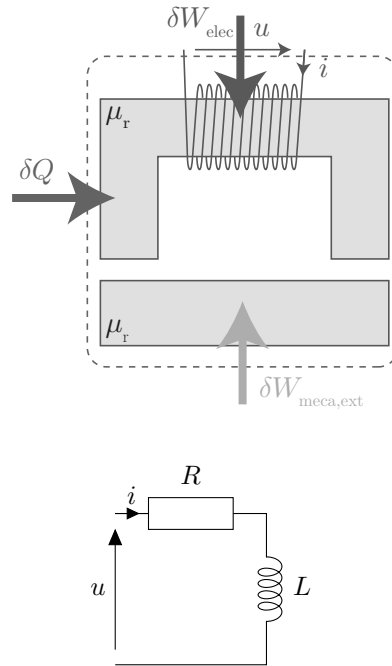
* car le système global stocke de l'énergie sous forme cinétique et magnétique ; il reçoit un travail électrique δW_{elec} de la part du circuit alimentant la bobine ; un travail mécanique $\delta W_{\text{méca,ext}}$ lié aux forces extérieures qui s'exercent sur la partie mobile (poids, force exercée par un opérateur qui déplace le barreau mobile) ; et enfin un transfert thermique δQ lié majoritairement aux pertes cuivre par effet Joule $\delta Q = -Ri^2 dt$ (on néglige les pertes fer dans le circuit magnétique).

ii) Circuit électrique seul

En représentant le circuit électrique équivalent, la tension aux bornes de la bobine vaut $u = Ri + \frac{d\Phi}{dt}$. Ainsi l'énergie électrique

* reçue par la bobine pendant dt vaut :

$$\delta W_{\text{elec}} = u(t)i(t)dt = Ri^2 dt + i \frac{d\Phi}{dt} dt = Ri^2 dt + id(Li) \quad (\text{E2})$$



L'inductance L du circuit étant variable, on n'a pas le droit de la sortir de la dérivée, la tension à ses bornes n'est PAS $Ri + L \frac{di}{dt}$, le terme $i \frac{dL}{dt}$ étant alors manquant.

iii) Barreau mobile seul

* Le barreau en lui-même est soumis à la force électromagnétique \vec{F}_{em} que l'on cherche à déterminer ainsi qu'à l'ensemble des forces extérieures au système. Ainsi le théorème de l'énergie cinétique s'écrit :

$$dE_c = \delta W_{\text{méca,ext}} + \delta W_{\text{em}} = \delta W_{\text{méca,ext}} + F_{\text{em}} dx \quad (\text{E3})$$

iv) Expression de la force électromagnétique

On injecte les équations (E2) et (E3) dans (E1) :

$$\delta W_{\text{méca,ext}} + F_{\text{em}} dx + d\left(\frac{1}{2} Li^2\right) = Ri^2 dt + id(Li) + \delta W_{\text{méca,ext}} - Ri^2 dt \quad (\text{3.5})$$

soit en simplifiant les différents termes :

$$* \quad F_{\text{em}} dx = id(Li) - d\left(\frac{1}{2} Li^2\right) = i^2 dL + Lidi - Lidi - \frac{1}{2} i^2 dL = \frac{1}{2} i^2 dL \quad (\text{3.6})$$

d'où :

$$\boxed{F_{\text{em}} = \frac{1}{2} i^2 \frac{dL}{dx} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_i} \quad (\text{3.7})$$

II.3 Expression de l'énergie magnétique

On va procéder de deux manières pour déterminer l'énergie magnétique, nécessaire pour calculer la force électromagnétique.

- **Première méthode : passage par l'inductance propre.** Appliquons le théorème d'Ampère sur une ligne de champ moyen orientée :

$$H_f \ell + H_{\text{air}} 2x = Ni \implies \frac{B}{\mu_0 \mu_r} \ell + \frac{B}{\mu_0} 2x = Ni \implies B = \frac{\mu_0 Ni}{2x + \frac{\ell}{\mu_r}} \quad (\text{3.8})$$

en utilisant la conservation du flux magnétique, avec la section S constante $B_{\text{air}} = B_f = B$. Ainsi le flux propre qui traverse le circuit bobiné vaut :

$$\Phi = NBS = \frac{\mu_0 N^2 S i}{2x + \frac{\ell}{\mu_r}} = Li \implies L(x) = \frac{\mu_0 N^2 S}{2x + \frac{\ell}{\mu_r}} \quad (3.9)$$

On constate ainsi que l'inductance propre dépend de x , et croît fortement à mesure que x diminue. L'énergie magnétique vaut finalement :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \Phi i = \frac{\mu_0 N^2 S i^2}{4x + \frac{2\ell}{\mu_r}} \quad (3.10)$$

▪ **Seconde méthode : intégrale de l'énergie magnétique volumique.**

On part également du théorème d'Ampère pour connaître l'expression de B , puis on calcule l'intégrale de l'énergie volumique :

$$* \quad \mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint_{\text{ferro}} \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} d\tau + \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r} S\ell + \frac{B^2}{2\mu_0} 2xS \quad (3.11)$$

$$= \left(\frac{\mu_0 N i}{2x + \frac{\ell}{\mu_r}} \right)^2 \frac{S}{2\mu_0\mu_r} \left(\frac{\ell}{\mu_r} + 2x \right) = \frac{\mu_0 N^2 S i^2}{4x + \frac{2\ell}{\mu_r}} \quad (3.12)$$

II.4 Force électromagnétique

On peut alors calculer la force électromagnétique exercée sur le barreau, et revenir sur les observations expérimentales :

$$\vec{F}_{\text{em}} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_i \vec{e}_x = - \frac{\mu_0 S N^2 i^2}{\left(\frac{\ell}{\mu_r} + 2x \right)^2} \vec{e}_x \quad (3.13)$$

On constate donc que :

- la force est toujours attractive, quel que soit le signe de i ;
- la proportionnalité avec i^2 explique le doublement de fréquence pour les vibrations observées ;
- la force croît lorsque l'entrefer diminue, et est maximale pour un entrefer nul ;
- cette force attractive existe en régime continu comme en régime sinusoïdal forcé ;
- la force tend à déplacer la partie mobile dans un sens qui augmente l'inductance L , diminue l'entrefer et confine le champ magnétique dans le fer.



Manipulation

Quelques questions et manips à poser aux élèves :

- On coupe le courant, le barreau est toujours attiré, pourquoi ?
- On inverse le sens du courant, le barreau finit par décrocher, pourquoi ?
- On doit tenir le barreau lorsqu'il lâche, sous peine de provoquer un appel de courant trop fort dans le circuit. Pourquoi ?



Exercice

Déterminer la valeur de μ_r à partir des données expérimentales ($\ell \simeq 50 \text{ cm}$, $S \simeq 20 \text{ cm}^2$).

À la rupture du contact, la force électromagnétique égale le poids, la mesure de courant permet donc d'extraire μ_r , comme $x = 0$:

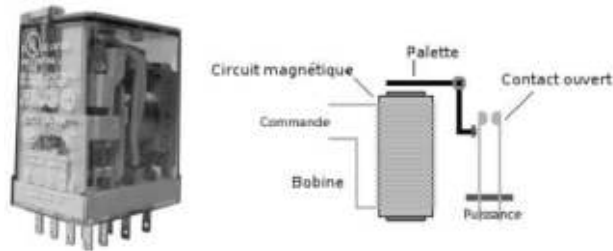
$$\langle F_{\text{em}} \rangle = \frac{\mu_0 S N^2 I_{\text{eff}}^2}{\left(\frac{\ell}{\mu_r} \right)^2} = mg \iff \mu_r = \sqrt{\frac{mg\ell^2}{\mu_0 N^2 S I_{\text{eff}}^2}} \simeq 1500 \quad (3.14)$$

II.5 Applications

Citons quelques exemples de systèmes mettant en œuvre ce type de technologies :

- le **relais** ou **contacteur** (pour un circuit de puissance) permet l'ouverture ou la fermeture d'un circuit électrique de puissance par l'intermédiaire d'un second circuit électrique, les deux circuits étant isolés l'un de l'autre. On a en général une bobine comportant un noyau de fer doux (partie commande) et un interrupteur ayant une position sur le contact « repos » et une position sur le contact « travail ». L'action du champ magnétique créé par la bobine permet d'activer le déplacement. L'annulation du courant et l'action combinée d'un ressort (ou de la raideur de la lame) permet de revenir à la position initiale.

<http://faq.6enligne.net/display.php?id=71/les-relais>

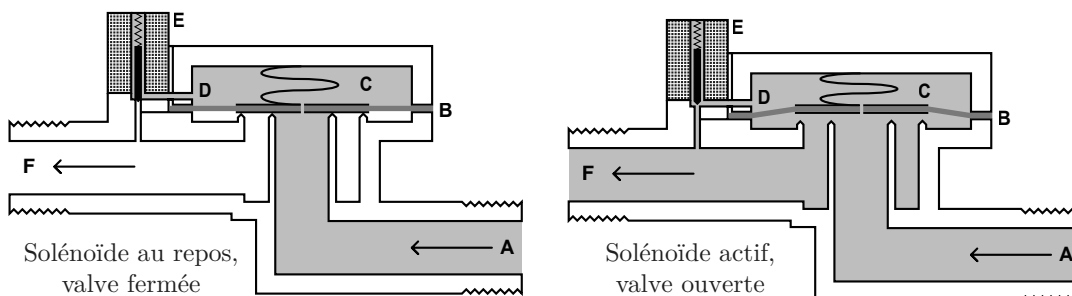


La commande peut être continue ou alternative, quelle que soit la fréquence ; les valeurs de résistances dans les deux positions sont comparables à celles d'un interrupteur électrique. Il y a par contre des inconvénients : rebonds possibles, étincelles lorsqu'on ouvre l'interrupteur, bruit, usure mécanique, et la fréquence d'ouverture/fermeture est faible, du fait de l'inertie mécanique.

- l'**électroaimant de levage** fonctionne sur le principe que l'on a évoqué, sachant que c'est souvent une carcasse métallique qui joue le rôle de pièce mobile qui vient se coller à un électroaimant en U ;



- l'**électrovanne** est une vanne commandée électriquement. Elle permet d'agir sur le débit d'un fluide dans un circuit hydraulique par une commande électrique. On les trouve principalement dans les lave-vaisselles et les lave-linges pour commander le remplissage. Elles fonctionnent soit en tout ou rien, soit avec une ouverture proportionnelle à la commande.



III. Le moteur synchrone

III.1 Présentation

a) Rappels de première année



Manipulation

Demander aux élèves comment réaliser un champ magnétique tournant à partir de deux bobines. Faire l'expérience avec un teslamètre relié à un oscilloscope vidéoprojeté ? ou vidéo.

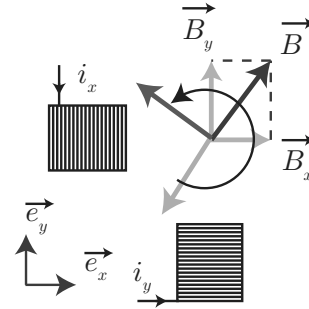
Chaque bobine est alimentée par une source de tension sinusoïdale de même fréquence, mais déphasé de φ . Les champs s'écrivent donc $\vec{B}_x = B_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$ et $\vec{B}_y = B_0 \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y$. En vertu du principe de superposition, le champ global vaut :

$$\vec{B} = B_0 (\cos \omega t \vec{e}_x + \cos(\omega t + \varphi) \vec{e}_y) \quad (3.15)$$

* Pour obtenir un champ tournant pouvant s'écrire :

$$\vec{B} = B \vec{e}_r = B \cos \theta \vec{e}_x + B \sin \theta \vec{e}_y \quad (3.16)$$

avec \vec{e}_r orienté d'un angle $\theta(t)$, il faut $\varphi = -\pi/2$ et $\theta = \omega t$. Le champ tourne alors avec une vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$.



Manipulation

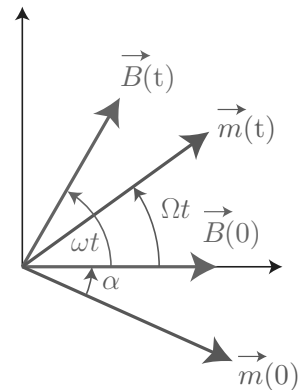
Ajouter une aiguille et demander ce qu'il va se passer.

Si on place un moment magnétique dans ce champ, il subit un moment $\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$. Expérimentalement, on constate néanmoins qu'une aiguille ne se met pas en rotation, mais vibre à la fréquence du champ magnétique. En effet, du fait de l'inertie de l'aiguille, il est pertinent de considérer le couple moyen dans le temps : le couple magnétique moyen est alors nul. Si par contre on lance l'aiguille avec une vitesse élevée, elle ralentit du fait des frottements, et finit par se « caler » sur une vitesse angulaire correspondant à la vitesse de rotation du champ magnétique : on a fabriqué un moteur synchrone.

Si on note ω la vitesse angulaire du champ magnétique et Ω la vitesse angulaire du moment magnétique, on aboutit en se basant sur le schéma à :

$$\Gamma = mB_0 \cos((\omega - \Omega)t - \alpha) \implies \langle \Gamma \rangle = mB_0 \cos \alpha \quad (3.17)$$

à la condition que $\omega = \Omega$ (condition de synchronisme). Dans le cas contraire, $\langle \Gamma \rangle = 0$, ce que l'on a observé au début de l'expérience, le couple moyen est nul et ne permet aucun mouvement.



b) Description des machines synchrones réelles

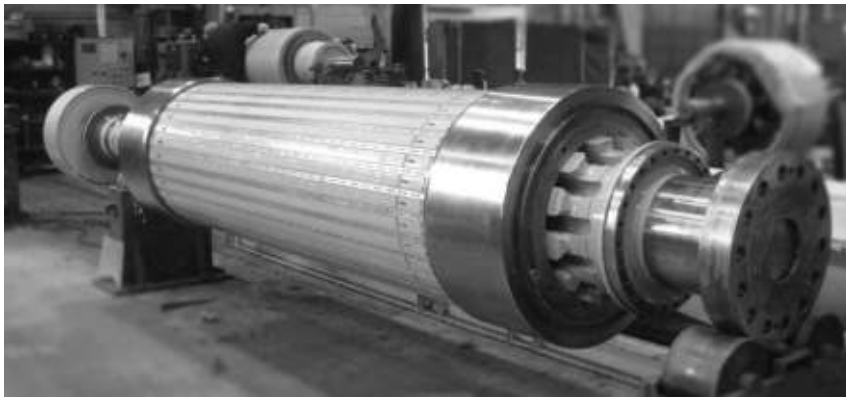
Cette première approche, bien que comportant les principes physiques essentiels à la compréhension des machines synchrones (production d'un champ tournant, couple et condition de synchronisme), n'est pas suffisante pour décrire des machines de fortes puissances, par exemple :

- ceux des TGV, avec des puissances motrices allant jusqu'à plusieurs MW ;
- dans les centrales électriques, le **fonctionnement des machines synchrones étant réversible**, la production de puissances électriques à partir d'**alternateurs** peut aller jusqu'à 1 GW.

Une machine synchrone est alors constituée de deux parties de même axe principal de symétrie (Oz) :

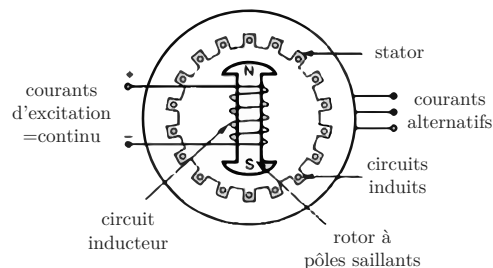
- une partie extérieure fixe dans le référentiel d'étude, appelée **stator** ;
- une partie intérieure mobile en rotation autour de l'axe (Oz), appelée **rotor**.

Il existe cependant des machines synchrones où le stator est la partie intérieure, et le rotor la partie extérieure.



Ces deux parties peuvent être relativement massives, constituées de matériaux ferromagnétiques, de faible entrefer. La force électromagnétique exercée sur le rotor est celle qui génère le couple, que l'on va chercher à déterminer. La machine synchrone contient également des bobinages enlacés dans le stator et le rotor :

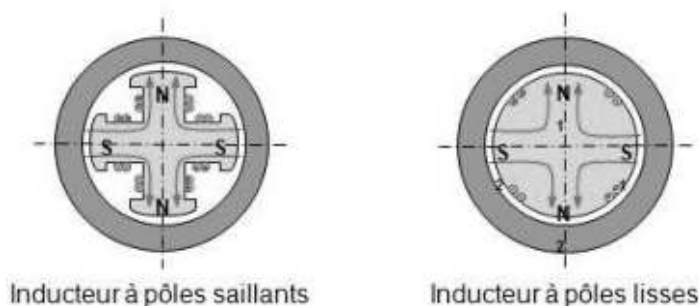
- les circuits du rotor, nommés **circuits inducteurs**, sont parcourus par des courants continus appelés **courants d'excitation** I_r ou I_e ;
- les circuits du stator, nommés **circuits induits**, sont parcourus par des courants alternatifs sinusoïdaux, de même fréquence, mais éventuellement déphasés entre eux.



On comprendra un peu plus loin cette dénomination inducteur / induit.

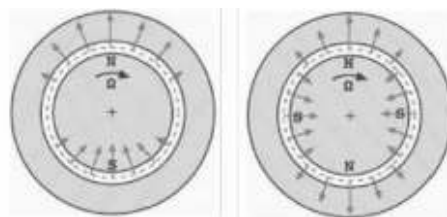
On distingue enfin pour le rotor deux types d'inducteurs :

- les **inducteurs à pôles saillants** (pôles = nord ou sud en l'occurrence), où le bobinage est enroulé sur la partie saillante ;
- les **inducteurs à pôles lisses**, où le bobinage est encoché au sein du matériau ferromagnétique.



Notons que les inducteurs, pour les petits moteurs, sont souvent des aimants permanents sans bobinage : on les qualifie de « brushless » car ils n'ont pas besoin de système de balais pour amener de courant permanent à la partie en mouvement.

Selon le nombre de paires de pôles (zones nord - sud), on qualifie le moteur de **bipolaire** (un seul pôle nord et un seul pôle sud), **quadripolaire** (2 paires de pôles nord-sud), etc.



c) Hypothèses de la modélisation

Dans la suite, on va étudier le cas particulier des machines synchrones **bipolaires à pôles lisses** :

- le rotor comprend un seul circuit bobiné \mathcal{C}_r alimenté par un courant continu I_r ;
- le stator comprend deux circuits bobinés \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , alimentés par des courants alternatifs de même fréquence mais déphasés entre eux (chaque circuit est nommé **phase du stator**)
 $i_1(t) = I_s \cos(\omega t)$ et $i_2(t) = I_s \cos(\omega t + \varphi)$.

On prendra quelques hypothèses pertinentes pour modéliser une machine synchrone :

*

- la dimension transversale est considérée suffisamment grande pour négliger les effets de bords, c'est-à-dire que dans toute la suite on considèrera une invariance par translation selon l'axe (Oz) ;
- les matériaux ferromagnétiques sont des MLHI de perméabilité μ_r très grande, souvent prise infinie ;
- l'épaisseur de l'entrefer est constante, notée e .

III.2 Couple électromagnétique

a) Calcul des champs rotoriques et statoriques

Intéressons-nous dans un premier temps au champ créé par le stator, fixe dans le référentiel d'étude. On va découper le problème en étudiant le champ magnétique créé successivement par une seule spire, par une phase du stator, puis enfin par l'ensemble des phases. L'objectif du stator est d'obtenir un champ magnétique tournant, comme dans l'expérience introductive, appelé dans la suite **champ glissant**.

i) Champ magnétique d'une spire

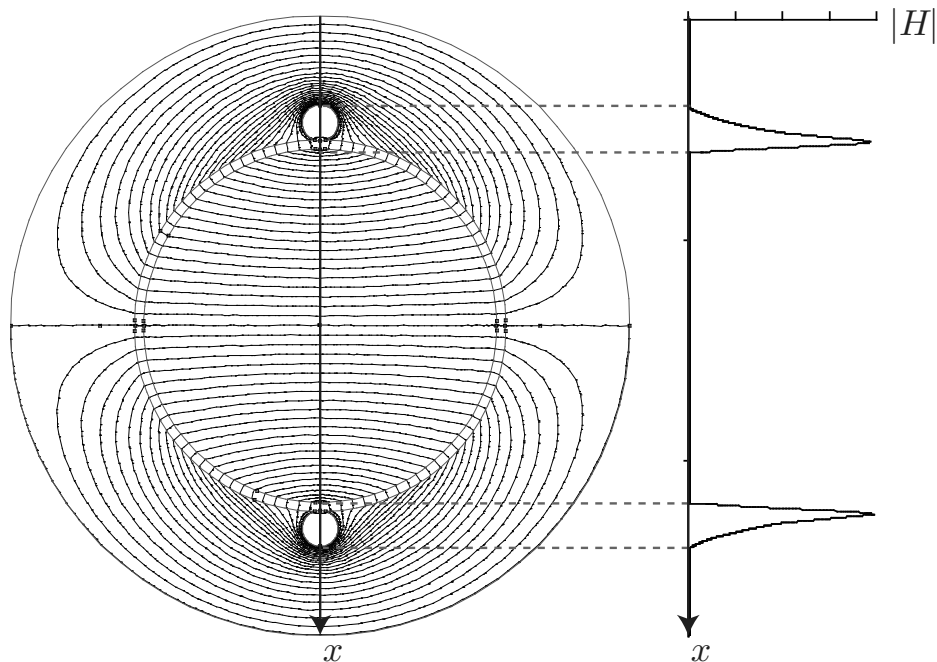
Considérons une spire encochée dans le stator, équivalent à deux fils diamétralement opposés, parallèles à (Oz) , parcourus par des courants $i(t)$ de sens opposé. L'invariance par translation selon (Oz) et tout plan perpendiculaire à (Oz) étant un plan d'antisymétrie pour la distribution de courant permet d'écrire :

*

$$\vec{B} = B_r(r, \theta) \vec{e}_r + B_\theta(r, \theta) \vec{e}_\theta \quad (3.18)$$

c'est-à-dire que l'on peut s'astreindre à une étude dans un plan de coupe.

L'allure des lignes de champ au sein des circuits magnétiques et de l'entrefer est donnée ci-dessous :



Du fait que le milieu magnétique est de perméabilité très grande, le champ magnétique dans l'entrefer est orthogonal à l'interface circulaire intérieure et extérieure, donc on le considère radial dans tout l'espace de l'entrefer, $\vec{B} = B_r(r, \theta) \vec{e}_r$.



Exercice

En étudiant les symétries, donner les propriétés sur les vecteurs $\vec{B}(r, \theta)$ et $\vec{H}(r, \theta)$ dans tout l'espace, et en particulier dans l'entrefer.

Le plan $(O, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ étant un plan de symétrie des courants, donc d'antisymétrie du champ magnétique, les normes des vecteurs excitation et champ magnétiques sont égales de part et d'autre du plan,

mais le sens est opposé.

$$\|\vec{B}(r, \theta)\| = \|\vec{B}(r, \pi - \theta)\| \quad \text{et} \quad \|\vec{H}(r, \theta)\| = \|\vec{H}(r, \pi - \theta)\| \quad (3.19)$$

En particulier dans l'entrefer, en notant que le champ magnétique comme l'excitation peuvent s'écrire $\vec{B}_e = B(r, \theta)\vec{e}_r$ et $\vec{H}_e = H_e(r, \theta)\vec{e}_r$, on a $B(r, \pi - \theta) = -B(r, \theta)$ et $H(r, \pi - \theta) = -H(r, \theta)$.

Appliquons le théorème d'Ampère à une ligne de champ qui enlace une spire en passant par l'entrefer en $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ et $\pi - \theta$:

$$* \quad \oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = i = \int_{\text{fer}} \vec{H} \cdot d\vec{r} + \int_e \vec{H} \cdot d\vec{r} \quad (3.20)$$

soit en négligeant l'excitation magnétique dans le fer en comparaison de celle dans l'air, vu la grande différence de perméabilité (cf. simulation), il vient :

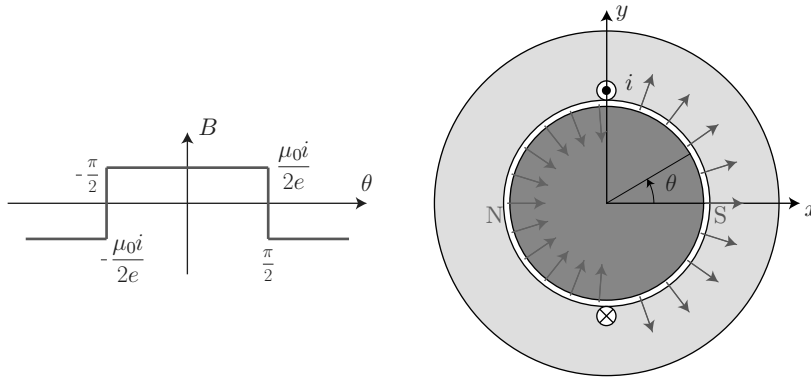
$$\int_e \vec{H} \cdot d\vec{r} = i \simeq H_e(r, \theta)e - H_e(r, \pi - \theta)e = 2eH_e(r, \theta) \quad (3.21)$$

Ainsi le champ magnétique dans l'entrefer, pour $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, vaut :

$$* \quad B_e(\theta) = \mu_0 H_e = \frac{\mu_0 i}{2e} \quad (3.22)$$

et le signe opposé pour $\theta \in \left] \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right[$.

On a donc l'équivalent d'un aimant, avec un pôle nord et un pôle sud (on parle d'enroulement statorique bipolaire) :

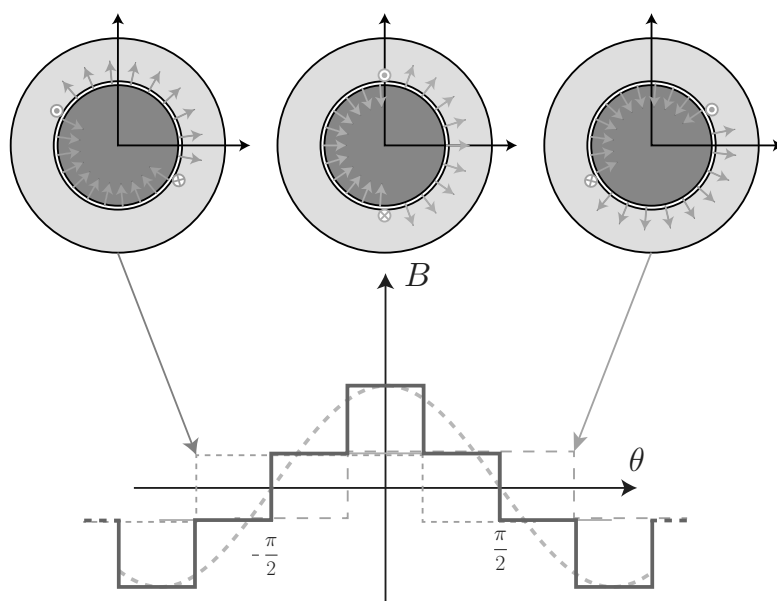


ii) Champ pulsant statorique

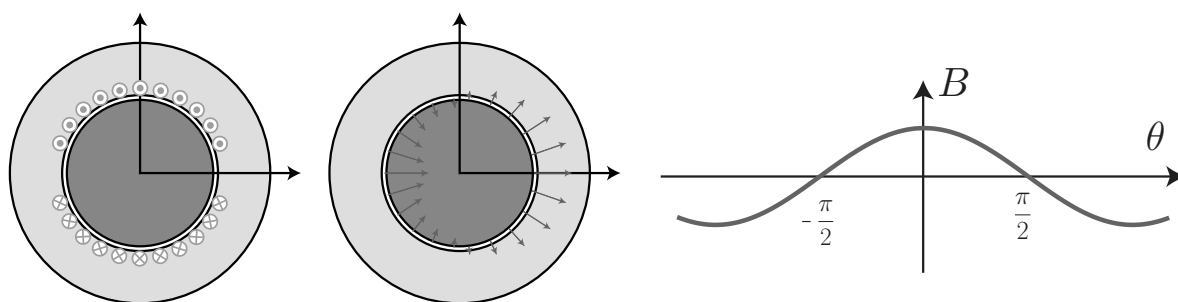
Le champ obtenu par une spire n'est pas intéressant, car discontinu dans l'espace. En pratique on recherche une répartition sinusoïdale du champ dans l'espace afin d'obtenir, à vitesse de rotation constante :

- en fonctionnement moteur de la machine synchrone une minimisation des harmoniques du couple fourni par la machine ;
- en fonctionnement générateur de la machine synchrone une fém induite proche d'une fonction sinusoïdale du temps.

La solution consiste à combiner plusieurs des spires précédentes, alimentées par le même courant, pour former véritablement une des phases du stator. Sur un exemple simple avec trois spires décalées d'un angle $\pi/3$:



On commence à observer une allure sinusoïdale, même si c'est véritablement pour un grand nombre de spires décalées que l'on pourra s'en approcher :



Manipulation

Simulation du champ pulsant en alimentant la phase avec un courant sinusoïdal.

Champ pulsant

Pour une assemblée de spires encochées dans le stator et décalées angulairement, parcourues par le même courant $i(t)$, le champ magnétique créé dans l'entrefer possède une dépendance angulaire sinusoïdale de la forme :

$$\vec{B}(\theta, t) = K_s i(t) \cos(\theta) \vec{e}_r \quad (3.23)$$

avec K_s une constante de forme du stator, dépendant du nombre de spires et de leur répartition spatiale. Si $i(t)$ est sinusoïdal, on qualifie le champ créé de **champ pulsant**.

