

Théorie cinétique des gaz

Sommaire

0.1	Distribution de vitesses d'un gaz	2
0.1.1	Libre parcours moyen	2
0.1.2	Propriétés de la distribution des vitesses	2
0.1.3	Vitesse quadratique moyenne	2
0.2	Pression cinétique	2
0.2.1	Modèle simple unidimensionnel	3
0.2.2	Modèle simple tridimensionnel	3
0.3	Température cinétique	3
0.3.1	Définition	3
0.3.2	Équation d'état	4
0.3.3	Énergie interne	4

Questions de cours :

- Exprimer la pression cinétique d'un gaz en fonction de la densité particulaire, de la vitesse quadratique moyenne et de la masse des particules composant le gaz.

Capacités exigibles du BO :

- Utiliser un modèle unidirectionnel avec une distribution discrète de vitesse pour montrer que la pression est proportionnelle à la masse des particules, à la densité particulaire et à la vitesse quadratique moyenne au carré.
- Calculer l'ordre de grandeur d'une vitesse quadratique moyenne dans un gaz parfait.

I. Distribution de vitesses d'un gaz

I.1 Libre parcours moyen

Les molécules des gaz subissent d'incessantes collisions, entre elles et avec les bords du récipient.

Par définition, on appelle **libre parcours moyen** ℓ la distance moyenne parcourue par une particule entre deux collisions successives.

On peut en calculer son expression via une théorie des collisions :

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2} n^* \sigma} \quad \text{avec} \quad n^* = \text{densité volumique du gaz}$$
$$\sigma = \text{section efficace de collision} = \pi d^2$$
$$d = \text{diamètre moléculaire}$$

Retenons que dans un gaz à T et P normales, $\ell \sim 10^{-7}$ m.

I.2 Propriétés de la distribution des vitesses

À un instant donné les molécules ont des vitesses différentes, et une molécule donnée voit sa vitesse varier à chaque collision. On notera $\langle a \rangle$ la valeur moyenne¹ d'une grandeur a .

La distribution des vitesses à l'équilibre thermodynamique possède certaines caractéristiques :

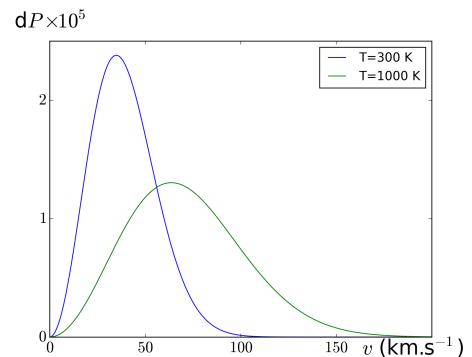
- elle est **homogène** : identique dans n'importe quel élément de volume mésoscopique $d\tau$;
- elle est **isotrope** : les différentes directions sont équiprobables (pas de direction privilégiée pour le mouvement).

Par conséquent, $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$.

HP : distribution des vitesses de Maxwell-Boltzmann : on considère un fluide de N molécules identiques de masse m , en équilibre thermodynamique avec un thermostat de température T . La probabilité pour une particule d'avoir une vitesse \vec{v} de norme comprise entre v et $v + dv$ est

$$dP(v) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right) 4\pi v^2 dv \quad (1)$$

k_B étant la constante de Boltzmann.



I.3 Vitesse quadratique moyenne

Par définition, la vitesse quadratique moyenne est $u^* = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$.

Retenez que la vitesse quadratique moyenne est du même ordre de grandeur que la célérité du son dans l'air.

À partir de la distribution de Maxwell-Boltzmann, on peut montrer que $u^* = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$. L'ordre de grandeur est de 500 m.s^{-1} pour l'air ambiant.

II. Pression cinétique

On considère un élément de surface mésoscopique dS sur la paroi fixe d'un récipient contenant un fluide. Avec l'agitation thermique, de nombreuses molécules viennent heurter cette surface dS , exerçant une force $\vec{\delta f} = P \vec{dS} = P dS \vec{e}_x$, donc apportant une quantité de mouvement $\vec{\delta p} = P \vec{dS} dt$.

On cherche donc à calculer la variation de quantité de mouvement pour obtenir l'expression de la pression. On se place dans le modèle du gaz parfait monoatomique : les particules sont ponctuelles et sans interaction entre elles.

1. Principe ergodique (HP) : À l'équilibre thermodynamique, calculer la moyenne temporelle d'une grandeur (sur un temps $\gg \tau$, temps moyen entre deux collisions) revient au même que calculer la moyenne instantanée sur un grand

nombre de particules. Pour la vitesse par exemple $\frac{1}{T} \int_0^T \vec{v}_i(t) dt = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \vec{v}_k$, si $T \gg \tau$ et $N \gg 1$.

II.1 Modèle simple unidimensionnel

On suppose pour simplifier que toutes les molécules se déplacent à la vitesse u^* , et dans un premier temps qu'elles se déplacent dans une seule direction $\pm \vec{e}_x$.

On considère d'abord le choc d'une unique molécule de masse m se déplaçant vers la paroi à la vitesse $\vec{v} = u^* \vec{e}_x$. On suppose que le choc est élastique (énergie cinétique conservée), la particule repart après le choc avec une vitesse $\vec{v}' = -u^* \vec{e}_x$.

La molécule voit donc sa quantité de mouvement varier de $\vec{\Delta p}_{\text{molécule}} = m\vec{v}' - m\vec{v} = -2mu^* \vec{e}_x$. À cause de ce choc, l'élément de surface dS de la paroi voit donc sa quantité de mouvement varier de la quantité opposée, d'après le principe des actions réciproques (la force exercée par les molécules sur la paroi est l'opposée de la force exercée par la paroi sur les molécules) :

$$\vec{\Delta p}_1 = 2mu^* \vec{e}_x \quad (2)$$

Les interactions entre molécules étant négligées (gaz parfait), pendant l'intervalle de temps dt , les molécules se déplacent de

$$d\ell = u^* dt$$

* Les molécules cognant l'élément de surface dS entre t et $t + dt$ se situent donc dans un volume

$$d\tau = dS d\ell = u^* dS dt \quad (3)$$

Dans ce volume, il y a $\delta N = n^* d\tau$ molécules, où n^* est la densité volumique de molécules. La moitié de ces molécules vont vers la paroi, ce qui fait donc $\frac{1}{2}\delta N$ chocs pendant dt , soit un transfert de quantité de mouvement :

$$\vec{\delta p} = \frac{1}{2} \delta N \vec{\Delta p}_1 = n^* mu^{*2} dS dt \vec{e}_x \quad (4)$$

II.2 Modèle simple tridimensionnel

On tient maintenant compte simplement du caractère tridimensionnel de l'espace en disant qu'un tiers des molécules se déplace selon $\pm \vec{e}_x$ (donc 1/6 selon $+\vec{e}_x$), un tiers selon $\pm \vec{e}_y$ et un tiers selon $\pm \vec{e}_z$. Seules celles se déplaçant selon \vec{e}_x cognent la paroi, on a donc seulement $\vec{\delta p} = \frac{1}{3} n^* mu^{*2} dS dt \vec{e}_x = P \vec{dS} dt$, soit :

$$P = \frac{1}{3} n^* mu^{*2} \quad (5)$$

Remarques :

- Le calcul reste valable sans paroi solide, au milieu du gaz : la quantité de mouvement $-mu^* \vec{e}_x$ de la particule qui a rebondi correspond alors à la quantité de mouvement d'une particule qui se situait à droite de dS et qui a donc été **perdue** par le gaz à droite de dS , tandis que la molécule qui a traversé dS vers la droite apporte sa quantité de mouvement au gaz à droite. On a donc à nouveau une variation de la quantité de mouvement du gaz à droite de dS de $mu^* \vec{e}_x - (-mu^* \vec{e}_x)$.
- Ce modèle simple donne la bonne dépendance en les différents paramètres, mais le facteur $\frac{1}{3}$ n'a aucune raison d'être juste *a priori*. Cependant, un calcul statistique plus rigoureux qui tient compte du fait que les molécules vont dans toutes les directions et ont des vitesses différentes données par la distribution de Maxwell-Boltzmann donne exactement le même résultat.

III. Température cinétique

III.1 Définition

La température décrit l'agitation thermique des molécules, leur énergie cinétique moyenne, sans mouvement d'ensemble du gaz. On définit ainsi la température cinétique T d'un gaz parfait monoatomique comme proportionnelle à l'énergie cinétique moyenne d'une molécule :

$$\langle e_c \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad (6)$$

Le facteur numérique sans dimension $\frac{3}{2}$ est spécifique du gaz parfait monoatomique² mais on a toujours $T \propto \langle e_c \rangle$.

* Or on a $\langle e_c \rangle = \left\langle \frac{1}{2}mv^2 \right\rangle = \frac{1}{2}mu^{*2}$ donc

$$\langle e_c \rangle = \frac{1}{2}mu^{*2} = \frac{3}{2}k_B T \quad (7)$$

III.2 Équation d'état

On peut alors éliminer u^* dans $P = \frac{1}{3}n^*mu^{*2}$, on obtient

$$P = n^*k_B T \quad (8)$$

* qu'on peut réécrire, avec la quantité de matière n et la constante des gaz parfaits R , en utilisant $n^* = N/V = nN_A V$ et $k_B = R/N_A$:

$$PV = nRT \quad (9)$$

On démontre ainsi l'équation d'état des gaz parfaits, trouvée expérimentalement avec des gaz réels à basse pression, ce qui montre que la température cinétique ainsi définie s'identifie bien avec la température absolue $T = \lim_{P \rightarrow 0} \frac{PV}{nR}$.

III.3 Énergie interne

L'énergie interne U est la somme de l'énergie cinétique microscopique et de l'énergie potentielle d'interaction entre les particules du système :

$$U = E_c^\mu + E_p^{\text{int}} \quad (10)$$

avec $E_c^\mu = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}mv_i^2$ (pour un gaz parfait monoatomique).

Dans un système macroscopique, le nombre N de particules étant très grand (de l'ordre de 10^{23}), les fluctuations sont négligeables³,

$$E_c^\mu = \langle E_c^\mu \rangle = N \times \frac{1}{2}mu^{*2} \quad (11)$$

Dans un gaz parfait, il n'y a pas d'interactions entre particules donc $E_p^{\text{int}} = 0$ donc

$$U = E_c^\mu = \frac{1}{2}Nmu^{*2} = \frac{3}{2}Nk_B T \quad (12)$$

Pour un gaz parfait monoatomique, on a donc :

$$U = \frac{3}{2}Nk_B T = \frac{3}{2}nRT = C_v T \quad \text{avec } C_v = \frac{3}{2}nR \quad (13)$$

Pour un gaz parfait non monoatomique, on a encore U qui ne dépend que de la température : $dU = C_V(T) dT$ mais avec une capacité thermique $C_V(T)$ différente, qu'on peut considérer constante dans des intervalles réduits de température.

2. Grossièrement, on peut dire qu'on a $\frac{1}{2}k_B T$ par degré de liberté intervenant dans l'énergie cinétique. Le facteur 3 correspond aux 3 degrés de liberté de translation d'une molécule monoatomique. Pour un gaz parfait diatomique, il faut aussi tenir compte des deux degrés de liberté de rotation autour des axes perpendiculaires à l'axe de la molécule.

3. HP : les fluctuations relatives sont de l'ordre de $1/\sqrt{N}$, autrement dit avec 10^{24} molécules, l'énergie cinétique microscopique par exemple présente des fluctuations de l'ordre de 0,000000001 %

Formulation infinitésimale du premier et du second principe

Sommaire

1.1 Calcul différentiel	2
1.1.1 Différentielle d'une fonction d'une seule variable	2
1.1.2 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables	2
1.1.3 Forme différentielle, notations d , δ et Δ	3
1.2 Premier principe	4
1.2.1 Rappels	4
1.2.2 Formulation infinitésimale du premier principe	4
1.2.3 Différentielle de l'énergie interne	5
1.2.4 Différentielle de l'enthalpie	5
1.3 Second principe	6
1.3.1 Formulation infinitésimale du second principe	6
1.3.2 Causes d'irréversibilités (rappels)	7
1.3.3 Identité thermodynamique	8
1.3.4 Calcul d'une variation d'entropie	8

Questions de cours :

- Expliciter les différences entre les notations d , δ et Δ en s'appuyant sur des exemples concrets.
- Citer le premier et le second principe sous la formulation infinitésimale en explicitant la signification de chaque terme.
- Différentielle de l'énergie interne et de l'enthalpie : définition et cas du gaz parfait et de la Phase Condensée Incompressible et Indilatable (PCII).
- Démontrer l'identité thermodynamique pour l'énergie interne et l'enthalpie.
- Présenter un calcul de variation d'entropie pour un gaz parfait en fonction des variables (P, V) , (P, T) ou (T, V) au choix du khôleur.

Capacités exigibles du BO :

- Relier la différentielle et les dérivées partielles premières. Utiliser le théorème de Schwartz (admis).
- Enoncer et exploiter les principes de la thermodynamique pour une transformation élémentaire.
- Utiliser avec rigueur les notations d et δ en leur attachant une signification.

I. Calcul différentiel

I.1 Différentielle d'une fonction d'une seule variable

On va chercher à introduire la notation de **déférentielle** d'une fonction et proposer une interprétation physique. Pour cela, considérons une fonction f qui à un réel t associe un réel $f(t)$. C'est typiquement le cas d'une grandeur physique dont on veut connaître ses variations au cours du temps.

Par définition, la **déférentielle de f** correspond à la variation élémentaire de la fonction pendant la durée infinitésimale dt :

$$df = f(t + dt) - f(t) \quad (1.1)$$

On peut relier df à dt par la relation :

$$df = \frac{df}{dt} dt = f'(t) dt \quad (1.2)$$

Ainsi pour une durée Δt , la variation de la fonction f se calcule comme la somme des variations infinitésimales df sur cette durée :

$$\Delta f = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0) = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} df = \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \frac{df}{dt} dt \quad (1.3)$$

Concrètement en physique, quand une grandeur t varie d'une petite quantité dt , $f(t)$ varie de df .



Exercice

Lors de l'étude du régime transitoire de chauffage d'une pièce, on peut être amené à écrire l'évolution de la température sous la forme $T(t) = T_{\text{ref}}(1 - e^{-t/\tau})$ avec τ un temps caractéristique. Déterminer la différentielle de T .

$$dT = \frac{dT}{dt} dt = T_{\text{ref}} e^{-t/\tau} \frac{dt}{\tau}$$

I.2 Différentielle d'une fonction de plusieurs variables

Soit une fonction f de plusieurs variables, par exemple du vecteur position $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$: $f(\vec{r}) = f(x, y, z)$. C'est ce que l'on appelle couramment un **champ scalaire** (par exemple pour la température, la pression, etc.).

a) Dérivée partielle

On appelle **dérivée partielle de f par rapport à x à y et z constants** la grandeur :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_{y,z} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y, z) - f(x, y, z)}{h} \quad (1.4)$$

*

notée plus simplement $\frac{\partial f}{\partial x}$ voire $\partial_x f$.

Par exemple avec $f(x, y) = 2xy + y^2$, $\frac{\partial f}{\partial x} = 2y$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(x + y)$.

Théorème de Schwartz

Si f est une fonction de classe C^2 , alors l'ordre de dérivation n'a pas d'importance pour calculer les dérivées partielles d'ordre supérieur à un :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \quad (1.5)$$

Une dérivée partielle seconde est ainsi notée simplement $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$.

b) Différentielle

On appelle alors différentielle de f la variation infinitésimale de f lorsqu'on effectue une variation infinitésimale de toutes les variables $x \mapsto x + dx$, $y \mapsto y + dy$, $z \mapsto z + dz$ (soit encore pour le vecteur position $\vec{r} \mapsto \vec{r} + d\vec{r}$) :

$$* \quad df = f(\vec{r} + d\vec{r}) - f(\vec{r}) = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z) \quad (1.6)$$

On peut l'exprimer en fonction des dérivées partielles :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (1.7)$$

Exercice

La pression d'un gaz parfait dans l'atmosphère en fonction de la pression et de l'altitude se met sous la forme :

$$P(z, T) = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}} \quad (1.8)$$

Exprimer la différentielle de P .

$$dP = P_0 e^{-\frac{Mgz}{RT}} \left(-\frac{Mg}{RT} dz + \frac{Mgz}{RT^2} dT \right) \quad (1.9)$$

Pour un métal, le volume dépend de la température T et de la pression P . On définit deux coefficients de dilatation isobare $\alpha = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$ et de compressibilité isotherme $\chi_T = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T$.

Exercice

Déterminer la différentielle de $V(T, P)$. Quelle doit être la pression à exercer sur le métal pour que son volume reste constant lorsque sa température passe à 30 °C, partant de 20 °C et $P_0 = 1$ bar. On donne $\alpha = 5 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ et $\chi_T = 7 \cdot 10^{-12} \text{ Pa}^{-1}$.

La différentielle de V s'écrit :

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P dT + \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_T dP = \alpha V dT - \chi_T V dP \quad (1.10)$$

Si on souhaite un volume constant malgré la variation de température, il faut donc que $dV = 0$ à chaque instant, donc $dP = \frac{\alpha}{\chi_T} dT$ soit en intégrant $\Delta P = \frac{\alpha}{\chi_T} \Delta T = 714$ bar.

I.3 Forme différentielle, notations d , δ et Δ

Pour une grandeur physique, écrire df admet un sens mathématique fort : la fonction est différentiable et s'exprime en fonction des dérivées partielles de f , et on parle de **différentielle totale exacte**. On peut cependant rencontrer des quantités du type $A(x, y)dx + B(x, y)dy$ pour lesquelles il n'existe pas de fonction g telle que $dg = A(x, y)dx + B(x, y)dy$. On les qualifie de **formes différentielles** (non exactes), que l'on note couramment δg .

La différence entre ces deux notations est fondamentale, elles ne doivent pas être confondues. En particulier on constate un comportement très différent lors de l'intégration. On note Γ une courbe continue reliant deux points A et B , que l'on appellera un chemin.

- si on intègre une différentielle df sur le chemin Γ ,

$$\int_{\Gamma} df = \int_A^B df = f(B) - f(A) = \Delta f \quad (1.11)$$

et ne dépend donc pas du chemin suivi, mais seulement de la valeur prise par la fonction entre les points de départ et d'arrivée, d'où la notation Δ du fait de la variation de la fonction ;

- si on somme une forme différentielle δg :

$$g_{\Gamma} = \int_{\Gamma} \delta g \quad (1.12)$$

dépendant en général du chemin suivi, d'où la notation g_{Γ} plutôt que Δg , car on ne calcule pas de variation de fonction entre deux états.

Notation

En physique, la notation

- * ▪ df indique une **petite variation** de la grandeur f , et après intégration on la note Δf ;
- δf indique une **petite quantité** de f entre deux états infinitésimaux du système considéré.

Un exemple bien connu en thermodynamique est le travail des forces de pression W_Γ , qui dépend du chemin suivi. On rappelle que le travail élémentaire des forces de pression s'écrit :

$$\delta W = -P_{\text{ext}} dV \quad (1.13)$$

où P_{ext} est la pression extérieure au gaz et dV la variation infinitésimale de volume. On note bien δW car il s'agit d'une forme différentielle, et lorsqu'on intègre on n'utilisera surtout pas ΔW , vu que le travail dépend du chemin parcouru. Par exemple entre deux états d'équilibre A et B , W sera différent selon que :

- AB est une transformation isotherme (T) mécaniquement réversible d'un gaz parfait, où

$$W_{AB,1} = nRT \ln \left(\frac{V_A}{V_B} \right) \quad (1.14)$$

- * ▪ AC est une isochore et CB une isobare mécaniquement réversibles où

$$W_{AB,2} = W_{AC,2} + W_{CB,2} = 0 + P_C(V_C - V_B) = P_B(V_A - V_B) \quad (1.15)$$

$$= \frac{nRT}{V_B} (V_A - V_B) \geq W_{AB,1} \quad (1.16)$$

Dans toute la suite, on va revoir les deux premiers principes de la thermodynamique en les réécrivant pour des transformations infinitésimales, au cours desquelles les variables d'état décrivant le système varient très peu.

II. Premier principe

II.1 Rappels

On définit l'énergie totale du système comme

$$E = E_m + U \quad (1.17)$$

où

- $E_m = E_c + E_p$ est l'énergie mécanique macroscopique, somme de l'énergie cinétique macroscopique et l'ensemble des énergies potentielles macroscopiques ;
- $U = E_c^\mu + E_p^\mu$ est l'énergie interne, somme des énergies cinétique et potentielle microscopiques ;

Premier principe

La variation d'énergie totale d'un système **fermé**, entre deux états initial (indiqué i) et final (indiqué f) d'une transformation est

$$\Delta E = E_f - E_i = \Delta U + \Delta E_m = W_{nc} + Q \quad (1.18)$$

avec W_{nc} le travail de l'ensemble des forces extérieures non conservatives et Q le transfert thermique. Ces deux grandeurs sont **algébriquement reçues** par le système. Ce principe traduit la **conservation de l'énergie**.

II.2 Formulation infinitésimale du premier principe

Une transformation quelconque peut être découpée en une succession de transformations infinitésimales. Le premier principe se réécrit alors naturellement :

Premier principe pour une transformation infinitésimale

La différentielle de l'énergie totale E d'un système fermé s'écrit

$$dE = dE_m + dU = \delta W_{nc} + \delta Q \quad (1.19)$$

où

- * ■ dE_m est une **petite variation d'énergie mécanique pendant un intervalle de temps infinitésimal** ;
- dU est une **petite variation d'énergie interne pendant un intervalle de temps infinitésimal** ;
- δW_{nc} est le travail élémentaire des forces extérieures non conservatives, c'est-à-dire encore une **petite quantité de travail pendant un intervalle de temps infinitésimal** ;
- δQ est le transfert thermique élémentaire.

Bien souvent l'énergie mécanique ne varie pas, ou sa variation est négligeable devant celle de l'énergie interne, et donc on utilise majoritairement :

$$dU = \delta W_{nc} + \delta Q \quad (1.20)$$

II.3 Différentielle de l'énergie interne

Pour des systèmes fermés assez simples, appelés **systèmes thermoélastiques** l'état macroscopique d'un système est décrit par trois variables d'état P , V et T , reliées par une équation d'état. Par exemple $PV = nRT$ pour un gaz parfait, $V = cst$ pour une Phase Condensée Incompressible et Indilatante (PCII), ou encore

$$(P + \frac{n^2 a}{V^2})(V - nb) = nRT \quad (1.21)$$

pour un fluide de Van der Waals. Ainsi on peut se contenter de deux variables d'états : $U(T, V)$. La différentielle de l'énergie interne s'écrit alors :

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV \quad (1.22)$$

On définit la capacité thermique à volume constant

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V \quad (1.23)$$

Un gaz parfait vérifie la première loi de Joule, donc U ne dépend que de la température. Ainsi

$$dU_{GP} = C_V dT \quad (1.24)$$

Pour une PCII, comme le volume V varie très peu, on a $dV \approx 0$, donc on aura également

$$dU_{PCII} = C_V dT \quad (1.25)$$

Cela provient du fait que l'énergie interne microscopique dépend uniquement de la température et que l'énergie potentielle est nulle, comme le gaz parfait est sans interaction.

II.4 Différentielle de l'enthalpie

Rappelons la définition de l'enthalpie : $H = U + PV$. C'est également une fonction d'état extensive et additive, couramment utilisée lorsqu'on a affaire à des **transformations monobares avec équilibre mécanique initial et final** (où alors $\Delta H = W_u + Q$, avec W_u le travail utile, c'est-à-dire le travail des forces non conservatives autres que les forces de pression). On définit la capacité thermique à pression constante

$$C_P = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_P \quad (1.26)$$



Exercice

Pour un gaz parfait, exprimer la différentielle de l'enthalpie, et retrouver la relation de Mayer.
L'enthalpie s'exprime couramment avec les variables d'état (T, P), donc sa différentielle s'écrit :

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP = C_P dT + \left(\frac{\partial H}{\partial P}\right)_T dP \quad (1.27)$$

Pour un gaz parfait :

$$dH = d(U + PV) = dU + d(nRT) = C_V dT + nR dT \quad (1.28)$$

donc H ne dépend que de T , donc $dH = C_P dT$ et il vient par identification

$$C_P = C_V + nR \quad (1.29)$$

qui s'appelle la **relation de Mayer**.

Pour une PCII :

Un ordre de grandeur éclairant : pour 1 kg d'eau, la variation d'enthalpie est identique selon qu'on augmente la température de 1 K ou de 40 bar.

$$dH = dU + d(PV) = dU + PdV + VdP \xrightarrow{VdP \ll C_V dT} C_V dT + VdP \simeq C_V dT + VdP \quad (1.30)$$

Mais pour une phase condensée très peu compressible, VdP est négligeable devant $C_V dT$, et donc H ne dépend que de la température. Ainsi

$$dH \simeq C_P dT \simeq C_V dT = dU \quad (1.31)$$

Ainsi pour une phase condensée $C_P \simeq C_V = C$ et $\Delta H \simeq \Delta U$.

III. Second principe

III.1 Formulation infinitésimale du second principe

Second principe

Pour un système fermé, il existe une fonction d'état extensive et additive appelée entropie, notée S , telle que

$$dS = \delta S_e + \delta S_c \quad (1.32)$$

avec

- * ▪ l'**entropie échangée** $\delta S_e = \frac{\delta Q}{T_e}$, δQ le transfert thermique infinitésimal et T_e la température au niveau de la surface d'échange thermique avec l'extérieur ;
- l'**entropie créée** $\delta S_c \geq 0$, nulle lors d'une transformation réversible, strictement positive lors d'une transformation irréversible.

C'est un principe d'**évolution** : il permet de déterminer ou justifier le sens d'une transformation.

Notons que si T_e est constante, $S_e = \int \delta S_e = \frac{1}{T_e} \int \delta Q = \frac{Q}{T_e}$ et on retrouve bien le second principe sous forme intégré $\Delta S = S_e + S_c$ avec $S_c \geq 0$.

Le second principe permet par exemple de justifier que le transfert thermique s'effectue toujours d'un corps chaud vers un corps froid. Considérons un système isolé $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ constitué de deux corps en contact, de températures respectives $T_1 > T_2$. Entre les instants t et $t + dt$, du fait de la lenteur des transferts thermiques, on suppose que les températures sont constantes. On note δQ_1 (resp. δQ_2) le transfert thermique reçu par le système Σ_1 (resp. Σ_2). Les deux principes appliqués au système Σ s'écrivent

$$\left\{ \begin{array}{l} dU = 0 = \delta Q_1 + \delta Q_2 \iff \delta Q_1 = -\delta Q_2 \\ dS = \cancel{\delta Q_{\Sigma}}^0 + \delta S_c = \delta S_c \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} dS = \cancel{\delta Q_{\Sigma}}^0 + \delta S_c = \delta S_c \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.34)$$

car le système Σ est isolé. Comme l'entropie est une fonction d'état additive, on peut considérer une transformation fictive réversible pour le système Σ_i (échange thermique avec une source à la température T_i) et écrire que $dS_i = \frac{\delta Q_i}{T_i}$, soit finalement :

$$dS = dS_1 + dS_2 = \frac{\delta Q_1}{T_1} + \frac{\delta Q_2}{T_2} = \delta Q_2 \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \geq 0 \quad (1.35)$$

ce qui conduit à $\delta Q_2 \geq 0$, donc un transfert thermique du corps chaud vers le corps froid.

III.2 Causes d'irréversibilités (rappels)

On en trouve de plusieurs types :

- **un déséquilibre mécanique** par exemple une inhomogénéité de pression entre l'intérieur d'un ballon de baudruche que l'on dégonfle et l'air ambiant ;
- **des phénomènes dissipatifs** tels que des frottements mécaniques (solides ou fluides), l'effet Joule, des mouvements de fluides atténusés par sa viscosité ;
- **des phénomènes diffusifs** lors des transferts thermiques entre systèmes à différentes températures, lors de la diffusion de particules dans un autre fluide, etc.

* Afin de déterminer si une transformation est réversible, on se demande **si la transformation inverse peut se produire spontanément ou non**, en "repassant" le film à l'envers, sans nouvelle action de l'extérieur.

Exemple : dans le cas de la détente d'un gaz depuis un compartiment de volume V dans un deuxième compartiment de même volume : spontanément, le gaz ne va pas se réorganiser pour venir se placer de nouveau dans le premier compartiment. Avec un piston, on pourrait le forcer, mais il s'agit d'un effort supplémentaire de la part de l'extérieur du système. Cette évolution semble donc purement irréversible !

Réversibilité d'une transformation

Une transformation thermodynamique d'un système est réversible si :

- les contraintes extérieures varient continûment et suffisamment lentement pour que le système soit toujours à l'équilibre (= quasi-statique) ;
- on peut inverser le sens de la transformation par un changement infinitésimal de ces contraintes.

Deux exemples concrets mettent en évidence l'aspect quasi-statique mais également l'inversion du sens de la transformation par un changement infinitésimal des contraintes :

- le contact d'un système chaud T_c avec un thermostat froid T_f conduit à une transformation irréversible. Néanmoins, on pourrait s'approcher d'une transformation réversible en mettant en contact un grand nombre de thermostats à des températures se rapprochant doucement de T_f : plus le nombre de thermostats est important, moins la transformation sera irréversible (mais au prix d'un temps d'attente plus long pour arriver à l'état final).
- la compression d'un gaz par un piston se déplaçant dans une enceinte diatherme : soit on place une masse sur le piston (monobare), soit au contraire on ajoute progressivement du sable tel qu'au final on ait la même masse (et donc le même état final). Néanmoins dans le second cas on pourra rendre la transformation quasiment réversible.

Les deux exemples où l'on tend vers la réversibilité sont quasi-statiques. Cependant la réciproque n'est pas toujours vraie : **une transformation quasi-statique n'est pas forcément réversible**. De même, on constate que les transformations qui tendent vers la réversibilité sont beaucoup plus longues : elles n'ont donc pas d'intérêt pratique, mais serviront à connaître l'efficacité maximale des machines thermiques, et voir éventuellement sur quels paramètres on peut jouer pour diminuer cette irréversibilité.



III.3 Identité thermodynamique

Supposons une transformation réversible pour un système fermé ne subissant comme forces extérieures non conservatives que celles de pressions.

- * ■ Le second principe s'écrit alors $dS = \frac{\delta Q}{T}$ donc $\delta Q = TdS$.
- la transformation étant réversible, elle est mécaniquement réversible et donc $P = P_{\text{ext}}$ à tout instant, donc $\delta W = -P_{\text{ext}}dV = -PdV$.

Ainsi le premier principe s'écrit :

$$dU = \delta W + \delta Q = -PdV + TdS \quad (1.36)$$

- * Mais comme U est une fonction d'état, sa variation ne dépend que de l'état final et initial, pas de la transformation. Ainsi même si cette dernière n'est pas réversible :

$$dU = -PdV + TdS \quad (1.37)$$

appelée **identité thermodynamique** pour l'énergie interne.

- Remarquons que la forme obtenue est celle d'une différentielle, donc $dU = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S dV + \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V dS$,
- * ce qui permet d'identifier :

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S = -P \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_V = T \quad (1.38)$$

Exercice



Déterminer l'identité thermodynamique pour l'enthalpie et en déduire les expressions des dérivées partielles.

$$dH = dU + VdP + PdV = -pdV + TdS + VdP + PdV = PdV + TdS \quad (1.39)$$

Ainsi :

$$\left(\frac{\partial H}{\partial V}\right)_S = P \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_V = T \quad (1.40)$$

III.4 Calcul d'une variation d'entropie

Les identités thermodynamiques permettent alors de calculer des variations d'entropie de façon explicite. En effet

$$dS = \frac{dU}{T} + \frac{P}{T}dV \quad (1.41)$$

soit par exemple pour un gaz parfait

- * $dS = \frac{C_V dT}{T} + nR \frac{dV}{V}$ (1.42)

soit en intégrant :

$$\Delta S(T, V) = C_V \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) + nR \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) \quad (1.43)$$

Exercice



Déterminer la variation d'entropie d'un gaz parfait en utilisant les variables (T, P) .

$$dS = \frac{dH}{T} - \frac{V}{T} dP = \frac{C_P dT}{T} - \frac{nR}{P} dP \text{ soit après intégration}$$

$$\Delta S(T, P) = C_P \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) - nR \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right) \quad (1.44)$$

Exercices

1. 1 Mesure d'une enthalpie massique de vaporisation

Un vase Dewar contenant de l'azote liquide est placé sur une balance électronique. Une résistance électrique $R = 10\Omega$ parcourue par un courant $I = 1\text{ A}$ est plongée dans l'azote, qui se vaporise. On mesure la variation de masse au cours du temps.

1. La masse diminue de 4 g en une minute. Déterminer l'enthalpie massique de vaporisation de l'azote.
2. En réalité, à cause des fuites thermiques, on constate que sans résistance, la masse diminue déjà de 1 g en une minute. Déterminer l'enthalpie massique de vaporisation de l'azote.

-
1. On applique le premier principe au fluide, en utilisant l'enthalpie (changement d'état à pression constante) :

$$dH = \delta Q \iff dm\Delta h_{\text{vap}} = R i^2 dt \quad (1.45)$$

soit l'enthalpie massique de vaporisation : $\Delta h_{\text{vap}} = \frac{R i^2 \Delta t}{\Delta m} = 150 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$.

2. Comme il y a des pertes, l'apport énergétique de la résistance permet en réalité de ne faire évaporer que 3 g, d'où en appliquant à nouveau la formule, on trouve $\Delta h_{\text{vap}} = 200 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$

1. 2 Chauffage adiabatique

Une enceinte calorifugée est constituée de deux volumes V_0 identiques séparés par une paroi mobile, elle-même calorifugée. Chaque enceinte contient initialement un gaz parfait (de coefficient $\gamma = C_P/C_V$) dans le même état P_0, V_0, T_0 . L'enceinte de gauche contient en plus une résistance électrique R_e , de volume et de capacité calorifique négligeables, alimentée par un générateur de courant constant I . On suppose que les échanges thermiques entre la résistance et le gaz sont rapides et que le mouvement du piston est lent.