Un champ pulsant est équivalent à une onde stationnaire : les composantes spatiales et temporelles sont découplées, les ventres et nœuds sont à des positions fixes, et l'amplitude varie au cours du temps.

Dans le cas de N spires, l'amplitude maximale du champ magnétique, en $\theta = 0$, permet d'obtenir la constante de forme $K_s \propto \frac{N\mu_0}{e}$, et est inversement proportionnelle à l'épaisseur de l'entrefer. Notons que les spires ne sont pas régulièrement espacées, elles sont positionnées de sorte à éliminer les harmoniques de la fonction $B(\theta)$ mise en évidence pour une spire (périodique, mais avec des harmoniques).

iii) Champ glissant statorique

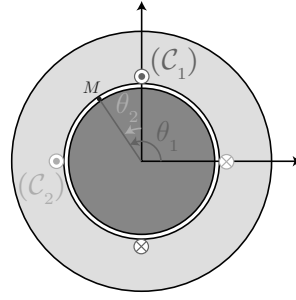
Le champ que l'on vient d'obtenir n'est pas tournant. Il faut pour cela combiner plusieurs circuits statoriques, les phases, pour obtenir un champ tournant. En nous inspirant de ce qui a été initialement montré sur les bobines, considérons deux circuits statoriques orthogonaux, alimentés par des courants sinusoïdaux déphasés de $\varphi = -\pi/2$, et repérées spatialement par $\theta_1 = \theta$ et $\theta_2 = \theta - \pi/2$. On calcule alors le champ statorique total obtenu :

$$\begin{cases} \vec{B}_1(t) = K_s I_{sm} \cos(\omega t) \cos \theta \vec{e}_r \\ \vec{B}_2(t) = K_s I_{sm} \cos(\omega t - \pi/2) \cos(\theta - \pi/2) \vec{e}_r = K_s I_{sm} \sin(\omega t) \sin \theta \vec{e}_r \end{cases} \quad (3.24)$$

$$\vec{B}_2(t) = K_s I_{sm} \cos(\omega t - \pi/2) \cos(\theta - \pi/2) \vec{e}_r = K_s I_{sm} \sin(\omega t) \sin \theta \vec{e}_r \quad (3.25)$$

d'où en sommant vectoriellement :

$$\vec{B}_s(t) = K_s I_{sm} \left(\cos(\omega t) \cos \theta + \sin(\omega t) \sin \theta \right) \vec{e}_r = K_s I_{sm} \cos(\omega t - \theta) \vec{e}_r \quad (3.26)$$



On peut aussi imaginer trois circuits décalés d'un angle de $2\pi/3$ parcourus par des courants également décalés de ce même angle : on a alors un système triphasé.

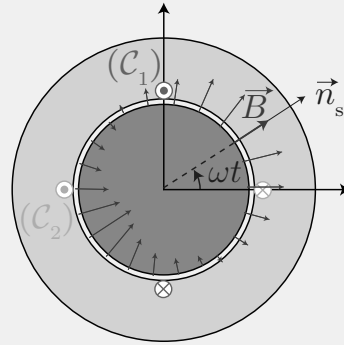
Manipulation

Simulation du champ glissant ainsi obtenu

Champ glissant statorique

L'association de deux phases statoriques perpendiculaires et alimentées par des courants sinusoïdaux de pulsation ω , en quadrature, permet l'obtention d'un champ magnétique tournant appelé **champ glissant statorique** :

$\vec{B}_s = K_s I_{sm} \cos(\omega t - \theta) \vec{e}_r$ correspondant à une onde sinusoïdale se propageant angulairement à la vitesse angulaire ω dans le sens direct autour de l'axe (Oz). On repère par $\theta_m = \omega t$ et $\vec{n}_s = \vec{e}_r(\theta = \omega t)$ la direction du champ magnétique de norme maximale.



Il est important de faire l'analogie avec la forme d'une onde progressive sinusoïdale :

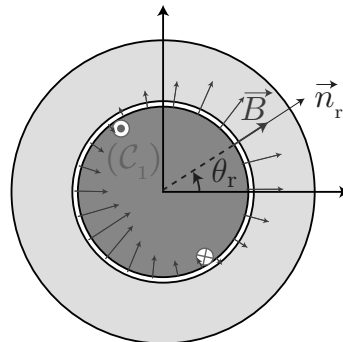
$$s(x, t) = S_m \cos(\omega t - kx) \vec{e}_x \quad (3.27)$$

se déplaçant dans le sens des x croissants avec une vitesse $c = \frac{\omega}{k}$. Ici, la norme maximale du champ magnétique est repérée par $\theta_m(t) = \omega t$, orientée selon \vec{e}_r , et tourne donc bien avec la vitesse angulaire $\dot{\theta}_m = \omega$.

iv) Champ glissant rotorique

Sur le rotor, on place également un circuit, parcouru cette fois par un courant continu d'intensité I_r , complètement identique à celui créé par une phase du circuit statorique. La différence est que ce circuit étant solidaire du rotor, on crée « naturellement » un champ glissant rotorique lorsque le rotor est en rotation. On repère par $\theta_r(t)$ la direction du vecteur \vec{n}_r correspondant à l'orientation du champ rotorique maximal. Ainsi le champ statorique s'écrit :

$$\vec{B}_r(\theta, t) = K_r I_r \cos(\theta_r(t) - \theta) \vec{e}_r \quad (3.28)$$



Dans le cas où le rotor tourne à la vitesse angulaire Ω , le champ glissant rotorique possède la même vitesse de rotation.

b) Énergie électromagnétique

Maintenant que nous avons connaissance de l'intégralité des champs développés au sein de la machine synchrone, il nous reste à connaître l'énergie électromagnétique, pour en déduire enfin le couple exercé sur le stator. La perméabilité du milieu magnétique étant élevée, on peut faire l'approximation que l'énergie électromagnétique est emmagasinée dans l'entrefer sous forme magnétique :

$$\mathcal{E}_{em} = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \iiint_{\text{entrefer}} \frac{(\vec{B}_r + \vec{B}_s)^2}{2\mu_0} d\tau \quad (3.29)$$

En décomposant $(\vec{B}_r + \vec{B}_s)^2 = B_r^2 + B_s^2 + 2\vec{B}_s \cdot \vec{B}_r$, et en approximant le volume élémentaire à $d\tau = r dr d\theta dz \simeq e R d\theta dz$ comme l'épaisseur de l'entrefer e est très petite devant le rayon du rotor R ($e \ll R$), on peut calculer chaque intégrale de manière relativement simple :

$$\iint_{\text{entrefer}} \frac{B_r^2}{2\mu_0} e R d\theta dz = \frac{K_r^2 I_r^2}{2\mu_0} L e R \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta_r(t) - \theta) d\theta = \frac{K_r^2 I_r^2}{2\mu_0} \pi R e L = V \frac{K_r^2 I_r^2}{4\mu_0} \quad (3.30)$$

*

avec $V = 2\pi R e L$ le volume de l'entrefer. De même pour l'intégration sur le champ statorique seul :

$$\iint_{\text{entrefer}} \frac{B_s^2}{2\mu_0} e R d\theta dz = \dots = V \frac{K_s^2 I_{sm}^2}{4\mu_0} \quad (3.31)$$

Finalement, le terme qui nous importe le plus, car non constant par rapport à la position angulaire du rotor, est le terme de couplage par mutuelle :

$$\iint_{\text{entrefer}} \frac{2B_r B_s}{2\mu_0} e R d\theta dz = \frac{e L R}{\mu_0} K_s K_r I_{sm} I_r \int_0^{2\pi} \cos(\omega t - \theta) \cos(\theta_r(t) - \theta) d\theta \quad (3.32)$$

soit avec :

$$\cos(\omega t - \theta) \cos(\theta_r(t) - \theta) = \frac{1}{2} \left(\cos(2\theta - \theta_r(t) - \omega t) + \cos(\theta_r(t) - \omega t) \right) \quad (3.33)$$

l'intégrale sur le premier terme est nulle, et l'autre est indépendant de θ , d'où :

*

$$\iint_{\text{entrefer}} \frac{2B_r B_s}{2\mu_0} e R d\theta dz = V \frac{K_r K_s I_r I_{sm}}{2\mu_0} \cos(\theta_r(t) - \omega t) \quad (3.34)$$

donc l'énergie magnétique dans l'entrefer vaut :

$$\mathcal{E}_{em} = \frac{V}{4\mu_0} \left[\left((K_s I_{sm})^2 + (K_r I_r)^2 \right) + 2K_r K_s I_r I_{sm} \cos(\theta_r(t) - \omega t) \right] \quad (3.35)$$

c) Couple électromagnétique

La partie mobile de la machine est le rotor, repéré par l'angle $\theta_r(t)$. Le moment des actions électromagnétiques s'exerçant sur le rotor se calcule, selon l'axe de rotation, par dérivation de l'énergie magnétique stockée dans l'entrefer par rapport à θ_r :

$$\Gamma = \vec{\Gamma} \cdot \vec{e}_z = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{em}}{\partial \theta_r} \right)_{I_r, i_1(t), i_2(t)} \quad (3.36)$$

c'est-à-dire que l'on dérive l'expression à I_{sm} ET t fixés :

$$\Gamma = -V \frac{K_r K_s I_r I_{sm}}{2\mu_0} \sin(\theta_r(t) - \omega t) = V \frac{K_r K_s I_r I_{sm}}{2\mu_0} \sin(\omega t - \theta_r(t)) \quad (3.37)$$

d) Analyse de l'expression du couple

i) Condition de synchronisme

La condition de synchronisme évoquée dans le modèle simpliste de 1ère année se vérifie à nouveau ici. En effet, en régime permanent de fonctionnement où le rotor tourne à la vitesse angulaire $\Omega = \dot{\theta}_r$, l'angle θ_r s'écrit $\theta_r(t) = \Omega t - \alpha$, avec $\alpha = \theta_r(t = 0)$ la position initiale du rotor. Vu l'inertie du rotor, on s'intéresse plutôt à la valeur moyenne du couple. Cette dernière ne sera non nulle qu'à la condition que $\Omega = \omega$, la **condition de synchronisme**, et :

$$\langle \Gamma \rangle = \Gamma(\omega = \Omega) = V \frac{K_r K_s I_{sm}}{2\mu_0} \sin \alpha \quad (3.38)$$

* Il apparaît donc que, pour avoir un couple important, il faut :

- des courants forts à la fois au niveau du stator et du rotor ;
- un volume du rotor important (en augmentant R) ;
- une épaisseur de l'entrefer faible, car K_s et K_r sont tous deux inversement proportionnels à e , donc $V K_s K_r \propto \frac{1}{e}$;
- des champs en quadrature, $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$.

ii) Point de fonctionnement

En notant $\Gamma = \Gamma_{\max} \sin \alpha$, le tracé graphique du couple moyen nous renseigne sur le rôle de la machine, mais également sur la stabilité de la position du rotor par rapport au stator :

En effet, α correspond, dans les conditions de synchronisme, à l'angle orienté constant entre la direction du maximum du champ magnétique rotorique et celle du maximum du champ magnétique statorique.

- *
 - Si $\alpha \in]0; \pi[$, on dit que le champ rotorique est en retard sur le champ statorique, tandis que le couple est positif : il s'agit d'un fonctionnement en **moteur synchrone** ;
 - si $\alpha \in]-\pi; 0[$, le champ rotorique est en avance sur le champ statorique, tandis que le couple est négatif : il s'agit d'un fonctionnement en génératrice, ou **alternateur synchrone**.

En imaginant maintenant que le moteur synchrone entraîne une charge exerçant un couple globalement résistant $-\Gamma_r$ (tenant compte d'éventuels frottements), en régime permanent, la loi du moment cinétique appliquée au rotor, de moment d'inertie J par rapport à l'axe de rotation (Oz) conduit à :

$$J \frac{d\omega}{dt} = 0 = \Gamma - \Gamma_r \Rightarrow \boxed{\Gamma = \Gamma_r} \quad (3.39)$$

On a alors deux situations qui peuvent se produire :

- soit la charge est trop importante, c'est-à-dire $\Gamma_r > \Gamma_{\max}$, alors le couple moteur est insuffisant pour entraîner la charge, la condition de synchronisme ne peut être vérifiée : on dit que le **moteur décroche**, et $\langle \Gamma \rangle = 0$ nécessairement (absence de synchronisme). Le moteur s'arrête ;
- soit la charge est inférieure à Γ_{\max} , et le système possède a priori deux points de fonctionnement.

Exercice

Analyser la stabilité des deux positions et conclure.

La position à gauche de $\pi/2$, notée α_1 est d'abord étudiée. On applique une petite perturbation qui implique $\alpha > \alpha_1$, c'est-à-dire que le rotor freine par rapport au champ statorique tournant. On observe alors que $\langle \Gamma \rangle - \Gamma_r > 0$, c'est-à-dire $\frac{d\Omega}{dt} > 0$, conduisant à une accélération du rotor, qui permet de diminuer α . De même, si $\alpha < \alpha_1$ par une accélération du rotor, le couple moteur décroît. Ainsi cette position est la position d'équilibre stable. On montre sans peine que l'autre position est instable.

iii) Démarrage d'un moteur synchrone

Un problème majeur subsiste pour ce type de moteur : le couple moteur est nul au démarrage, car $\Omega = 0$, donc la condition de synchronisme n'est pas vérifiée. Pour y remédier :

- soit on utilise un dispositif annexe permettant de lancer le rotor à une vitesse suffisamment élevée pour dépasser légèrement la condition de synchronisme ;
- soit on modifie au contraire la vitesse de rotation du champ glissant statorique en jouant sur la valeur de ω au moyen d'un circuit d'électronique de puissance (*via* un onduleur). On parle de **machine synchrone autopilotée**.

Notons que les pertes cuivre dans le circuit rotorique (courant permanent) doivent être limitées : le moteur synchrone fonctionne alors avec $\alpha \approx \pi/2$ en diminuant I_s de sorte que $\Gamma_{\max} \gtrsim \Gamma_r$. Comme la situation de décrochage est proche, un asservissement en position du rotor permet de toujours rester au voisinage de cette position, sans jamais l'atteindre.

III.3 Modélisation électrique d'un moteur synchrone

Dans la suite de cette sous-partie, on étudie le moteur synchrone, avec $\alpha > 0$ correspondant au retard du champ rotorique sur le champ statorique.

a) Modèle électrique du rotor

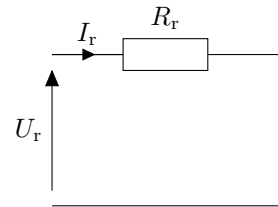
On considère le fonctionnement en régime permanent, où la machine synchrone respecte la condition de synchronisme $\Omega = \omega$. Au niveau du rotor, on note R_r la résistance électrique des enroulements rotoriques, parcourus par des courants continus. Le flux magnétique traversant l'enroulement se décompose ainsi :

$$\Phi_r = \Phi_{r,\text{propre}} + \Phi_{C_1+C_2 \rightarrow r} \quad (3.40)$$

* où on sépare le flux propre du flux lié au couplage par mutuelle avec les deux circuits statoriques. Le flux propre est constant, car le courant est permanent ; tandis que le flux du champ statorique sur le circuit rotorique l'est aussi : la position du champ statorique tournant est constante lors du synchronisme.

* Le rotor n'est siège d'aucun phénomène d'induction en régime permanent, le modèle électrique du rotor, encore appelé **inducteur**, est simplement celui d'une résistance parcourue par I_r :

$$U_r = R_r I_r \quad (3.41)$$



b) Modèle électrique du stator

i) Flux

Intéressons-nous à chaque phase du stator séparément. Introduisons L_s et R_s l'inductance propre et la résistance électrique associée au bobinage de chaque enroulement, supposés identiques pour les deux phases. Le flux à travers le circuit (C_1) peut se mettre sous la forme :

$$\Phi_1 = \Phi_{\text{propre},1} + \Phi_{2 \rightarrow 1} + \Phi_{r \rightarrow 1} = L_s i_1 + M_{12} i_2 + M(\theta_r) I_r \quad (3.42)$$

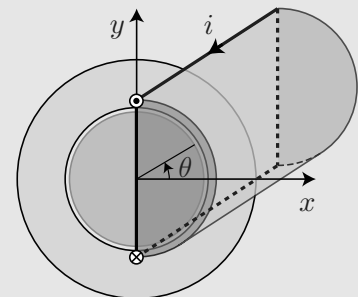
avec respectivement le flux propre, le flux par mutuelle avec l'autre phase (C_2) et le flux par mutuelle avec le circuit statorique. Les pôles des deux circuits statoriques sont positionnés orthogonalement : par conséquent chaque spire représentative d'un des circuits est placée sur un plan d'antisymétrie de l'autre circuit, où le champ magnétique est contenu dans ce plan. Cela conduit donc à $M_{12} = 0$.

Pour la mutuelle liée au champ rotorique, le programme demande d'admettre qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$M(\theta_r) = M_0 \cos \theta_r \quad (3.43)$$

Cette démonstration est hors programme, mais n'est pas très compliquée. Considérons la spire représentative du circuit (C_1) de vecteur surface orientée selon $+\vec{e}_x$. Comme le champ magnétique est à flux conservatif, on choisit comme surface d'intégration la surface (S) constituée du demi-cylindre fermé à chaque extrémité, de rayon $R + e \approx R$ et longueur L , s'appuyant sur la spire. Avec $\vec{B}_r = K_r I_r \cos(\theta_r - \theta) \vec{e}_r$ en un point de l'entrefer, il vient :

$$\Phi_{r \rightarrow 1} = \iint_{(S)} \vec{B}_r \cdot d\vec{S} = L K_r I_r \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta_r - \theta) R d\theta = 2 L R K_r I_r \cos \theta_r \quad (3.44)$$



Ainsi $\Phi_1 = L_s i_1 + M_0 I_r \cos \theta_r(t)$. De manière équivalente pour la deuxième phase, en remplaçant θ_r par $\theta_r - \frac{\pi}{2}$:

$$\Phi_2 = L_s i_2 + M_0 I_r \cos \left(\theta_r(t) - \frac{\pi}{2} \right) = L_s i_2 + M_0 I_r \sin \theta_r(t) \quad (3.45)$$

ii) Équations et schémas électriques des phases

Connaissant le flux, on en déduit la tension aux bornes du circuit statorique (\mathcal{C}_1), sachant qu'en convention récepteur, on ajoute à la tension aux bornes de la résistance l'opposé de la fém induite $-e = +\frac{d\Phi_1}{dt}$:

$$u_1(t) = R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + E_1 \quad (3.46)$$

où

$$E_1(t) = \frac{d\Phi_{r \rightarrow 1}}{dt} = -M_0 I_r \dot{\theta}_r \sin \theta_r = -M_0 I_r \omega \sin(\omega t - \alpha) \quad (3.47)$$

est appelé **force contre-électromotrice** (fcém) induite dans le circuit (\mathcal{C}_1), **orientée dans le sens récepteur** par rapport au courant i_1 . Un phénomène d'induction se produit donc bien dans les circuits du stator, d'où l'appellation de **circuits induits** pour le stator, et de **circuit inducteur** pour le rotor.

Par un raisonnement identique, on obtient le même schéma électrique pour le circuit (\mathcal{C}_2), et la fcém associée s'écrit :

$$E_2 = M_0 I_r \omega \cos(\omega t - \alpha) \quad (3.48)$$

iii) Diagramme de Behn-Eschenburg

À partir de l'équation électrique d'une phase, on peut effectuer une représentation de Fresnel en utilisant les notations complexes. En prenant comme origine des phases le courant, où $\underline{i}_1(t) = I_{sm} e^{j\omega t}$:

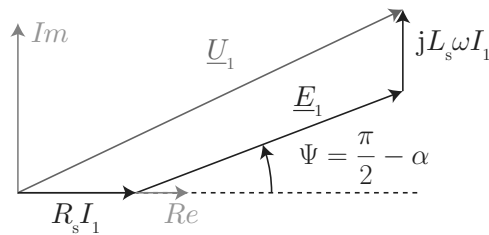
$$\underline{u}_1 = \underline{U}_1 e^{j\omega t} = R_1 I_{sm} e^{j\omega t} + j L_1 \omega I_{sm} e^{j\omega t} + j M_0 I_r \omega e^{j(\omega t - \alpha)} \quad (3.49)$$

$$= R_1 I_{sm} e^{j\omega t} + L_1 \omega I_{sm} e^{j(\omega t + \pi/2)} + M_0 I_r \omega e^{j(\omega t - \alpha + \pi/2)} \quad (3.50)$$

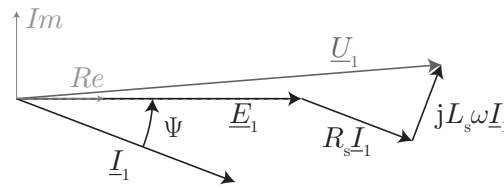
conduisant après simplification à :

$$\underline{U}_1 = R_1 I_{sm} + L_1 \omega I_{sm} e^{j\pi/2} + M_0 I_r \omega e^{j(\pi/2 - \alpha)} \quad (3.51)$$

et au diagramme de Fresnel ci-contre, où $\Psi = \frac{\pi}{2} - \alpha$ est appelé **angle de pilotage** et correspond au déphasage entre le courant et la fcém, contrôlable par un dispositif électronique.



Une représentation courante appelée **diagramme de Behn - Eschenburg** consiste à prendre comme origine des phases la fcém, cela revient donc à effectuer une rotation d'angle $-\psi$ au diagramme de Fresnel précédent :



III.4 Bilan de puissance du moteur synchrone

Comme toujours pour la conversion électro-mécanique, effectuons un bilan de puissance électrique (avec les lois des mailles), mécanique (loi du moment cinétique) et thermodynamique (premier principe).

i) Bilan électrique

La puissance électrique totale apportée à la machine sous forme électrique vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{élec}} = U_r I_r + u_1 i_1 + u_2 i_2 \quad (3.52)$$

soit avec les équations électriques du stator et du rotor :

$$\mathcal{P}_{\text{élec}} = R_r I_r^2 + R_s (i_1^2 + i_2^2) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_s (i_1^2 + i_2^2) \right) + E_1 i_1 + E_2 i_2 \quad (3.53)$$

On reconnaît :

- la puissance dissipée par effet Joule $\mathcal{P}_J = R_r I_r^2 + R_s (i_1^2 + i_2^2)$ correspond aux pertes dans les bobinages ;

- le terme $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_s (i_1^2 + i_2^2) \right)$ correspondant à la dérivée de l'énergie magnétique stockée dans les inductances est normalement nul en moyenne, mais comme i_1 et i_2 sont en quadrature, $i_1^2 + i_2^2 = I_{ms}^2$, donc la dérivée est toujours nulle ;
- la puissance **absorbée** par les fcém $\mathcal{P}_{fcem} = E_1 i_1 + E_2 i_2$ est toujours positive dans le cas d'un moteur synchrone, à tout instant. On peut en effet montrer que $\mathcal{P}_{fcem} = M_0 I_r I_{sm} \omega \sin \alpha$.

D'où finalement :

$$\mathcal{P}_{elec} = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_{fcem} \quad (3.54)$$

ii) Bilan mécanique

En se plaçant en régime permanent, en notant $-\Gamma_{op}$ le moment de force d'un opérateur extérieur au rotor (frottement, charge) s'exerçant sur l'axe (Oz),

$$J \frac{d\omega}{dt} = 0 = \Gamma - \Gamma_{op} \quad (3.55)$$

conduisant en puissance (on multiplie l'équation mécanique par la vitesse angulaire) à

$$\Gamma_{op} \omega = \Gamma \omega \iff \mathcal{P}_{méca,ext} = \mathcal{P}_{em} \quad (3.56)$$

en introduisant \mathcal{P}_{em} la puissance des actions électromagnétiques.

iii) Bilan thermodynamique

On va enfin appliquer le premier principe à la machine, que l'on suppose d'énergie interne constante (température constante). On se place en régime permanent, l'énergie cinétique et l'énergie électromagnétique stockée dans l'entrefer sont donc constantes. Ainsi, pendant une durée dt :

$$d\mathcal{E}_c + d\mathcal{E}_{em} = 0 = \delta W_{elec} + \delta W_{méca,ext} + \delta Q \quad (3.57)$$

$$= \mathcal{P}_{elec} dt + (-\Gamma_{op} \omega) dt - \mathcal{P}_J dt \quad (3.58)$$

soit en injectant les équations mécaniques et électriques établies précédemment :

$$0 = \mathcal{P}_J dt + \mathcal{P}_{fcem} dt - \mathcal{P}_{em} dt - \mathcal{P}_J dt \iff \mathcal{P}_{fcem} = \mathcal{P}_{em} \iff E_1 i_1 + E_2 i_2 = \Gamma \omega \quad (3.59)$$

c'est-à-dire que la puissance mécanique fournie par le moteur synchrone est intégralement liée à la puissance fournie aux fcém des circuits statoriques.

En se basant sur le diagramme de Fresnel, on note également que la puissance mécanique fournie est maximale quand la puissance absorbée par les fcém est maximale, c'est-à-dire lorsque les courants et les fcém sont en phase : c'est réalisé lorsque $\Psi = \pi/2 - \alpha = 0$, ce qui est cohérent avec le fait qu'à cette valeur, le couple électromagnétique est maximal.

iv) Rendement d'un moteur synchrone

De manière la plus générale, le bilan énergétique s'écrit, en distinguant pour la puissance des forces mécaniques extérieures la puissance utile (celle liée à la charge qui est mise en mouvement), les pertes mécaniques (frottements), et les pertes fer (hystérésis + pertes par courants de Foucault) :

$$\mathcal{P}_{elec} = \mathcal{P}_{cuivre} + \mathcal{P}_{fer} + \mathcal{P}_{pertes\ méca} + \mathcal{P}_{méca\ utile}^{MS \rightarrow ext} \quad (3.60)$$

Le rendement du moteur synchrone s'écrit donc :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}_{méca\ utile}^{MS \rightarrow ext}}{\mathcal{P}_{elec}} = 1 - \frac{\mathcal{P}_{pertes}}{\mathcal{P}_{elec}} \quad (3.61)$$

Ce rendement est donc d'autant plus proche de 1 que les pertes par effet Joule dans les bobinages (pertes cuivre), les pertes fer dans les matériaux ferromagnétiques, et les pertes par frottements sont faibles. Notons que l'on peut atteindre facilement des rendements de 90%.

III.5 Fonctionnement en alternateur

On l'a précisé précédemment, la machine synchrone est parfaitement réversible. Lorsqu'on apporte au système de l'énergie mécanique, la machine la convertit en énergie électrique : les **alternateurs** sont à la base de la production électrique mondiale (près de 95%). Les résultats obtenus précédemment sont alors toujours applicables. À partir d'un dispositif extérieur (vent qui fait tourner les pales d'une

C'est exactement identique à ce qu'on a obtenu pour la conversion électro-mécanique rencontrée en 1ère année où $P_{lap} = -P_{fém} = +P_{fcém}$.

*

éolienne, vapeur faisant tourner une turbine), on fournit au système un couple $\Gamma_r > 0$ (reçu par le rotor). Le champ magnétique créé par le rotor (électroaimant ou aimants permanents) induit une force électromotrice dans le stator et produit un courant électrique de même pulsation ω que la vitesse de rotation Ω du rotor : on vérifie donc nécessairement la condition de synchronisme.

Le bilan de puissance peut alors s'écrire :

$$\mathcal{P}_{\text{méca,ext}} = -\Gamma_r \Omega = \mathcal{P}_{\text{cuivre}} + \mathcal{P}_{\text{fer}} + \mathcal{P}_{\text{élec}}^{\text{MS} \rightarrow \text{ext}} \quad (3.62)$$

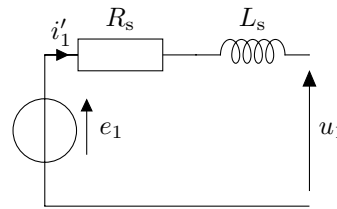
et on a également la relation :

$$\mathcal{P}_{\text{em}} = \mathcal{P}_{\text{fcém}} \iff \Gamma \Omega = -\Gamma_r \Omega = E_1 i_1 + E_2 i_2 < 0 \quad (3.63)$$

On préfère en général la convention récepteur, avec l'utilisation de **forces électro-motrices** e_1 et e_2 au niveau des phases du stator, qui se schématisent de la manière suivante :

$$e_1 = R_1 i_1'(t) + L_1 \frac{di_1'}{dt} + u_1 \quad (3.64)$$

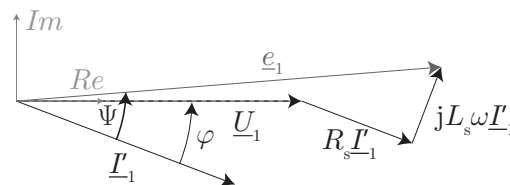
en utilisant la convention générateur pour la fém, et la convention récepteur au niveau de u_1 , avec $i_1' = -i_1 > 0$.



Exercice

Représenter le diagramme de Behn-Eschenburg dans cette configuration, en plaçant la tension u_1 à l'origine des phases. On introduira ϕ le déphasage entre i_1' et u_1 lié au dipôle de charge branché sur la phase, choisi positif. On remarquera que $\alpha < 0$

En notation complexe, $\underline{e}_1 = R_1 \underline{I}'_1 + jL_1 \omega \underline{I}'_1 + \underline{U}_1$. Soit en plaçant \underline{U}_1 sur l'axe des abscisses :



Il apparaît donc que la valeur efficace de la fém est plus importante que celle de u_1 , c'est-à-dire que l'on a une chute de tension à vide (quand on a juste la fém, vu que $i_1' = 0$) et la tension en charge délivre par l'alternateur.