1. Déterminer à tout instant t le volume, la pression et la température dans les deux compartiments.
2. Représenter sur un même graphique $V_B(t)/V_0, P_B(t)/P_0, T_B(t)/T_0$

-
1. Appliquons le premier principe à l'enceinte A , qui reçoit un transfert thermique de la résistance $Q_r = R_e I^2 t$ entre l'instant 0 et t :

$$C_V(T_A - T_0) = - \int P_A dV_A + Q_r \quad (1.46)$$

et à l'enceinte B , calorifugée :

$$C_V(T_B - T_0) = - \int P_B dV_B \quad (1.47)$$

Le volume total des enceintes se conserve : $V_A + V_B = 2V_0$, $dV_B = -dV_A$, et d'autre part il y a équilibre mécanique à chaque instant pour le piston (mouvement lent), $P_A = P_B = P(t)$. La somme des deux premiers principes conduit à

$$C_V(T_A + T_B - 2T_0) = Q_r \quad (1.48)$$

D'autre part en utilisant la loi des gaz parfaits :

$$C_V \left(\frac{PV_A}{nR} + \frac{PV_B}{nR} - 2T_0 \right) = Q_r \quad (1.49)$$

d'où après simplifications :

$$P(t) = P_0 + \frac{nR}{2V_0 C_V} Q_r = P_0 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \quad (1.50)$$

en posant $\tau = \frac{2P_0 V_0}{(\gamma - 1) R_e I^2}$ vu que $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$. Pour le compartiment B , on a une transformation adiabatique, mécaniquement réversible, d'un gaz parfait, donc la loi de Laplace s'applique :

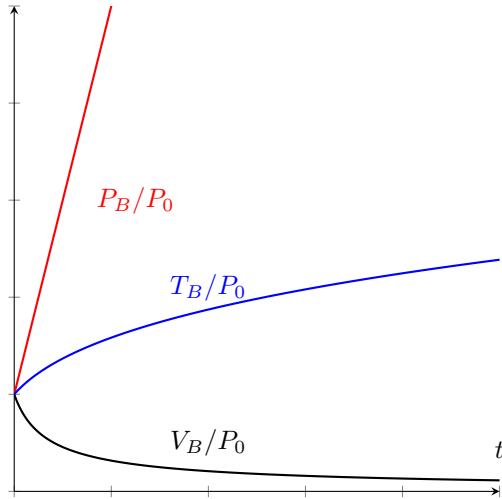
$$P(t) V_B(t)^\gamma = P_0 V_0^\gamma \iff V_B(t) = V_0 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{-1/\gamma} \quad (1.51)$$

$$\text{et } V_A(t) = 2V_0 - V_B(t) = V_0 \left(2 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{-1/\gamma} \right)$$

Enfin les températures s'obtiennent avec la loi des gaz parfaits :

$$T_B(t) = \frac{P(t)V_B(t)}{nR} = T_0 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{1-1/\gamma} \quad \text{et} \quad T_A(t) = \frac{P(t)V_A(t)}{nR} = T_0 \left(1 + \frac{t}{\tau} \right) \left(2 - \left(1 + \frac{t}{\tau} \right)^{-1/\gamma} \right) \quad (1.52)$$

2.



1. 3 Chauffage d'une maison

On désire maintenir une température constante $T_1 = 290\text{ K}$ dans une maison, grâce à une pompe à chaleur utilisant comme source froide l'air extérieur dont la température est égale à $T_0 = 280\text{ K}$. Il faut pour cela compenser les pertes de chaleur.

1. Dans le but d'évaluer ces pertes, on arrête le chauffage, la température étant initialement T_1 . Au bout de $t = 2\text{ h}$, la température n'est plus que de $T_2 = 285\text{ K}$. En admettant que la quantité de chaleur perdue pendant un temps infinitésimal dt s'écrit $\delta Q_p = aC(T - T_0)dt$, C désignant la capacité thermique de la maison et T sa température à l'instant t , calculer a .
2. Quelle est la puissance thermique que l'on doit fournir à la maison pour maintenir sa température constante à la valeur $T = T_1$? On donne $C = 10^7\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$.
3. Sachant que le coefficient d'efficacité réel de la pompe à chaleur n'est que 40% de l'efficacité dans le cas d'un fonctionnement réversible, comparer la puissance électrique que l'on doit fournir à la pompe à chaleur par rapport à celle qui serait nécessaire pour maintenir la température de la maison à T_1 avec des radiateurs électriques.

1. Écrivons le premier principe infinitésimal au système maison :

$$dU = CdT = \delta W + \delta Q = -\delta Q_p = -aC(T - T_0)dt \iff \frac{dT}{dt} + aT = aT_0 \quad (1.53)$$

dont la solution est

$$T(t) = Ae^{-at} + T_0 = (T_1 - T_0)e^{-at} + T_0 \quad (1.54)$$

d'où au bout de t : $T(t) = T_2$ impliquant

$$a = \frac{1}{t} \ln \left(\frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0} \right) = 9,6 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1} \quad (1.55)$$

2. On doit donc fournir une puissance thermique compensant les pertes, soit $P = \frac{\delta Q_p}{dt} = ac(T_1 - T_0) = 9,7\text{ kW}$.

3. Dans le cas d'un fonctionnement réversible $\eta_C = \frac{-Q_c}{W} = \frac{T_1}{T_1 - T_0}$. Or $\eta = 0,4\eta_C$, il vient

$$W = \frac{-Q_c}{0,4\eta_C} = \frac{aC(T_1 - T_0)^2}{0,4T_1} dt \quad (1.56)$$

donc une puissance électrique à fournir

$$P_e = \frac{aC(T_1 - T_0)^2}{0,4T_1} = 830 \text{ W} \quad (1.57)$$

En comparaison, avec des chauffages électriques d'efficacité 1, il faut donc $P'_e = P$.

1. 4 Détente de Joule Gay-Lussac d'un gaz de Van der Waals

Un gaz de Van der Waals suit l'équation d'état suivante :

$$\left(P + \frac{n^2 a}{V^2} \right) (V - nb) = nRT \quad (1.58)$$

Sa variation élémentaire d'énergie interne est donnée par

$$dU = nC_{V,m} dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV \quad (1.59)$$

a , b , $C_{V,m}$ et R sont des constantes.

1. Exprimer littéralement l'entropie d'un gaz de Van der Waals en fonction de la pression et de la température.
2. On considère deux récipients de volume V_0 , séparés par une vanne initialement fermée. Les deux récipients sont calorifugés. Le gaz est initialement dans l'un des deux récipients, l'autre étant vide. On ouvre la vanne. On note T_f la température finale. Déterminer la variation d'entropie du gaz, l'entropie échangée et l'entropie créée.
3. Déterminer la température finale T_f .

1. Utilisons l'identité thermodynamique

$$dU = -PdV + TdS = nC_{V,m} dT + \frac{n^2 a}{V^2} dV \implies dS = nC_{V,m} \frac{dT}{T} + \left(\frac{n^2 a}{V^2} + P \right) \frac{dV}{T} \quad (1.60)$$

soit en utilisant l'équation d'état

$$dS = nC_{V,m} \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V - nb} \quad (1.61)$$

soit après intégration

$$S(T, V) = nC_{V,m} \ln T + nR \ln(V - nb) + \text{cste} \quad (1.62)$$

2. On a simplement $\Delta S = nC_{V,m} \ln \frac{T_f}{T_0} + nR \ln \left(\frac{2V_0 - nb}{V_0 - nb} \right) = S_c$ car $S_e = 0$ comme il n'y a pas d'échange thermique.
3. En appliquant le premier principe au système gaz + enceintes, on a $dU = \delta W + \delta Q = 0$ car il n'y a ni échange de travail ni de chaleur avec l'extérieur. Or en intégrant dU , il vient :

$$U = U_0 + nC_{V,m}(T_f - T_0) + n^2 a \left(\frac{1}{V_0} - \frac{1}{2V_0} \right) \quad (1.63)$$

Soit avec $U = U_0$, $T_f = T_0 - \frac{na}{2V_0 C_{V,m}}$.

1. 5 Moteur thermique à sources variables

Soit un moteur thermique réversible fonctionnant entre deux sources de même capacité thermique $C = 4 \cdot 10^5 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, dont les températures initiales sont $T_{2,0} = 10^\circ\text{C}$ et $T_{1,0} = 100^\circ\text{C}$. Ces températures ne sont pas maintenues constantes (pseudo-sources).

1. Donner le schéma de principe de ce moteur.
2. Quelle est la température finale des deux sources quand le moteur s'arrête de fonctionner ?
3. Calculer le travail fourni par ce moteur jusqu'à son arrêt. Vérifier et interpréter son signe.

4. Calculer le rendement. Comparer avec le rendement théorique maximal que l'on pourrait obtenir si les températures des deux sources restaient constantes.
 5. Comparer le travail fourni par le moteur à l'énergie récupérable par la source froide si elle était mise directement en contact avec la source chaude. Commenter.
-

1. Source chaude $T_1(t)$ avec $Q_1 > 0$; source froide $T_2(t)$ avec $Q_2 < 0$ et travail $W < 0$ fourni par le système à l'extérieur.
2. Si on applique les deux principes au moteur sur un cycle pendant un temps infinitésimal dt :

$$dU = 0 = \delta W + \delta Q_1 + \delta Q_2 \quad (1.64)$$

$$dS = 0 = \delta S_e + \delta S_c = \frac{\delta Q_1}{T_1(t)} + \frac{\delta Q_2}{T_2(t)} \quad (1.65)$$

car le moteur est réversible et sur un cycle les fonctions d'état ne varient pas. Lorsque le moteur ne fonctionne plus, aucun travail n'est échangé avec l'extérieur, $\delta W = 0$. En combinant les deux principes, il vient que $T_1 = T_2$: le moteur s'arrête lorsque les deux sources sont à la même température. En appliquant alors le premier principe à chaque source, on a

$$dU_1 = -\delta Q_1 = CdT_1 \quad (1.66)$$

$$dU_2 = -\delta Q_2 = CdT_2 \quad (1.67)$$

$$(1.68)$$

Lors du fonctionnement du moteur, $\delta Q_1 = -\frac{T_1}{T_2}\delta Q_2$ d'où :

$$\frac{dT_1}{T_1} = -\frac{dT_2}{T_2} \implies \ln\left(\frac{T_f}{T_{1,0}}\right) = -\ln\left(\frac{T_f}{T_{2,0}}\right) \quad (1.69)$$

Ainsi $T_f = \sqrt{T_{1,0}T_{2,0}} = 325 \text{ K} = 52^\circ\text{C}$

3. En appliquant le premier principe sur la durée de fonctionnement, en supposant un nombre entier de cycles :

$$W = \int_i^f \delta W = -Q_1 - Q_2 \quad (1.70)$$

soit en intégrant le premier principe sur chaque source $Q_i = -C(T_f - T_{i,0})$ d'où

$$W = C(2T_f - T_{1,0} - T_{2,0}) = -2,4 \cdot 10^6 \text{ J} \quad (1.71)$$

Le signe est évidemment cohérent avec un fonctionnement moteur !

- 4.

$$\eta = \frac{-W}{Q_1} = 1 + \frac{Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{T_f - T_{2,0}}{T_{1,0} - T_f} = 0,12 \quad (1.72)$$

Sachant que le rendement de Carnot, si T_1 et T_2 étaient constant, serait de $\eta_C = 1 - \frac{T_{2,0}}{T_{1,0}} = 0,24$. C'est logique, avec la baisse de l'écart de température entre les sources, le rendement diminue.

5. Si on mettait la source froide directement au contact de la source chaude, la température d'équilibre serait $T'_f = \frac{T_{1,0} + T_{2,0}}{2}$ du fait de la même capacité thermique de chaque source. Ainsi la chaleur cédée par la source chaude serait :

$$Q_1 = C(T'_f - T_{1,0}) = \frac{C}{2}(T_{2,0} - T_{1,0}) = 1,8 \cdot 10^7 \text{ J} \quad (1.73)$$

Le transfert thermique est donc bien plus élevé que le travail fourni par le moteur, c'est logique : une grande partie de l'énergie thermique fournie par la source chaude n'est pas récupérée sous forme de travail, mais cédée à la source froide (mais c'est indispensable pour le bon fonctionnement du moteur).

1. 6 Température d'inversion de Joule-Kelvin

Une mole de gaz d'équation d'état $PV = nRT + nP\left(b - \frac{2a}{RT}\right)$ effectue une détente de Joule-Kelvin.

On donne pour ce gaz l'expression générale de la variation infinitésimale d'enthalpie provoquée par une variation infinitésimale de température dT et de pression dP : $dH = nC_{p,m}dT + n\left(b - \frac{a}{RT}\right)dP$, où $C_{p,m}$ est la capacité thermique molaire à pression constante.

1. Déterminer l'expression de l'entropie de ce gaz parfait.

2. Exprimer le coefficient de refroidissement de la détente $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H$.

3. Que vaudrait ce coefficient pour un gaz parfait ?
4. Montrer qu'il existe une seule température T_i pour laquelle ce gaz se comporte comme un gaz parfait.
5. Une détente de Joule-Kelvin (détente adiabatique à travers un bouchon poreux) est isenthalpique. Déterminer la condition sur la température pour que celle-ci augmente lors d'une détente de Joule-Kelvin.
6. Les coefficients a et b et par conséquent la température T_i sont différents pour chaque gaz. On donne les valeurs suivantes :

Gaz	He	H ₂	N ₂	O ₂
T_i (en K)	34	202	625	780

Dans les conditions usuelles ($T = 298$ K, $P = 1$ bar), quels sont les gaz qui s'échauffent et ceux qui se refroidissent lors d'un détente de Joule-Kelvin ?

1. À partir de l'équation d'état, de l'identité thermodynamique pour l'enthalpie et de l'expression donnée pour dH , on peut obtenir :

$$dS = nC_{p,m} \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P} \quad (1.74)$$

qui s'intègre :

$$S(T, P) = S_0 + nC_{p,m} \ln(T) - nR \ln(P) \quad (1.75)$$

2. On utilise l'expression de dT pour exprimer dT :

$$dT = \frac{1}{nC_{p,m}} dH + \frac{\frac{a}{RT} - b}{C_{V,m}} dP \quad (1.76)$$

soit par identification avec $dT = \left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_P dH + \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H dP$:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{\frac{2a}{RT} - b}{C_{V,m}} \quad (1.77)$$

3. Pour un gaz parfait, $dH = nC_{V,m}dT$, donc dT ne dépend pas de dP et donc $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = 0$
4. Lorsque $T = T_i = \frac{2aRT}{b}$, le coefficient de refroidissement est nul, comme pour un gaz parfait.
5. Lors d'une détente, la pression du gaz diminue. Ainsi, pour que la température augmente lorsque la pression diminue, il faut que $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H < 0$ (courbe de pente décroissante si P augmente). Or $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_H = \frac{2a}{C_{V,m}} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_i}\right)$, il faut donc que $T > T_i$. Et inversement pour un refroidissement.
6. D'après ce qui précède, l'hélium et le dihydrogène se réchauffent lors d'une détente ; le diazote et le dioxygène se refroidissent.

1. 7 Résolution de problème : réfrigérateur

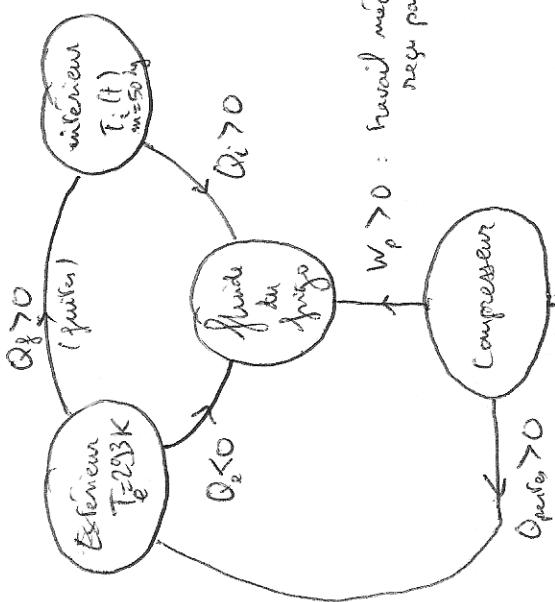
On considère un réfrigérateur, rempli de 50 kg de nourriture de capacité thermique massique proche de celle de l'eau : $c = 4185 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$. Les fuites thermiques entre l'intérieur et l'extérieur sont proportionnelles à la différence entre les températures intérieure T_i et extérieure $T_e = 293$ K. Le compresseur du réfrigérateur a un rendement $r = 0,80$.

Quand la température intérieure est constante $T_i = 276$ K = T_f , on mesure une puissance électrique consommée moyenne $P_{e1} = 20$ W.

On considère maintenant le refroidissement du réfrigérateur : l'intérieur du réfrigérateur est initialement à la température T_e . Déterminer le temps Δt nécessaire pour qu'il passe à la température T_f , sachant que la puissance électrique consommée reste constamment égale à $P_{e2} = 300$ W. On exprimera Δt sous la forme d'une intégrale qu'on évaluera à l'aide de Python. Commenter le résultat.

Cf corrigé manuscrit C. Dubus.

Réfrigérateur (résolution de problème)



Résumé permanent :

- la flèches représentent le sens de définition des échanges

- 1^{er} principe appliquée au fluide du réfrigérateur donne un nombre entier de cycles :

$$\Delta U = 0 = W_{p,i} + Q_2 + Q_i \quad \text{avec } W_{p,i} = n W_{e,i}$$

- 2nd principe : $\Delta S = S_e + S_i = 0$ (cycle)

On fait l'hypothèse que le fonctionnement est réversible : $S_i = 0$

Par ailleurs, $S_e = \int \frac{dQ}{T_{ext}} = \frac{Q_e}{T_e} + \frac{Q_i}{T_i}$ car $T_e = C_e$
 $T_i = C_i$

$$\text{donc } Q_e = -Q_i \frac{T_e}{T_i}$$

$$\Rightarrow n W_{e,i} + Q_i \left(1 - \frac{T_e}{T_i} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_i = \frac{n W_{e,i}}{\frac{T_e}{T_i} - 1}$$

- 1^{er} principe appliquée à plusieurs du frigo :

$$\Delta U = -Q_i + Q_f = 0 \quad (\text{résumé permanent : } T_i(\text{fondant}) = T_f)$$

↑
pas de travail : puissance
consommée en régime permanent = $\frac{\Delta U}{\Delta t}$

$$\Rightarrow Q_f = Q_i = \frac{n W_{e,i}}{\frac{T_e}{T_i} - 1}, \quad \text{soit par unité de temps : } P_f = \frac{n W_{e,i}}{\frac{T_e}{T_i} - 1}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{n W_{e,i} T_f}{(T_e - T_f)^2}}$$

$$\text{ou on a } P_f = \alpha (T_e - T_f) \quad \text{donc } \alpha = \frac{n W_{e,i}}{(T_e - T_f)}$$

$$\Delta U = 0 = 20 \times 276 \quad \text{K}$$

On pose : $\alpha = 20 \text{ W} = \text{puissance électrique consommée en régime permanent} = \frac{\Delta U}{\Delta t}$

Dans un premier temps, on applique le deux principes de la thermodynamique au fluide du réfrigérateur en régime permanent ($T_i(t) = T_i$) afin de déterminer le coefficient α et calculer la puissance des moteurs :

Encore, on applique les 2 principes au fluide du frigo entre t et $t+dt$

pendant le refroidissement afin d'obtenir une équation différentielle sur $T_i(t)$,

qui par intégration nous donne le temps t_f nécessaire

Hypothèse : on connaît que le temps mis par le fluide du réfrigérateur $T_i(t)$ est très grand devant le temps mis par le fluide du réfrigérateur pour faire un cycle (\Rightarrow un cycle représente un temps infiniment petit dit devant t_f)

Rechauffement :

Hypothèse : on connaît que le temps caractéristique de variation de $T_i(t)$ est très grand devant le temps mis par le fluide du réfrigérateur pour faire un cycle (\Rightarrow un cycle représente un temps infiniment petit dit devant t_f)

- 1^{er} principe appliquée au fluide entre t et t+dt : (1 cycle)

$$dU = 0 = SW_{P_2} + \delta Q_2 + \delta Q_i \quad \text{avec } SW_{P_2} = n SW_{e_2}$$

$$\text{- 2nd principe : } dS = 0 = \frac{\delta Q_e}{T_e} + \frac{\delta Q_i}{T_i} + 0 \quad (\text{longeur avec l'imeline réversible})$$

$$\Rightarrow \delta Q_e = -\frac{T_e}{T_i} \delta Q_i$$

- 1^{er} principe appliqué à l'intérieur du réfrigérateur :

$$dU = \delta Q_g - \delta Q_i = \alpha (T_g - T_i) dt - \delta Q_i$$

Hypothèse : on suppose la capacité thermique de l'air et des parois intérieures du frigo négligeable devant celle de la moitiure, et on assimile la capacité thermique maximale de la moitiure à celle de l'eau.

$$\text{Alors, } dU = mc dT_i \quad \text{donc } \delta Q_i = \alpha (T_e - T_i) dt - mc dT_i$$

$$\Rightarrow n SW_{e_2} + \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right) \alpha (T_g - T_i) dt - mc dT_i = 0$$

$$\Leftrightarrow mc \frac{(T_i - T_e)}{T_i} \frac{dT_i}{dt} + \alpha \frac{(T_e - T_i)^2}{T_i} = n \frac{SW_{e_2}}{dt} = n P_{e_2}$$

$$\Rightarrow mc dT_i = \frac{n P_{e_2} T_i}{T_i - T_e} + \alpha (T_i - T_e) dt$$

$$\Rightarrow mc dT_i = \frac{mc (T_i - T_e)}{n P_{e_2} T_i + \alpha (T_i - T_e)^2} dt$$

$$t_g = \int_{T_e}^{T_g} \frac{mc (T_i - T_e)}{n P_{e_2} T_i + \alpha (T_i - T_e)^2} dT_i = \underline{\underline{4,3 \cdot 10^2}}$$

Séchement 7 minutes pour refroidir l'intérieur du frigo, c'est très peu ! Cela vient principalement du fait que l'on a considéré que le fonctionnement était réversible, ce qui n'est pas dans la réalité.

Avec la réversibilité, on a un coefficient de performance (ou efficacité).

$$\eta = \frac{Q_i}{W_p} = \frac{T_i}{T_e - T_i} = 1,6 \quad \text{en régime permanent (et encore plus}$$

pendant le refroidissement où } T_i est plus proche de T_e). Pour un réfrigérateur réel, le COP est plus bas et l'ordre de 2 ! Ca augmente beaucoup t_g.

Si on raisonne avec un COP fixe qf :

$$\text{Régime permanent : } q = \frac{Q_i}{W_p} = \frac{P_g}{n P_{e_2}} = \frac{\alpha (T_e - T_g)}{n P_{e_2}} \Rightarrow \alpha = \frac{n q_f T_g}{T_e - T_g}$$

$$\text{D'après le second : } dU_{\text{marche}} = mc dT_i = \delta Q_g + \delta Q_i = \delta Q_g - q f SW_{e_2}$$

$$\Rightarrow \int_{T_e}^{T_g} \frac{mc dT_i}{\alpha (T_e - T_i) - q f SW_{e_2}} = \delta Q_g \Rightarrow t_g = - \frac{mc \ln \left(1 - \frac{\alpha (T_e - T_g)}{q f SW_{e_2}}\right)}{n q_f P_{e_2}}$$

$$\Rightarrow t_g = - \frac{mc (T_e - T_g)}{n q_f P_{e_2}} \ln \left(1 - \frac{P_g}{P_{e_2}}\right)$$

$$\text{avec } q_f = 2,5, \text{ on trouve } t_g \approx 6 \cdot 10^3 \approx \underline{\underline{1h40min}}, \text{ ce qui est plus raisonnable.}$$

Par ailleurs, si on néglige la capacité thermique de l'eau est une très bonne approximation (avec V=2000 L d'eau par exemple, C_vair = 1000 J.K^-1, donc, C_v = \frac{5}{2} mc = \frac{5}{2} \frac{PV}{T} = \frac{5}{2} \frac{10^5 \cdot 0,2}{2} \approx 10^2 J.K^{-1} \ll mc = 500 \cdot 10^3 J.K^{-1} \approx 2 \cdot 10^5 J.K^{-1}),

il n'est pas certain que cette période inférieure au frigo soit complètement négligeable. Il faut prendre en compte un équilibre aussi : t_g :

Transport de charges électriques

Sommaire

2.1 Charges	2
2.1.1 Généralités	2
2.1.2 Distributions de charges	2
2.2 Courant électrique	3
2.2.1 Origine physique	3
2.2.2 Intensité du courant électrique	4
2.2.3 Vecteur densité de courant	4
2.2.4 Géométrie des courants	6
2.3 Conservation de la charge	6
2.3.1 Équation locale de conservation de la charge à une dimension	6
2.3.2 Généralisation	7
2.3.3 Équation intégrale et lien avec l'équation locale (HP)	7
2.3.4 Conséquences en régime stationnaire	8
2.4 Force de Lorentz	8
2.5 Conducteurs ohmiques	8
2.5.1 Loi d'Ohm locale	8
2.5.2 Modèle de Drude	9
2.5.3 Loi d'Ohm intégrale	10
2.5.4 Puissance cédée aux porteurs de charges et effet Joule	11

Questions de cours :

- Établir l'expression générale du courant électrique en fonction du vecteur densité de courant électrique.
- Établir l'équation locale de conservation de la charge à une dimension. Donner sans démonstration l'équation locale dans le cas général.
- Montrer en régime stationnaire que le flux du vecteur densité de courant volumique est nul à travers une surface fermée. Expliciter les conséquences associées.
- Déterminer l'expression de la conductivité électrique dans le cadre du modèle de Drude. Calculer un ordre de grandeur.
- Déterminer l'expression de la résistance électrique d'un conducteur cylindrique.
- Déterminer l'expression de la puissance volumique cédée aux porteurs de charges mobiles et interpréter.

Capacités exigibles du BO :

- Passer d'une description microscopique (porteurs de charges, vitesse des porteurs) aux grandeurs mésoscopiques ρ et \vec{j} .
- Décrire les différents types de porteurs de charge. Faire la distinction entre charges mobiles et charges fixes.
- Écrire l'intensité comme le flux du vecteur densité de courant électrique à travers une surface orientée.
- Établir l'équation locale traduisant la conservation de la charge électrique en coordonnées cartésiennes à une dimension.
- Citer l'équation locale dans le cas tridimensionnel et en interpréter chacun des termes.
- Définir une ligne de courant et un tube de courant.
- En régime stationnaire, exploiter le caractère conservatif du vecteur densité de courant électrique. Relier cette propriété à la loi des noeuds usuelle de l'électrocinétique.
- Relier le vecteur densité de courant au champ électrique dans un conducteur ohmique. Citer l'ordre de grandeur de la conductivité du cuivre.
- En régime stationnaire, établir une expression de la conductivité électrique à l'aide d'un modèle microscopique.
- Établir l'expression de la résistance d'un câble cylindrique parcouru uniformément par un courant parallèle à son axe.
- Établir l'expression de la puissance volumique reçue par un conducteur ohmique. Interpréter l'effet Joule.

La conduction électrique a été étudiée en première année en tant que phénomène spécifique à l'électrocinétique. Elle est réexaminée ici comme une introduction aux phénomènes de transport, concept étendu ensuite à la diffusion de particules, la diffusion thermique, et aux écoulements de fluides.

I. Charges

Il existe également le **positron**, intervenant dans la radioactivité β^+ , qui est une particule de même masse que l'électron, mais de charge $+e$.

Sauf les quarks, où $q = -e/3$ ou $q = 2e/3$, mais ils sont toujours regroupés de sorte que la somme fasse 0 ou e .

Dans le cuivre, on a typiquement à 300 K $\ell = 3 \cdot 10^{-8}$ m

I.1 Généralités

La charge électrique est une grandeur scalaire portée par des particules individuelles. Outre les électrons de charge $-e$ et les protons de charge $+e$, des combinaisons de ces derniers sont observables à l'échelle microscopique :

- un ion en solution aqueuse ou dans un plasma ;
- une lacune au sein d'un semi-conducteur (encore appelé trou) : elle résulte d'une perte d'électron par un atome au sein d'un réseau cristallin, laissant derrière lui une charge positive.

Citons quelques propriétés physiques de la charge :

- elle est positive ou négative.
- elle est **extensive** : $(S) = (S_1) \cup (S_2) \implies q = q_1 + q_2$ avec des notations évidentes ;
- c'est une grandeur **conservative** (cf. plus loin) : si le système est fermé, la charge est constante ; s'il est ouvert, la variation de charge est égale à la charge reçue (pas de création ou de disparition) ;
- c'est une grandeur **quantifiée** : toute charge est un multiple de la charge élémentaire $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C ;
- elle est **indépendante du référentiel** dans lequel on la mesure ;

I.2 Distributions de charges

a) Charge ponctuelle

La **charge ponctuelle** est un modèle simple utilisé si le volume chargé est très faible devant la distance d'observation de cette charge. Par exemple un électron a un rayon classique de 10^{-15} m, très petit devant les dimensions d'observation. On parle de **distribution discrète de charges** (ou discontinue) lorsque N charges ponctuelles sont contenues dans un volume \mathcal{V} supposé suffisamment grand pour que la distance moyenne entre les charges soit très supérieure à la dimension de la charge.

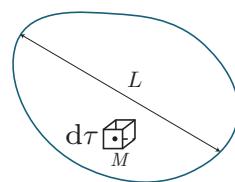
b) Distribution volumique

La situation réelle est la **distribution volumique de charges**, c'est-à-dire que la charge est répartie dans un volume \mathcal{V} , de manière uniforme ou non. Le nombre de particules dans un système macroscopique étant en général très grand devant 1, on adopte un modèle continu. Celui-ci nécessite l'existence d'une échelle mésoscopique d vérifiant :

$$L \gg d \gg \ell \text{ et } r \quad (2.1)$$

avec L la taille typique du système (échelle macroscopique), ℓ le libre parcours moyen et r la distance entre particules.

Alors on peut définir un élément de volume $d\tau = d^3$ mésoscopique suffisamment petit pour être considéré comme un point (infiniment petit), mais suffisamment grand pour contenir un très grand nombre de particules dont la valeur varie très peu en moyenne.



Densité volumique de charge

On définit la densité volumique de charge au point M comme :

$$\rho(M) = \frac{\delta Q}{d\tau} \quad (2.2)$$

avec δQ la petite quantité de charge contenue dans le volume $d\tau$ autour de M . Elle s'exprime en $C \cdot m^{-3}$.

* La charge totale contenue dans le volume \mathcal{V} est alors :

$$Q = \iiint_{(\mathcal{V})} \rho(M) d\tau \quad (2.3)$$

et si ρ est uniforme, $Q = \rho V$.

On peut également définir une densité volumique de particules chargées de type k : $n_k(M) = \frac{\delta N_k(M)}{d\tau}$ avec $\delta N_k(M)$ le nombre de particules chargées de type k dans $d\tau$ autour de M . En notant q_k la charge de la particule de type k , il vient :

$$\delta Q = \sum_k \delta N_k q_k \Rightarrow \rho = \sum_k n_k q_k \quad (2.4)$$

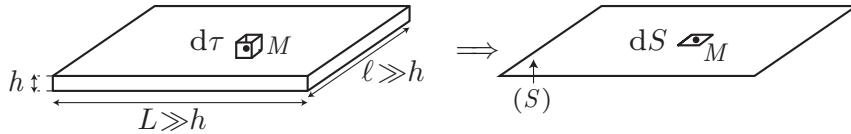
c) Distribution surfacique

Parfois, les charges sont réparties sur une épaisseur faible devant les autres dimensions. On définit une densité surfacique de charge $\sigma(M)$:

$$\sigma(M) = \frac{\delta Q(M)}{dS} \quad (2.5)$$

s'exprimant en $C \cdot m^{-2}$, avec δQ la charge contenue dans dS autour de M . La charge totale portée par (S) vaut alors :

*
$$Q = \iint_{(S)} \sigma(M) dS \quad (2.6)$$



Cette description n'est valable que si l'observateur ne se place pas trop près de cette surface.

En lien avec la description volumique, en considérant un parallélépipède de petite dimension selon z : $\sigma = \int_0^h \rho(M) dz = \rho(x, y) h$ si ρ indépendant de z .

d) Distribution linéaire

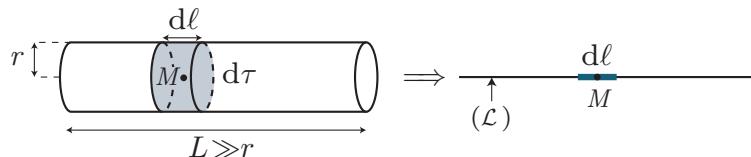
Lorsque les charges sont localisées au voisinage d'une courbe (\mathcal{L}) , c'est-à-dire réparties dans un volume dont une dimension est très grande par rapport aux autres, on introduit une densité linéique de charge $\lambda(M)$:

$$\lambda(M) = \frac{\delta Q(M)}{d\ell} \quad (2.7)$$

où δQ est la charge comprise dans l'élément de longueur $d\ell$ autour de M . La charge dans toute la courbe est :

$$Q = \int_{(\mathcal{L})} \lambda(M) d\ell \quad (2.8)$$

Là encore, ce n'est valable que si l'observateur ne se place pas trop près de la distribution de charges.