III.6 Applications et avantages / inconvénients



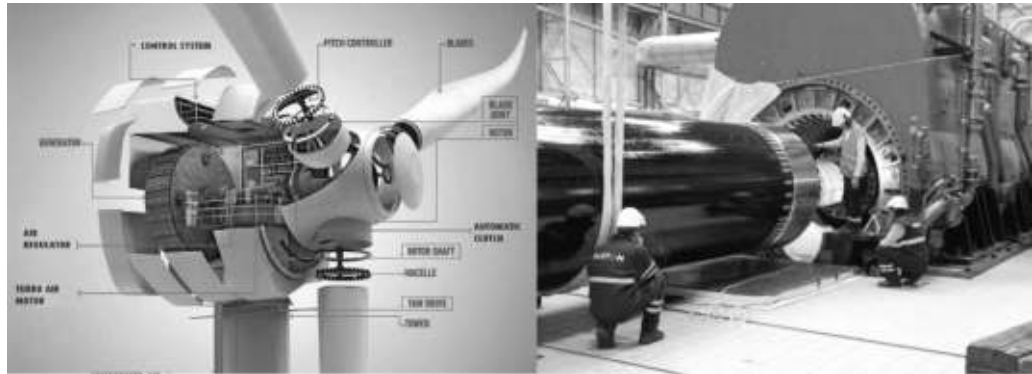
Les moteurs synchrones sont très présents : TGV Atlantique, ascenseurs, certaines voitures électriques (Prius), etc. Les avantages que l'on peut évoquer sont :

- puissances et couples importants par rapport au volume occupé ;
- **desrendements très bons** (régulièrement $> 95\%$) ;
- la vitesse de rotation est contrôlée très précisément par la pulsation de l'alimentation, **indépendamment du couple de charge** (par exemple 50 Hz correspond à une vitesse de rotation de 3000 tours/min)

Les inconvénients :

- le **démarrage n'est pas autonome**, il faut soit le lancer avec un autre moteur (à courant continu, par exemple), soit utiliser un **circuit de pilotage** permettant d'augmenter la fréquence des courants statoriques ;
- l'entretien des gros moteurs synchrones à électroaimants rotoriques nécessite un entretien des balais et collecteurs apportant le courant continu au rotor (par opposition aux moteurs brushless où le rotor est constitué d'aimants permanents) ;

Les alternateurs synchrones sont à la base de la production électrique mondiale, dans toutes les centrales (nucléaires, hydrauliques, à charbon) où des turbines entraînent le rotor ; mais également dans les éoliennes. Sont souvent présents des systèmes de modification de la vitesse de rotation, pour que le rotor soit entraîné à 3000 tours/min (ou 1500, si l'alternateur est quadripolaire) de sorte à produire une tension sinusoïdale à la fréquence de 50 Hz injectable sur le réseau EDF.



IV. La machine à courant continu (MCC)

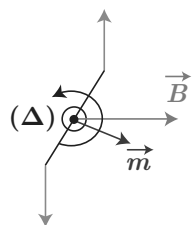
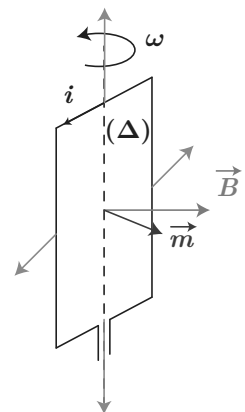
IV.1 Présentation

a) Rappels de première année

Un cadre mobile alimenté par un courant continu, subit un champ magnétique \vec{B} uniforme, et est soumis à des forces de Laplace sur chacune de ses arêtes, dont la résultante est nulle, mais le moment de forces est non nul :

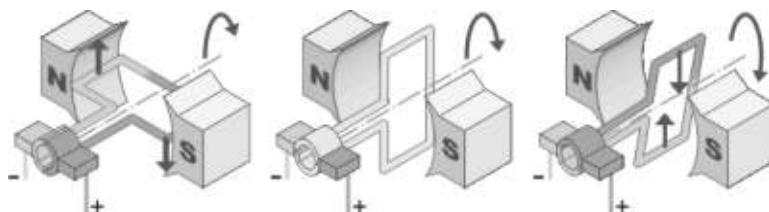
$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} = SB \cos(\vec{S}, \vec{B}) i \vec{e}_\Delta \quad (3.65)$$

comme $\vec{m} = i\vec{S}$ est le moment magnétique associé à la spire de courant orientée.



Vue de dessus

Ce moment permet la rotation du cadre mobile autour de son axe de symétrie, jusqu'à ce que le moment s'aligne dans le sens du champ magnétique, dont on rappelle qu'il s'agit d'une position d'équilibre stable. On appelle le plan correspondant **plan neutre**.

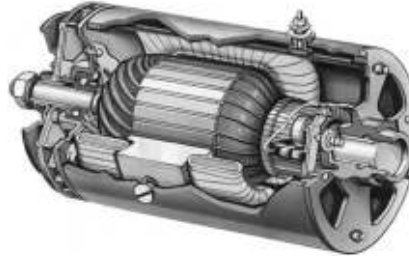


On constate que pour ne pas rester dans le plan neutre, il faut intervertir le sens du courant tous les demi-tours, sinon la spire reste à l'équilibre. C'est le rôle du collecteur (aussi appelé commutateur) : le but est qu'à chaque demi-tour, le courant dans la spire soit inversé. Le collecteur frotte sur la surface de la bague tournante, le contact électrique étant assuré par des "balais".

Dans la suite, on va partir de ce principe "basique", en y mêlant à nouveau les matériaux ferromagnétiques, seuls à même de pouvoir obtenir des machines associées à de fortes puissances.

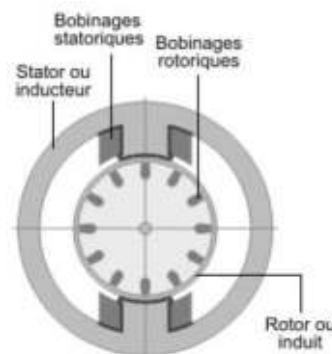
b) Constitution d'une MCC

Ci-contre correspond un dessin de moteur continu usuel. La première constatation est qu'il n'y a pas qu'une seule spire, mais un grand nombre, pour permettre de découpler les efforts sur une multitude de spires.



On retrouve le même type de constitution que pour la machine synchrone :

- le **stator**, la partie fixe, est constitué soit d'un aimant permanent (pour les machines de faible puissance) ou d'un électroaimant avec un enroulement en cuivre autour du noyau de fer doux, parcouru par un courant d'excitation constante I_s . Comparativement à la machine synchrone, il s'agit de l'**inducteur** ;
- le **rotor** est quant à lui constitué d'un bobinage de cuivre autour d'un noyau de fer doux, alimenté par un courant continu I_r . Il constitue le rôle d'**induit**.



Dans la suite, on étudie des machines à **excitation séparée**, c'est-à-dire que le rotor et le stator sont alimentés par **deux générateurs différents**. Les matériaux ferromagnétiques du stator et du rotor sont des MLHI de grande perméabilité. On considère également que l'épaisseur de l'entrefer est constante, dans le cadre de machines à pôles lisses : les spires du rotor sont alors encochées dans le noyau de fer. Enfin, on s'intéressera à nouveau au cas des machines bipolaires (une seule paire de pôles).

c) Applications



Manipulation

Machine de Gramme : présentation de la machine, montrer la réversibilité et la simplicité de commande de la vitesse de rotation.

Comme pour la machine synchrone, le fonctionnement d'une machine à courant continu est réversible. Citons notamment :

- en fonctionnement moteur : dans les systèmes mécaniques de petite taille (robotique); dans certaines lignes TGV (Paris Sud-Est), tramways, métro parisien, petit électroménager, etc... ;
- en fonctionnement générateur : les premières génératrices électriques, tachymètres, ...



La « dynamo » de vélo est en réalité un alternateur !

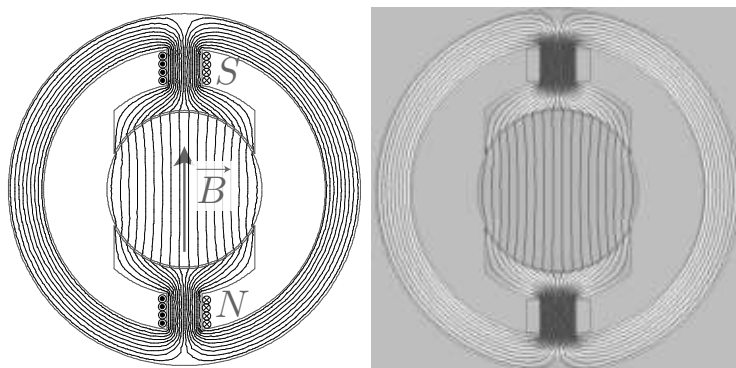
L'avantage majeur est relié à sa simplicité de contrôle de la vitesse en tension, du sens et du couple. Il n'est pas exempt de défauts : vitesse de rotation limitée (du fait des échauffement ; les balais ne font plus le contact avec création d'arcs électriques ; défretage du bobinage du rotor), et surtout l'usure des balais, conduisant à un entretien régulier. Les rendements peuvent être excellents, mais les moteurs bas de gamme ont des rendements de l'ordre de 30%.

IV.2 Description des champs et des actions mécaniques

On considèrera pour la suite une invariance par translation, de sorte à ne décrire à nouveau que ce qu'il se passe dans le plan (Oxy). On notera L la longueur de la machine selon l'axe (Oz).

a) Champ statorique

Observons une simulation de la carte de champ magnétique créé par le stator :



La distribution de courant possède un plan d'antisymétrie, le plan (Oyz) , appelé **plan neutre**. D'autre part le plan (Oxz) est un plan de symétrie de la distribution. Enfin, du fait de la grande perméabilité, on observe à nouveau que le champ magnétique est radial dans l'entrefer. Le champ magnétique est quasiment uniforme dans l'entrefer, les lignes de champ canalisées dans l'entrefer sont parallèles, on peut considérer que $\vec{B}_s = B_{0,s}\vec{e}_y$, soit plus précisément en lien avec le courant :

*

$$\vec{B}_s = kI_s\vec{e}_y \quad (3.66)$$

avec k une constante qui dépend de la géométrie, de la nature du matériau et du nombre de spires dans le bobinage inducteur.

Il ne s'agit pas d'un champ tournant, mais bien d'un champ fixe. Par analogie avec la machine synchrone, il faut donc que le champ magnétique rotorique soit également fixe, et de préférence de direction perpendiculaire au champ statorique pour maximiser le moment des forces électromagnétiques. C'est l'objet du collecteur.

b) Description du collecteur

On cherche à réaliser un champ magnétique rotorique orienté selon \vec{e}_x . Les enroulements rotoriques encochés sont disposés de la même façon que dans le cas du rotor synchrone : le rotor est donc également bipolaire. Malgré la rotation du rotor, on souhaite garder un champ de direction constante : il faut alors faire en sorte que les portions de spires contenues dans l'espace $y > 0$ soient traversées par un courant I_r dans la direction $+\vec{e}_z$, et celles pour $y < 0$ dans la direction $-\vec{e}_z$. Grâce au collecteur, on inverse le sens du courant des spires qui traversent le plan neutre, comme illustré précédemment.

*

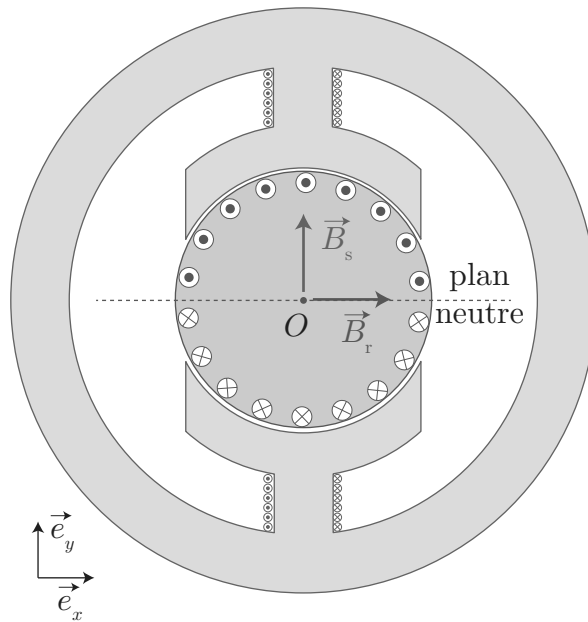
Pour une multitude de spires, le collecteur prend la forme suivante :



Des balais en charbon permettent le contact électrique au niveau de chaque lame du collecteur.

c) Champ rotorique

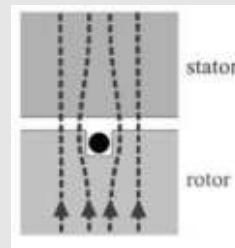
À l'aide du collecteur, on a donc à tout instant la configuration rotorique suivante :



Comme vu pour le moteur synchrone, il s'agit d'un champ approximativement sinusoïdal, mais de direction moyenne $+\vec{e}_x$, quelle que soit la position angulaire du rotor. Le collecteur permet ainsi d'être constamment en condition de synchronisme, à toute vitesse de rotation du rotor. Les champs statoriques et rotoriques étant orthogonaux, le couple électromagnétique est donc également maximal.



L'approche avec une spire effectuée en première année pourrait mener à confusion. En effet, le champ magnétique au niveau des spires du rotor est quasiment nul du fait de la canalisation des lignes de champ par les ferromagnétiques : la force de Laplace qui s'exerce donc sur les conducteurs est quasi-inexistante : l'action mécanique principale s'exerce sur le noyau de fer du rotor.



d) Couple électromécanique

Sans rentrer dans tous les calculs exacts, repartons de la formule établie pour la machine synchrone :

$$\Gamma = \frac{V}{2\mu_0} B_{rm} B_{sm} \sin \alpha \quad (3.67)$$

avec ici $\alpha = \pi/2$, $\Gamma = \Gamma_{\max}$. Tant que le ferromagnétique ne sature pas, $B_{rm} \propto I_r$, donc $\Gamma \propto I_r$, et on note de manière générale que :

$$\Gamma = \Phi_0 I_r \quad (3.68)$$

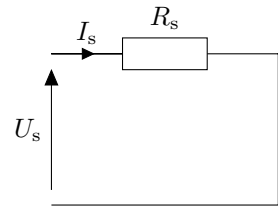
avec Φ_0 la **constante de couplage**, ou **constante électromagnétique** de la MCC, homogène à un flux magnétique, dépendant de la géométrie de la machine et du champ magnétique statorique. On constate donc que l'on peut **modifier très facilement le couple en modifiant le courant rotorique**.

N'ayant pas un champ sinusoïdal pour le stator, la formule précédente n'est pas exacte. On a néanmoins $\Gamma \propto I_r$. Si l'excitation est séparée, $\Phi_0 \propto I_s$ tant que le fer doux du stator n'est pas saturé, et devient constante lorsqu'il est saturé. Notons que dans le cas d'une excitation série, où stator et rotor sont alimentés par le même générateur, $\Gamma \propto I_r^2$: le couple fonctionne quel que soit le signe de I_r , en particulier on peut imaginer remplacer I_r par un courant sinusoïdal ! On parle alors de « moteur universel », que l'on rencontre régulièrement dans les appareils électroménagers, les perceuses, etc.

IV.3 Modélisation électrique

Au niveau du stator, la répartition spatiale des deux champs magnétiques est indépendante du temps, donc on n'a ni phénomène d'auto-induction, ni couplage par mutuelle. On a simplement une résistance parcourue par I_s :

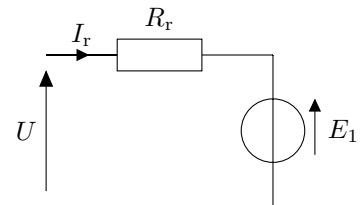
$$U_s = R_s I_s \quad (3.69)$$



Au niveau du rotor, ce dernier tourne dans le champ stationnaire du stator, le flux de celui-ci à travers le circuit rotorique est non nul. L'idée n'est pas de le calculer, on va plutôt utiliser des résultats énergétiques.

Notons qu'il n'y a pas en régime permanent de phénomène d'auto-induction, le circuit étant parcouru par un courant permanent I_r . On introduit à nouveau une f.c.ém $E = +\frac{d\Phi}{dt}$, en fonctionnement moteur :

$$U = R_r I_r + E \quad (3.70)$$



C'est pour cela que le **stator est l'inducteur**, et le **rotor est l'induit**, dans une MCC.

IV.4 Bilan énergétique

La démonstration est identique à celle d'un moteur synchrone, indiquons quelques équations-clés, en régime permanent :

- équation électrique sur la MCC :

$$\delta W_{\text{élec}} = (u I_r + U_s I_s) dt = (R_r I_r^2 + R_s I_s^2) dt + E I_s dt = \mathcal{P}_j dt + \mathcal{P}_{\text{fcém}} dt \quad (3.71)$$

- équation mécanique sur le rotor :

$$\delta W_{\text{méca,ext}} = \Gamma_{\text{op}} \Omega dt = \Gamma \Omega dt = \mathcal{P}_{\text{em}} dt \quad (3.72)$$

à partir de la loi du moment cinétique scalaire, en notant Ω la vitesse angulaire ;

- premier principe à la machine :

$$d\mathcal{E}_c + d\mathcal{E}_{\text{em}} = 0 = \delta W_{\text{méca,ext}} + \delta W_{\text{élec}} + \delta Q \quad (3.73)$$

soit avec $\delta Q = -\mathcal{P}_j dt$, en injectant les deux premières équations, il vient simplement :

$$\mathcal{P}_{\text{fcém}} = \mathcal{P}_{\text{em}} \iff \Gamma \Omega = E I_s \iff \Phi_0 I_s \Omega = E I_s \iff E = \Phi_0 \Omega \quad (3.74)$$

IV.5 Fonctionnement en régime permanent

a) Fonctionnement moteur

i) Caractéristique

En fonctionnement moteur, la f.c.ém absorbe de l'énergie électrique, et $\Gamma > 0$, $i > 0$. On part donc des équations fondamentales du moteur à courant continu :

$$\Gamma = \Phi_0 I_r \quad \text{et} \quad E = \Phi_0 \Omega \quad (3.75)$$



Exercice

Déterminer la caractéristique $\Gamma = f(\Omega)$ en fonction de U , Φ_0 et R_r .

Avec la loi des mailles $U = R_r I_r + E$, on injecte l'expression du courant dans le couple :

$$\Gamma = \Phi_0 I_r = \Phi_0 \left(\frac{U - E}{R_r} \right) \implies \Gamma = \frac{\Phi_0 U}{R_r} - \frac{\Phi_0^2 \Omega}{R_r} \quad (3.76)$$

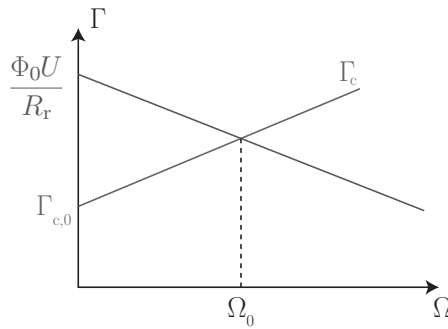
caractéristique affine, avec un couple à vitesse nulle non nul : il n'y a pas de problème de démarrage comme avec le moteur synchrone.

ii) Fonctionnement en charge

Supposons que le moteur soit relié à une charge imposant un couple résistant $\Gamma_c = \Gamma_{c,0} + \alpha\Omega$ (frottements secs + fluides). Une résolution graphique permet de déterminer le point de fonctionnement de la MCC en régime permanent, en particulier la vitesse de rotation. En effet, l'application de la loi du moment cinétique au rotor, de moment d'inertie J , s'écrit :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma - \Gamma_c \quad (3.77)$$

soit $\Gamma = \Gamma_c$ en régime permanent.



Exercice

Justifier que le point de fonctionnement est stable.
Même démo que le moteur synchrone !

Manipulation

Sur la machine de Gramme, alimentation du rotor avec alimentation stabilisée en tension : augmentation progressive de U et mise en mouvement passé un certain seuil, correspondant à $U > \frac{\Gamma_{c,0} R_r}{\Phi_0}$. Courant induit diminue. Avec la MCC à excitation séparée, stator = alim réglée en courant $I_s \simeq 0,6 \text{ A}$, $U_s \simeq 6 \text{ V}$, et même chose que Gramme pour le rotor.

Au démarrage, on constate qu'il faut dépasser une certaine tension $U > \frac{\Gamma_{c,0} R_r}{\Phi_0}$ pour que le couple de démarrage soit supérieur au couple de frottements secs. On observe également une surintensité par rapport au fonctionnement en régime nominal :

$$I(\Omega \neq 0) = \frac{U - \Phi_0 \Omega}{R_r} < I(\Omega = 0) = \frac{U}{R_r} \quad (3.78)$$

Exercice

Exprimer la relation affine entre la vitesse angulaire et la tension du rotor U , en fonction des paramètres constants du problème.

En régime permanent, on doit donc vérifier :

$$\Gamma_{c,0} + \alpha\Omega = \frac{\Phi_0 U}{R_r} - \frac{\Phi_0^2 \Omega}{R_r} \iff \Omega = \frac{1}{\Phi_0 + \frac{R_r \alpha}{\Phi_0}} U - \frac{\Gamma_{c,0}}{\frac{\Phi_0^2}{R_r} + \alpha} \quad (3.79)$$

Relation affine !

Manipulation

Augmenter la charge de la MCC, à tension d'induit constante. On observe un ralentissement, mais également une augmentation de I_r .

Contrôle d'une MCC

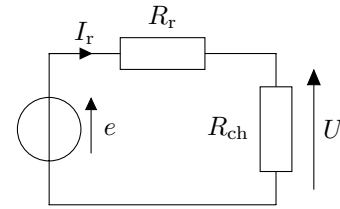
Pour une MCC en fonctionnement moteur, on modifie :

- *
 - la vitesse angulaire, à courant induit fixé I_r , en modifiant la tension U ;
 - le couple, à tension d'induit U fixée, en modifiant l'intensité I_r .

b) Fonctionnement en génératrice

Si la MCC fonctionne en mode générateur, on doit avoir une **force électromotrice** $e = -E > 0$, on utilise alors la convention générateur pour la fém induite.

D'après la relation $P_{em} = P_{fcem} = -P_{fem} = -eI_r < 0$, donc pour $\Omega > 0$, le couple des actions électromagnétiques est résistant $\Gamma < 0$, il faut donc appliquer à la génératrice un couple au niveau du rotor qui s'oppose à Γ . Avec un dipôle de charge R_{ch} , le circuit électrique est représenté ci-contre.



Les équations en fonctionnement génératrice sont donc :

$$e = \Phi_0 \Omega \quad \text{et} \quad \Gamma = -\Phi_0 I_r \quad (3.80)$$

IV.6 Rendement

Prenons le cas du fonctionnement moteur. La puissance utile est évidemment la puissance du couple des actions électromagnétiques $P_{em} = \Gamma \Omega$. La puissance fournie est la puissance fournie à l'inducteur et l'induit P_{elec} . En tenant compte des pertes fer et des pertes par frottements, on peut donc écrire le bilan global :

$$P_{fournie} = P_{elec} = P_J + P_{fer} + P_{frotts} + P_{em} \quad (3.81)$$

On appelle la somme $P_{fer} + P_{frotts}$ les **pertes collectives** de la machine.

$$* \quad \eta_{mot} = \frac{P_{em}}{P_{elec}} = 1 - \frac{P_J + P_{coll}}{P_{elec}} \quad (3.82)$$

On obtient couramment des valeurs supérieures à 80% en régime nominal. Pour la génératrice, c'est un peu différent, et il y a une subtilité :

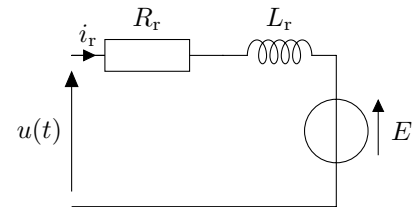
$$P_{fournie} = P_{méca,utile} + P_{elec,inducteur} = P_{J,induit} + P_{fer} + P_{frotts} + P_{elec,utile} \quad (3.83)$$

* Il ne faut pas oublier qu'on alimente le circuit inducteur pour que le phénomène d'induction ait lieu (on peut sinon utiliser des aimants permanents pour le stator). Donc le rendement se définit :

$$\eta_{gén} = \frac{P_{elec,utile}}{P_{méca,utile} + P_{elec,inducteur}} \quad (3.84)$$

IV.7 Étude en régime transitoire

Étudions brièvement le cas du régime transitoire d'une MCC, par exemple un moteur. On admet que la fcém s'écrit toujours $E = \Phi_0 \Omega$, même en régime transitoire. Comme $i_r(t)$ varie, il faut alors tenir compte de l'auto-induction dans le circuit rotorique, illustré sur le schéma ci-contre.



$$u(t) = R_r i_r(t) + L_r \frac{di_r}{dt} + E \quad (3.85)$$

Quant à l'équation mécanique, elle s'écrit :

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \Gamma - \Gamma_{c,0} - \alpha \Omega \quad (3.86)$$

On va utiliser le formalisme de Laplace pour étudier le régime transitoire. Pour simplifier l'étude, éliminons le couple constant de frottements secs. Les équations précédentes se traduisent par :

$$J\Omega(p)p = \Phi_0 I(p) - \alpha \Omega(p) \quad (3.87)$$

$$U(p) = (R_r + L_r p) I(p) + \Phi_0 \Omega \quad (3.88)$$

conduisant à la fonction de transfert :

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\Phi_0}{(pJ + \alpha)(R_r + pL_r) + \Phi_0^2} \quad (3.89)$$

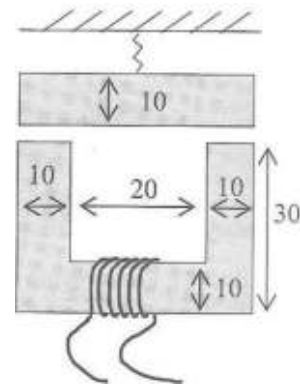
Il s'agit de la fonction de transfert associée à un passe-bas du 2e ordre, dont les réponses à des échelons de tensions sont connues, par exemple.

..

Exercices

3. 1 Electroaimant

On considère l'électroaimant suivant, dont les dimensions sont en mm. Sa profondeur dans la direction perpendiculaire au plan de la figure est de 10 mm. La perméabilité relative du noyau est de 1500. Le ressort maintient la partie mobile dans une position telle que l'on ait un entrefer de $e = 3$ mm.



1. Exprimer l'énergie E_{mag} emmagasinée par la bobine en fonction du flux ϕ à travers une section du circuit magnétique, du nombre de spires et du courant I qui la traverse.
2. Exprimer le champ magnétique B en un point de l'électroaimant.
3. Donner l'inductance en fonction de e .
4. Exprimer l'intensité F de la force de rappel en fonction de e .
5. Le ressort crée une force F_r égale à 5 N pour $e = 3$ mm. La bobine étant constituée de 200 spires, calculer l'intensité du courant pour que la partie mobile commence à effectivement se déplacer.
6. Quel est l'intérêt d'avoir un ressort pour ce type de contacteur ?

-
1. On a vu que l'énergie magnétique est reliée au flux total par $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \Phi_{\text{tot}} I = \frac{1}{2} N \Phi I$ en fonction du flux traversant chaque spire.
 2. On utilise le théorème d'Ampère sur une ligne moyenne de l'électroaimant :

$$H_{\text{fer}} \ell_{\text{fer}} + 2H_{\text{air}} e = NI \quad (3.90)$$

soit avec la conservation du flux magnétique au niveau de l'entrefer $B_{\text{air}} = B_{\text{fer}} = B$ et les relations constitutives :

$$B \left(\frac{\ell_{\text{fer}}}{\mu_0 \mu_r} + \frac{2e}{\mu_0} \right) = Ni \iff B = \frac{\mu_0 N I}{\frac{\ell_{\text{fer}}}{\mu_r} + 2e} \quad (3.91)$$

3. L'inductance vaut :

$$L = \frac{\Phi_{\text{tot}}}{i} = \frac{NBS}{I} = \frac{\mu_0 N^2 S}{\frac{\ell_{\text{fer}}}{\mu_r} + 2e} \quad (3.92)$$

4. À partir de l'énergie magnétique $E_{\text{mag}} = \frac{1}{2} LI^2$ et $F = \frac{\partial E_{\text{mag}}}{\partial e}$:

$$F = \frac{\mu_0 N^2 S I^2}{\left(\frac{\ell_{\text{fer}}}{\mu_r} + 2e \right)^2} \quad (3.93)$$

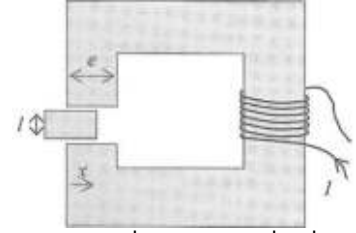
5. Pour que la partie mobile soit attirée, il faut que $F > F_r$, soit :

$$I > I_{\text{min}} = \left(\frac{\ell_{\text{fer}}}{\mu_r} + 2e \right) \frac{1}{N} \sqrt{\frac{F_r}{\mu_0 S}} = 5,98 \text{ A} \quad (3.94)$$

6. L'intérêt du ressort est qu'il permet à la pièce mobile de revenir à sa position initiale en l'absence de courant (sinon, du fait de l'aimantation résiduelle, elle peut rester collée).