II. Courant électrique

II.1 Origine physique

* Un conducteur électrique comporte des **porteurs de charge mobiles** susceptibles de se déplacer, et des **porteurs de charges fixes**. Par exemple, un métal est constitué d'électrons mobiles entouré d'un réseau cristallin d'ions positifs.

Comme toute les particules microscopiques, les porteurs de charge sont soumis au phénomène d'agitation thermique, mouvement désordonné et aléatoire, à des vitesses importantes (de l'ordre de $10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$). Ainsi en moyenne, leur déplacement est nul et donc $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$.

Sous l'action d'un champ électromagnétique, un **mouvement d'ensemble** va se superposer pour les porteurs de charge mobiles. Ce mouvement est lié à la force de Lorentz ($\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$) : toutes les particules de même charge subissent la même force et se déplacent de la même manière, avec $\langle \vec{v} \rangle \neq \vec{0}$. Cette vitesse moyenne est beaucoup plus faible que la vitesse d'agitation thermique, mais c'est elle qui va être responsable du transport de charge au niveau macroscopique.

Le courant électrique est un déplacement ordonné de particules chargées.

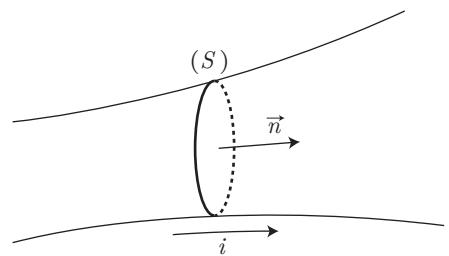
II.2 Intensité du courant électrique

Par définition, l'intensité du courant électrique à travers une surface (S) orientée s'écrit :

*

$$i = \frac{\delta Q}{dt} \quad (2.9)$$

où δQ est la charge traversant algébriquement (S) pendant dt . Il s'agit tout simplement d'un **débit de charge** à travers la surface (S).



Exercice

Le cyclotron Arronax (Saint-Herblain) peut produire des faisceaux de protons d'intensité maximale $750 \mu\text{A}$ de protons d'énergie 50 MeV. Déterminer le nombre de protons atteignant la cible pendant une milliseconde. On donne l'expression de l'énergie cinétique relativiste $E_c = (\gamma - 1)mc^2$ avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$; la charge élémentaire $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ et la masse d'un proton $m = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

On n'a pas ici besoin de la vitesse des protons, vu que l'on connaît l'intensité. En la supposant constante, il vient $Q = I\Delta t$ la charge totale émise (et donc en régime permanent reçue par la cible, supposée verticale au jet de protons). Ainsi le nombre de protons est simplement $N = Q/e = 4,08 \cdot 10^{20}$.

II.3 Vecteur densité de courant

a) Approche simplifiée

Considérons dans un premier temps une approche locale simplifiée : un cylindre de section S parcouru par des porteurs de charge mobiles q , avec n la densité volumique des porteurs mobiles et \vec{v} la vitesse moyenne des porteurs mobiles. Exprimons le courant traversant une section droite S :

*

- les porteurs de charge traversant la section S dans le sens positif pendant dt sont situés dans un volume $d\tau = S \times v dt$;
- dans ce volume il y a $\delta N = nd\tau$ porteurs de charge, donc une charge totale $\delta Q = q\delta N = qnd\tau$;
- ainsi le courant vaut $i = \frac{\delta Q}{dt} = \frac{qnSvdt}{dt} = nqvS$

Ordre de grandeur : pour un fil de cuivre de section $S = 1 \text{ mm}^2$, parcouru par un courant d'intensité $I = 1 \text{ A}$, de densité volumique d'électrons libres $n = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$, la vitesse d'ensemble des porteurs de charge vaut :

$$v = \frac{I}{nqS} = 7,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = 27 \text{ cm}\cdot\text{h}^{-1} \quad (2.10)$$

Elle est très faible devant la vitesse d'agitation thermique.

*

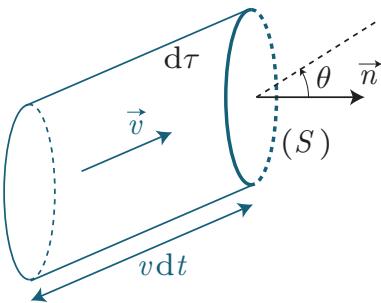
Odg à retenir : $v \sim 0,1 \text{ mm}\cdot\text{s}^{-1} \ll 10^5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} = v^*$.

b) Cas général

* Prenons maintenant le cas le plus général de porteurs de charge de charge q , se déplaçant à la vitesse moyenne \vec{v} et traversant une surface élémentaire $d\vec{S} = dS \vec{n}$. On note δi l'intensité du courant traversant dS pendant dt et θ l'angle entre \vec{n} et \vec{v} . On effectue le même raisonnement :

$$d\tau = dS v dt \cos \theta = d\vec{S} \cdot \vec{v} dt \quad (2.11)$$

$$\text{donc } \delta^2 N = n d\tau = n \vec{v} \cdot d\vec{S} dt \quad (2.12)$$



On en déduit la charge $\delta^2 Q$ traversant dS pendant dt :

$$\delta^2 Q = q \delta N = n q \vec{v} \cdot d\vec{S} dt \quad (2.13)$$

donc le courant s'exprime simplement par :

$$\delta i = \frac{\delta^2 Q}{dt} = n q \vec{v} \cdot d\vec{S} = \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (2.14)$$

* avec $\vec{j} = n q \vec{v}$ le **vecteur densité de courant volumique**. En sommant sur toute la surface, on calcule un **flux** :

$$i = \iint_{(S)} \delta i = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (2.15)$$

grandeur physique déjà rencontrée pour le champ magnétique en première année.

Pour le calcul du volume, on peut faire une analogie avec une pile de pièces de monnaie inclinée.

La notation δ^2 signifie qu'on calcule une petite quantité de Q par rapport à deux infiniment petits : la surface $d\vec{S}$, et le temps dt . Le terme $\delta^2 Q$ est dit d'ordre 2.

Vecteur densité de courant volumique

Le vecteur densité de courant volumique est défini par :

$$\vec{j} = n q \vec{v} = \rho \vec{v} \quad (2.16)$$

où n est la densité volumique de porteurs de charge mobile, q la charge des porteurs, $\rho = nq$ la densité volumique de charges mobiles et \vec{v} la vitesse d'ensemble des porteurs. Il s'exprime en $A \cdot m^{-2}$. L'intensité du courant électrique à travers une surface S orientée s'exprime comme le flux de \vec{j} :

$$i = \iint_{(S)} \delta i = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} \quad (2.17)$$

Dans le cas où coexistent plusieurs types de porteurs de charge, $\vec{j} = \sum \rho_k \vec{v}_k$. Par exemple pour de l'eau salée contenant des ions Na^+ et Cl^- ,

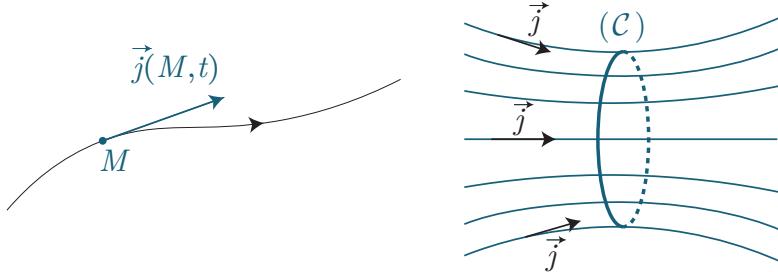
$$\vec{j} = n(Na^+) e \vec{v}(Na^+) + n(Cl^-) (-e) \vec{v}(Cl^-) \quad (2.18)$$

II.4 Géométrie des courants

Quelques définitions sont nécessaires pour décrire la géométrie des courants au sein d'un milieu :

- une **ligne de courant** est une ligne (\mathcal{L}) telle que $\forall M \in (\mathcal{L})$, $\vec{j}(M, t)$ est tangent à (\mathcal{L}). En régime permanent, les lignes de courant se confondent avec les trajectoires moyennes des porteurs de charges ;
- un **tube de courant** est la surface engendrée par un ensemble de lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé (ex : fil électrique).

*

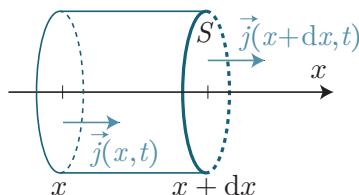


III. Conservation de la charge

La charge électrique d'un système isolé se conserve au cours du temps. Cette propriété impose des relations entre la charge et les courants traduites mathématiquement par l'équation de conservation de la charge entre Q et I (équation intégrale ou macroscopique) et entre ρ et \vec{j} (équation locale ou microscopique).

III.1 Équation locale de conservation de la charge à une dimension

Cette démonstration est celle exigible au programme. On considère une situation unidimensionnelle selon l'axe (Ox) où ρ et \vec{j} ne dépendent que de x et t . On effectue un bilan de charges entre t et $t + dt$ dans un volume élémentaire fixe du référentiel d'étude, cylindrique de section S , situé entre les abscisses x et $x + dx$:



Exprimons de deux façons la variation de charge $\delta^2 Q$ dans ce volume élémentaire :

- **Variation temporelle** : la charge δQ de ce volume s'exprime via $\delta Q(t) = \rho(x, t)Sdx$. Ainsi sa variation pendant dt vaut :

$$\delta^2 Q = \delta Q(t + dt) - \delta Q(t) = (\rho(x, t + dt) - \rho(x, t))Sdx = \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_x dt Sdx \quad (2.19)$$

à l'ordre 1 ;

- **Échange avec l'extérieur** : du fait des courants $i(x, t)$ (entrant) et $i(x + dx, t)$ (sortant), on peut exprimer les charges entrant et sortant du système :

$$\delta Q_{\text{entrant}} = i(x, t)dt \quad \text{et} \quad \delta Q_{\text{sortant}} = i(x + dx, t)dt \quad (2.20)$$

La charge $\delta Q_{\text{entrant}}(x)$ entrant à l'abscisse x s'écrit à l'aide du vecteur \vec{j} :

$$\delta Q_{\text{entrant}}(x) = i(x, t)dt = \vec{j}(x, t) \cdot \vec{S}dt = j(x, t)Sdt \quad (2.21)$$

et de même en $x + dx$. Donc la charge totale échangée entre le système et l'extérieur pendant dt vaut :

$$\delta^2 Q_{\text{ech}} = \delta Q_{\text{entrant}} - \delta Q_{\text{sortant}} = (j(x, t) - j(x + dx, t))Sdt = - \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)_t dx Sdt \quad (2.22)$$

Pour traduire la conservation de la charge, il vient simplement :

$$*\delta^2 Q = \delta^2 Q_{\text{ech}} \iff \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_x dt S dx = - \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)_t dx S dt \iff \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_x + \left(\frac{\partial j}{\partial x} \right)_t = 0 \quad (2.23)$$

On pourrait écrire également de manière assez naturelle la charge du système à l'instant $t + dt$:

$$\delta Q(t + dt) = \delta Q(t) + \delta q(x) - \delta q(x + dx) \quad (2.24)$$

où $\delta q(x)$ est la charge entrant dans le système en x pendant dt et $\delta q(x + dx)$ la charge sortant du système en $x + dx$ pendant dt .

III.2 Généralisation

Note à moi-même : Avoir fait la partie de cours sur la divergence du poly de maths !

Remarquons que dans le cas 1D où $\vec{j}(x, t) = j_x(x, t)\vec{e}_x$, $\left(\frac{\partial j_x}{\partial x} \right)_t = \text{div}(\vec{j})$. On admettra donc :

Équation locale de conservation de la charge

Dans le cas général, l'équation locale de conservation de la charge reliant la densité volumique de charge $\rho(M, t)$ et le vecteur densité de courant volumique $\vec{j}(M, t)$ s'écrit :

*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0 \quad (2.25)$$

III.3 Équation intégrale et lien avec l'équation locale (HP)

Soit un volume (\mathcal{V}) quelconque délimité par une surface fermée (S). Si on écrit un simple bilan de charge, en notant $Q(t)$ la charge contenue dans (\mathcal{V}) à l'instant t :

$$Q(t + dt) = Q(t) + \delta Q \quad (2.26)$$

avec δQ la charge entrant algébriquement dans (\mathcal{V}) à travers (S). Il vient :

$$\frac{Q(t + dt) - Q(t)}{dt} = \frac{\delta Q}{dt} \iff \frac{dQ}{dt} + i_{(S)} = 0 \quad (2.27)$$

avec $i_{(S)}$ le courant sortant de (\mathcal{V}) à travers (S).

On peut faire le lien avec l'équation locale, en écrivant :

$$Q(t) = \iiint_{(\mathcal{V})} \rho d\tau \quad \text{et} \quad i_{(S)} = \oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{\text{sortant}} \quad (2.28)$$



Notez l'usage du rond sur la double intégrale, dont on rappelle la signification : on intègre sur une surface **fermée**.

D'où :

$$\frac{dQ}{dt} + i_{(S)} = 0 \iff \frac{d}{dt} \left(\iiint_{(\mathcal{V})} \rho d\tau \right) + \oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}_{\text{sortant}} = 0 \quad (2.29)$$

soit en permutant la dérivée et l'intégrale triple et en utilisant le théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\iiint_{(\mathcal{V})} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} \right) d\tau = 0 \quad (2.30)$$

Cette relation étant vérifiée quel que soit le volume (\mathcal{V}), on aboutit à l'équation locale de conservation de la charge $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$.

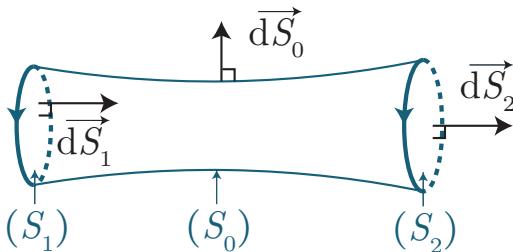
Pour une surface fermée (S) délimitant un volume (\mathcal{V}), $\oint_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_{(\mathcal{V})} \text{div } \vec{A} d\tau$

III.4 Conséquences en régime stationnaire

En régime stationnaire, c'est-à-dire indépendant du temps, $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$.

- * ■ À une dimension $\frac{d j}{dx} = 0$ c'est-à-dire que j est indépendant de la position, et donc l'intensité (flux de \vec{j}) est le même à travers toute section du conducteur, qui est un tube de courant.
- De manière générale, l'équation de conservation de la charge implique $\operatorname{div} \vec{j} = 0$. On dit que \vec{j} est à flux conservatif.

Pour comprendre cette dernière notion, considérons un tube de courant fermé $(S) = (S_0) \cup (S_1) \cup (S_2)$.



*

En régime stationnaire :

$$\oint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0 = \iint_{(S_1)} \vec{j} \cdot (-d\vec{S}_1) + \iint_{(S_0)} \underbrace{\vec{j} \cdot d\vec{S}_0}_{=0} + \iint_{(S_2)} \vec{j} \cdot d\vec{S}_2 \quad (2.31)$$

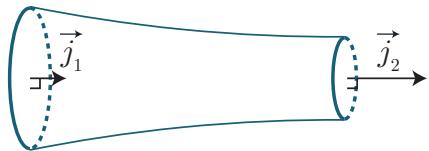
donc le flux de \vec{j} est conservé le long du tube :

$$\iint_{(S_1)} \vec{j} \cdot d\vec{S}_1 = \iint_{(S_2)} \vec{j} \cdot d\vec{S}_2 \iff i_1 = i_2 \quad (2.32)$$

et l'intensité est la même tout le long d'une branche, en régime stationnaire.

Cela permet également de justifier la loi des noeuds en considérant plusieurs tubes de courant qui arrivent vers la même zone de l'espace.

Enfin, dans le cas d'un rétrécissement du tube de courant, on peut ainsi prévoir que la densité de courant volumique augmentera en norme, tout comme lorsqu'on pince un tuyau d'arrosage, la vitesse de l'eau augmente à débit inchangé.



IV. Force de Lorentz

Pour mémoire, la force de Lorentz est reliée à l'interaction électromagnétique. Pour une particule de charge q de vitesse \vec{v} dans un référentiel (\mathcal{R}) placée dans le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) dans ce même référentiel, la force subie par la particule est :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (2.33)$$

Dans le cas d'un modélisation volumique, on peut définir une force volumique d'expression :

$$\vec{f}(M, t) = \frac{d\vec{F}}{d\tau} = \rho(M, t) \vec{E}(M, t) + \vec{j}(M, t) \wedge \vec{B}(M, t) \quad (2.34)$$

V. Conducteurs ohmiques

V.1 Loi d'Ohm locale

Dans la plupart des conducteurs, tant que la fréquence est suffisamment faible (typiquement $f \ll 10^{14}$ Hz dans les métaux), on a un lien direct entre la cause du courant électrique, à savoir le champ électrique \vec{E} , et sa conséquence \vec{j} :

Il s'agit d'une relation constitutive de certains matériaux, n'étant valable que dans certaines conditions.