3. 2 Oscillateur magnétique

Un milieu magnétique de perméabilité relative μ_r quasi-infinie de section carré constante de côté e contient un entrefer de largeur $\ell + \delta$ avec $\delta \ll \ell$ dans lequel peut se glisser une pièce de milieu identique, de masse m , de longueur e et de largeur ℓ . Une bobine contenant N spires et parcourue par un courant I enlace le milieu magnétique. On repère la pièce par la position $x(t)$. À l'instant $t = 0$, la pièce se trouve en $x(0) = e/4$ sans vitesse initiale.



Déterminer la période du mouvement. On supposera qu'il n'y a pas de frottement et on admettra que le champ magnétique est négligeable dans la partie de la pièce située hors de l'entrefer.

Il faut adopter la même démarche que dans l'exercice précédent, à savoir déterminer la force qui s'exerce sur la partie mobile, dans une configuration un peu différente.

Le théorème d'Ampère conduit, sur une ligne de champ passant par la pièce mobile (car elle canalise les lignes de champ) à :

$$\frac{B_{\text{fer}}}{\mu_0 \mu_r} \ell_{\text{fer}} + \frac{B_{\text{air}}}{\mu_0} \delta = Ni \quad (3.95)$$

L'hypothèse de l'énoncé que μ_r est quasi infinie permet de simplifier considérablement l'expression :

$$B_{\text{air}} = \frac{\mu_0 N i}{\delta} \quad (3.96)$$

On peut en déduire l'énergie magnétique, en négligeant l'énergie stockée dans les parties magnétiques, en considérant $x < e$:

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0} d\tau = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2\delta^2} \times e x \delta = \frac{\mu_0 N^2 I^2 e x}{2\delta} \quad (3.97)$$

associée à une force $\vec{F} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_I \vec{e}_x = \frac{\mu_0 N^2 I^2 e}{2\delta} \vec{e}_x$. Il s'agit d'une force constante, qui amène la partie mobile vers la droite avec un mouvement uniformément accéléré. Sauf que, lorsque $x > e$, la force magnétique change de signe, car l'énergie magnétique diffère dans son expression :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2\delta^2} \times e(2e - x)\delta = \frac{\mu_0 N^2 I^2 e(2e - x)}{2\delta} \Rightarrow \vec{F} = -\frac{\mu_0 N^2 I^2 e}{2\delta} \vec{e}_x \quad (3.98)$$

La force est donc la même en norme, mais pas en sens. L'application de la LQM au mobile dans un référentiel galiléen, en ne tenant compte que de la force électromagnétique, s'écrit donc :

$$m\ddot{x} = \pm \frac{\mu_0 N^2 I^2 e}{2\delta} \Leftrightarrow \ddot{x} = \pm \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\mu_0 N^2 I^2 e}{2m\delta} \quad (3.99)$$

le signe + lorsque $x < e$ et le signe - lorsque $x > e$. Il reste alors à intégrer cette équation et vérifier le caractère périodique :

$$\dot{x}(t) = \alpha t \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \frac{e}{4} \quad (3.100)$$

valable jusqu'à $t = t_1$ où $x(t_1) = e \Leftrightarrow \frac{1}{2} \alpha t_1^2 = \frac{3e}{4} \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{3e}{2\alpha}}$. On peut vérifier sans peine qu'on obtient dans un second temps, lorsque $x > e$:

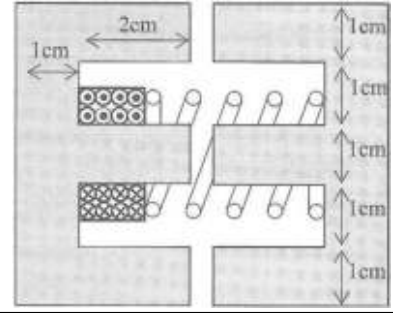
$$\dot{x} = \alpha(2t_1 - t) \quad \text{et} \quad x = -\frac{1}{2} \alpha(2t_1 - t)^2 + \frac{7e}{4} \quad (3.101)$$

Avec de l'audace, on pourrait dire que l'on a atteint une situation symétrique en $t = 2t_1$, où $x = \frac{7e}{4}$, c'est-à-dire qu'il y a $2e - x = \frac{e}{4}$ de la pièce encore dans l'entrefer, à vitesse nulle. On repart bien en sens inverse vers les x décroissants, et ainsi de suite, c'est périodique. D'où une période :

$$T = 2 \times 2t_1 = 4 \sqrt{\frac{3e}{2 \frac{\mu_0 N^2 I^2 e}{2m\delta}}} = \boxed{4 \sqrt{\frac{3m\delta}{\mu_0 N^2 I^2}}} \quad (3.102)$$

3. 3 Contacteur

On considère le contacteur ci-contre formé par deux noyaux identiques (permittivité $\mu_r = 1500$, de profil cubique et donc de profondeur 1 cm). La bobine est composée de $N = 100$ spires et parcourue par un courant I , la tension à ses bornes est notée u . La raideur du ressort est $k = 5 \text{ N.m}^{-1}$. Lorsqu'il n'y a pas de courant, l'entrefer mesure $e = 2 \text{ mm}$.



1. Déterminer le courant I pour fermer le contacteur.
2. Déterminer le courant I pour maintenir le contacteur fermé.

1. Il est nécessaire de connaître l'énergie magnétique contenue dans les trois entrefers, en négligeant l'énergie contenue dans le matériau ferromagnétique. En notant B_1 le champ magnétique dans les branches du dessus et du dessous (le même, par symétrie), et B_2 dans la branche centrale où la fmm est présente, servons-nous de la conservation du flux : $2B_1S = B_2S$, donc $2B_1 = B_2$. En notant $a = 1 \text{ cm}$, appliquons le théorème d'Ampère a une ligne de champ passant par la branche du dessus et celle centrale, orientée dans le sens trigonométrique :

$$\oint_{(\Gamma)} \vec{H} \cdot d\vec{r} = NI = \frac{B_1}{\mu_0\mu_r}\ell_1 + \frac{B_1}{\mu_0}x + \frac{B_2}{\mu_0\mu_r}\ell_2 + \frac{B_2}{\mu_0}x \quad (3.103)$$

en notant x (\vec{e}_x vers la droite) la largeur de chaque entrefer, $\ell_1 \simeq 9 \text{ cm}$ et $\ell_2 \simeq 5 \text{ cm}$. Ainsi on peut obtenir B_1 :

$$B_1 = \frac{\mu_0 NI}{\frac{\ell_1 + 2\ell_2}{\mu_r} + 3x} \quad (3.104)$$

L'énergie magnétique se calcule alors grâce à :

$$\mathcal{E}_{\text{mag}} = \frac{1}{2} N \Phi_{1,\text{spire}} I = \frac{NI}{2} B_2 S = NSI \frac{\mu_0 NI}{\frac{\ell_1 + 2\ell_2}{\mu_r} + 3x} \quad (3.105)$$

et donc la force électromagnétique vaut :

$$\vec{F} = \left(\frac{\partial \mathcal{E}_{\text{mag}}}{\partial x} \right)_I \vec{e}_x = - \frac{3\mu_0 N^2 I^2 S}{\left(\frac{\ell_1 + 2\ell_2}{\mu_r} + 3x \right)^2} \quad (3.106)$$

Lorsqu'il n'y a pas de courant, cette force est nulle, et le ressort est donc au repos. Ainsi la force élastique s'écrit $\vec{F}_{\text{el}} = k(e - x)\vec{e}_x$. Pour pouvoir fermer le contacteur, il faut donc vérifier pour toute valeur de x :

$$\frac{3\mu_0 N^2 I^2 S}{\left(\frac{\ell_1 + 2\ell_2}{\mu_r} + 3x \right)^2} > k(e - x) \iff I^2 > \frac{k}{3\mu_0 N^2 S} (e - x) \left(\frac{\ell_1 + 2\ell_2}{\mu_r} + 3x \right)^2 \quad (3.107)$$

soit en posant $f(x) = (e - x)(\alpha + 3x)^2$, avec $\alpha = \frac{\ell_1 + 2\ell_2}{\mu_r}$, on cherche la valeur maximale de f :

$$f'(x) = 0 = (\alpha + 3x)(6e - \alpha - 9x) \iff x_{\text{max}} = \frac{2e}{3} - \frac{\alpha}{9} \quad (3.108)$$

dont on peut montrer qu'il s'agit de la position du maximum, d'où :

$$f(x_{\text{max}}) = \left(\frac{e}{3} + \frac{\alpha}{9} \right) \left(2e + \frac{2\alpha}{3} \right)^2 = \frac{4}{3} \left(e + \frac{\alpha}{3} \right)^3 \quad (3.109)$$

d'où finalement :

$$I > I_{\text{min}} = \frac{2}{3N} \sqrt{\frac{k}{\mu_0 S} \left(e + \frac{\ell_1 + 2\ell_2}{3\mu_r} \right)^3} = 0,12 \text{ A} \quad (3.110)$$

2. Pour maintenir le contacteur fermé, il faut plus simplement que

$$F(x=0) > ke \iff \frac{3\mu_0 N^2 I^2 S}{\left(\frac{\ell_1 + 2\ell_2}{\mu_r} \right)^2} > ke \iff I > \frac{\ell_1 + 2\ell_2}{N\mu_r} \sqrt{\frac{ke}{2\mu_0 S}} = 6,2 \cdot 10^{-3} \text{ A} \quad (3.111)$$

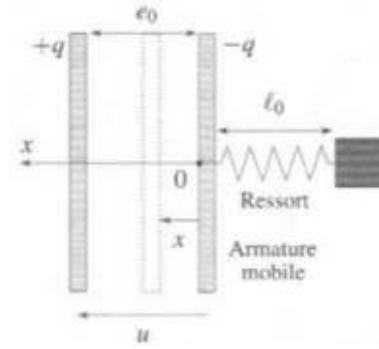
3. 4 Micro-actionneur électrostatique

On considère un condensateur formé de deux armatures planes, parallèles, de surface en regard S , séparées par de l'air assimilé à un isolant électrique représenté sur la figure ci-contre.

Une des deux armatures est fixe, la seconde, qui peut se translater suivant l'axe (Ox) , est reliée à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . L'autre extrémité du ressort est attachée à un support fixe.

Le dipôle formé par le condensateur est relié à une source de tension, non représentée sur la figure, qui impose la tension u à ses bornes. On fixe l'origine O des abscisses à la position de l'armature lorsque le ressort a pour longueur ℓ_0 et on désigne par x le déplacement de l'armature mobile par rapport à O . Lorsque $x = 0$ les deux armatures sont distantes de e_0 .

La figure indique l'armature portant la charge $+q$ et celle portant la charge $-q$. On néglige la résistance des conducteurs ainsi que toutes les forces de frottement.



- Rappeler l'expression de la capacité d'un condensateur plan et en déduire les expressions de la capacité du condensateur ainsi que de l'énergie électromagnétique stockée en fonction de x et des paramètres utiles du problème. On suppose que le conducteur évolue dans le cadre de l'ARQS électrique. Justifier que les expressions précédentes soient encore applicables.
- Lorsque le condensateur à armature mobile reçoit de l'énergie électrique δW_e , il s'opère une conversion électromécanique de l'énergie qui permet de communiquer à la partie mobile le travail mécanique δW_m de la force motrice F , exercée par l'armature fixe. Afin de déterminer F , on applique un bilan d'énergie au système formé des deux armatures du condensateur. On envisage une transformation élémentaire du système au cours de laquelle il reçoit de l'extérieur l'énergie électrique δW_e et l'énergie mécanique $\delta W_{m,ext}$.
 - L'énergie E du condensateur étant égale à la somme de son énergie cinétique E_c et de son énergie électromagnétique E_{em} , montrer qu'un bilan d'énergie appliqué au système au cours de la transformation conduit à l'égalité $\delta W_e = \delta W_m + dE_{em}$.
 - Exprimer la relation entre δW_m et F puis montrer qu'au cours de cette transformation, la source de tension fournit au condensateur le travail électrique $\delta W_e = u dq$.
 - En déduire que la force F se déduit de l'énergie électromagnétique par la relation $F = \left(\frac{dE_{em}}{dx} \right)_u$ et calculer F en fonction de x .
- Montrer que la position $x = e_0$ correspond à une position d'équilibre stable mathématiquement évidente mais irréaliste. En pratique on colle un cale isolante de faible épaisseur e_1 et de surface S sur une armature du condensateur. Pourquoi ?
- Tracer sur un même graphe les normes des forces exercées par le ressort et par la force F pour $0 < x < e_0$ en distinguant les différentes positions relatives des deux courbes. En déduire l'existence et la stabilité des positions d'équilibres de l'armature mobile.
- Montrer qu'il existe une tension critique que l'on notera U_{c1} au-dessus de laquelle il n'y a pas d'autre position d'équilibre que $x = e_0$. Déterminer U_{c1} et la position d'équilibre limite correspondante.
- Pour une pression de 1 bar et une épaisseur $e_0 = 1.10^{-3}$ m, la tension de claquage du condensateur est de l'ordre de 10 V. Calculer l'ordre de grandeur de la force minimale par cm^2 que peut développer cet actionneur.

-
- $C = \frac{\epsilon S}{e}$ avec e l'épaisseur du condensateur et S la surface d'une électrode. Ainsi ici $C = \frac{\epsilon_0 S}{e_0 - x}$. L'énergie électromagnétique stockée dans le condensateur vaut alors :

$$E_{em} = \frac{1}{2} C u^2 = \frac{\epsilon_0 S U^2}{2(e_0 - x)} \quad (3.112)$$

Dans le cadre de l'ARQS électrique, les relations pour le champ électriques sont identiques à celles du cas électrostatique. Par conséquent, les résultats obtenus pour le condensateur en statique sont toujours valables.

- (a) Pour le système constitué des deux armatures, appliquons le premier principe, en supposant que la température est constante, donc l'énergie interne est constante :

$$dE_c + dE_{em} = \delta W_{m,ext} + \delta W_e + \delta Q \quad (3.113)$$

Puis en écrivant le théorème de l'énergie cinétique à l'armature mobile :

$$dE_c = \delta W_{m,ext} + \delta W \quad (3.114)$$

Enfin avec $\delta Q = 0$ (on n'envisage pas de transferts thermiques, pas de courants), les deux équations précédentes permettent d'avoir :

$$\delta W_m + dE_{em} = \delta W_e \quad (3.115)$$

(b) On a $\delta W_m = \vec{F} \cdot d\vec{r} = Fdx$. Concernant le travail électrique :

$$\delta W_e = u idt = u \frac{dq}{dt} dt = u dq \quad (3.116)$$

En regroupant les morceaux :

$$dE_{em} = -Fdx + u dq \Rightarrow F = - \left(\frac{\partial E_{em}}{\partial x} \right)_q \quad (3.117)$$

Cependant ce n'est pas l'expression demandée, il faut aller plus loin :

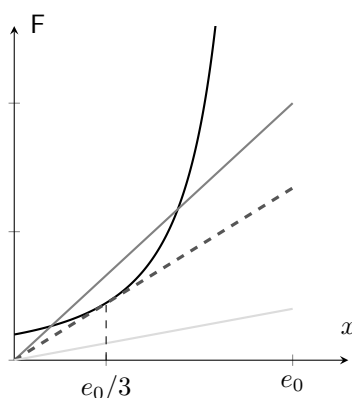
$$dE_{em} = d\left(\frac{1}{2}qu\right) = \frac{1}{2}qdu + \frac{1}{2}udq \Leftrightarrow udq = -qdu + 2dE_{em} \quad (3.118)$$

que l'on réinjecte dans l'expression précédente :

$$dE_{em} = -Fdx - qdu + 2dE_{em} \Leftrightarrow dE_{em} = Fdx + qdu \Rightarrow F = \left(\frac{\partial E_{em}}{\partial x} \right)_u \quad (3.119)$$

(c) Ainsi la force s'écrit-elle $\vec{F} = -\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2(e_0 - x)^2} \vec{e}_x$.

3. La force électrostatique tend vers l'infini, tout en ayant un mouvement bloqué par l'autre armature, c'est donc stable. D'une part ce n'est pas très réaliste d'avoir deux surfaces parfaitement parallèles sur toute leur longueur, et si les conducteurs sont en contact, le modèle de condensateur n'est plus valide. D'autre part, on ne pourrait plus les décoller, d'où la cale.
4. La force exercée par le ressort est $F_r = kx$. L'allure est donc la suivante :



4. (suite) On constate donc qu'il existe une valeur de U (ou de k , en l'occurrence c'est le paramètre que j'ai modifié) de sorte à avoir deux intersections, une seule (tangente) ou aucune intersection. On peut montrer sans peine qu'avec les deux intersections, celle de gauche est stable.
5. On cherche la condition pour ne plus avoir d'intersection. Plaçons-nous donc dans le cas limite où la courbe est tangente. On doit alors vérifier $F = kx$ et $\frac{dF}{dx} = k$:

$$\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2(e_0 - x)^2} = kx \quad \text{et} \quad \frac{\varepsilon_0 S U^2}{(e_0 - x)^3} = k \quad (3.120)$$

dont le quotient conduit immédiatement à $x = \frac{e_0}{3}$, soit

$$U_{c,1} = \sqrt{\frac{k \left(e_0 - \frac{e_0}{3} \right)}{\varepsilon_0 S}} = \sqrt{\frac{8ke_0^3}{27\varepsilon_0 S}} \quad (3.121)$$

6. On calcule donc la force surfacique :

$$\frac{F}{S} = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2e_0^2} = 4,4 \cdot 10^{-4} \text{ Pa} = 4,4 \cdot 10^{-8} \text{ N} \cdot \text{cm}^{-2} \quad (3.122)$$

3. 5 Machine synchrone fonctionnant en alternateur et en moteur

Soit une machine synchrone bipolaire diphasée à rotor bobiné. On considère une des phases (bobines) du stator et l'on note α et φ (supposés indépendants de la phase choisie) respectivement le déphasage de la f.c.m. $e(t)$ et de la tension $u(t)$ par rapport à l'intensité $i(t)$. Soit R et L la résistance et l'inductance de chacun des enroulements du stator avec $R = 0,9 \Omega$. Le schéma électrique de la phase étudiée est celui du cours.

1. La machine fonctionne en alternateur.

- On fait un premier essai à vide à la vitesse de rotation ω : tension efficace $U_V = 220 \text{ V}$; courant d'excitation $I_{EV} = 4,0 \text{ A}$;
- on fait un second essai en court-circuit à la vitesse de rotation ω : courant d'excitation $I_{ECC} = 1,0 \text{ A}$; courant en ligne $I_{CC} = 3,5 \text{ A}$.

- (a) Que signifie ici "essai à vide" et "essai en court-circuit" ? À quels courants correspondent les appellations "courant de ligne" et "courant d'excitation" ?
- (b) Montrer que la f.c.e.m. induite dans une bobine du stator se met sous la forme $e(t) = E\sqrt{2}\sin(\omega t)$ avec $E = KI_E\omega$.
- (c) Avec l'essai à vide, déterminer le produit $K\omega$.
- (d) Avec l'essai en court-circuit, déterminer la réactance $L\omega$. Montrer que $R \ll L\omega$. On négligera R dans la suite.

2. La machine fonctionne en moteur. En régime nominal, chaque phase fonctionne sous une tension efficace $U = 190 \text{ V}$ et de fréquence 50 Hz ; le stator absorbe une puissance $P = 1,0 \text{ kW}$ avec un facteur de puissance $\cos \varphi = 0,87$. On néglige les frottements mécaniques.

- (a) Calculer l'intensité efficace en ligne I .
- (b) En faisant un bilan de puissance, calculer le moment du couple électromagnétique appliqué à l'arbre du moteur.
- (c) Tracer le diagramme de Fresnel relatif au courant et à la tension dans le cas où $\varphi > 0$.
- (d) Déterminer la valeur efficace E de la f.e.m.
- (e) Établir la relation $U \cos \varphi = E \cos \alpha$.

-
1. (a) Un essai à vide correspond au fait que l'on ne branche rien aux bornes de l'induit, le courant est nul ; l'essai en court-circuit revient à brancher à un fil, on impose alors une tension nulle dans l'induit. On parle de courant d'excitation pour le courant dans le rotor, et le courant de ligne est donc celui dans le stator.

- (b) Comme $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ avec $\Phi \propto B_r \propto I_e$, avec B_r sinusoïdal de pulsation ω , $\frac{d\Phi}{dt} \propto I_e\omega$, d'où la proposition d'écriture donnée.

- (c) À vide, $u = Ri + L\frac{di}{dt} + e = e$ car le courant est nul, donc u et e sont en phase, et les amplitudes sont égales :

$$KI_{EV}\omega = U_V \iff K\omega = \frac{U_V}{I_{EV}} = 55 \Omega \quad (3.123)$$

- (d) On a cette fois $u = 0 = Ri + L\frac{di}{dt} + e$ soit en notations complexes :

$$(R + jL\omega)\underline{i} = -\underline{e} \implies \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}I_{CC} = K\omega I_{ECC} \iff L\omega = \sqrt{\left(\frac{K\omega I_{ECC}}{I_{CC}}\right)^2 - R^2} = 15,7 \Omega \gg R \quad (3.124)$$

2. (a) Une phase du stator absorbe la puissance $P/2$, d'où $I = \frac{P/2}{U \cos \varphi} = 3 \text{ A}$.

- (b) En moyenne, toute la puissance électrique reçue par le rotor est convertie en énergie thermique (effet Joule) et en puissance mécanique (en négligeant les frottements et les pertes fer), d'où :

$$P = 2RI^2 + \Gamma\omega \iff \Gamma = \frac{P - 2RI^2}{\omega} = 3,1 \text{ N}\cdot\text{m} \quad (3.125)$$

et $\Gamma = 3,2 \text{ N}\cdot\text{m}$ en négligeant R .

- (c) Cf. cours, identique (on peut juste enlever la tension aux bornes de la résistance).

(d) Avec cette approximation $\underline{E} \simeq \underline{U} - jL\omega \underline{I}$ soit en écrivant vectoriellement cette différence, on en déduit la norme :

$$E = \sqrt{(U \cos \varphi)^2 + (U \sin \varphi - L\omega I)^2} = 172 \text{ V} \quad (3.126)$$

(e) On reprend l'équation précédente :

$$Ee^{j\alpha} = Ue^{j\varphi} - jL\omega I \quad (3.127)$$

soit en prenant la partie réelle, on obtient bien $E \cos \alpha = U \cos \varphi$ (c'est aussi la projection de \underline{U} et \underline{I} sur \underline{I}).

3. 6 Alternateur connecté à un réseau de distribution

Chaque phase de l'induit d'un alternateur est connectée au réseau de distribution afin de fournir une certaine puissance électrique. On étudie une des phases qu'on modélise par une inductance propre L , une résistance R et une force électromotrice induite par la rotation du rotor. L'alternateur étant connecté à un réseau de distribution de grande dimension et comportant d'autres éléments de production, la tension $u(t)$ aux bornes de la phase étudiée est fixée et servira de référence de phase : $u(t) = U\sqrt{2}\cos(\omega t)$.

L'intensité circulant dans la phase, indéterminée à ce stade, est notée $I\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$.

La f.e.m. induite peut être réglée par un courant d'excitation continu I_e circulant dans l'inducteur (circuit associé au rotor). Elle est notée $e(t) = E_e\sqrt{2}\cos(\omega t + \delta)$ avec $E_e = KI_e$, où K est une constante et où δ est l'angle de décalage interne.

1. Exprimer la puissance moyenne \mathcal{P} produite par une phase de l'alternateur en fonction de U_e , I_e et φ . À quelle condition cette puissance est-elle positive ? À puissance fixée, pourquoi vaut-il mieux chercher à augmenter le facteur de puissance $\cos \varphi$ dans une problématique de transport de l'énergie ?
2. D'une façon générale, on note $\underline{X} = X_e\sqrt{2}e^{j\alpha}$ l'amplitude complexe associée à la fonction sinusoïdale $x(t) = X_e\sqrt{2}\cos(\omega t + \alpha)$. Exprimer, en notation complexe, la loi des mailles associée à l'induit.
3. Dans la suite, on négligera la chute de tension à travers la résistance R . Sur un diagramme de Fresnel, représenter les images de \underline{U} , \underline{I} , \underline{E} et $jL\omega \underline{I}$ dans le cas $\varphi \in [0, \pi/2]$.
4. La puissance \mathcal{P} produite par une phase de l'alternateur est égale à la puissance mécanique de la turbine entraînant le rotor, divisée par le nombre de phases. À \mathcal{P} fixée, déterminer les lieux possibles de l'image de \underline{E} dans le plan de Fresnel pour différentes valeurs de I_e . Pour une valeur initiale de I_e conduisant à $\varphi \in [0, \pi/2]$, dans quel sens faut-il modifier l'excitation I_e pour relever le facteur de puissance ?
5. À \mathcal{P} fixée, en négligeant les pertes, déterminer le courant d'excitation I_e pour obtenir le facteur de puissance optimal $\cos \varphi = 1$. Que vaut alors δ ?

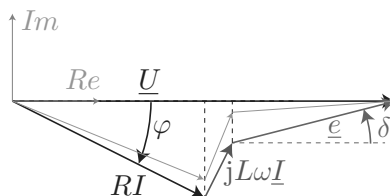
1. On a $\mathcal{P} = \langle u(t)i(t) \rangle = UI \cos \varphi$. Elle est positive à condition que $\varphi \in [-\pi/2; \pi/2]$. À puissance fixée, plus $\cos \varphi$ est important, moins le courant appelé est grand, à tension également imposée. Cela signifie moins de pertes en ligne.

2.

$$u(t) = Ri + L \frac{di}{dt} + e(t) \Rightarrow U = RI_e e^{-j\varphi} + L\omega I_e e^{j(\pi/2 - \varphi)} + E_e e^{j\delta} \quad (3.128)$$

3. Cf. ci-après

4. Comme \mathcal{P} et $u(t)$ sont fixés, $I_e \cos \varphi = \text{cte}$, donc la projection de $R\underline{I}$ sur l'axe des abscisses est constante, donc seules les extrémités des vecteurs peuvent se déplacer :



Il faut donc diminuer I_e pour augmenter le facteur de puissance.

5. Avec $\cos \varphi = 1$, $i(t)$ est en phase avec u . On obtient alors géométriquement :

$$\tan \delta = \frac{L\omega I_e}{U_e} = \frac{L\omega \mathcal{P}}{U_e^2} \quad \text{et} \quad KI_e = \sqrt{U_e^2 + \left(\frac{L\omega \mathcal{P}}{U_e}\right)^2} \quad (3.129)$$

3. 7 Traction et freinage d'un véhicule électrique par une machine synchrone

On étudie un moteur synchrone diphasé, bipolaire, dont on cherche à déterminer les principaux paramètres.

Le circuit rotorique est parcouru par le courant d'excitation continu d'intensité I_e maintenu constant.

Le circuit statorique est alimenté par un onduleur de courant commandé qui impose dans les deux phases des courants sinusoïdaux de pulsation ω , déphasés de $\pi/2$, de valeurs efficaces identiques égales à I . Cet onduleur, non étudié ici, est alimenté par une batterie et l'électronique de commande est pilotée par un ordinateur.

Un ensemble de sondes positionnées dans la machine permettent par la mesure du champ magnétique de déterminer la position angulaire du rotor. De même, deux capteurs de courant permettent de déterminer toutes les propriétés du courant dans chaque phase. Un ordinateur inclus dans le dispositif d'autopilotage, non étudié, analyse ces données et génère la commande adéquate de l'onduleur de courant permettant de fixer l'angle d'autopilotage ψ . On supposera en outre que les matériaux magnétiques constituant la machine sont idéaux.

1. Paramètres de la machine

- (a) En régime permanent de rotation quelle est la relation entre la vitesse Ω de rotation du rotor et ω ?
- (b) On désigne par L l'inductance d'une phase et on néglige la résistance des enroulements. En régime permanent de rotation, on note \underline{U} la représentation complexe de la tension d'alimentation de la phase, \underline{I} celle de l'intensité du courant et \underline{E} celle de la force contre-électromotrice. Rappeler le schéma électrique d'une phase en fonctionnement moteur et en fonctionnement alternateur.
- (c) La valeur efficace de la force contre-électromotrice s'écrit sous la forme $E = \phi\omega$. Que représente la grandeur ϕ ? De quels paramètres dépend-elle ?
- (d) Afin de mesurer ϕ , on réalise un essai en circuit ouvert, le rotor de la machine synchrone étant entraîné par un moteur auxiliaire à la vitesse de $6,0 \cdot 10^3 \text{ tr.min}^{-1}$. On mesure la tension efficace aux bornes d'une phase égale à $1,2 \cdot 10^2 \text{ V}$. Calculer la valeur de ϕ .
- (e) Pour mesurer la valeur de l'inductance d'une phase, on réalise un essai en court-circuit, le rotor étant toujours entraîné par le moteur auxiliaire à $6,0 \cdot 10^3 \text{ tr.min}^{-1}$. Le dipôle de sortie d'une phase étant court-circuité, la mesure de l'intensité efficace du courant de court-circuit dans une phase donne la valeur $I_{cc} = 1,2 \cdot 10^2 \text{ A}$. Calculer l'inductance L d'une phase.

2. Traction du véhicule

Le véhicule électrique est une navette de masse voisine de 800 kg, qui doit être capable de monter une pente de 10% à la vitesse constante de 50 km.h⁻¹.

- (a) En supposant que la puissance perdue à cause des frottements de l'air et des pertes dans les transmissions mécaniques à cette vitesse est de l'ordre de 3 kW, estimer la puissance que doit développer le moteur afin de maintenir la vitesse du véhicule constante.
En régime permanent de rotation à la vitesse ω , on rappelle que l'angle d'autopilotage ψ représente le déphasage de \underline{E} par rapport à \underline{I} . On étudie un régime nominal de rotation du moteur à la vitesse $6,0 \cdot 10^3 \text{ tr.min}^{-1}$. Lors de ce régime, la commande de l'onduleur impose $\psi = -\pi/3$ et le moteur doit développer une puissance mécanique nominale de $\mathcal{P}_m = \Gamma_N \Omega_N = 15 \text{ kW}$ où Γ_N désigne le couple électromagnétique nominal.
- (b) Déterminer la puissance électromagnétique et en déduire la valeur efficace de l'intensité du courant dans chaque phase.
- (c) Déterminer la valeur efficace de la tension d'alimentation.
- (d) À $6,0 \cdot 10^3 \text{ tr.min}^{-1}$, le couple utile délivré à la charge mécanique vaut $\Gamma_{ut} = 23 \text{ N.m}$. Calculer le rendement du moteur.

3. Freinage du véhicule

- (a) Le véhicule électrique dévale une pente de 10% à vitesse constante 50 km/h. Estimer la puissance de freinage que la machine synchrone doit appliquer au véhicule afin de maintenir sa vitesse constante en tenant compte des pertes mécaniques du **2)a**).
- (b) En régime nominal de rotation à $6,0 \cdot 10^3 \text{ tr/min}$, la commande de l'onduleur impose $\psi = \pi/3$, ψ étant le déphasage de \underline{E} par rapport à \underline{I} , les deux étant définis en convention générateur. Déterminer la puissance électromagnétique que fournit l'alternateur à sa charge électrique et en déduire la valeur efficace de l'intensité dans chaque phase.
- (c) Déterminer la valeur efficace de la tension délivrée par chaque phase de l'alternateur.

1. (a) $\Omega = \omega$.
- (b) Cf. cours.
- (c) ϕ correspond à un flux, en weber. Il dépend de la géométrie de la machine, de la forme de l'enroulement inducteur et du courant inducteur I_e . Ce courant étant maintenu constant, on peut considérer que ϕ est une constante.
- (d) On fait fonctionner la machine en alternateur, en circuit ouvert. Dans ce cas le courant dans une phase est nul, et la tension mesurée est $e = -E$ (fém). Ainsi en terme de grandeur efficace, $\phi = \frac{U_{\text{eff}}}{\omega} = 0,19 \text{ Wb}$.
- (e) Si la phase est court-circuitée, on impose alors $L \frac{di}{dt} + e = 0$, soit en termes de grandeur efficaces :

$$L\omega I_{\text{cc}} = \phi\omega \iff L = \frac{\phi}{I_{\text{cc}}} = 1,6 \text{ mH} \quad (3.130)$$

la valeur efficace de la fém étant inchangée, comme la vitesse de rotation est constante.

2. (a) Lors de l'ascension, le poids développe une puissance de freinage $mgv \sin \alpha$, avec ici une pente de 10% soit $\sin \alpha = 0,1$. D'où une puissance totale à fournir :

$$P_{\text{tot}} = mgv \sin \alpha + P_{\text{pertes}} = 14 \text{ kW} \quad (3.131)$$

- (b) Étant donné l'idéalité de la machine (pas de pertes fer), on a donc $P_{\text{em}} = P_{\text{méca}} = 15 \text{ kW}$. Par phase :

$$P_{\text{phase}} = \frac{P_{\text{em}}}{2} = \Re(\underline{EI}) = EI \cos \psi \iff I = \frac{P_{\text{em}}}{2E \cos \psi} = 126 \text{ A} \quad (3.132)$$

avec $E \simeq 1,2 \cdot 10^2 \text{ V}$ à la vitesse de rotation nominale.

- (c) À partir d'une loi des mailles en complexes, en prenant comme origine des phases la fém :

$$\underline{u} = jL\omega \underline{I} + \underline{E} = (L\omega I \sqrt{2} e^{j(\pi/2 - \psi)} + E \sqrt{2}) e^{j\omega t} \quad (3.133)$$

$$\implies U = \sqrt{(E + L\omega \cos(\pi/2 - \psi))^2 + (L\omega \sin(\pi/2 - \psi))^2} = 64 \text{ V} \quad (3.134)$$

On peut aussi utiliser le diagramme de Behn-Eschenburg et travailler géométriquement.

- (d) La puissance utile est donc $P_{\text{ut}} = \Gamma_{\text{ut}} \Omega = 14,4 \text{ W}$, soit un rendement $\eta = \frac{P_{\text{ut}}}{P_{\text{méca}}} = 96\%$.

3. (a)

$$P_{\text{freinage}} = mgv \sin \alpha - P_{\text{pertes}} = 8 \text{ kW} \quad (3.135)$$

en tenant compte du fait que naturellement le véhicule est freiné.

- (b) On refait le même raisonnement qu'en 2) :

$$P_{\text{phase}} = \frac{P_{\text{em}}}{2} = \Re(\underline{EI}) = EI \cos \psi \iff I = \frac{P_{\text{freinage}}}{2E \cos \psi} = 67 \text{ A} \quad (3.136)$$

- (c) Situation exactement similaire à ce qui précède, hormis le fait que I est en avance sur E . On trouve la même expression, et numériquement $U = 70 \text{ V}$.

3. 8 Identification d'un moteur à courant continu

On s'intéresse ici à un ensemble constitué d'un moteur à courant continu à excitation séparée et d'une charge mécanique tous deux montés sur un même arbre. On note J le moment d'inertie du rotor.

1. On postule pour la charge la caractéristique couple-vitesse $C_r = -\alpha\omega$ avec α une constante positive.

Interpréter le signe de α . Exprimer la transmittance $T_m(p) = \frac{\Omega(p)}{C(p)}$ avec $\Omega(p)$ la vitesse angulaire et $C(p)$ le couple moteur.

2. On désire déterminer expérimentalement les paramètres J et α . Pour ce faire, on effectue deux essais :

- Essai 1. Pour différentes valeurs de couple magnétique C appliqué, on mesure, après établissement du régime permanent, la valeur ω de la vitesse angulaire. On obtient les résultats suivants :

Couple C (N.m)	5	10	15
Vitesse ω (rad.s ⁻¹)	50	100	150

- Essai 2. Lorsque la charge est en rotation à vitesse angulaire ω_0 , on applique un couple magnétique C nul à partir de l'instant $t = 0$ et on mesure le temps T_0 au bout duquel la vitesse ne vaut plus que 50 % de sa valeur initiale ω_0 . Pour $\omega_0 = 150 \text{ rad.s}^{-1}$, on a mesuré $T_0 = 10,4 \text{ s}$.

Déterminer α et J . Dans l'essai 2, si l'on modifie la valeur initiale ω_0 , comment doit se trouver modifié T_0 si le modèle est correct ?

3. La loi $C_r = -\alpha\omega$ rend-elle compte de l'arrêt de la machine au bout d'un temps T_1 ? On a mesuré $T_1 = 42$ s. Proposer une correction à la loi liant C_r à ω pour pallier ce problème. Calculer numériquement le ou les coefficients introduits à cet effet, en conservant les valeurs précédemment obtenues pour J et α .
- Le nouveau modèle est-il en contradiction avec les résultats de l'essai 1 ?

1. La loi du moment cinétique appliqué au rotor conduit, en notant C le couple moteur à :

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\alpha\omega + C \implies pJ\Omega(p) = -\alpha\Omega(p) + C \iff T_m(p) = \frac{1}{\alpha + pJ} \quad (3.137)$$

2. En régime permanent, on a donc $T = \frac{1}{\alpha}$ soit $\alpha = 0,10 \text{ kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$ (en prenant n'importe laquelle des valeurs de l'essai 1). D'après l'essai 2, on étudie le régime transitoire, du type $\omega(t) = \omega_0 e^{-t/\tau}$, avec $\tau = \frac{J}{\alpha}$. Lorsqu'on trouve la moitié de la valeur initiale, on atteint un temps $T_0 = \tau \ln 2 = \frac{J}{\alpha} \ln 2$ d'où $J = \frac{\alpha T_0}{\ln 2} = 1,5 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$. T_0 n'est pas modifié si on change la valeur initiale de ω_0 !
3. Non, car théoriquement le moteur ne s'arrête pas avec un couple de frottements fluide (du moins pas en un temps fini). On peut proposer $C_r = -C_0 - \alpha\omega$. On a donc l'équation différentielle :

$$J \frac{d\omega}{dt} + \alpha\omega = -C_0 \iff \tau \dot{\omega} + \omega = -\frac{C_0}{\alpha} \quad (3.138)$$

dont la résolution conduit à

$$\omega(t) = -\frac{C_0}{\alpha} + \left(\omega_0 + \frac{C_0}{\alpha}\right) e^{-t/\tau} \quad (3.139)$$

Le moteur s'arrête lorsque $\omega = 0$, c'est-à-dire pour T_1 vérifiant

$$\left(\omega_0 + \frac{C_0}{\alpha}\right) e^{-T_1/\tau} = \frac{C_0}{\alpha} \iff \frac{\omega_0 \alpha}{C_0} + 1 = e^{T_1/\tau} \iff C_0 = \frac{\omega_0 \alpha}{e^{T_1/\tau} - 1} = 0,97 \text{ N}\cdot\text{m} \quad (3.140)$$

Le nouveau modèle est en contradiction, car en régime permanent, $\alpha\omega = C - C_0$, c'est-à-dire que α est une fonction affine du couple, or les valeurs obtenues permettent d'écrire une relation linéaire.

3. 9 Moteur à excitation série

Un moteur continu à excitation série (l'inducteur et l'induit sont en série) est alimenté par une source de tension continue $U = 220$ V. On note I l'intensité dans l'induit. On néglige toutes les pertes.

- Déterminer la dépendance du couple du moteur en fonction de l'intensité qu'il consomme, puis en fonction de la vitesse de rotation.
- Que se passe-t-il si le moteur fonctionne à vide ?
- Le couple utile s'écrit $\Gamma = \frac{a}{\Omega^2}$ avec a une constante et Ω la vitesse de rotation. Sur la notice du moteur, on lit : 220 V ; 1200 tr/min / 6,8 A. En déduire la valeur numérique de la constante a .
- Le moteur entraîne un compresseur de couple résistant constant 10 N.m. En déduire la vitesse de rotation de l'ensemble.
- Le moteur entraîne un ventilateur dont le couple résistant est proportionnel au carré de la vitesse de rotation. (15 N.m à 1500 tr/min). En déduire la vitesse de rotation de l'ensemble.

- Comme $\Gamma = \Phi_0 I$, avec $\Phi_0 \propto B_s \propto I$, $\Gamma \propto I^2$. De plus, $E = \Phi_0 \Omega \propto I \Omega$ donc $\Gamma \propto \frac{1}{\Omega^2}$.
- S'il fonctionne à vide, il n'y a pas de couple de charge, donc il s'emballerait et $\Omega \rightarrow +\infty$ (jusqu'à ce qu'il y ait des limitations bien sûr).
- Comme $a = \Gamma \Omega^2 = (\Gamma \Omega) \Omega = E I \Omega = U I \Omega = 1,9 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^2\cdot\text{s}^{-2}$ dans la mesure où on ne considère pas de pertes, donc de résistances des bobinages.
- En régime permanent, couple utile et résistant sont égaux, donc $\Omega = \sqrt{\frac{a}{\Gamma_{\text{res}}}} = 137 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 1,31 \cdot 10^3 \text{ tours/min}$.
- Le couple résistant se met sous la forme $\Gamma_r = \alpha \Omega^2$ avec $\alpha = \frac{15}{\left(\frac{1500}{60} \times 2\pi\right)^2} = 6,08 \cdot 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}^2\cdot\text{rad}^{-2}$. D'où $\frac{a}{\Omega^2} = \alpha \Omega^2$ soit $\Omega = \left(\frac{a}{\alpha}\right)^{1/4} = 133 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} = 1,27 \cdot 10^3 \text{ tours/min}$.

3. 10 Plaque signalétique d'un moteur à courant continu

Sur la plaque signalétique d'un moteur à courant continu à excitation séparée, on peut lire :

1,12 kW	1200 tr/min	
induit	220 V	5,7 A
excitation	220 V	0,3 A
57 kg		

1. Calculer le couple utile nominal et la résistance de l'induit.
2. Calculer le rendement nominal et la résistance de l'inducteur.

-
1. Le couple vaut $\Gamma = \frac{P_m}{\Omega} = 8,9 \text{ N}\cdot\text{m}$. D'autre part l'équation électrique dans le rotor conduit à :

$$U = R_r I_r + E = R_r I_r + \frac{P_r}{I} \iff R_r = \frac{U}{I} - \frac{P_r}{I^2} = 4,1 \Omega \quad (3.141)$$

2. Du côté du stator, on a simplement $U_s = R_s I_s$ soit $R_s = 733 \Omega$. Enfin le rendement nominal s'écrit :

$$\eta = \frac{P_{\text{méca}}}{P_{\text{elec}}} = \frac{P_{\text{méca}}}{R_r I_r^2 + R_s I_s^2} = 0,85 \quad (3.142)$$

3. 11 MCC à excitation indépendante

On étudie un moteur à courant continu à excitation indépendante. Le courant d'excitation est fixé à $I_e = 1,5 \text{ A}$. La résistance de l'induit est $r = 1,0 \Omega$.

À vide, avec une tension d'alimentation $U_0 = 308 \text{ V}$, on mesure une vitesse de rotation $N = 2100 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}$.

Le moteur fonctionne sur une charge dont le couple résistant varie en fonction de la vitesse de rotation. La caractéristique $C_r = f(N)$ de cette machine est assimilée à une droite passant par les points $\{N = 0, C_r = 12 \text{ Nm}\}$ et $\{N = 2000 \text{ tr}\cdot\text{min}^{-1}, C_r = 30 \text{ Nm}\}$.

1. Calculer le rapport de proportionnalité entre la f.e.m et la vitesse de rotation. Donner l'expression du couple magnétique en fonction de la tension d'alimentation U et de la vitesse de rotation Ω .
2. Pour régler la vitesse de rotation de l'ensemble {moteur + charge}, on agit sur la tension d'alimentation de l'induit. Le démarrage du groupe se fait sans rhéostat : calculer la tension minimale à appliquer et le courant au niveau de l'induit au moment du démarrage. Déterminer la relation entre la vitesse de rotation et la tension d'alimentation U en régime permanent. Calculer la vitesse et l'intensité dans l'induit pour $U = 110 \text{ V}$ et $U = 220 \text{ V}$.

-
1. Le couple résistant associé à la charge s'écrit donc $\Gamma_{\text{res}} = C_0 + \alpha\Omega$ avec $C_0 = 12 \text{ N}\cdot\text{m}$ et $\alpha = \frac{30 - 12}{\frac{2000 \times 2\pi}{60}} =$

$8,6 \cdot 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}\cdot\text{rad}^{-1}$. D'autre part, la f.e.m et la vitesse de rotation sont reliés par $E = \Phi_0 \Omega$. À vide, $\Gamma = 0 = \Phi_0 I$, donc le courant dans l'induit est nul, et par suite $U_r = e$, d'où $\Phi_0 = \frac{U_0}{\Omega_0} = 1,40 \text{ Wb}$. Ensuite en fonctionnement, le couple moteur compense le couple résistant, on a donc les deux relations suivantes :

$$\begin{cases} U = rI + \Phi_0 \Omega \\ \Gamma = \Phi_0 I = C_0 + \alpha\Omega \end{cases} \quad (3.143)$$

$$\Gamma = \Phi_0 I = C_0 + \alpha\Omega \quad (3.144)$$

soit en injectant le courant :

$$\Gamma = \Phi_0 \frac{U - \Phi_0 \Omega}{r} = \frac{\Phi_0}{r} U - \frac{\Phi_0^2}{r} \Omega \quad (3.145)$$

On a démarrage si :

$$\Gamma(\Omega = 0) > \Gamma_{\text{res}}(\Omega = 0) \iff \frac{\Phi_0 U}{r} > C_0 \iff U > \frac{C_0 r}{\Phi_0} = 8,6 \text{ V} \quad (3.146)$$

Le courant au niveau de l'induit au démarrage vaut alors $I_{\text{dem}} = \frac{C_0}{\Phi_0} = 8,6 \text{ A}$.

Ensuite, en fonctionnement, on utilise l'expression $\Gamma(U, \Omega) = \Gamma_{\text{res}}$:

$$\frac{\Phi_0}{r} U - \frac{\Phi_0^2}{r} \Omega = C_0 + \alpha\Omega \iff \Omega = \frac{\frac{\Phi_0}{r} U - C_0}{\alpha + \frac{\Phi_0^2}{r}} \quad (3.147)$$

Ainsi en effectuant une application numérique, on détermine la vitesse angulaire, que l'on injecte dans l'expression du courant fonction de U et Ω :

$$U = 110 \text{ V} \implies \Omega = 69 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad I = 13,4 \text{ A} \quad (3.148)$$

$$U = 220 \text{ V} \implies \Omega = 145 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad I = 17 \text{ A} \quad (3.149)$$

$$(3.150)$$

Conversion électronique de puissance

Sommaire

4.1 Principes	3
4.1.1 Motivations	3
4.1.2 Ordres de grandeur	3
4.1.3 Convertisseurs	3
4.2 Commutation	5
4.2.1 Exemple introductif	5
4.2.2 Résolution : cellule de commutation	5
4.2.3 Différents types de commutateurs	6
4.3 Sources de tension et de courant	7
4.3.1 Sources idéales	7
4.3.2 Sources réelles	8
4.3.3 Dipôle type source de tension	8
4.3.4 Dipôle type source de courant	8
4.3.5 Réversibilité des sources	9
4.3.6 Règles d'interconnexion	9
4.3.7 Changement de nature des sources	10
4.4 Conversion continu-continu : exemples de hacheur	10
4.4.1 Exemple de convertisseur direct	10
4.4.2 Exemple de hacheur survolteur	11
4.4.3 Commande d'une MCC	12
4.5 Conversion alternatif continu : exemple de redresseur	14
4.5.1 Pont de Graetz	14
4.5.2 Lissage d'une tension redressée	15
4.6 Conversion continu-alternatif : exemple d'onduleur	16
4.6.1 Principe	16
4.6.2 Filtrage	16
4.6.3 Choix des interrupteurs	17
4.6.4 Obtention d'un signal sinusoïdal	18

Questions de cours :

- Présenter la caractéristique d'une diode, d'un transistor, et d'un commutateur bidirectionnel en courant. Rappeler les règles d'interconnexion entre sources de tension et de courant.
- Présenter la notion de dipôle type source de tension et calculer la variation de tension à ses bornes dans le cadre d'un générateur de Thévenin.
- Présenter le hacheur dévolteur reliant une source de tension idéale avec une source de courant idéale. Forme d'onde, bilan de puissance, choix des interrupteurs.
- Sur l'exemple de la commande d'une MCC, présenter le hacheur dévolteur : forme d'onde, loi de vitesse du moteur.
- Présenter la fonction « redresseur ». L'illustrer avec le pont de Graetz. Lissage de la tension redressée.
- Présenter la fonction « onduleur » et les caractéristiques essentielles qu'elle doit réaliser. L'illustrer avec la structure en pont à 4 interrupteurs. Lissage de la tension.

Capacités exigibles du BO :

- Citer des exemples illustrant la nécessité d'une conversion de puissance électrique.
- Décrire l'architecture générale d'un convertisseur électronique de puissance : générateur, récepteur, processeur de puissance utilisant des interrupteurs électroniques, commande des fonctions de commutation.
- Décrire la caractéristique idéale courant-tension de la diode.
- Décrire la caractéristique idéale courant-tension du transistor.
- Définir les notions de sources de courant et de tension. Expliquer le rôle des condensateurs et des bobines comme éléments de stockage d'énergie assurant le lissage de la tension ou de l'intensité à haute fréquence.
- Caractériser les sources par leur réversibilité en tension, en intensité, en puissance. Citer des exemples.
- Citer les règles d'interconnexions entre les sources.
- Expliquer le fonctionnement d'une cellule élémentaire à deux interrupteurs assurant le transfert d'énergie entre une source de courant et une source de tension.
- Tracer des chronogrammes, exploiter le fait que la moyenne d'une dérivée est nulle en régime périodique établi, calculer des moyennes de fonctions affines par morceaux, utiliser un bilan de puissance moyenne pour établir des relations entre les tensions et les intensités.
- Justifier le choix des fonctions de commutation pour un hacheur série assurant l'alimentation d'un moteur à courant continu à partir d'un générateur idéal de tension continue. Exprimer les valeurs moyennes des signaux. Calculer l'ondulation en intensité dans l'approximation d'un hachage haute fréquence réalisant une intensité affine par morceaux.
- Pour un générateur de tension sinusoïdal et une charge assimilable à une source continue de courant, décrire les différentes séquences de commutation des diodes pour un redresseur double alternance.
- Décrire la structure en pont à quatre interrupteurs et les séquences de commutation pour une fréquence de commutation fixe, dans le cadre d'un onduleur.

Jusqu'à présent, nous avons étudié des conversions entre différents types d'énergie : électrique / magnétique / mécanique. L'idée de ce chapitre est de s'intéresser à la conversion d'énergie électrique... en énergie électrique, afin de répondre à certains besoins. On parle de conversion électronique de puissance, où les puissances mises en jeu sont très différentes de celles de l'électronique numérique (maximum 1 W en sortie d'un ALI par exemple) : cela va de quelques dizaines de watt aux GW.

I. Principes

I.1 Motivations

L'électronique de puissance regroupe les technologies permettant, avec de grands rendements, de faire le lien entre les différentes natures des sources d'électricité, et les récepteurs électriques qui les utilisent. Par définition :

- l'énergie électrique est sous forme alternative quand $\langle u \rangle = 0$, $\langle i \rangle = 0$ mais $\langle ui \rangle \neq 0$;
- l'énergie électrique est sous forme continue quand $\langle u \rangle \neq 0$ et $\langle i \rangle \neq 0$.

Cela implique des changements de forme, le plus courant étant alternatif vers continu : en effet, l'énergie électrique est produite en grande majorité sous forme alternatif (triphase), alors que la majorité des appareils électriques fonctionnent avec une alimentation continue. Regardez autour de vous, chez vous, le nombre de chargeurs et autres adaptateurs secteur qui vous entourent !



I.2 Ordres de grandeur

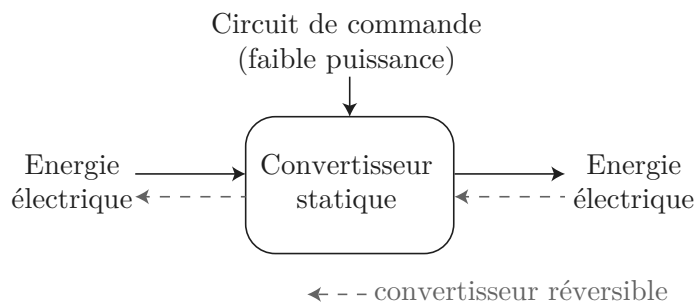
En électronique des signaux, les tensions mises en jeu dépassent rarement 20 V, avec des courants maximaux d'environ 0,1 A, c'est-à-dire que les puissances mises en jeu dépassent rarement le watt. De plus, on ne s'intéresse pas vraiment aux rendements électriques : c'est bien l'information véhiculée qui est importante, l'enjeu majeur étant que le **rapport signal sur bruit soit grand**. Ce n'est donc pas important que le générateur de tension délivre une puissance bien plus faible que ce qu'il sait fournir au maximum.



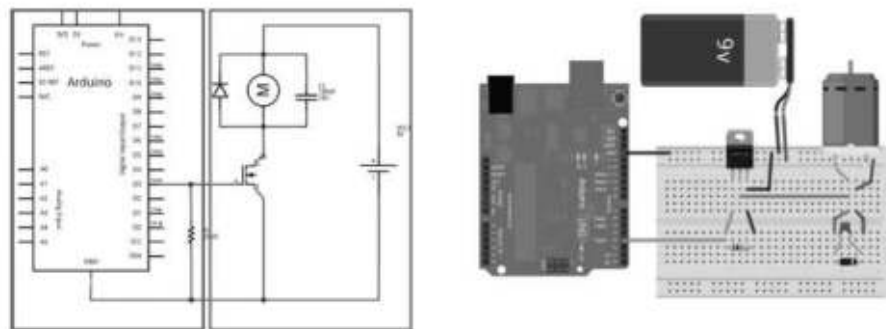
En électronique de puissance, les ordres de grandeur sont très différents : des ampoules (quelques dizaines de watt), aux machines à laver et four (kW) jusqu'aux TGV (8 MW) et les centrales électriques (~ 1 GW), les puissances mises en jeu sont très importantes : les rendements de conversion entre différentes formes d'énergie électrique doivent être excellents (1% pour une centrale étant de l'ordre de 10 MW, soit l'équivalent de la puissance d'un TGV, qu'il ne faudrait pas perdre en effet Joule, par exemple!).

I.3 Convertisseurs

Contrairement aux convertisseurs électromécanique, les grandeurs d'entrée et de sortie d'un convertisseur électronique sont sous forme électrique. Leur structure globale est la suivante :



Notons la nécessité d'une commande électronique, en particulier pour régler l'ouverture ou la fermeture de certains interrupteurs, ou pour réaliser un asservissement précis de la valeur d'une tension, d'un courant ou d'une puissance. Par exemple lors de l'utilisation d'un moteur à courant continu piloté par une carte Arduino, on distingue la partie « commande » (gauche) de la partie « puissance » (droite) :



On parle de « convertisseur statique » dans la mesure où, avant les années 1970 (et l'avènement des transistors), on utilisait des convertisseurs dynamiques à l'aide de machines tournantes : citons par exemple le cas d'un moteur synchrone relié à une génératrice à courant continu (utilisé pour le métro parisien pour fournir un courant continu sous 750 V en vue d'alimenter les rames!). Dans le cadre des convertisseurs statiques, on utilise des composants électroniques prévus pour supporter de grandes puissances (transistors, diodes).

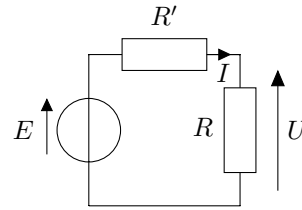
Selon le type de conversion, on distingue quatre grandes familles de convertisseurs, avec leur symbole dédié :

Sortie Entrée	Continu	Alternatif
	Continu	Alternatif
Continu	<p style="text-align: center;">Hacheur</p> <p>Ex : prise USB 5V sur allume-cigare, variateur de vitesse d'une MCC</p>	<p style="text-align: center;">Onduleur</p> <p>Ex : raccordement de panneaux solaires au réseau électrique, alimentations de secours</p>
Alternatif	<p style="text-align: center;">Redresseur</p> <p>Ex : adaptateur secteur de petite électronique, alimentation stabilisée de TP</p>	<p style="text-align: center;">Gradateur</p> <p>Ex : alimentation du magnétron des fours micro-ondes, alimentation des néons</p>

II. Commutation

II.1 Exemple introductif

Considérons un cas simple où on souhaite appliquer à un élément résistif R une tension de 5 V à partir d'une pile 9 V. On pourrait imaginer utiliser un pont diviseur de tension pour réaliser l'opération, comme illustré ci-contre. En choisissant R' tel que $\frac{R}{R + R'}E = U = \alpha E$, soit $R' = R\left(\frac{E}{U} - 1\right) = 0,8R$, on peut obtenir $U = 5\text{ V}$. Le souci majeur de cette technique réside dans le fait que le rendement de la conversion de puissance est mauvais :

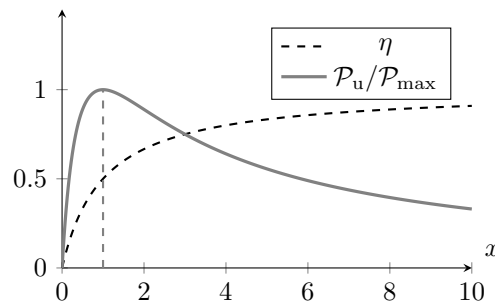


$$\eta = \frac{P_{\text{utile}}}{P_{\text{fourni}}} = \frac{RI^2}{EI} = \frac{R}{R + R'} = \alpha = 0,55 \quad (4.1)$$

On perd 45% en effet Joule dans la résistance R' . Cette situation se rencontre également dans le cas où le générateur n'est pas idéal, mais de résistance interne R_g , fixe. La puissance reçue par la résistance R s'écrit :

$$P_u = RI^2 = R\left(\frac{E}{R + R_g}\right)^2 = \frac{E^2}{R_g} \frac{x}{(1 + x)^2} \quad (4.2)$$

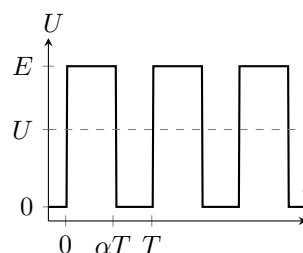
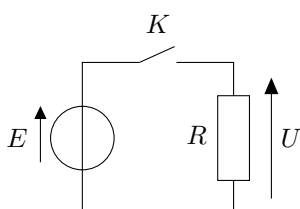
en posant $x = \frac{R}{R_g}$. De même le rendement vaut $\eta = \frac{1}{1 + x}$. En superposant les deux tracés, on se rend bien compte que le rendement est bon lorsque la puissance transmissible est très loin devant la puissance maximale transmissible $P_{\text{max}} = \frac{E^2}{4R_g}$ (lorsque $R = R_g$, cas de l'adaptation d'impédance) :



En général, lors de l'utilisation d'un générateur, on utilise une résistance électrique beaucoup plus grande que la résistance interne : on maximise le rendement de conversion, mais au prix d'une faible puissance transférée.