Loi d'Ohm locale

Le vecteur densité de courant volumique $\vec{j} = nq\vec{v}$ est proportionnel au champ électrique appliqué dans le conducteur :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad (2.35)$$

*

avec γ la conductivité électrique s'exprimant en $\text{S}\cdot\text{m}^{-1}$. Elle est aussi notée σ . Un ordre de grandeur à connaître : $\gamma(\text{Cu}) = 6 \cdot 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$

Rappelons que le siemens est l'inverse de l'ohm $1 \text{ S} = 1 \Omega^{-1}$.

Citons d'autres ordres de grandeur.

- conducteurs : $\gamma \sim 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$, eau salée à $0,1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ $\gamma = 6 \cdot 10^{-2} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$, eau pure $\gamma = 10^{-6} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$;
- isolants : verre $\gamma = 10^{-17} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$, polystyrène $\gamma = 10^{-20} \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$.

V.2 Modèle de Drude

a) Hypothèses

Drude a développé en 1900 un modèle basé sur la théorie cinétique des gaz (en réalité il faudrait développer une approche quantique).

À l'échelle microscopique, un métal peut être vu selon lui comme :

- une structure fixe constituée d'ions positifs aux noeuds d'un réseau cristallin ;
- un gaz d'électrons libres de se déplacer dans tout le matériau.

Il y adjoint plusieurs hypothèses :

- seuls les électrons participent à la conduction électrique ;
- ils sont **libres** : on néglige toute interaction entre électrons et ions ;
- ils sont **indépendants** : on néglige toute interaction entre les électrons ;
- on ne prend en compte que les **collisions entre les électrons et les ions du réseau**, considérées comme **instantanées** ; on note τ la durée moyenne entre deux collisions successives, appelée **temps de relaxation** ;
- les électrons sont en équilibre thermique par le biais des collisions : après chaque choc, le vecteur vitesse (norme et direction) est indépendant de sa valeur avant le choc, mais \vec{v} est en lien avec la température au point où s'est produite la collision.

Sans action extérieure, sous les hypothèses de ce modèle, $\langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$.

b) Modélisation phénoménologique

Démonstration

Cette approche est la plus courante : elle consiste à considérer que les collisions entre les électrons et les ions du réseau peuvent se modéliser comme une force de frottements fluides $\vec{F} = -\frac{m}{\tau} \vec{v}$ avec m la masse d'un électron. Si on applique un champ électrique \vec{E} au métal, la loi de la quantité de mouvement permet d'écrire :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e\vec{E} \quad (2.36)$$

* soit en régime permanent $\vec{v} = \frac{e\tau}{m} \vec{E} = \mu \vec{E}$ avec μ appelée la **mobilité**. Puis le vecteur densité de courant volumique s'écrit :

$$\vec{j} = n(-e)\vec{v} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} = \gamma \vec{E} \quad (2.37)$$

où $\gamma = \frac{ne^2\tau}{m}$ est la conductivité électrique du métal.

Ordre de grandeur : pour un métal à température ambiante, $\tau \sim 10^{-14}$ s. On a également $n \sim \frac{1}{d^3} \sim 10^{29} \text{ m}^{-3}$, avec d la distance interatomique, il vient $\gamma \sim 2 \cdot 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$, qui se trouve être le bon ordre de grandeur.

Notons néanmoins quelques limites : le modèle n'explique pas la diminution de la conductivité avec la température, ni le caractère isolant / semi-conducteur de certains matériaux. Il faut une approche quantique, où on tient compte des vibrations du réseau, des phénomènes de diffusion, du nombre d'électrons de valence, etc.

c) Modélisation statistique (HP)

Cette modélisation n'est pas strictement au programme, mais permet de justifier l'introduction de cette force de frottements fluides. On veut exprimer la quantité de mouvement par électron $\vec{p}(t + dt)$ à partir de la quantité de mouvement à l'instant $\vec{p}(t)$ et de la force subie par les électrons $\vec{F} = -e\vec{E}$.

La probabilité qu'un électron subisse une collision pendant dt est de dt/τ , et celle de ne pas subir de collision de $(1 - dt/\tau)$. La contribution d'un électron ne subissant pas de collision pendant dt est de $\vec{p}(t) + \vec{F}dt$ à l'ordre 1 en dt .

En négligeant la contribution de tous les électrons subissant une collision entre les instants t et $t+dt$, on multiplie donc la probabilité $(1 - dt/\tau)$ à la contribution moyenne de la quantité de mouvement par électron :

$$\vec{p}(t + dt) = \left(1 - \frac{dt}{\tau}\right) (\vec{p}(t) + \vec{F}dt + \mathcal{O}(dt^2)) = \vec{p}(t) - \frac{dt}{\tau} \vec{p}(t) + \vec{F}dt + \mathcal{O}(dt^2) \quad (2.38)$$

d'où

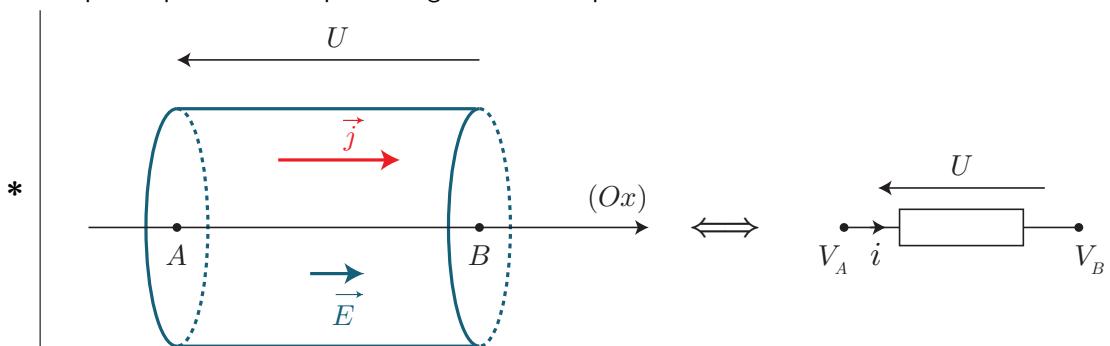
$$\frac{\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t)}{dt} = -\frac{\vec{p}}{\tau} + \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (2.39)$$

ce qui permet de justifier l'apparition de la force $-\frac{m}{\tau} \vec{v} = -\frac{\vec{p}}{\tau}$.

V.3 Loi d'Ohm intégrale

Note à moi-même : Avoir fait la partie de cours sur le gradient du poly de maths !

On cherche à établir la loi d'Ohm usuelle, à savoir la relation $U = RI$ en convention récepteur, ainsi que l'expression de R pour des géométries simples.



On rappelle un résultat de première année, à savoir que pour une géométrie simple, la différence de potentiel U entre deux points distants de L est reliée à $E = \|\vec{E}\|$ via $U = E/L$. En réalité, une relation plus générale relie champ et potentiel, à savoir

$$\vec{E} = -\nabla V \implies V_A - V_B = \int_B^A dV = \int_B^A \nabla V \cdot d\vec{r} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2.40)$$

La circulation du champ électrique de A à B est égale à la différence de potentiel $V_A - V_B$.



Remarquons que $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \nabla V$, c'est-à-dire que le sens du déplacement des charges électriques est celui des potentiels décroissants.

Considérons une géométrie unidimensionnelle avec un conducteur d'axe (Ox) de section S (de forme quelconque, par exemple un disque) et de longueur ℓ . On lui applique une différence de potentiel $U = V_A - V_B$ (liée à un champ électrique uniforme $\vec{E} = E\vec{e}_x$). On se place en régime permanent où $\vec{j} = \gamma\vec{E}$.

- La différence de potentiel s'exprime via la norme du champ électrique :

$$U = V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{r} = E\ell \quad (2.41)$$

- l'intensité du courant électrique de A vers B vaut :

$$I_{A \rightarrow B} = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} \gamma E dS = \gamma E S \quad (2.42)$$

D'où finalement $\frac{V_A - V_B}{I_{A \rightarrow B}} = \boxed{\frac{\ell}{\gamma S} = R}$ la résistance du conducteur.

V.4 Puissance cédée aux porteurs de charges et effet Joule

Les porteurs de charge mobiles, mis en mouvement par le champ électrique, reçoivent une puissance associée à la force électrique : $P_{\text{elec}} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$. Cette puissance reçue permet d'augmenter leur énergie cinétique, phénomène mis à profit dans les canons à électrons et accélérateurs de particules.

Dans le cas de conducteurs ohmiques, cependant, le champ électrique fournit de l'énergie en régime permanent qui compense les pertes dues aux forces de friction : $\frac{dE_c}{dt} = P_{\text{elec}} + P_{\text{frotts}} = 0$. On peut calculer la puissance volumique reçue par les porteurs de charge mobiles à partir de la force de Lorentz volumique :

$$\delta P = \vec{f}_{\text{lorentz,vol}} \cdot \vec{v} d\tau = \rho \vec{v} \cdot \vec{E} d\tau \implies p = \frac{\delta P}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad (2.43)$$

Puissance volumique cédée aux porteurs

La puissance volumique cédée aux électrons libres d'un conducteur de conductivité γ et transformée en chaleur par effet Joule s'écrit :

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{j^2}{\gamma} \quad (2.44)$$

exprimé en $\text{W}\cdot\text{m}^{-3}$.

Intégrée sur le volume du conducteur, $P = \vec{j} \cdot \vec{E}V = jES\ell = \frac{I U}{S \ell} S\ell = UI = RI^2$. Cette puissance est transmise par les chocs aux ions du réseau cristallin, dont l'énergie interne (agitation thermique) augmente, et la température du conducteur augmente (sauf si on est en régime permanent thermique), impliquant un transfert thermique vers l'extérieur.

Exercices

2. 1 Densité volumique de charges

Dans un circuit électronique, une couche de cuivre d'épaisseur h de l'ordre du micromètre a la forme d'un ruban de largeur $\ell = 0,2 \text{ mm}$ et de longueur $L = 0,3 \text{ cm}$. On considère que chaque atome de métal cède en moyenne un électron (de charge élémentaire $e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$) devenant ainsi un ion. Les électrons ainsi libérés forment un ensemble, appelé nuage délocalisé, de densité volumique ρ , qui peut se mettre en mouvement pour assurer la conduction du courant électrique.

1. Rappeler l'ordre de grandeur du rayon atomique et vérifier que les conditions requises pour une modélisation continue sont réunies.
 2. Le cuivre a une masse volumique $\mu = 8,94 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, une masse molaire $M = 63,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Estimer la densité volumique des ions Cu^+ ainsi que celle des charges volumiques positives et négatives.
-
1. Le rayon atomique est de l'ordre de l'angström, soit $0,1 \text{ nm}$. Ainsi dans le volume considéré, le nombre d'atome est de l'ordre de \mathcal{N}_A .
 2. À l'aide de la masse molaire et de la masse volumique, on peut connaître le nombre de moles par unité de volume, via μ/M . En multipliant par le nombre d'Avogadro, on en déduit la densité volumique d'ions Cu^+ :

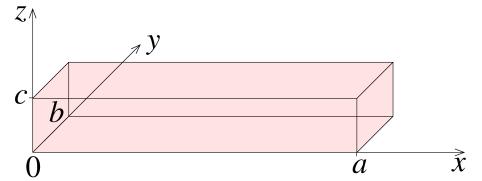
$$n(\text{Cu}^+) = \mathcal{N}_A \frac{\mu}{M} = 8,48 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3} \quad (2.45)$$

La densité volumique de charges positives est alors $\rho_+ = -\rho_- = en(\text{Cu}^+) = 1,35 \cdot 10^{10} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$.

2. 2 Distribution volumique, distribution linéique

On considère le parallélépipède chargé ci-contre, de côtés a , b et c et de densité volumique de charge

$$\rho(x, y, z) = \rho_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right)$$



1. Déterminer la charge totale Q du parallélépipède.
 2. On modélise le parallélépipède par une ligne d'axe (Ox), déterminer la densité linéique de charge λ .
-

1. Découpons le volume en éléments infinitésimaux de volume $d\tau = dx dy dz$. La charge totale se calcule via la densité volumique de charge :

$$Q = \iiint_{(V)} \rho(x, y, z) d\tau = \rho_0 \int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) dy \int_0^c \sin\left(\frac{\pi z}{c}\right) dz \quad (2.46)$$

soit tous calculs faits :

$$Q = \frac{2\rho_0}{\pi^2} abc \quad (2.47)$$

2. On a vu que la densité linéique de charge se mettait sous la forme $\lambda(x) = \frac{\delta Q(x)}{dx}$ (particularisé ici à l'axe (Ox)). Il suffit donc d'intégrer uniquement selon y et z :

$$\lambda(x) = \iint_{(S)} \rho(x, y, z) dy dz = \frac{4\rho_0 bc}{\pi^2} \left(1 - \frac{x}{a}\right) \quad (2.48)$$

2. 3 Décharge d'une barre

Une barre conductrice mince et cylindrique OA de rayon R , longueur a , masse m possède une charge initiale Q_0 uniformément répartie en volume.

À $t = 0$, on relie le point O de la barre à la terre, la barre se décharge. On suppose qu'à tout instant, la charge $Q(t)$ de la barre reste uniformément répartie.

1. Soit un point M sur la barre repérée par la distance $x = OM$. Déterminer la charge $q(t)$ que possède la partie MA de la barre à chaque instant t en fonction de la charge totale $Q(t)$.
2. En déduire l'intensité $i(x, t)$ puis la densité de courant $\vec{j}(x, t)$ au point M , en la supposant uniforme sur une section de la barre.

1. Comme la charge est uniformément répartie en volume, on a donc :

$$q(t) = \frac{V_{MA}}{V_{OA}} Q(t) = \frac{(a-x)S}{aS} Q(t) = \frac{a-x}{a} Q(t) \quad (2.49)$$

2. Aucune information sur l'orientation n'est imposée, on choisit donc d'orienter la surface de chaque section droite du conducteur selon \vec{e}_x . Ainsi, d'après l'équation intégrale de conservation de la charge appliquée au volume MA : où

$$\frac{dq}{dt} = -i_{\text{sortant}} = i(x, t) = \frac{a-x}{a} \frac{dQ}{dt} \quad (2.50)$$

et comme on suppose que la densité de courant est uniforme sur une section,

$$i(x, t) = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S} = \vec{j}(x, t) \cdot \iint_{(S)} d\vec{S} = j_x(x, t) \pi R^2 \quad (2.51)$$

soit finalement $\vec{j}(x, t) = \frac{a-x}{a\pi R^2} \frac{dQ}{dt} \vec{e}_x$.

2. 4 Conductivité d'un électrolyte

La mobilité μ d'un porteur de charge est définie par la relation $\vec{v} = \mu \vec{E}$ où \vec{v} est la vitesse moyenne du porteur et \vec{E} est le champ électrique dans le matériau. Soit m la masse et q la charge des porteurs, n leur densité volumique (nombre de porteurs par m^3).

1. Établir la relation liant la conductivité σ à la mobilité et faisant intervenir les autres grandeurs définies plus haut.
2. Montrer que d'après la relation obtenue, la conductivité est toujours positive.
3. Généraliser cette relation au cas de plusieurs types de porteurs caractérisés par (q_i, n_i, μ_i) .
4. Application à l'eau pure : quels sont ses porteurs ? Quelles sont leurs concentrations molaires ? Leurs densités volumiques ? Calculer la conductivité de l'eau pure.
5. Application à une solution d'acide chlorhydrique de concentration $0,1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Calculer la concentration de tous les ions puis la conductivité de la solution. Y a-t-il un ion qui joue un rôle prépondérant ?

Données. Mobilités en $\Omega^{-1}\cdot\text{m}^2\cdot\text{C}^{-1}$: $\text{H}_3\text{O}^+ : 3,75\cdot 10^{-7}$, $\text{HO}^- : -2,12\cdot 10^{-7}$, $\text{Cl}^- : -0,82\cdot 10^{-7}$, $\text{Na}^+ : 0,54\cdot 10^{-7}$. Nombre d'Avogadro $\mathcal{N}_A = 6,02\cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, $e = 1,60\cdot 10^{-19} \text{ C}$.

1. Avec $\vec{j} = \sigma \vec{E} = nq \vec{v} = nq \mu \vec{E}$, on identifie $\sigma = nq\mu$.
2. Comme μ est du même signe que q (le déplacement d'une charge positive est dans le sens de \vec{E} , et dans le sens opposé pour une charge négative), $q\mu > 0$, et $n > 0$. Donc $\sigma > 0$.
3. On peut généraliser : $\vec{j} = \sigma \vec{E} = (n_1 q_1 \vec{v}_1 + n_2 q_2 \vec{v}_2 + \dots)$ conduisant à $\sigma = \sum_i n_i q_i \mu_i$.
4. Dans l'eau pure, les seuls porteurs sont les ions HO^- et H_3O^+ . Si on a de l'eau pure, elle est de pH neutre, donc $\text{pH} = 7$ et $[\text{HO}^-] = [\text{H}_3\text{O}^+] = 1,00\cdot 10^{-7} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

Leur densité volumique est reliée à la concentration molaire (que l'on convertit en $\text{mol}\cdot\text{m}^{-3}$), après conversion du nombre de mole en nombre d'éléments :

$$n(\text{H}_3\text{O}^+) = n(\text{HO}^-) = \mathcal{N}_A \times [\text{HO}^-] = 6,02\cdot 10^{19} \text{ m}^{-3} \quad (2.52)$$

Ainsi en appliquant de la question 3. :

$$\sigma = n(\text{H}_3\text{O}^+)e(\mu(\text{H}_3\text{O}^+) - \mu(\text{HO}^-)) = 5,65 \cdot 10^{-6} \text{ S} \cdot \text{m}^{-1} \quad (2.53)$$

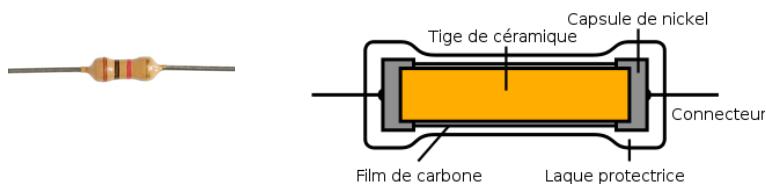
5. L'acide chlorhydrique est un acide fort qui se dissocie totalement en ions H_3O^+ et Cl^- , de concentration identique $0,1 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. On peut ici négliger l'autoprotolyse de l'eau, et considérer le pH à 1, et donc $[\text{HO}^-] = 10^{-14} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. En effectuant le même calcul, on trouve :

$$\sigma = \mathcal{N}_A e ([\text{H}_3\text{O}^+] \mu(\text{H}_3\text{O}^+) - [\text{HO}^-] \mu(\text{HO}^-) - [\text{Cl}^-] \mu(\text{Cl}^-)) = 4,40 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1} \quad (2.54)$$

avec la plus grande contribution revenant à l'ion H_3O^+ , $\mathcal{N}_A e[\text{H}_3\text{O}^+] \mu(\text{H}_3\text{O}^+) = 3,6 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$.

2. 5 Résistances

1. Estimer l'ordre de grandeur de la résistance d'un câble tel que ceux utilisés en TP d'électricité.
2. On considère une résistance commune de petite puissance constituée d'un film de carbone de résistivité $3,5 \cdot 10^{-5} \Omega \cdot \text{m}$ entourant un cylindre de céramique (isolant électrique). La conductivité du nickel est du même ordre de grandeur que celle du cuivre (4 fois plus petite), celle de la céramique est négligeable. Donner l'ordre de grandeur de l'épaisseur du film de carbone d'un résistor de $1 \text{ k}\Omega$.



3. Tracer l'allure des lignes de courant électrique dans la résistance.

-
1. Il s'agit de câbles fins, de diamètre approximatif de cuivre $d \sim 5 \text{ mm}$, et de longueur typique $\ell = 1 \text{ m}$. En appliquant la formule obtenue pour la résistance électrique :

$$R = \frac{\ell}{\gamma S} = \frac{\ell}{\gamma(\text{cuivre}) \pi d^2 / 4} \sim 10^{-3} \Omega \quad (2.55)$$

2. Comme le nickel est du même ordre de conductivité que le cuivre, la résistance des deux capsules aux extrémités est négligeable devant la valeur de la résistance globale. Ainsi on identifie $R(C) = R$. D'autre part, en notant le diamètre $d \sim 2 \text{ mm}$ et la longueur du cylindre (creusé) de carbone $\ell \simeq 1 \text{ cm}$, on peut chercher l'épaisseur e du film en utilisant toujours la même formule que précédemment. En effet, on applique bien une différence de potentiel entre les deux extrémités du cylindre creux, et non entre la face intérieure et extérieure (ce qui aurait donné une géométrie de courant différente). D'où :

$$R = \frac{\ell}{\gamma(C) \times (\pi d \times e)} \quad (2.56)$$

avec la surface latérale approximée à $S = 2\pi \times \text{rayon} \times e$ (périmètre *times* épaisseur), vu que l'épaisseur est très certainement petite devant le rayon. Donc :

$$e = \frac{\ell}{\gamma(C) \pi d R} \sim 6 \cdot 10^{-8} \text{ m} \quad (2.57)$$

proche de $0,1 \mu\text{m}$. C'est très petit, même si l'épaisseur est bien plus importante que la taille des atomes de carbone. L'épaisseur obtenue est cohérente avec les courbes issues de l'article « Pyrolytic Film Resistors : Carbon and Borocarbon » de R. O. GRISDALE et A. C. PFISTER des laboratoires Bell, <https://www.ganino.com/files/BSTJ/Vol30/bstj30-2-271.pdf>.

3. Les lignes de courant se situent dans le film de carbone et sont colinéaires à l'axe du cylindre.

Rque : relativement peu chères, pas trop imprécises, ces résistances à film de carbone sont souvent remplacées par des résistances à couche d'oxyde métallique, produisant moins de bruit (pour les circuits à faible signaux), le film ayant une structure plutôt hélicoïdale que s'enroule autour de la base en céramique (la couche métallique est gravée au laser).

2. 6 Filament d'une lampe à incandescence

On étudie une lampe à incandescence comportant un filament de tungstène (cylindre de rayon $r = 0,03 \text{ mm}$ et longueur $L = 4 \text{ cm}$) et une ampoule de verre transparent. On néglige l'intervention du gaz de remplissage. Des mesures électriques ont permis d'obtenir le tableau de valeurs ci-dessous, liant la tension U à l'intensité I du courant dans le filament.

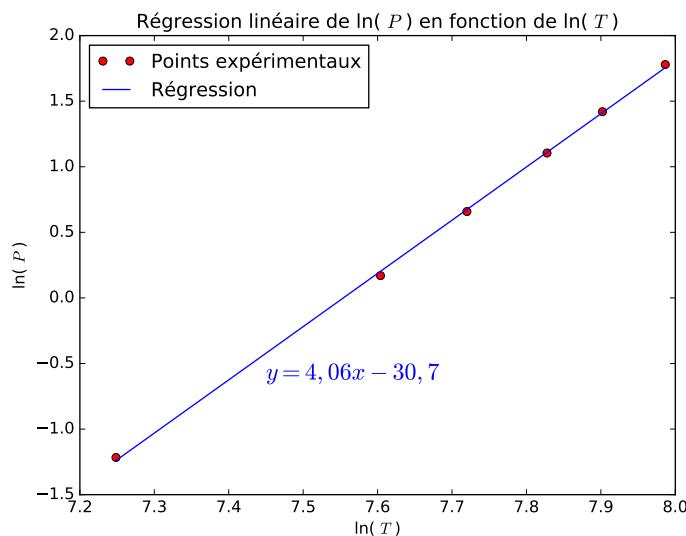
Tension U (V)	1,25	3,07	4,20	5,60	6,86	8,65
Intensité I (A)	0,237	0,386	0,460	0,539	0,603	0,685

- La résistivité du tungstène dépend de la température T de la manière suivante : $\rho = aT^2 + bT$ avec $a = 2,5 \cdot 10^{-14} \Omega \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-2}$ et $b = 2,3 \cdot 10^{-10} \Omega \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{-1}$. On néglige les effets de dilatation. Compléter le tableau de mesures par les températures.
- On admet la loi de Stefan, qui stipule que la puissance électrique absorbée par le filament émet sous forme de rayonnement une puissance $P = \sigma T^4 S$ où $S = 2\pi rL$ est la surface du corps et σ la constante de Stefan. Les résultats permettent-ils de retrouver la valeur 4 de l'exposant ?
- Quelle valeur numérique obtient-on alors pour la constante de Stefan ?
- Le filament possède un coefficient de dilatation linéique isotrope de valeur $\alpha = \frac{1}{L} \frac{\text{d}L}{\text{dT}} = 4,5 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$. Justifier l'hypothèse faite ci-dessus, concernant le caractère négligeable de la dilatation.

- Connaissant la tension et l'intensité, on en déduit $R = \frac{U}{I} = \frac{\rho L}{\pi r^2}$. Une résolution de polynôme ou une résolution numérique permet d'en déduire les valeurs de température suivantes :

Tension U (V)	1,25	3,07	4,20	5,60	6,86	8,65
Intensité I (A)	0,237	0,386	0,460	0,539	0,603	0,685
Température T (K)	1406	2006	2253	2509	2703	2941

- Supposons que la puissance soit sous la forme polynomiale $P = aT^k$. Pour trouver l'exposant k , il est pertinent d'utiliser un graphe logarithmique : $\ln(P) = \ln(a) + k \ln(T)$: on trace donc $\ln(P)$ en fonction de $\ln(T)$, de sorte que la pente est k .



On constate que l'ajustement affine est excellent, avec $R^2 = 0,999$, et les points sont bien proches de la droite théorique. On trouve une pente de 4,06, cohérent avec l'exposant 4 de la loi de Stefan. Le code source Python se trouve sur le site.

- L'ordonnée à l'origine valant $\ln(\sigma S)$, $\sigma = \frac{\exp(\ln(a))}{2\pi rL} = 6,4 \cdot 10^{-9} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$, à comparer à la valeur théorique de $5,7 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2/\text{K}^4$. On observe un écart d'un ordre de grandeur, ce qui n'est déjà pas si mal pour cette expérience.

4. Considérons que la résistance est fonction de deux variables $R(\rho, L)$. Sa différentielle logarithmique s'écrit alors :

$$\frac{dR}{R} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dL}{L} \quad (2.58)$$

ce qui permet d'introduire les variations relatives selon les deux effets :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dR}{R} \Big|_{\text{dil}} = \frac{dL}{L} = \alpha dT = 4,5 \cdot 10^{-6} dT \\ \frac{dR}{R} \Big|_{\text{res}} = \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} dT = \frac{2aT + b}{aT^2 + bT} dT = 6 \cdot 10^{-4} dT \end{array} \right. \quad (2.59)$$

$$(2.60)$$

$$T \sim 2000 \text{ K}$$

donc la variation de résistivité a une influence très supérieure à celle de la dilatation.

Diffusion de particules

Sommaire

3.1	Mouvement de particules	2
3.1.1	Définitions	2
3.1.2	Densité de particules	2
3.1.3	Origine physique	2
3.2	Courant de particules	3
3.2.1	Vecteur densité de courant de particules	3
3.2.2	Débit de particules à travers une surface	4
3.2.3	Loi phénoménologique de Fick	4
3.3	Bilan de particules	5
3.3.1	Bilan de particules en coordonnées cartésiennes	5
3.3.2	Bilan de particules avec un terme source	5
3.3.3	Bilan de particules en géométrie cylindrique	6
3.3.4	Généralisation	6
3.4	Équation de diffusion de particules	6
3.4.1	Établissement de l'équation de diffusion de particules	6
3.4.2	Remarques générales	7
3.4.3	Résolution	7
3.5	Analyses	9

Questions de cours :

- Débit de particule, loi de Fick, sens physique et ordres de grandeur.
- Établir l'équation locale de bilan de particules avec ou sans terme source en géométrie cartésienne à 1D. Préciser l'équation la plus générale.
- Établir l'équation de diffusion de particules à 1D. Expliquer la notion d'irréversibilité et présenter un cas de résolution en régime stationnaire.

Capacités exigibles du BO :

- Citer les deux modes de transfert de masse : diffusion et convection.
- Exprimer le débit de particules comme le flux du vecteur \vec{j}_N à travers une surface orientée.
- Établir l'équation locale de bilan de particules avec ou sans terme source.
- Établir l'équation de diffusion.
- Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène.

I. Mouvement de particules



Manipulation

Présenter deux manips d'homogénéisation d'une solution de KMnO₄ soit par convection (avec eau), soit par diffusion dans un gel d'agar agar laissée au repos.

I.1 Définitions

Il existe pour les particules deux types de transport possibles :

- la **convection** est le mouvement d'entraînement de particules par le mouvement d'ensemble d'un fluide (gaz ou liquide), d'autant plus efficace que la vitesse du fluide support est grande ;
- la **diffusion de particules** est un phénomène de transport de particules dans un milieu support sans mouvement macroscopique observable, des régions de forte concentration en particules vers les régions de plus faible concentration.

La diffusion est généralement beaucoup plus lente que la convection, et se rencontre même dans les solides. Citons par exemple :

- la diffusion des ions dans une pile chimique à l'approche des électrodes ;
- la diffusion d'impuretés dans un solide semi-conducteur afin de le doper ;
- la diffusion d'une odeur dans une pièce (même en l'absence de courant d'air), etc.

Néanmoins la diffusion est généralement masquée par la convection.

I.2 Densité de particules

Pour des particules d'un certain type, on peut définir une densité volumique de particules ou **densité particulaire**, notée n , en considérant une distribution volumique où il est possible de définir un volume mésoscopique $d\tau$ « suffisamment grand » pour que le nombre de particule soit toujours le même :

$$n(M, t) = \frac{\delta N(M, t)}{d\tau} \quad (3.1)$$

où $\delta N(M, t)$ est le nombre de particules de ce type compris à l'instant t dans un volume mésoscopique $d\tau$ autour de M . L'unité est le m^{-3} .

Si n dépend de M , c'est-à-dire si le système est inhomogène, il est hors équilibre et aura tendance à évoluer de manière irréversible vers son homogénéisation.

I.3 Origine physique

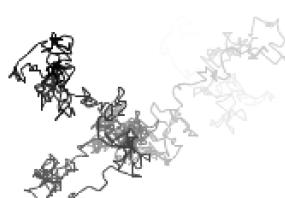


Manipulation

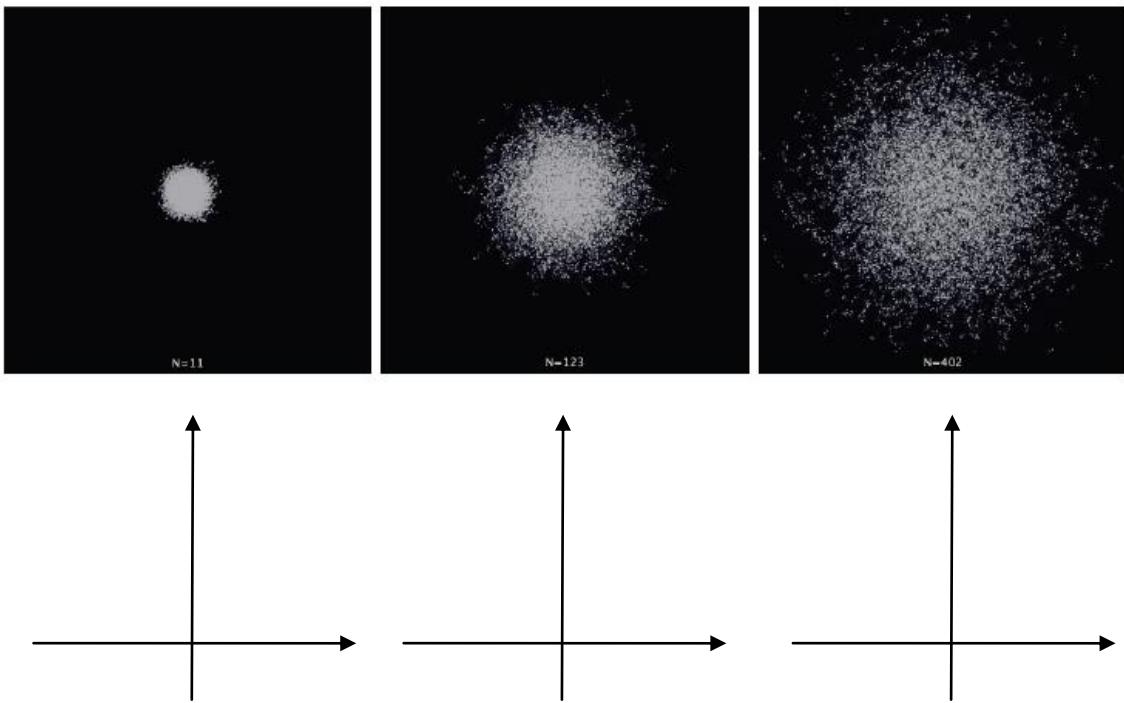
Simulation à l'adresse http://femto-physique.fr/physique_statistique/phystat_C4.php, ainsi que simulation avec NetLogo.

a) Première approche : marche au hasard

On appelle marche au hasard d'une particule un modèle mathématique de dynamique de la particule composée d'une succès de pas aléatoires (effectués au hasard), par exemple un déplacement équiprobable soit vers le haut, le bas, la gauche ou la droite d'une distance a . Est représentée ci-contre une trajectoire de particule en 2D. Après un grand nombre de pas, la valeur moyenne de la position reste son point de départ....