II.2 Résolution : cellule de commutation

* On peut imaginer dans un premier temps « hacher » le signal issu d'un générateur de tension idéal, de sorte à fournir en moyenne la puissance et la tension nécessaire. Un passage d'un état à l'autre s'appelle une commutation. On peut par exemple fermer l'interrupteur sur l'intervalle $[0; \alpha T]$ puis l'ouvrir sur $[\alpha T; T]$. En prenant $\alpha = \frac{5}{9}$, $\langle U \rangle = \alpha E = 5\text{ V}$. On appelle $\alpha = \frac{\Delta t_p}{T}$ le **rapport cyclique**, où Δt_p est la durée de fermeture de l'interrupteur.



En calculant les puissances utile :

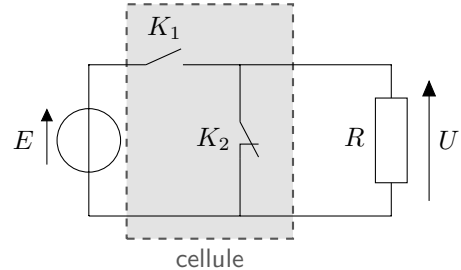
$$\mathcal{P}_{\text{utile}} = \langle ui \rangle = \frac{1}{R} \langle u^2 \rangle = \alpha \frac{E^2}{R} \quad (4.3)$$

*

et fournie $\mathcal{P}_{\text{fournie}} = \langle EI \rangle = E \langle I \rangle$ avec $\langle I \rangle = \frac{\langle U \rangle}{R} = \alpha \frac{E}{R}$, donc $\mathcal{P}_{\text{fournie}} = \mathcal{P}_{\text{utile}}$ et le rendement de conversion est proche de 1 ! C'est logique, on n'a pas pris en compte ici les imperfections des interrupteurs qui pourraient consommer un peu de puissance.

Cependant, toutes les charges ne sont rarement que résistives, et ne pourront pas forcément subir une discontinuité de tension. On utilise alors plutôt deux interrupteurs qui fonctionnent en alternance, de sorte à ne pas laisser la charge en circuit ouvert. L'association de ces deux interrupteurs s'appelle une **cellule de commutation**. Nous verrons que selon les éléments branchés à cette cellule, les interrupteurs vont différer.

Voyons déjà quel choix d'interrupteurs s'offrent à nous.

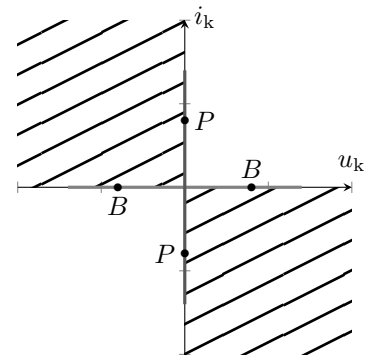


II.3 Différents types de commutateurs

a) Caractéristique idéale

Un interrupteur idéal peut présenter deux types d'états, en lien avec sa caractéristique :

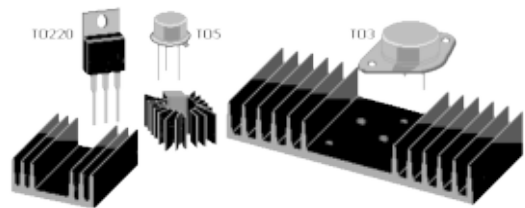
- il est bloqué s'il n'autorise aucun passage de courant, quelque soit la tension (zone horizontale, points type B) ;
- il est passant si quel que soit le courant qui le traverse, la tension à ses bornes est nulle (zone verticale, point type P).



Lorsqu'une seule gamme de tension ou de courant (par exemple $i > 0$ uniquement lorsqu'il est passant), on parle d'**interrupteur unidirectionnel**, sinon il est **bidirectionnel**.

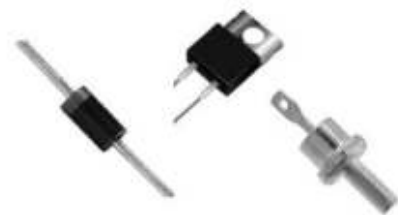
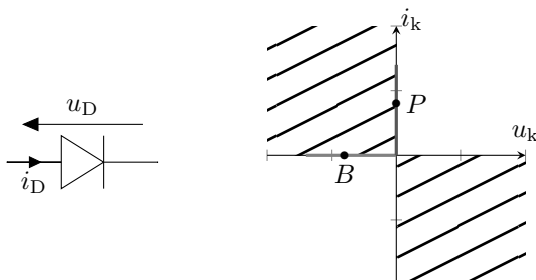
- * L'opération de passage entre l'état bloqué ou passant s'appelle une **commutation** : elle peut être spontanée (liée au circuit de puissance) ou commandée (circuit extérieur qui commande la commutation). Notons qu'on hachure 2 des 4 quadrants de la caractéristique, comme les interrupteurs sont des récepteurs de puissance. Les deux quadrants hachurés sont tels que $ui < 0$, c'est-à-dire qu'ils fournissent de la puissance.

Enfin, dans le cas idéal, un interrupteur ne reçoit pas de puissance, ce qui sous-entend qu'on a toujours $u_K \neq 0$ si $i_K = 0$ et inversement, et donc $\langle u_K i_K \rangle = 0$. Dans les faits, le point de fonctionnement peut ne pas passer par la caractéristique statique, ce qui explique qu'il puisse recevoir de la puissance, dissipée ensuite par effet Joule. Cela explique les dissipateurs thermiques, comme illustré ci-contre.



b) Diode idéale

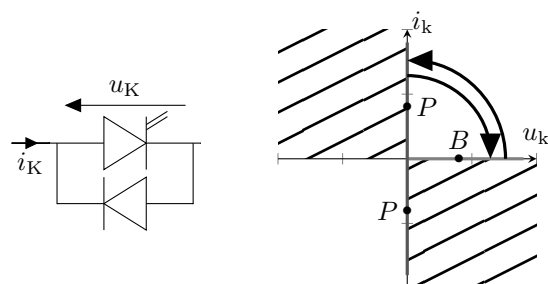
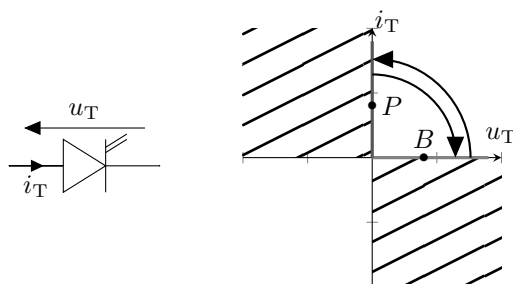
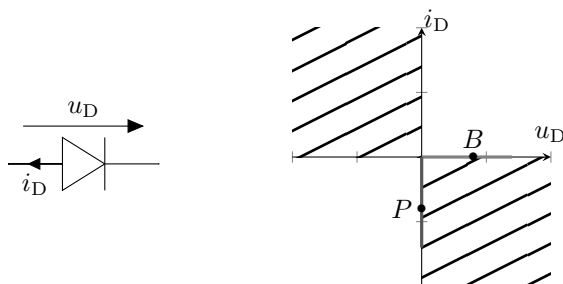
La caractéristique idéale et le symbole d'une diode sont donnés ci-dessous :

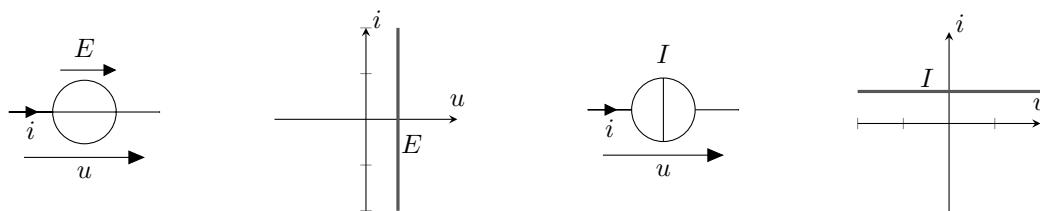


Il s'agit d'un interrupteur unidirectionnel en courant et en tension, à commutation spontanée : le passage d'un état à l'autre se fait par inversion du courant ou de la tension, sans intervention d'un



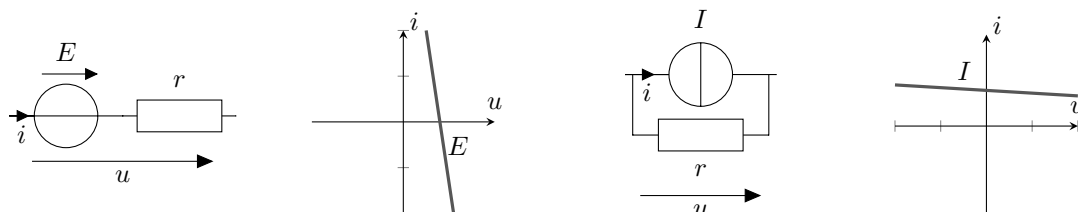
Représenter la caractéristique d'une diode idéale dans le cas d'un branchement en inverse





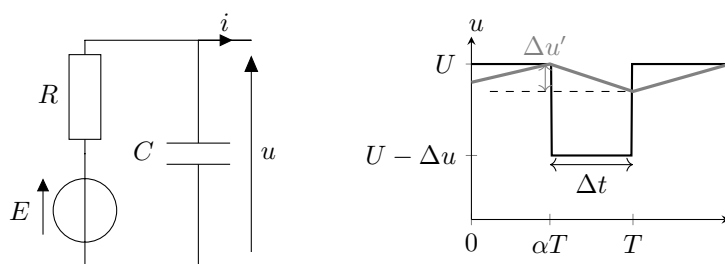
III.2 Sources réelles

Dans le cas réel, on modélise les modifications de courant ou de tension par une résistance interne r en série (source de tension) ou en parallèle (source de courant) :



III.3 Dipôle type source de tension

On appelle **dipôle de type source de tension** un dipôle aux bornes duquel la tension est une fonction du temps qui varie très peu autour de sa valeur moyenne. Cela permet d'étendre la définition de source de tension à des associations de certains composants. Imaginons une source réelle de tension branchée à une cellule de commutation : l'ouverture ou la fermeture d'un interrupteur impose une variation de courant Δi , à l'origine d'une variation de tension $\Delta u = -R\Delta i$ pouvant être importante. Pour limiter cet effet, on vient placer en parallèle de la source réelle un condensateur de grande capacité :



On peut calculer la nouvelle variation de tension du fait de la présence du condensateur :

- avant la perturbation, où la tension vaut U , le courant vaut $I = \frac{E - U}{R}$;
- après la perturbation, le courant est modifié de Δi , lié à une variation de tension $\Delta u'$:

$$* \quad i = -C \frac{du}{dt} + \frac{E - u}{R} \Rightarrow I + \Delta i \sim -C \frac{\Delta u'}{\Delta t} + \frac{E - U - \Delta u'}{R} \Rightarrow \Delta u' = -\frac{\Delta u}{1 + RC/\Delta t} \quad (4.4)$$

Ainsi, si $RC \gg \Delta t$, c'est-à-dire si la période de commutation est très grande devant le temps caractéristique $\tau = RC$, la modification de tension est minime. En effet, le montage n'a pas le temps de suivre les modifications, le condensateur imposant la continuité de la tension : il se décharge lentement et compense la variation de tension initiale que subirait la source non idéale.

Transformation en dipôle type source de tension

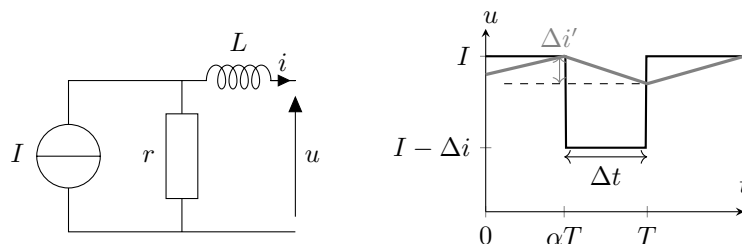
Pour transformer une branche d'un circuit en dipôle type source de tension, on branche en parallèle sur celle-ci un condensateur de forte capacité, appelé **condensateur de lissage**.

III.4 Dipôle type source de courant



Exercice

Pour une source de courant non idéale, de résistance r , soumise à une perturbation de tension Δu , choisir un composant adapté pour lisser les variations d'intensité, prévoir les variations de courant une fois le composant utilisé.



On peut calculer la nouvelle variation de courant du fait de la présence d'une bobine d'inductance L :

- avant la perturbation, en régime permanent, la tension vaut $U = R(I - i_{rp})$;
- après la perturbation, la tension est décalée de $\Delta u = -R\Delta i$, lié à une variation de courant $\Delta i'$:

$$u = -L \frac{di}{dt} + R(i - I) \Rightarrow U + \Delta u = -L \frac{\Delta i'}{\Delta t} + R(i + \Delta i' - i_{rp}) \Rightarrow \Delta i' = -\frac{\Delta i}{1 + \frac{L}{R\Delta t}} \quad (4.5)$$

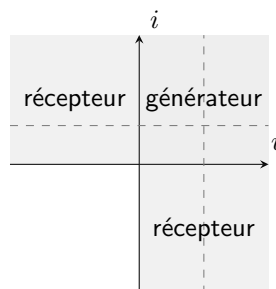
Ainsi, si $\frac{L}{R} \gg \Delta t$, c'est-à-dire que la période de commutation est très grande devant le temps caractéristique $\tau = \frac{L}{R}$, la modification de courant est minime. En effet, le montage n'a pas le temps de suivre les modifications, l'inductance imposant la continuité du courant : elle libère lentement l'énergie et compense la variation de courant initiale que subirait la source non idéale.

Transformation en dipôle type source de courant

Pour transformer une branche d'un circuit en dipôle type source de courant, on branche en série à celle-ci une bobine de forte inductance, appelé **bobine de lissage**.

III.5 Réversibilité des sources

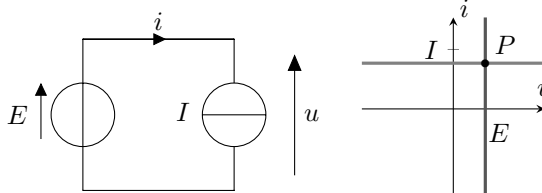
On a envisagé le cas de **sources réversibles**, puisque leur caractéristique passe dans un quadrant générateur ($ui > 0$ en convention générateur) ou récepteur ($ui < 0$). Pour une chaîne de conversion, il est parfois important d'avoir une réversibilité en tension ou en courant (ou les deux). Par exemple, pour une voiture électrique, une batterie électrique est réversible en courant, et peut être rechargée par la machine synchrone (lors du freinage), ou au contraire la batterie peut fournir de l'énergie électrique au moteur.



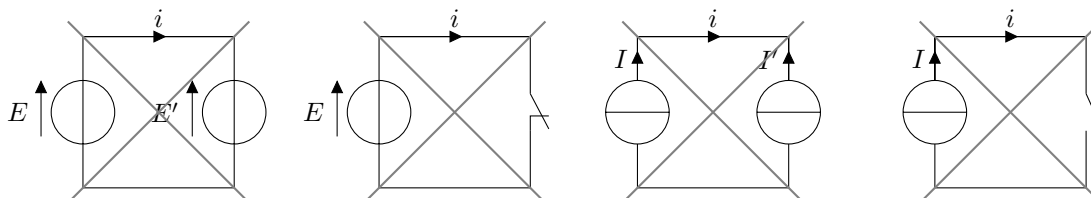
De même, une machine à courant continu est réversible en tension (marche avant ou arrière), ou en courant (moteur ou génératrice), et donc réversible en puissance.

III.6 Règles d'interconnexion

Au cours du fonctionnement d'un convertisseur, on va connecter entre elles différentes sources de type tension ou courant. Or, il est nécessaire d'avoir un point de fonctionnement, sous peine de détruire une source.



Par contre, les configurations qui suivent sont interdites :



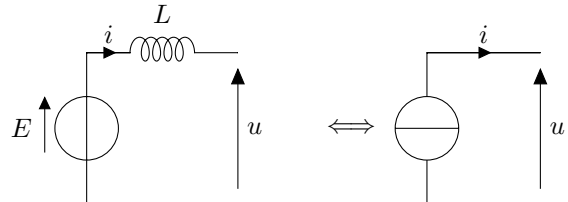
On cherche à imposer une tension ou un courant différents de ceux normalement imposés par la source, ce qui implique un point de fonctionnement avec un courant ou une tension inatteignables. Il faut donc retenir que :

- * | ■ il ne faut jamais court-circuiter une source de tension ♥ ;
- | ■ il ne faut jamais laisser une source de courant en circuit ouvert ♥.

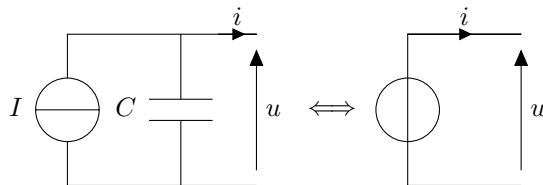
III.7 Changement de nature des sources

Nous avons déjà vu que l'ajout d'un condensateur ou d'une bobine permettait d'améliorer la nature de la source statique de tension ou de courant en régime variable. On peut également observer qu'une source de tension peut être transformée en source de courant ou inversement.

Prenons par exemple le cas d'une source de tension, à laquelle on ajoute en série une bobine d'inductance L de grande valeur. Alors $L \frac{di}{dt} = -u + E \iff \frac{di}{dt} = \frac{E - u}{L} \simeq 0$ si L est suffisamment grande : on parle de **bobine de lissage**.



De la même manière, on convertit une source de courant en une source de tension en ajoutant en parallèle un **condensateur de lissage** de grande capacité :



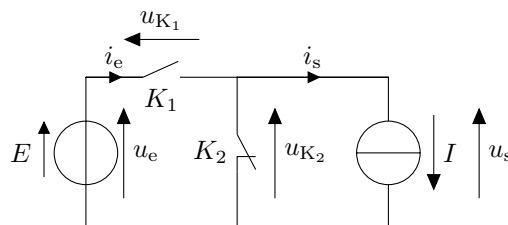
IV. Conversion continu-continu : exemples de hacheur

Un hacheur transfère de la puissance d'une source continue vers un dipôle de type source continue.

IV.1 Exemple de convertisseur direct

a) Principe

On dit qu'un convertisseur est **direct** s'il n'est constitué que d'interrupteurs, c'est-à-dire qu'en se basant sur les règles d'association, la source d'entrée est de nature différente de la source de sortie. Cherchons par exemple à relier une source de tension E à une source de courant I . Il est impossible d'utiliser un seul interrupteur, car lorsqu'il est ouvert, la source de courant se retrouverait en circuit ouvert. On considère donc la structure suivante :

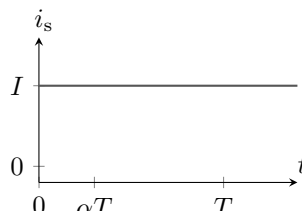
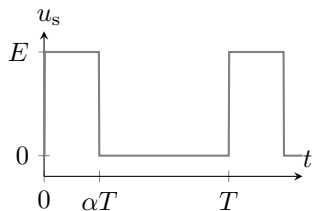
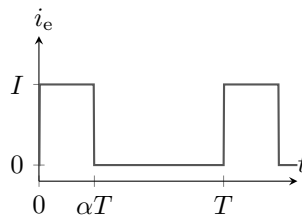
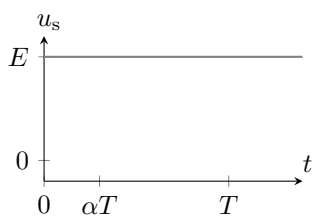


Il est impossible d'avoir les deux interrupteurs fermés ou ouverts en même temps, sous peine de ne pas respecter les règles d'association. On envisage donc :

- pour $t \in [0; \alpha T]$, K_1 est fermé et K_2 est ouvert, il y a alors échange de puissance car $i_e = i_s$ et $u_e = u_s = E$. En supposant que les interrupteurs sont parfaits, $P_e = P_s = EI$;
- pour $t \in [\alpha T; T]$, K_1 est ouvert et K_2 est fermé, la puissance instantanée débitée par la source d'entrée et absorbées par la source de sortie sont donc nulles.

Les chronogrammes suivants sont appelés **formes d'ondes** des tensions et courants :

Les convertisseurs indirects seront étudiés en TD : hacheur à stockage inductif ou capacitif.



On utilise régulièrement pour le calcul de valeurs moyennes l'aire sous la courbe, pour des formes géométriques simples.

La tension moyenne aux bornes de la source de sortie vaut $\langle u_s \rangle = \frac{\alpha TE}{T} = \alpha E$, d'où le nom de **hacheur dévolteur** (ou abaisseur, ou Buck), car on abaisse la valeur moyenne de la tension de sortie comparativement à la source d'entrée. La puissance moyenne transférée à la source de sortie est :

$$\mathcal{P}_s = \langle u_s i_s \rangle = \langle u_s \rangle I = \alpha EI \quad (4.6)$$

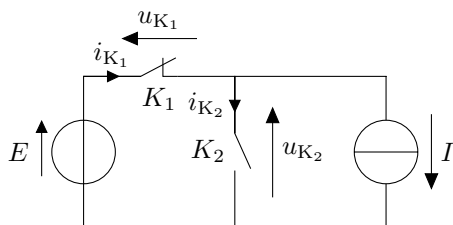
Ainsi en réglant le rapport cyclique α du dispositif, on peut contrôler la puissance reçue par la source de sortie.

De la même façon, en calculant la puissance moyenne fournie par la source d'entrée, $\mathcal{P}_e = E \times \alpha I$, on a donc un rendement de conversion de 1, en négligeant les pertes dans les interrupteurs.

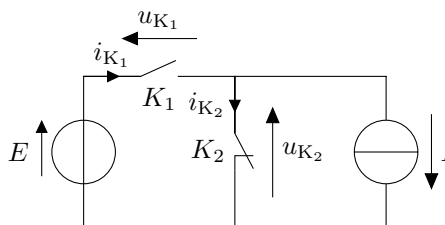
b) Détermination des interrupteurs

Observons les états de chaque interrupteurs durant les deux phases : il est nécessaire de déterminer le courant et la tension de chaque interrupteur. On reporte ensuite les points de fonctionnements dans les deux phases de fonctionnement :

Phase 1



Phase 2

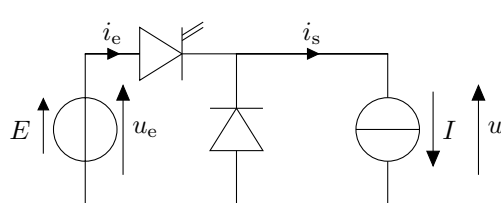
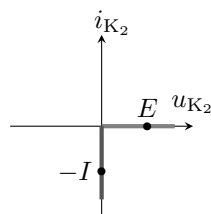
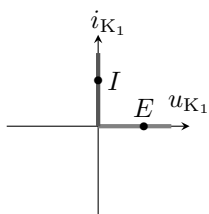


- interrupteur K_1 : $i_{K1} = I > 0$ et $u_{K1} = 0$;
- interrupteur K_2 : $i_{K2} = 0$ et $u_{K2} = E > 0$.
- interrupteur K_1 : $i_{K1} = 0$ et $u_{K1} = E > 0$;
- interrupteur K_2 : $i_{K2} = -I$ et $u_{K2} = 0$.

Exercice

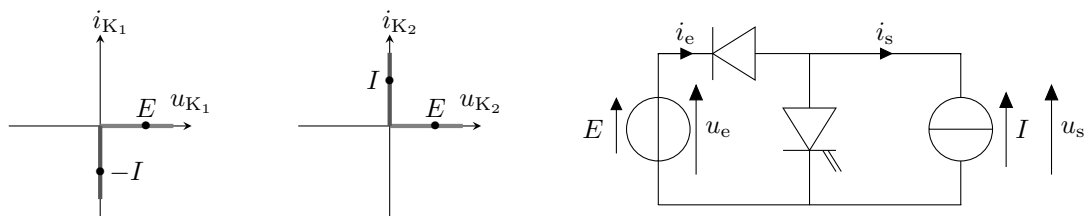
En déduire les interrupteurs à utiliser et le circuit final.

À partir des points de fonctionnement, on en déduit les caractéristiques : l'interrupteur K_1 est un interrupteur commandé, et l'interrupteur K_2 une diode en sens inverse.



IV.2 Exemple de hacheur survolteur

Si on inverse le sens de I , les points de fonctionnement changent, il faut alors choisir pour K_1 une diode à l'envers et un transistor pour K_2 .



Ce montage permet un transfert de puissance de la source de courant vers la source de tension, les puissances d'entrée et de sortie sont toutes deux négatives :

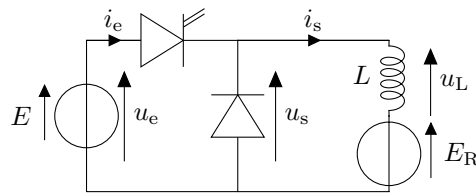
$$\mathcal{P}_s = \langle u_s i_s \rangle = -I \langle u_s \rangle = -\alpha EI \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_e = \langle i_e \rangle E = -\alpha EI \quad (4.7)$$

On parle alors de **hacheur survolteur** ou **hacheur parallèle** (l'interrupteur commandé est en parallèle avec la source d'entrée) : la tension au niveau du générateur de tension, E , en « sortie », est plus élevée que celle en « entrée », αE .

IV.3 Commande d'une MCC

a) Principe

Le rotor de la MCC est constituée de l'association en série d'une résistance, d'une inductance (que l'on doit prendre en compte en régime transitoire) et d'une fcém $E_R = \Phi_0 \Omega$ où Ω est la vitesse angulaire du rotor. On simplifie l'étude en ne tenant pas compte de la résistance de l'induit, et on alimente donc avec un hacheur dévolteur le rotor :



Notons que la bobine permet de transformer la fcém en source de courant, d'où l'autorisation d'utiliser le hacheur dévolteur.

b) Forme d'onde

Écrivons les lois électrocinétiques durant les deux phases de fonctionnement :

- pour $t \in [0; \alpha T]$, $u_s = E$, donc la loi des mailles conduit à :

$$u_L = L \frac{di_s}{dt} = E - E_R \quad \text{et} \quad i_e = i_s \quad (4.8)$$

*

- pour $t \in [\alpha T; T]$, $u_s = 0$, la source de tension est découplée de la MCC, la bobine décharge l'énergie stockée dans la fcém :

$$u_L = L \frac{di_s}{dt} = -E_R \quad \text{et} \quad i_e = 0 \quad (4.9)$$

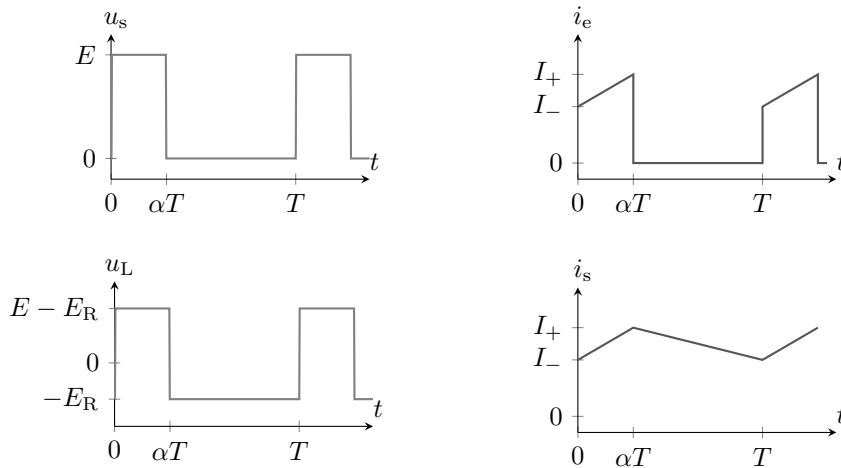
En notant I_+ l'intensité maximale de i_s et I_- l'intensité minimale, l'intégration des deux équations précédentes permet d'écrire en régime permanent :

*

$$i_s = \frac{E - E_R}{L} t + I_- \quad \text{pour} \quad t \in [0; \alpha T] \quad (4.10)$$

$$i_s = -\frac{E_R}{L} (t - \alpha T) + I_+ \quad \text{pour} \quad t \in [\alpha T; T] \quad (4.11)$$

Cela permet de représenter les formes d'onde lors du fonctionnement :



c) Rendement

D'après la loi des mailles, il vient $u_s = u_L + E_R$, soit en moyenne :

$$\langle u_s \rangle = \alpha E = \langle u_L \rangle + E_R = E_R = \Phi_0 \Omega \implies \Omega = \alpha \frac{E}{\Phi_0} \quad (4.12)$$

ainsi en modifiant le rapport cyclique, on contrôle bien la vitesse de rotation du moteur.

La puissance moyenne fournie par la source vaut :

$$\mathcal{P}_e = \langle u_e i_e \rangle = E \langle i_e \rangle = E \frac{1}{T} \left(\alpha T \frac{I_+ - I_-}{2} + \alpha T I_- \right) = \alpha E \frac{I_+ + I_-}{2} \quad (4.13)$$

tandis que la puissance moyenne reçue par le récepteur vaut :

$$\mathcal{P}_s = \langle E_r i_s \rangle = \alpha E \langle i_s \rangle = \alpha E \frac{1}{T} \left(\alpha T \frac{I_+ - I_-}{2} + (T - \alpha T) \frac{I_+ - I_-}{2} + I_- \right) = \alpha E \frac{I_+ + I_-}{2} \quad (4.14)$$

Le rendement de conversion est donc de 1 également, en l'absence de dissipation dans les interrupteurs, et car l'inductance ne stocke pas d'énergie, en moyenne. Évidemment, en tenant compte de la résistance de l'induit et des pertes dans les commutateurs, le rendement diminue mais reste très bon.

d) Calcul de l'ondulation

Afin de vérifier que l'association de la fcém avec une bobine constitue bien une source de courant, calculons l'ondulation en intensité $\Delta i_s = I_+ - I_-$:

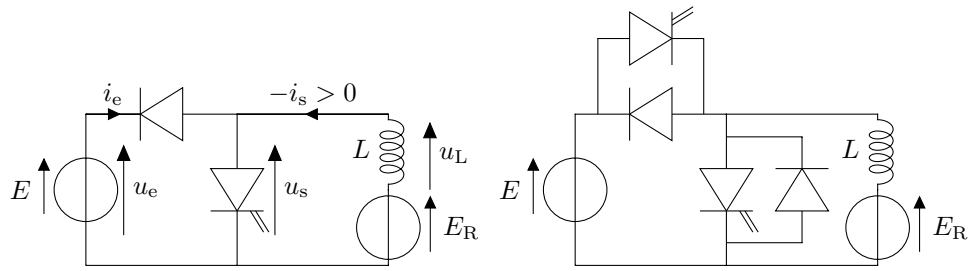
$$i_s(t = \alpha T^-) = \frac{E - E_R}{L} \alpha T + I_- = I_+ \iff \Delta i_s = \frac{E - E_R}{L} \alpha T = \alpha(1 - \alpha) \frac{ET}{L} \quad (4.15)$$

Par conséquent :

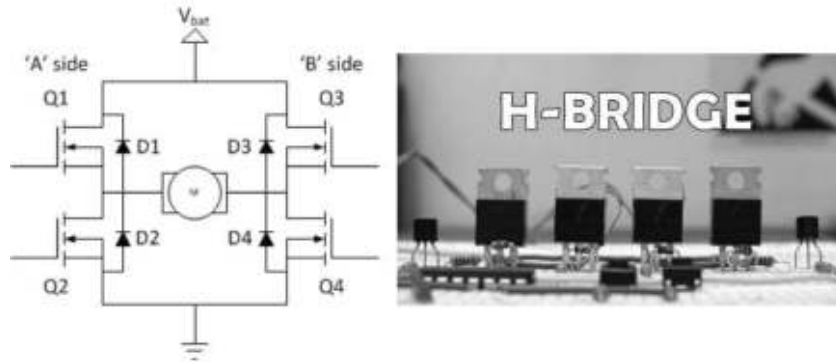
- *
 - Δi_s diminue pour de grandes valeurs de L , on ajoute parfois en série avec la MCC une bobine supplémentaire de lissage, pour vérifier ces conditions ;
 - si la fréquence de commutation augmente, T diminue, et l'ondulation en courant diminue ;

e) Montages réversibles en courant et / ou en tension

Comme on le sait, la machine à courant continu fonctionne également en génératrice. Durant la phase de freinage, il faut donc utiliser d'autres interrupteurs pour réaliser le transfert de puissance vers le générateur. Le freinage nécessite de pouvoir changer le signe du couple électromagnétique par rapport à la vitesse de rotation, et comme $\Gamma_{em} = \Phi_0 I$ et $E_R = \Phi_0 \Omega$, cela revient à **changer le signe du courant circulant dans l'induit**, $i_s < 0$, avec une fcém E_R qui diminue mais garde son signe. On peut donc envisager le montage hacheur parallèle. On peut également placer les deux types d'interrupteurs en parallèle, de sorte à avoir un convertisseur réversible en courant (la tension doit par contre toujours être positive).



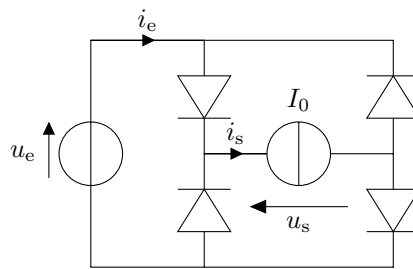
Enfin, pour pouvoir fonctionner dans les quatre quadrants, on utilise un pont en H :



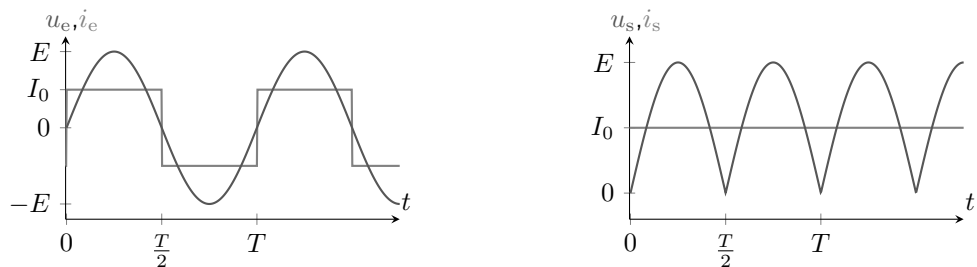
V. Conversion alternatif continu : exemple de redresseur

V.1 Pont de Graetz

On s'intéresse au pont de Graetz, vendu généralement sous la forme d'un composant quadripolaire (deux entrées, et deux sorties), première étape de la transformation d'un signal alternatif vers un signal continu. Dans un premier temps, on considère l'association de 4 diodes supposées idéales, branchées sur une charge modélisée par une source de courant I_0 , alimentées par un générateur de tension sinusoïdale de période T : $u_e = E \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right)$. L'idée du redresseur est que sur la demi-période où $u_e > 0$, $u_s = u_e$, et sur la demi-période où $u_e < 0$, $u_s = -u_e$. Cette fonction est réalisée *via* le montage ci-dessous, encore appelé **redresseur double alternance** :



L'ensemble des commutations sont spontanées, on peut vérifier sur les caractéristiques que les interrupteurs à utiliser sont bien des diodes. Les formes d'ondes sont alors les suivantes :



On obtient alors en sortie $u_s = |u_e(t)|$.

Exercice

Calculer la valeur moyenne et la valeur efficace du signal de sortie $\langle u_s \rangle$.

Calculons la valeur moyenne sur une demi-période :

$$\langle u_s(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} E \sin(2\pi \frac{t}{T}) dt = \frac{2E}{T} \left[-\frac{\cos(2\pi t/T)}{2\pi/T} \right]_0^{T/2} = \frac{2E}{T} \frac{T}{2\pi} (-(-1) - (-1)) = \frac{2E}{\pi} \quad (4.16)$$

Pour la valeur efficace, $\langle u_s^2 \rangle = \langle u_e^2 \rangle = \frac{E^2}{2}$ donc $U_{s,\text{eff}} = \frac{E}{\sqrt{2}}$, c'est-à-dire que le redressement conserve la valeur efficace du signal.

La puissance fournie à la source de courant vaut alors :

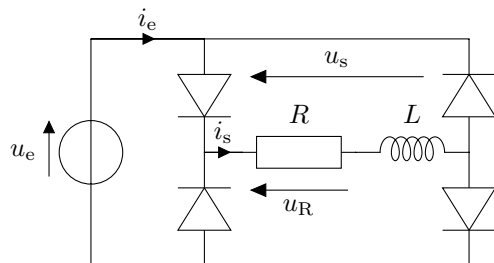
$$\mathcal{P}_s = \langle u_s i_s \rangle = I_0 \langle |u_e| \rangle \quad (4.17)$$

tandis que la puissance fournie vaut $\mathcal{P}_e = \langle u_e i_e \rangle = \langle |u_e| \rangle I_0$ car i_e change de signe à chaque commutation. Le rendement est donc de 1, encore une fois. Cependant les interrupteurs réels consomment de la puissance.

Dans les faits, comme les diodes possèdent un seuil V_D , alors chaque alternance de $u_s(t)$ est abaissée de $2V_D$ et s'annule entre chaque alternance durant $2\Delta t$ tel que Δt vérifie $\sin(2\pi \frac{\Delta t}{T}) = \frac{2V_D}{E}$.

V.2 Lissage d'une tension redressée

Le passage à une tension strictement positive n'est pour autant pas une tension continue. On envisage alors que la source de courant est une résistance en série avec une bobine d'inductance L : cette association constitue bien une source de courant dont l'amplitude de variation autour de sa valeur moyenne I sera d'autant plus faible que L sera grand :



Sachant que la tension u_s est une tension périodique de fréquence $2f$, décomposable en série de Fourier, on étudie la réponse à un signal sinusoïdal dans un premier temps. La fonction de transfert entre la tension aux bornes de la résistance u_R et u_s vaut :

$$\frac{u_R}{u_s} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R} \quad (4.18)$$

On comprend bien l'intérêt d'avoir une inductance élevée, car le montage en sortie constitue un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$. Ainsi si $\omega_c \ll 2\pi(2f)$, on ne conserve que la valeur moyenne.

Exercice

Exprimer l'ondulation en courant au niveau de la sortie, en ne considérant que l'harmonique fondamentale d'amplitude S_1

$$\Delta u_R = R \Delta i = \left| \frac{S_1 e^{j(2\omega t + \varphi_1)}}{R + jL(2\omega)} \right| = \frac{S_1}{\sqrt{R^2 + (2L\omega)^2}}$$

L'ondulation en courant est donc d'autant plus faible que la pulsation de coupure est faible, soit avec L élevé, on se rapproche bien une fois encore d'une source de courant.

Un redresseur est à la base de la majorité des dispositifs d'alimentation d'appareils électroniques branchés sur le secteur, une grande partie des appareils électriques fonctionnant avec des signaux continus.

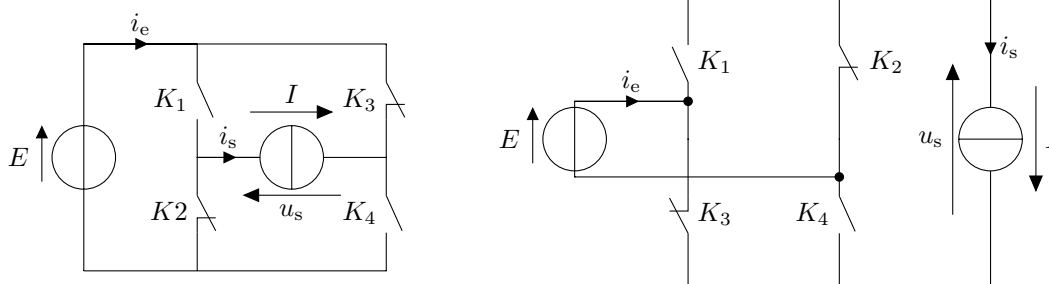
VI. Conversion continu-alternatif : exemple d'onduleur

Un onduleur permet de convertir une tension continue en tension alternative. Les intérêts sont multiples :

- on le retrouve dans les systèmes d'alimentation de secours pour palier à une coupure électrique, en générant un signal sinusoïdal de 50 Hz à partir d'une batterie ;
- son utilisation est très courante pour alimenter les moteurs synchrones : en effet, à partir d'une tension continue (obtenue par un redresseur depuis le réseau EDF), l'onduleur est piloté par une commande électronique de sorte à régler la fréquence d'alimentation (et donc la vitesse de rotation du rotor) ;

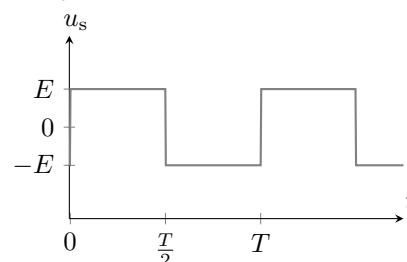
VI.1 Principe

Partant d'une source de tension continue E , l'idée est de permettre d'imposer à la charge en sortie un signal sinusoïdal vérifiant $\langle u_s \rangle = 0$ et $\langle i_s \rangle = 0$.



Pour respecter l'interconnectivité des sources, on distingue deux phases :

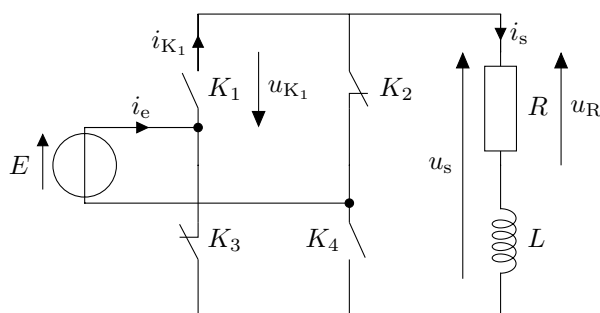
- *
- Phase $t \in \left[0; \frac{T}{2}\right]$, K_1 et K_4 fermés, et K_2, K_3 ouverts : dans ce cas, $u_s = E$ et $i_s = i(t) = i_E$;
 - Phase $t \in \left[\frac{T}{2}; T\right]$, K_1 et K_4 ouverts, et K_2, K_3 fermés : dans ce cas, $u_s = -E$ et $i_s = i(t) = -i_E$;



On obtient bien une source de tension alternative, sous la forme d'un signal créneau, contenant un grand nombre d'harmoniques. L'étape suivante va consister à le filtrer de sorte à obtenir un signal sinusoïdal, et également à faire en sorte que le courant de sortie soit bien de moyenne nulle par un bon choix de dipôle type source de courant.

VI.2 Filtrage

On envisage à nouveau une charge $R - L$ pour réaliser l'opération de filtrage et obtenir un dipôle type source de courant :



Cette configuration répond aux premières exigences d'une source sinusoïdale, car :

$$u_s = Ri_s + L \frac{di_s}{dt} \Rightarrow \langle u_s \rangle = 0 = R \langle i_s \rangle + L \left\langle \frac{di_s}{dt} \right\rangle = R \langle i_s \rangle \quad (4.19)$$

donc $\langle u_s \rangle = \langle u_R \rangle = 0$ et $\langle i_s \rangle = 0$.

VI.3 Choix des interrupteurs

Pour choisir convenablement les interrupteurs, il faut connaître le signe du courant i_s à chaque instant, de sorte à pouvoir déterminer les points de fonctionnement nécessaires. Déterminons donc l'équation différentielle sur i_s dans chaque phase :

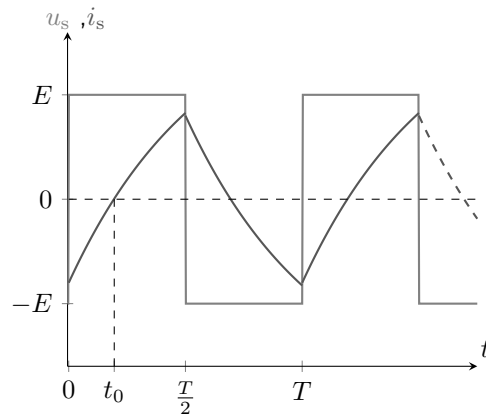
- Phase $t \in \left[0; \frac{T}{2}\right]$, avec $u_s = E$:

$$E = Ri_s + L \frac{di_s}{dt} \iff \tau \frac{di_s}{dt} + i_s = \frac{E}{R} \quad (4.20)$$

- phase $t \in \left[\frac{T}{2}; T\right]$, avec $u_s = -E$:

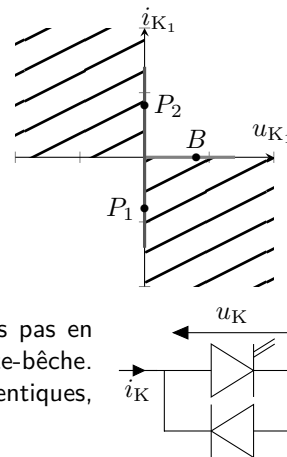
$$\tau \frac{di_s}{dt} + i_s = -\frac{E}{R} \quad (4.21)$$

Sans chercher à résoudre les équations, mais du fait des charges / décharges avec une valeur moyenne nulle, l'allure est alors la suivante, en régime permanent :

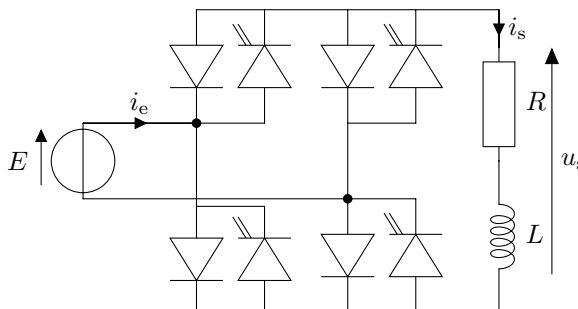


Étudions ainsi l'interrupteur K_1 et déterminons les différents points de fonctionnement, maintenant que l'on connaît le courant i_s :

Temps $t \in$	$[0; t_0]$	$\left[t_0; \frac{T}{2}\right]$	$\left[\frac{T}{2}; \frac{T}{2} + t_0\right]$	$\left[\frac{T}{2} + t_0; T\right]$
État de K_1	Fermé	Fermé	ouvert	ouvert
u_{K_1} et i_{K_1}	0 et $i_s < 0$	0 et $i_s > 0$	E et 0	E et 0
Point de fonctionnement	P_1	P_2	B	B



On constate que K_1 est un interrupteur bidirectionnel en courant, mais pas en tension, d'où l'association en parallèle d'une diode et d'un transistor tête-bêche. Le même travail peut être réalisé pour les autres interrupteurs, ils sont identiques, c'est juste l'orientation qu'il faut adapter. D'où le montage complet :





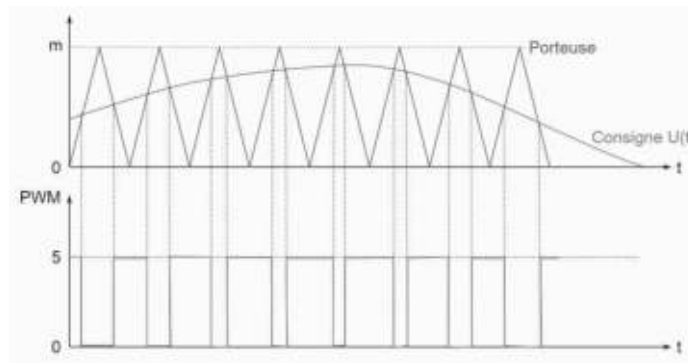
Manipulation

Simulation <http://fisik.free.fr/ressources/onduleur.swf>

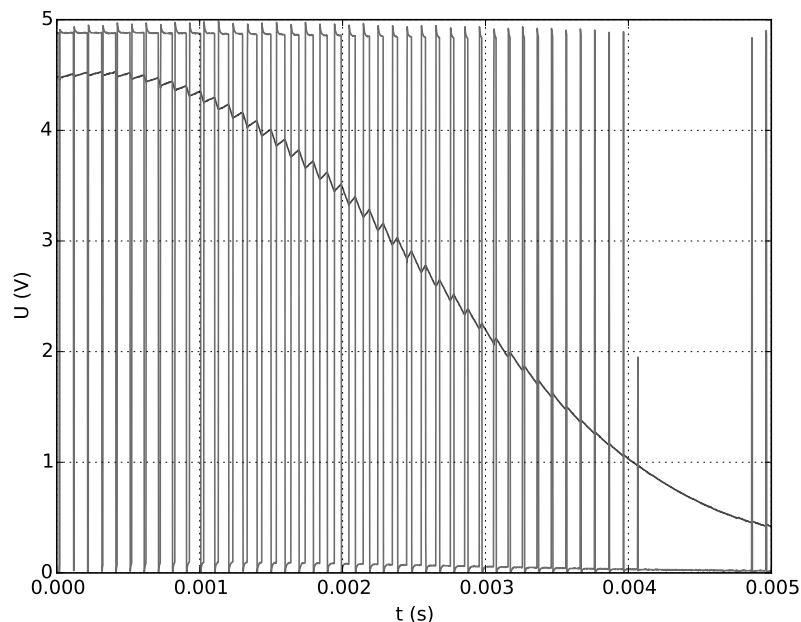
Notons que le choix d'un rapport cyclique de $1/2$ permet de n'avoir que les harmoniques impaires pour le signal créneau. Ainsi lors du filtrage, on réalise un compromis en choisissant une constante de temps $\tau = \frac{L}{R}$ de sorte conserver le fondamental mais supprimer les harmoniques ultérieures, donc $T < \tau < 2T$.

VI.4 Obtention d'un signal sinusoïdal

Le résultat obtenu par cette méthode n'est cependant pas très sinusoïdal. Soit on filtre davantage, mais au risque de perdre en rendement, soit on réalise une commande des interrupteurs non régulière. C'est le principe de la modulation à largeur d'impulsion (MLI, ou PWM en anglais). L'idée est la suivante : on souhaite avoir une consigne sinusoïdale, on la compare avec une porteuse, ici triangulaire. Selon que la porteuse est plus grande ou plus petite que la consigne, on modifie la valeur de u_s . Le filtrage passe-bas permet alors de récupérer en sortie un signal sinusoïdal.



Cette technique fonctionne d'autant mieux que la fréquence de la modulation est grande devant la fréquence de la consigne. Le résultat est illustré sur une simulation numérique :



C'est particulièrement utilisée sur les cartes Arduino ou Raspberry pour générer à bas coût un signal quasi-sinusoïdal.

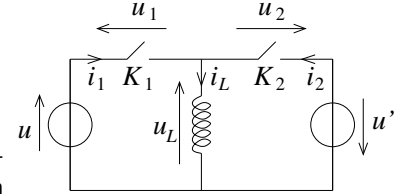
Exercices

4. 1 Hacheur à stockage inductif

Soit le montage suivant où on supposera que l'intensité $i_L(t)$ dans la bobine d'inductance L est toujours positif.

L'interrupteur K_1 est fermé sur $[0, \alpha T]$ et ouvert sur $[\alpha T, T]$.

L'interrupteur K_2 est ouvert sur $[0, \alpha T]$ et fermé sur $[\alpha T, T]$.



1. Vérifier que les règles d'associations sont respectées.
2. On suppose le régime périodique atteint. Tracer les chronogrammes des tensions u_1 , u_2 , u_L puis des intensités i_L , i_1 , i_2 . Quelle doit être la relation entre u , u' et α ?
3. Quelle doit être la nature des interrupteurs (diode ou transistor) ?
4. Calculer les valeurs moyennes I_1 et I_2 des intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$ en fonction de la valeur moyenne I_L du courant $i_L(t)$ dans la bobine.
5. En déduire la valeur du rapport I_2/I_1 en fonction de α . Que peut-on dire du cas $\alpha = 1$?
6. Dresser un bilan de puissance en calculant la puissance moyenne cédée par la source de tension u , la puissance moyenne consommée par la source de tension u' et les puissances moyennes consommées par les interrupteurs et la bobine.
7. Quels interrupteurs faudrait-il choisir si l'intensité i_L pouvait devenir négative ?

1. On remarque que l'on ne connecte jamais les deux sources de tension continues du fait de l'alternance. De plus on peut considérer l'inductance comme une source de courant, dans la mesure où elle impose la continuité du courant.
2. Sur l'intervalle $[0; \alpha T]$, $u_1 = 0$, $u_2 = -(u + u')$, $i_1 = i_L$ et $i_2 = 0$.

D'autre part $u_L = u = L \frac{di_1}{dt}$, donc on peut écrire :

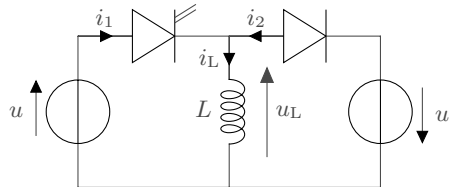
$$i_L = I_- + \frac{u}{L} t \quad (4.22)$$

avec I_- la valeur minimale que prend i_L en régime permanent.

Sur l'intervalle $[\alpha T; T]$, $u_1 = +(u + u')$, $u_2 = 0$, $i_1 = 0$ et $i_2 = i_L$.

D'autre part $u_L = -u' = L \frac{di_2}{dt}$, d'où $i_L = I_+ - \frac{u'}{L} (t - \alpha T)$ avec I_+ la valeur maximale que prend i_L en régime permanent. Cela nous permet de tracer les formes d'onde. Enfin, comme $\langle u_L \rangle = 0 = \alpha u - (1 - \alpha) u'$, on a $u' = \frac{\alpha}{1 - \alpha} u$.

3. D'après les éléments précédents, on reconnaît les points de la caractéristique d'un transistor en sens direct pour K_1 , et d'une diode en sens direct pour K_2 , d'où le montage suivant :



4. On calcule sans peine via des considérations géométriques que $\langle i_L \rangle = \frac{I_+ + I_-}{2}$, et que $\langle i_1 \rangle = \alpha \langle i_L \rangle$ et $\langle i_2 \rangle = (1 - \alpha) \langle i_L \rangle$.
5. $I_2/I_1 = \frac{1 - \alpha}{\alpha}$. En particulier pour $\alpha = 1$, on ne transfère aucune puissance dans la source u' et le courant y est nul, c'est donc logique d'avoir cette expression.
6. Pour la source u , la puissance fournie est $\mathcal{P}_u = \langle u i_1 \rangle = u I_1$; pour la source u' la puissance reçue est $\mathcal{P}_{u'} = \langle u' i_2 \rangle = u' I_2$, tandis qu'aucune puissance n'est consommée dans la bobine ou les interrupteurs (supposés parfaits). Par conséquent on doit vérifier

$$u I_1 = u' I_2 \iff u \alpha = u' (1 - \alpha) \iff u' = \frac{\alpha}{1 - \alpha} u \quad (4.23)$$

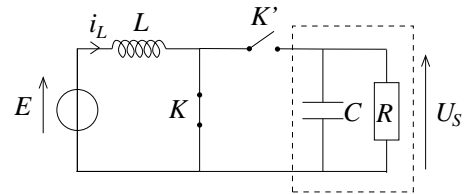
donc ce hacheur peut être dévolteur ou survolteur selon que $\alpha < 1/2$ ou $> 1/2$.

7. Si i_L pouvait devenir négatif, il faudrait des doubles interrupteurs, soit par exemple pour K_1 un transistor dans le sens direct et une diode dans le sens inverse.

4. 2 Alimentation à découpage

On s'intéresse au système constituant un convertisseur élévateur de tension entre une source de tension idéale E et une charge résistive R (jouant le rôle du dispositif à alimenter). Cette structure est représentative de dispositifs utilisés dans les alimentations dites à découpage, fréquemment utilisées dans les appareillages électriques.

Le fonctionnement considéré ici est périodique, la séquence de commande des interrupteurs étant la suivante :



- si $0 \leq t < \alpha T$, K est fermé tandis que K' est ouvert ;
- si $\alpha T \leq t < T$, K est ouvert tandis que K' est fermé.

Données numériques : $T = 50 \mu s$, $E = 40 V$.

1. Supposons temporairement l'association $R//C$ entourée en pointillés comme une source de tension de valeur $U_s = E'$. Étudier l'évolution de i_L sur une période et en déduire la valeur de E' permettant d'obtenir un fonctionnement périodique.
2. On désire obtenir une valeur $E' = 80V$ avec une variation de courant dans la bobine $\Delta i_L \leq 0,2 A$. Déterminer α puis la valeur minimale de l'inductance L .
3. Lorsque la puissance moyenne échangée est $P = 160 W$:
 - (a) déterminer les valeurs minimale et maximale de l'intensité dans la bobine si l'on adopte l'inductance minimale déterminée précédemment ;
 - (b) définir les fonctions de commutation utilisables pour K et K' dans ce fonctionnement.
4. On tient compte maintenant de la structure $R//C$ du dipôle de sortie, on adopte les valeurs numériques suivantes : $R = 40 \Omega$ et l'ondulation maximale ΔU_s de la tension U_s doit rester inférieure à $1 V$.

En supposant les formes d'ondes obtenues au **1)** conservées, déterminer la valeur minimale de la capacité C ; on fera les approximations suggérées par la valeur très faible de ΔU_s par rapport à E' .

-
1. L'association en série de E avec L permet d'avoir une source de courant en entrée, et en sortie une sortie de tension. On a donc la structure d'un hacheur parallèle (ou survolteur) vu en cours. Déterminons i_L :

- sur $[0; \alpha T]$, $E = L \frac{di_L}{dt}$ donc $i_L(t) = I_- + \frac{E}{L}t$ avec I_- valeur min en régime permanent ;
- sur $[\alpha T, T]$, $E - E' = L \frac{di_L}{dt}$ donc $i_L(t) = I_+ + \frac{E - E'}{L}(t - \alpha T)$.

Comme on a un fonctionnement périodique, on doit vérifier $i_L(t = \alpha T^-) = I_+$ et $i_L(t = T^-) = I_-$ soit :

$$\begin{cases} I_+ = I_- + \frac{E}{L}\alpha T \\ I_- = I_+ + \frac{E - E'}{L}(1 - \alpha)T \end{cases} \quad (4.24)$$

$$(4.25)$$

conduisant à : $\alpha E = (\alpha - 1)(E - E')$, c'est-à-dire $E' = \frac{E}{1 - \alpha}$.

2. Il faut donc choisir $\alpha = 1/2$ et la variation de courant s'obtient à l'aide de la première relation du système :

$$\Delta i_L = I_+ - I_- = \frac{E}{L} \frac{T}{2} \iff L \geq \frac{ET}{2\Delta i_{L,\max}} = 5 \text{ mH} \quad (4.26)$$

3. Il suffit de déterminer la puissance moyenne apportée à la source E :

$$\langle E i_L \rangle = P = E \langle i_L \rangle \iff \langle i_L \rangle = \frac{P}{E} = 4 A \quad (4.27)$$

d'où $I_- = 3,9 A$ et $I_+ = 4,1 A$. Concernant les fonctions de commutation, cf. cours, K est une transistor vers le bas et K' une diode vers la droite.

4. Écrivons la loi des nœuds à l'entrée de l'association parallèle sur $[0; \alpha T]$:

$$0 = \frac{U_s}{R} + C \frac{dU_s}{dt} \quad (4.28)$$

($= i_L$ sur $[\alpha T; T]$). Compte tenu des approximations effectuées, sur cet intervalle :

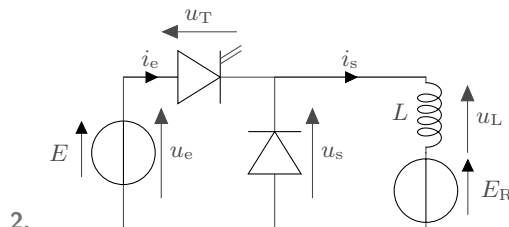
$$0 = \frac{E' + \Delta U_s}{R} + C \frac{\Delta U_s}{\alpha T} \iff C \simeq \frac{E' \alpha T}{R \Delta U_s} \implies C \geq \frac{E \alpha T}{(1 - \alpha) R \Delta U_{s, \max}} = 50 \mu\text{F} \quad (4.29)$$

4. 3 Alimentation d'une MCC

Une machine à courant continu (MCC), fonctionnant en moteur, est alimentée par une source idéale de tension de force électromotrice E par l'intermédiaire d'un hacheur série de rapport cyclique α . Une bobine d'inductance L est placée en série avec la machine. Les résistances des bobines sont négligées. On notera ϕ_0 la constante de flux de la machine et ω sa vitesse angulaire de rotation.

1. À quoi sert la bobine ?
2. Représenter le circuit et donner le chronogramme des tensions aux bornes des interrupteurs et de la bobine, de l'intensité i circulant dans la machine. Donner leurs valeurs moyennes.
3. Déterminer la vitesse de rotation du moteur. Commenter.
4. Montrer que la puissance fournie par la source de tension est égale à celle reçue par la machine.
5. Calculer l'ondulation du courant i , définie par $\Delta i = i_{\max} - i_{\min}$. Commenter.
6. Le rotor de la MCC est solidaire du rotor d'une autre MCC identique fonctionnant en génératrice et branchée sur une résistance R .
 - (a) Déterminer la valeur moyenne du courant i en fonction de R . En déduire la valeur minimale i_m de $i(t)$.
 - (b) Montrer que pour R supérieur à une résistance critique R_c que l'on déterminera, le courant i peut s'annuler. Quel problème cela pose-t-il ?
 - (c) On revient au régime de conduction continu où i ne s'annule pas. Montrer que lorsqu'on tient compte de la dissipation dans les bobines et d'un couple de frottement fluide $\Gamma = -f\Omega$ s'exerçant sur le rotor, on trouve encore une vitesse de rotation proportionnelle à α . On notera R_1 la résistance dans la branche du moteur et R_2 la résistance totale dans la branche de la génératrice.

-
1. La bobine permet de s'assurer d'un lissage efficace du courant dans la branche de la MCC, et donc de faire en sorte que ce soit une source de courant, à connecter à la source de tension via le hacheur.



2. Sur $[0; \alpha T]$, $u_T = 0$, $u_s = E$; sur $[\alpha T; T]$, $u_T = E$, $u_s = 0$. Pour le courant dans la bobine :

$$\begin{cases} i_s = \frac{E - \Phi_0 \Omega}{L} t + I_- & \text{pour } t \in [0; \alpha T] \end{cases} \quad (4.30)$$

$$\begin{cases} i_s = -\frac{\Phi_0 \Omega}{L} (t - \alpha T) + I_+ & \text{pour } t \in [\alpha T; T] \end{cases} \quad (4.31)$$

On a en valeur moyenne $\langle I \rangle = \frac{I_+ + I_-}{2}$, $\langle u_T \rangle = (1 - \alpha)E$, $\langle u_s \rangle = \alpha E$.

3. $\langle u \rangle_s = \alpha E = \langle u_L \rangle + \langle E_R \rangle = \Phi_0 \Omega$. Donc $\Omega = \frac{\alpha E}{\Phi_0}$. Le rapport cyclique contrôle donc directement la vitesse angulaire de la MCC.
4. Puissance fournie :

$$\mathcal{P}_f = \langle u_e i_e \rangle = E \langle i_e \rangle = E \alpha \langle i_s \rangle \quad (4.32)$$

tandis que la puissance reçue par la MCC vaut :

$$\mathcal{P}_{\text{MCC}} = \langle E' i_s \rangle = E_R \langle i_s \rangle = \alpha E \langle i_s \rangle = \mathcal{P}_f \quad (4.33)$$

On a donc un rendement de 1.

5. Ondulation à partir des portions de droites :

$$I_+ = I_- + \frac{E - \Phi_0 \Omega}{L} \alpha T \Rightarrow \Delta i = \frac{E - \alpha E}{L} \alpha T = \frac{E}{L} \alpha (1 - \alpha) T \quad (4.34)$$

Par conséquent, l'ondulation sera d'autant plus faible que L est grand. D'autre part il faut éviter de choisir $\alpha = 1/2$, qui maximise l'ondulation.

6. (a) Si c'est la même MCC, la tension à ses bornes vaut également $\Phi_0 \omega$, car le couple transmis est le même (conversion mécano-électrique parfaite). Étant donné que l'on a le même couple, on a donc le même courant traversant chaque MCC, d'où $\Phi_0 \Omega = R \langle i \rangle$. Comme on a calculé l'ondulation, on a donc :

$$\langle i \rangle = i_m + \frac{\Delta i}{2} \Leftrightarrow i_m = \frac{\Phi_0 \Omega}{R} - \frac{ET}{2L} \alpha (1 - \alpha) \quad (4.35)$$

- (b) Le courant peut s'annuler si $i_m = 0$, ce qui donne

$$R_c = \frac{2L\Phi_0\Omega}{ET\alpha(1-\alpha)} = \frac{2L}{T(1-\alpha)} \quad (4.36)$$

Si le courant s'annule, le moteur s'arrêterait nécessairement car aucune puissance ne serait transférée à la fcm.

- (c) Notons R_1 la résistance totale dans la branche du moteur à courant continu, et R_2 celle aux bornes de la génératrice idéale. Écrivons les équations électriques et mécaniques :

$$\begin{cases} \Phi_0 i_s = f\Omega + \Phi_0 i_{\text{généré}} \end{cases} \quad (4.37)$$

$$\begin{cases} u_s = R_1 i_s + L \frac{di_s}{dt} + \Phi_0 \Omega \end{cases} \quad (4.38)$$

$$\begin{cases} \Phi_0 \Omega = R_2 i_{\text{généré}} \end{cases} \quad (4.39)$$

soit en ne travaillant qu'en valeur moyenne :

$$\alpha E = R_1 i_s + \Phi_0 \Omega \quad (4.40)$$

En tenant compte des deux autres, on exprime l'intensité dans la génératrice $i_{\text{généré}} = i_s - \frac{f}{\Phi_0} \Omega$, puis :

$$\Phi_0 \Omega = R_2 i_s - R_2 \frac{f}{\Phi_0} \Omega \Rightarrow i_s = \left(\frac{f}{\Phi_0} + \frac{\Phi_0}{R_2} \right) \Omega \quad (4.41)$$

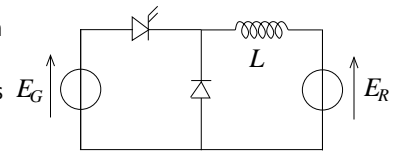
d'où finalement :

$$\alpha E = R_1 \left(\frac{f}{\Phi_0} + \frac{\Phi_0}{R_2} \right) \Omega + \Phi_0 \Omega \Rightarrow \Omega = \frac{\alpha \Phi_0 E}{f R_1 + \Phi_0^2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right)} \quad (4.42)$$

4. 4 Régime transitoire d'un hacheur série

Soit un hacheur série transférant de l'énergie d'un générateur de f.e.m E_G vers un récepteur de f.e.m E_R . Le rapport cyclique de hachage est α de période T .

On fait l'hypothèse que l'intensité dans la bobine ne s'annule jamais. Supposons qu'à l'instant $t_0 = nT$ (n entier), l'intensité qui traverse la bobine est i_0 .



- (a) Donner l'expression de cette intensité à l'instant $t_0 + T$. La relation entre $i(t_0 + T)$ et i_0 est-elle encore valable si n n'est pas entier ?
- (b) Déterminer $\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle$. On admet que cette relation est valable, sans la valeur moyenne, pour un dipôle quelconque si la tension à ses bornes u_R varie lentement sur une période.

2. Application à l'alimentation d'un moteur à courant continu.

Un moteur initialement au repos est alimenté par ce hacheur. Notons J le moment d'inertie du rotor et Φ_0 la constante électromagnétique. On néglige la résistance du moteur. Le moteur est soumis à un couple résistant de type frottement fluide : $\Gamma = -f\omega$. Comment faut-il choisir L pour que le régime permanent soit atteint le plus rapidement ?

3. Application à une alimentation à découpage.

La f.e.m du générateur est de 20 V, l'inductance de la bobine est de 10 mH, le récepteur est une résistance de 10 Ω en parallèle avec une capacité C .

Commenter l'affirmation suivante : "il faut choisir la capacité du condensateur la plus grande possible pour que la tension aux bornes de la résistance soit la plus constante possible"

1. (a) La tension aux bornes de la bobine vérifie $u_L = L \frac{di}{dt} = u_s - E_R$ avec u_s la tension aux bornes de la diode, valant soit E_G , soit 0 selon les commutateurs. Ainsi en intégrant entre t_0 et $t_0 + T$:

$$Li(t_0 + T) - Li(t_0) = \int_{t_0}^{t_0+T} u_s(t) dt - E_R T = \alpha T E - E_R T \iff i(t_0 + T) = i_0 + \frac{\alpha E_G - E_R}{L} T \quad (4.43)$$

(b) Ainsi

$$\left\langle \frac{di}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{di}{dt} dt = \frac{i(t_0 + T) - i(t_0)}{T} = \frac{\alpha E_G - E_R}{L} \quad (4.44)$$

2. Déterminer le temps de réponse mécanique nécessite d'appliquer la loi du moment cinétique au rotor :

$$J\dot{\omega} = -f\omega + \Phi_0 i \implies J\ddot{\omega} + f\dot{\omega} = \Phi_0 \frac{di}{dt} \quad (4.45)$$

Soit en approximant la dérivée à sa valeur moyenne :

$$J\ddot{\omega} + f\dot{\omega} + \frac{\Phi_0^2}{L}\omega = \frac{\Phi_0 \alpha E_G}{L} \quad (4.46)$$

On reconnaît une équation différentielle d'ordre 2 sur ω , avec un régime permanent atteint le plus rapidement si $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, si on autorise un léger dépassement (sinon on choisit le régime critique), c'est-à-dire avec $\omega_0/Q = f/J$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{\Phi_0^2}{JL}}$:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{J\omega_0}{f} = \frac{1}{\sqrt{2}} \iff \frac{J\Phi_0^2}{Lf^2} = \frac{1}{2} \iff L = \frac{2J\Phi_0^2}{f^2} \quad (4.47)$$

3. On réalise le même travail, sachant que la loi des nœuds conduit à :

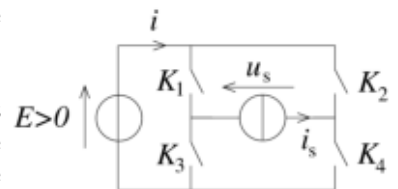
$$i = i_R + i_c = \frac{u_R}{R} + C \frac{du_R}{dt} \implies \ddot{u} + \frac{1}{RC} \dot{u} + \frac{1}{LC} u = \frac{\alpha E_G}{LC} \quad (4.48)$$

Si on prend la valeur de la capacité la plus grande possible, comme $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} = \frac{1}{Q\sqrt{LC}}$, $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$, on augmente donc Q , et le temps du régime transitoire est de plus en plus grand.

4. 5 Onduleur

Un onduleur est un dispositif électrique asservi en fréquence destiné à produire, à partir d'une tension constante, un courant électrique alternatif susceptible d'être injecté dans le réseau de transport du courant industriel.

L'onduleur est constitué d'une source de tension continue parfaite de force électromotrice E positive et de quatre interrupteurs K_n , $n \in \{1, 2, 3, 4\}$, commandés électroniquement à partir d'une tension de commande U_{cm} non représentée sur le schéma. La sortie de l'onduleur est connectée à une charge se comportant comme une source parfaite de courant i_s , ce courant étant une fonction continue du temps.



- Rappeler les définitions d'une source de tension parfaite et d'une source de courant parfaite.
- Compte tenu de la nature de la source de tension E et de la nature de la charge, quelles sont les contraintes d'ouverture et de fermeture des interrupteurs K_n ? Compléter le tableau suivant.

	K_1	K_2	K_3	K_4
$U_{cm} > 0$	fermé	ouvert		
$U_{cm} < 0$	ouvert	fermé		

- La tension de commande U_{cm} est générée par le montage de la figure ci-dessous, dans lequel l'amplificateur linéaire intégré est idéal. La tension U_0 est constante, telle que $U_0 \in [-U_h; U_h]$, avec $U_h > 0$. La tension $U_p(t)$, appelée porteuse, est T_p -périodique et en dent de scie (suite de rampes montantes). Justifier que l'amplificateur fonctionne en régime de saturation en tension (on note V_{sat} l'amplitude de la tension de sortie dans ce cas).

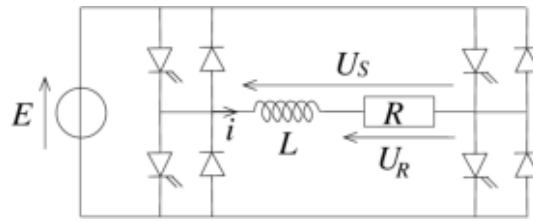


4. On choisit $U_0 \geq 0$. Tracer la courbe représentant la tension $u_s(t)$ aux bornes de la charge en fonction du temps et préciser la valeur de sa période T_s .
5. Sur une période T_s de u_s , on note t_1 la durée où $U_s > 0$. Le rapport cyclique est défini par $\alpha = \frac{t_1}{T_s}$. Exprimer la valeur moyenne $\langle U_s \rangle$ de U_s en fonction de α et de E puis en fonction de U_0 , E , et U_h . Quelles doivent être les valeurs de α et U_0 si on veut que U_s ait une moyenne nulle ? On se placera dans ce cas dans la suite.
6. Le développement en série de Fourier de la tension $U_s(t)$ ainsi générée s'écrit :

$$u_s(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2E}{n\pi} [1 - (-1)^n] \sin(n\omega t) \text{ avec } \omega = \frac{2\pi}{T_s}$$

Représenter graphiquement le spectre en amplitude de cette tension. Ce spectre est-il satisfaisant en vue d'un raccordement de u_s au réseau de distribution électrique ? Si ce n'est pas le cas, quels en sont les défauts et quelles conséquences néfastes cela pourrait-il avoir ?

7. La charge est constituée d'une bobine d'inductance L en série avec une résistance R . On pose $\tau = L/R$. On étudie le régime T_p -périodique établi du montage. On notes $-I$ la valeur de i_s à $t = 0$ et $+I$ sa valeur à $t = T_p/2$. Exprimer $i_s(t)$ pour $t \in [0; T_p/2]$ et pour $t \in [T_p/2; T_p]$ en fonction de t , E , R , I , T_p et τ . En déduire l'expression de I en fonction de E , R , T_p et τ .
8. Représenter les chronogrammes de i_s et de i .
9. Dans la pratique, l'onduleur qui alimente la charge {résistance+bobine} est réalisée avec le montage ci-dessous. Les interrupteurs commandés K_n sont des transistors idéaux unidirectionnels et le circuit contient également quatre diodes idéales D_n . Expliquer le rôle des diodes dans le circuit.



10. Le rôle de la bobine est d'effectuer un filtrage. Les grandeurs soulignées désignent les grandeurs complexes associées aux grandeurs réelles sinusoïdales de pulsation temporelle notée ω . Déterminer la fonction de transfert complexe $\underline{H} = \frac{\underline{U_R}}{\underline{U_S}}$ de la branche {bobine+résistance} et faire apparaître dans son expression une pulsation caractéristique, notée ω_c à exprimer en fonction de τ . Donner l'expression du gain $G(\omega)$ et du déphasage $\phi(\omega)$ associés à \underline{H} .
11. Donner le développement en série de Fourier de $U_R(t)$. En déduire le spectre en amplitude de la tension U_R et le représenter graphiquement. En quoi ce spectre est-il meilleur que celui de U_s pour un éventuel raccordement au réseau de distribution électrique ?

1. Une source de tension parfaite est telle que la tension à ses bornes est constante quelle que soit la valeur du courant qui la traverse. Equivalent pour une source de courant.
2. On relie une source de tension à une source de courant, on ne peut donc pas court-circuiter la source de tension, ni laisser en circuit ouvert une source de courant. D'où :

	K_1	K_2	K_3	K_4
$U_{cm} > 0$	fermé	ouvert	ouvert	fermé
$U_{cm} < 0$	ouvert	fermé	fermé	ouvert

3. L'ALI est en régime saturé car il n'y a pas de rétroaction négative. Ainsi si $U_p < U_0$, $V_+ > V_-$ et $U_{cm} = +V_{sat}$, et sinon $U_{cm} = -V_{sat}$.
4. U_{cm} est donc un signal créneau non symétrique, lorsque la saturation est positive, $u_s = E$, lorsqu'elle est négative, $u_s = -E$. La période de u_s est par conséquent T_p .
5. $u_s > 0$ si $U_{cm} > 0$. Cela se produit durant une durée telle que :

$$-U_h + \frac{2U_h}{T_p} t_1 = U_0 \iff t_1 = T_p \frac{U_0 + U_h}{2U_h} \implies \alpha = \frac{t_1}{T_s} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{U_0}{U_h} \right) \quad (4.49)$$

Ainsi la valeur moyenne de u_s vaut :

$$\langle u_s \rangle = \frac{1}{T_p} (\alpha T_p E + (1 - \alpha) T_p (-E)) = (2\alpha - 1) E = \frac{U_0}{U_h} E \quad (4.50)$$

Il faut donc choisir $\alpha = \frac{1}{2}$, c'est-à-dire encore $U_0 = 0$.

6. Spectre décroissant en $1/n$. Pas satisfaisant car contenant beaucoup d'harmoniques : l'ajout sur le réseau d'harmoniques pourrait endommager d'éventuels appareils prévus pour 50 Hz uniquement, et occasionner des pertes. Notons aussi que les harmoniques à hautes fréquences se propagent dans les fils électriques sur une zone plus restreinte (effet de peau), du coup la résistance électrique augmente, et donc on a des pertes en ligne plus importantes.
7. Le courant dans la charge vérifie l'équation :

$$\begin{cases} \tau \frac{di_s}{dt} + i_s = \frac{E}{R} & \text{pour } t \in \left[0; \frac{T_p}{2}\right] \\ \tau \frac{di_s}{dt} + i_s = -\frac{E}{R} & \text{pour } t \in \left[\frac{T_p}{2}; T_p\right] \end{cases} \quad (4.51)$$

$$(4.52)$$

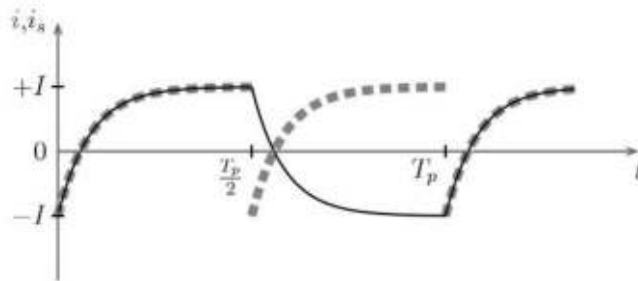
admettant pour solution, avec les conditions initiales données :

$$\begin{cases} i_s(t) = -\left(\frac{E}{R} + I\right)e^{-t/\tau} + \frac{E}{R} & \text{pour } t \in \left[0; \frac{T_p}{2}\right] \\ i_s(t) = \left(\frac{E}{R} + I\right)e^{-t/\tau} - \frac{E}{R} & \text{pour } t \in \left[\frac{T_p}{2}; T_p\right] \end{cases} \quad (4.53)$$

$$(4.54)$$

soit à $T_p/2$, les deux expressions doivent être égales à I , d'où :

$$I = -\left(\frac{E}{R} + I\right)e^{-T_p/(2\tau)} + \frac{E}{R} \Rightarrow I = \frac{E}{R} \frac{1 - e^{-T_p/(2\tau)}}{1 + e^{-T_p/(2\tau)}} \quad (4.55)$$



8.

9. La figure précédente montre que l'intensité i_s change de signe sur chaque intervalle. Or, les interrupteurs K_n sont unidirectionnels (transistors), ce qui signifie qu'ils ne laissent passer le courant que dans un sens. Les diodes permettent que le courant puisse circuler dans l'autre sens lors de son changement de signe.
10. On a trivialement :

$$\underline{H} = \frac{R}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \quad (4.56)$$

filtre passe-bas du premier ordre de pulsation de coupure $\omega_c = \frac{1}{\tau}$. On a alors

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad \text{et} \quad \phi(\omega) = -\arctan(\omega\tau) \quad (4.57)$$

11. En appliquant le gain et le déphasage associé à chaque pulsation $n\omega$, la réponse u_R à u_s est :

$$u_R(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2E}{n\pi\sqrt{1 + n^2\omega^2\tau^2}} (1 - (-1)^n) \sin(n\omega t - \arctan(n\omega\tau)) \quad (4.58)$$

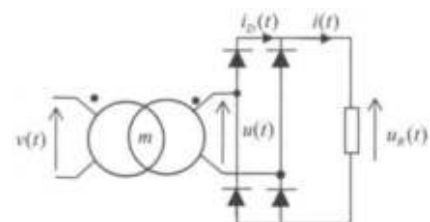
Globalement, en faisant un choix approprié de τ , on peut faire en sorte que $\omega\tau \geq$ qqes unités, ainsi $\sqrt{1 + n^2\omega^2\tau^2} \sim n\omega\tau$, donc l'amplitude pour l'harmonique n vaut approximativement :

$$A_n \sim \frac{2E}{n^2\pi\omega\tau} (1 - (-1)^n) \quad (4.59)$$

c'est-à-dire que l'on a une décroissance en $1/n^2$ au lieu d'en $1/n$, ce qui permet d'avoir moins de perturbations lorsqu'on le raccorde au réseau de distribution électrique.

4. 6 Chargeur de pile

Un chargeur de piles utilise la fonction de redressement réalisée par un pont à 4 diodes D supposées parfaites et identiques. La tension $v(t)$ est sinusoïdale alternative de valeur efficace $V = 230$ V et de fréquence $f = 50$ Hz. Le transformateur est supposé parfait, de rapport de transformation $m = 0,06$. On note U la valeur efficace de la tension $u(t)$.



1. La tension u_R est aux bornes d'une résistance $R = 160 \Omega$.

(a) Calculer $\langle u_R \rangle$.

(b) En déduire les expressions et les valeurs des moyennes des intensités $\langle i \rangle$ et $\langle i_D \rangle$. Calculer les valeurs efficaces I et I_D .

(c) Calculer la puissance consommée par la résistance.

2. On désire maintenant charger deux accumulateurs Ni-Cd de fém $e = 1,4 \text{ V}$ et de « capacité » 500 mAh. On note $u_R(t)$ la tension aux bornes de la résistance et des deux piles en série.

(a) Tracer $u_R(t)$ et $i(t)$.

(b) Calculer $\langle i \rangle$ et $\langle u_R \rangle$ au premier ordre en $\frac{e}{U}$.

(c) En déduire la puissance consommée par les piles et la durée de charge.

1. (a) On a déjà $u(t) = mV \sin \omega t$, puis avec le pont de diode, on obtient $u_R(t) = mV |\sin(\omega t)|$. La valeur moyenne se calcule alors comme dans le cours, sur une demi-période :

$$\langle u_R(t) \rangle = \frac{2}{T} mV \int_0^{T/2} \sin(\omega t) dt = \frac{2\sqrt{2}mV}{\pi} = 12,4 \text{ V} \quad (4.60)$$

(b) De la question précédente, on en déduit $\langle i(t) \rangle = \frac{\langle u_R \rangle}{R} = \frac{2\sqrt{2}mV}{\pi R} = 77,6 \text{ mA}$. Enfin, comme $i_D = i(t)$ uniquement sur une demi-période :

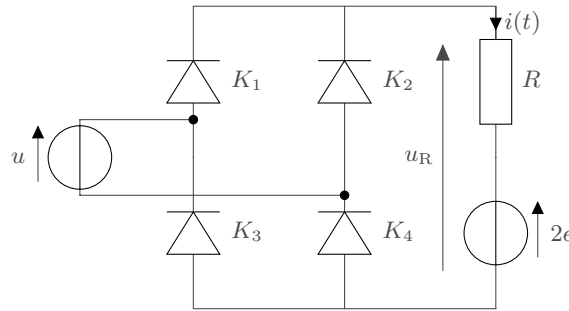
$$\langle i_D \rangle = \frac{\langle i_R \rangle}{2} = \frac{\sqrt{2}mV}{\pi R} \quad (4.61)$$

Concernant les valeurs efficaces : $I = \frac{mV}{R} = 86,3 \text{ mA}$ car la tension efficace d'un signal redressé ou non est la même, soit ici mV . Pour le courant dans la diode :

$$I_D^2 = \frac{1}{T} \int_0^T i_D^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} i^2(t) dt = \frac{I^2}{2} \Rightarrow I_D = \frac{I}{\sqrt{2}} = 61,0 \text{ mA} \quad (4.62)$$

(c) La puissance consommée vaut alors $\mathcal{P} = \frac{(mV)^2}{R} = 1,19 \text{ W}$.

2. On pose $U = mV$, et $u(t) = U\sqrt{2} \sin \omega t$



(a) Il faut reprendre l'ensemble de l'analyse du fonctionnement du système, du fait de l'ajout des générateurs de tension, on a donc $u_R = Ri + 2e$. Il faut ainsi distinguer les cas où $u_R = \pm u$, vérifiant $i > 0$ (pour que les deux couples de diodes puissent être passantes / bloquées) :

- si K_1 et K_4 sont les seules passantes : $u = u_R$, donc $i = \frac{u - 2e}{R}$, c'est-à-dire qu'il faut que $u > 2e$, c'est-à-dire

$$u\sqrt{2} \sin \omega t > 2e \Rightarrow \omega t \in \left[\arcsin\left(\frac{2e}{U\sqrt{2}}\right); \pi - \arcsin\left(\frac{2e}{U\sqrt{2}}\right) \right] \quad (4.63)$$

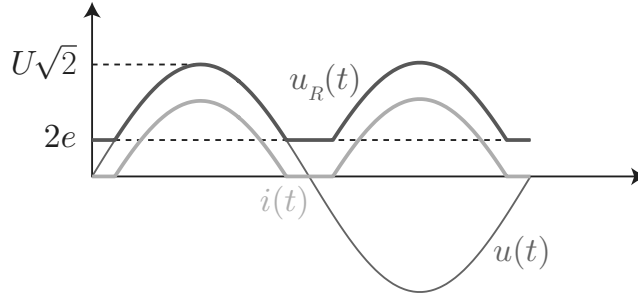
- si K_2 et K_3 sont les seules passantes, $u = -u_R$, alors $i > 0$ implique $U\sqrt{2} \sin(\omega t) < -2e$, soit :

$$\omega t \in \left[\pi + \arcsin\left(\frac{2e}{U\sqrt{2}}\right); 2\pi - \arcsin\left(\frac{2e}{U\sqrt{2}}\right) \right] \quad (4.64)$$

Vérifions que les autres configurations de diodes sont possibles ou non :

- Si K_1 et K_3 sont passantes, alors $0 = 2e + Ri$ implique $i = -\frac{2e}{R} < 0$ impossible ;
- idem pour K_2 et K_4 , idem pour davantage de diodes passantes ;

- supposons l'ensemble des diodes bloquées, $i = 0$ et $u_R = 2e = -u_4 - u_1 = u_2 - u_3$, donc $u_1 + u_4 < 0$ et $u_2 + u_3 < 0$ donc c'est cohérent.



(b) Notons $\alpha = \arcsin\left(\frac{2e}{U\sqrt{2}}\right)$

$$\langle i \rangle = \frac{2}{TR} \int_{\frac{\alpha}{\omega}}^{\frac{\pi-\alpha}{\omega}} (U\sqrt{2}\sin(\omega t) - 2e)dt = \frac{2}{RT\omega} (U\sqrt{2}\cos\alpha - \cos(\pi-\alpha) - 2e(\pi-2\alpha)) \quad (4.65)$$

$$= \frac{2U\sqrt{2}}{\pi R} \sqrt{1 - \frac{2e^2}{U^2}} - \frac{2e}{R} \left(1 - \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\frac{2e}{U\sqrt{2}}\right)\right) \quad (4.66)$$

On peut alors effectuer un développement limité au deuxième ordre en e/U :

$$\langle i \rangle \simeq \frac{2\sqrt{2}U}{\pi R} \left(1 - \frac{e^2}{U^2}\right) - \frac{2e}{R} \left(1 - \frac{4e}{\pi U\sqrt{2}}\right) = \frac{2U\sqrt{2}}{\pi R} \left(1 + \frac{e^2}{U^2}\right) - \frac{2e}{R} = 60,7 \text{ mA} \quad (4.67)$$

$$\text{d'où } \langle u_R \rangle = 2e + R \langle i \rangle = \frac{2U\sqrt{2}}{\pi} \left(1 + \frac{e^2}{U^2}\right).$$

(c) Ainsi la puissance moyenne consommée par les piles vaut :

$$\langle P \rangle = 2e \langle i \rangle = 0,17 \text{ W} \quad (4.68)$$

et le temps de charge vaut $t = \frac{2Q}{\langle i \rangle} \simeq 16500 \text{ s}$ soit 4h35.