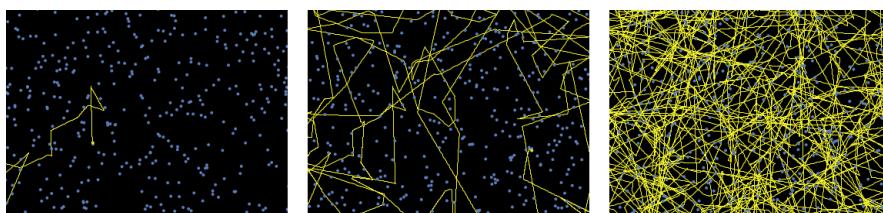
Ci-dessous est représenté le mouvement de 5000 particules partant du centre de la figure, et effectuant chacune une marche aléatoire indépendamment des autres particules avec l'allure de la densité particulaire $n(r, t)$ aux différents instants



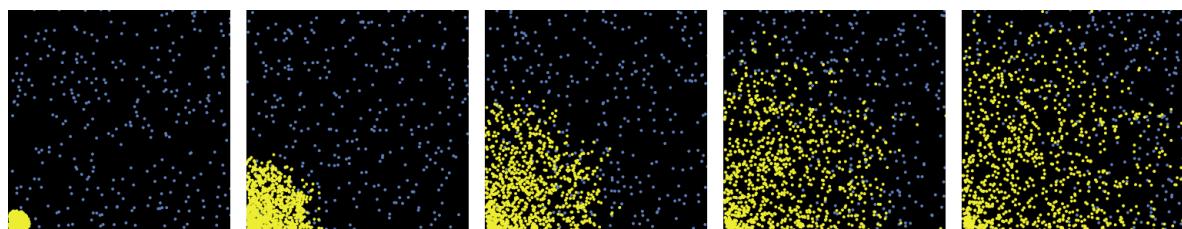
- * On constate un étalement isotrope des particules, alors même qu'individuellement le mouvement d'une seule particule ne présente pas cette isotropie. L'observation est analogue à l'expérience introductive.

b) Seconde approche : agitation thermique dans un milieu support

Si on prend en compte l'agitation thermique du fluide environnant une particule, on constate que l'on reproduit le tracé de la marche au hasard : selon les aléas des chocs, la particule change de direction et parcourt en moyenne tout l'espace.



Avec un grand nombre de particules, on observe comme précédemment un étalement, dont la vitesse moyenne de l'étalement semble ralentir progressivement ($vitesse \propto 1/\sqrt{t}$ et étalement $\propto \sqrt{t}$).



Au bout d'un certain temps, néanmoins, les « effets de bords » se font sentir et en moyenne toutes les particules vont remplir l'espace.

II. Courant de particules

II.1 Vecteur densité de courant de particules

De la même manière qu'on avait introduit un vecteur densité de courant volumique, on cherche à traduire mathématiquement le sens et la direction du mouvement de particules qui se déplacent.

On appelle alors \vec{j}_N le **vecteur densité de courant de particules**, de sorte que le nombre $\delta^2 N$ de particules traversant en dt une surface dS élémentaire orientée s'écrit :

$$\delta^2 N = \vec{j}_N \cdot d\vec{S} dt \quad (3.2)$$

Notons qu'il existe une expression simple du vecteur densité de courant de particules :

$$\vec{j}(M, t) = n(M, t) \vec{v}(M, t) \quad (3.3)$$

Pour la conduction électrique, on a $\vec{j} = \rho \vec{v}$ avec ρ la densité volumique de charges.

avec n la densité particulaire et \vec{v} la vitesse moyenne des particules contenues dans le volume mésoscopique $d\tau$ autour de M , par analogie avec la démonstration conduite dans le cadre de la conduction électrique.

II.2 Débit de particules à travers une surface

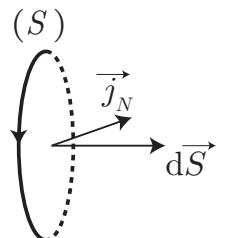
On définit le débit de particules à travers une surface (S) orientée comme le rapport entre le nombre algébrique de particules δN traversant (S) pendant dt et le temps dt :

$$\Phi_N = \frac{\delta N}{dt} \quad (3.4)$$

s'exprimant en s^{-1} .

Ce débit n'est rien d'autre que le flux du vecteur \vec{j}_N :

$$\Phi_N = \iint_{(S)} \vec{j}_N \cdot d\vec{S} \quad (3.5)$$



II.3 Loi phénoménologique de Fick

On peut exprimer le vecteur densité de courant de particules à l'aide de la densité particulaire n :

Loi phénoménologique de Fick

Dans le cas où :

- la densité particulaire $n(M, t)$ ne varie pas trop rapidement dans l'espace (distance caractéristique de variation très supérieure au libre parcours moyen) ;
- la densité particulaire ne varie pas trop rapidement dans le temps (temps caractéristique de variation en $1/\left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial t}\right)$ très supérieur au temps entre deux collisions) ;

*

le vecteur densité de courant de particules \vec{j}_N s'écrit :

$$\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}} n \quad (3.6)$$

avec D le coefficient de diffusion, en $m^2 \cdot s^{-1}$, caractéristique des particules diffusantes et du milieu support dans lequel s'effectue la diffusion.

Pour que cette loi soit valide, il faut également que la densité particulaire ne soit pas trop élevée, sinon il faut prendre en compte les interactions à courte portée entre les particules.

Quelques odg :

- dans les gaz $D \sim 10^{-6} \text{ à } 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$;
- dans les liquides $D \sim 10^{-12} \text{ à } 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$;
- dans les solides $D \sim 10^{-30} \text{ à } 10^{-16} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

On peut en donner une interprétation physique :

- le signe $-$ est intuitif, le déplacement de particules s'effectue des zones les plus concentrées vers les moins concentrées en particules, donc à l'opposé du gradient ;
- le choix du gradient s'explique aussi car \vec{j}_N est d'autant plus grand que le déséquilibre en concentration est important.

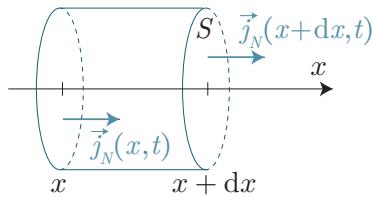
Le coefficient de diffusion augmente quand l'agitation thermique augmente, c'est-à-dire si T augmente. Dans un gaz, on peut montrer que $D \sim \frac{1}{3}v^*\rho = \frac{1}{3}\rho\sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$, et dans un solide $D \sim D_0 e^{-\frac{E_0}{k_B T}}$.

III. Bilan de particules

III.1 Bilan de particules en coordonnées cartésiennes

Exercice

Sur une géométrie cylindrique, selon une seule coordonnée x , déterminer le lien entre n et $j_N = \vec{j}_N \cdot \vec{e}_x$ en effectuant un bilan de particules sur un volume infinitésimal. On considéra qu'il y a absence de création ou disparition de particules.



Exprimons de deux façons la variation de particules $\delta^2 N$ dans ce volume élémentaire :

- **Variation temporelle** : le nombre de particules δN dans ce volume s'exprime via $\delta N(t) = n(x, t)Sdx$. Ainsi sa variation pendant dt vaut :

$$\delta^2 N = \delta N(t + dt) - \delta N(t) = (n(x, t + dt) - n(x, t))Sdx = \frac{\partial n}{\partial t}dtSdx \quad (3.7)$$

à l'ordre 1 ;

- **Échange avec l'extérieur** : Le nombre de particules $\delta N_{\text{entrant}}(x)$ entrant à l'abscisse x s'écrit à l'aide du vecteur \vec{j}_N :

$$\delta N_{\text{entrant}}(x) = \vec{j}_N(x, t) \cdot \vec{S}dt = j_N(x, t)Sdt \quad (3.8)$$

et de même en $x + dx$. Donc la variation pendant dt est :

$$\delta^2 N_{\text{ech}} = \delta N_{\text{entrant}} - \delta N_{\text{sortant}} = (j_N(x, t) - j_N(x + dx, t))Sdt = -\frac{\partial j_N}{\partial x}dxSdt \quad (3.9)$$

Pour traduire la conservation des particules, il vient simplement :

$$\delta^2 N = \delta^2 N_{\text{ech}} \iff \frac{\partial n}{\partial t}dtSdx = -\frac{\partial j_N}{\partial x}dxSdt \iff \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_N}{\partial x} = 0 \quad (3.10)$$

III.2 Bilan de particules avec un terme source

Dans le cas précédent, le volume infinitésimal ne recevait de particules que sur ses frontières en x et $x + dx$. Cependant il existe de nombreux cas où le volume reçoit des particules supplémentaires, par exemple la création de neutrons par fission radioactive, la création ou disparition par réaction chimique. On introduit alors un terme de création volumique algébrique $\alpha(M, t)$ correspondant au nombre de particules créées ($\alpha > 0$) ou détruites ($\alpha < 0$) par unité de volume et de temps au point M :

$$\delta^2 N_c = \alpha(M, t)d\tau dt \quad (3.11)$$

Cela modifie le bilan précédent :

$$\delta^2 N = \delta^2 N_{\text{ech}} + \delta^2 N_c \iff \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_N}{\partial x} = \alpha(M, t) \quad (3.12)$$

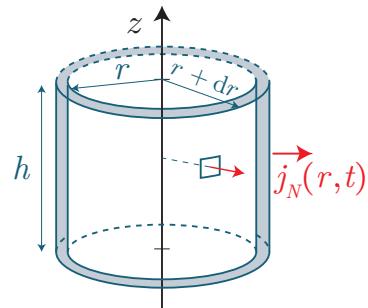
III.3 Bilan de particules en géométrie cylindrique

La démarche du calcul qui va suivre est ce qui importe, et non le résultat. Étudions le cas de particules contenues dans le sang s'écoulant dans une artère, et qui diffusent vers bords du tuyau. On néglige ici le phénomène de convection, en supposant l'écoulement suffisamment lent.

On peut calculer également explicitement la différence de volume entre les deux cylindres de rayon r et $r + dr$ et ne garder que les termes d'ordre 1 en dr .

* On considère donc un cylindre d'axe (Oz) et on emploie les coordonnées cylindriques. Du fait de l'invariance de la situation physique par rotation autour de l'axe (Oz), et en supposant le cylindre très long, n ne dépend pas de θ ni de z . D'après la loi de Fick, le vecteur densité de courant de particules est radial : $\vec{j}_N = -D \nabla n(M, t) = -D \frac{\partial n}{\partial r} \hat{e}_r = j_N \hat{e}_r$. On réalise un bilan de particules sur le système élémentaire cylindrique compris entre les rayons r et $r + dr$ (c'est l'équivalent cylindrique de la tranche d'épaisseur dx en coordonnées cartésiennes), de hauteur h , de volume :

$$d\tau = d(\pi r^2 h) = 2\pi r h dr = \text{surface}(2\pi r h) \times \text{épaisseur}(dr) \quad (3.13)$$



Écrivons à nouveau le bilan de particules sur ce volume infinitésimal :

$$\delta N(t + dt) = \delta N(t) + \vec{j}_N(r, t) \cdot \vec{S}(r, t) dt - \vec{j}_N(r + dr, t) \cdot \vec{S}(r + dr, t) dt \quad (3.14)$$

soit encore :

* $\delta N(t + dt) - \delta N(t) = j_N(r, t) 2\pi r h dt - N(r + dr, t) 2\pi(r + dr) h dt \quad (3.15)$

d'où à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial n}{\partial t} dt (2\pi r h dr) = -\frac{\partial(r j_N)}{\partial r} 2\pi r h dt dr \Leftrightarrow \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial r j_N}{\partial r} = 0 \quad (3.16)$$



Surtout ne pas développer la seconde dérivée partielle, c'est sous cette forme qu'elle sera plus pratique à manipuler.

III.4 Généralisation

À l'instar de ce qui a été fait au chapitre précédent, les équations bilan qui précèdent peuvent se généraliser à trois dimensions :

- équation locale $\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_N = \alpha$ avec α le terme de création volumique de particules ;
- équation globale : $\frac{dN}{dt} + \iint_{(S)} \vec{j}_N \cdot d\vec{S}_{\text{sortant}} = \iiint_{(\mathcal{V})} \alpha d\tau$ avec N le nombre total de particules contenu à l'instant t dans le volume (\mathcal{V}) délimité par la surface fermée (S).

IV. Équation de diffusion de particules

Note à moi-même : avoir fait la portion de cours sur le laplacien !

Nous allons maintenant pouvoir établir l'équation de diffusion de particules en prenant en compte une équation universelle – le bilan de conservation des particules – et une loi phénoménologique – la loi de Fick – qui permettent d'aboutir à une équation aux dérivées partielles pour la densité particulaire $n(M, t)$.

IV.1 Établissement de l'équation de diffusion de particules

i) Géométrie unidimensionnelle cartésienne

Partant d'une géométrie cylindrique d'axe (Ox), avec $n(M, t) = n(x, t)$ et $\vec{j}_N = j_N \vec{e}_x$, on combine l'équation locale $\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_N}{\partial x} = 0$ et la loi de Fick $\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}} n = -D \frac{\partial n}{\partial x} \vec{e}_x$, il vient :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(-D \frac{\partial n}{\partial x} \right) = 0 \iff \frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \quad (3.17)$$

ii) Géométrie cylindrique

On peut faire la même chose en coordonnées cylindriques, en reprenant la géométrie du bilan de particules :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(-r D \frac{\partial n}{\partial r} \right) = 0 \iff \frac{\partial n}{\partial t} = D \times \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial n}{\partial r} \right) \quad (3.18)$$

iii) Géométrie quelconque

Si on utilise enfin l'équation locale la plus générale avec terme source, il vient, avec la propriété $\text{div} \overrightarrow{\text{grad}} A = \Delta A$:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div} \left(-D \overrightarrow{\text{grad}} n \right) = \alpha \iff \frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n + \alpha \quad (3.19)$$

IV.2 Remarques générales

- Cette équation de diffusion est une équation aux dérivées partielles (EDP) linéaire : on peut donc appliquer le théorème de superposition.
- Cette équation n'est **pas invariante par renversement du temps**, conformément à l'irréversibilité du phénomène de diffusion. En effet, l'opération $t \rightarrow -t$ qui consiste à décrire l'écoulement du temps du futur vers le passé change l'équation :

$$\frac{\partial n}{\partial(-t)} = D \Delta n + \alpha \iff \frac{\partial n}{\partial t} = -D \Delta n - \alpha \quad (3.20)$$

Cela traduit le fait que le déplacement de particules ne peut pas changer de sens, il s'effectue toujours dans le sens opposé du gradient de concentration.

Au contraire, le principe fondamental de la dynamique peut parfois être invariant par renversement du temps car $\frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{d(-t)^2}$.

IV.3 Résolution

a) Conditions initiales et conditions aux limites

Cette équation étant une équation différentielle partielle d'ordre 1 en temps et 2 en espace, pour la résoudre il faut :

- une **condition initiale** temporelle : $n(M, t = t_0)$ connu pour tout point M du système étudié ;
- une **condition aux limites** spatiale souvent prise aux frontière, par exemple $n(M \in \text{frontière}, t)$ et / ou $\vec{j}_N(M \in \text{frontière}, t)$.

b) Résolution en ordre de grandeur

Mathématiquement, la solution de l'équation de diffusion n'est pas simple, sauf dans certains cas bien particuliers. Cependant, on peut obtenir un bon ordre de grandeur du lien entre la longueur caractéristique du phénomène de diffusion L et le temps de l'expérience τ , en réécrivant l'équation en remplaçant grossièrement les dérivées par des taux d'accroissement grossièrement évalués :

$$\frac{\partial n}{\partial \tau} \sim \frac{n}{\tau} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} \sim \frac{n}{L^2} \quad (3.21)$$

soit en réinjectant dans l'équation de diffusion :

$$\frac{\delta n}{\tau} \sim D \frac{\delta n}{L^2} \iff L \sim \sqrt{D\tau} \quad (3.22)$$

Phénomènes diffusifs

Les phénomènes diffusifs ne sont efficaces qu'aux temps courts et aux petites échelles spatiales, comme la distance caractéristique de variation de la densité augmente comme la racine carrée du temps écoulée :

$$L \sim \sqrt{Dt} \quad (3.23)$$

Si on prend l'exemple du sucre au fond d'une tasse de café (coefficients de diffusion $D \sim 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$) de taille $L \simeq 10 \text{ cm}$, la durée caractéristique de diffusion est $\tau \sim \frac{L^2}{D} \sim 2000 \text{ s}$, soit près de 40 minutes. Il est ainsi préférable d'utiliser la convection et l'usage d'une cuillère.

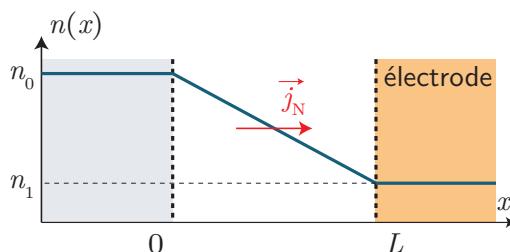
c) Régime stationnaire

Prenons un exemple tiré du fonctionnement de l'électrolyse d'une solution d'eau salée $\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$, permettant de produire du dichlore, et d'équation de réaction :



On imagine une solution concentrée en dichlore entourant une électrode inerte, et on étudie le régime stationnaire, indépendant du temps (on suppose que la réaction est suffisamment lente). On se place en géométrie unidimensionnelle de direction (Ox) dans un premier temps.

En $x = 0$, loin de l'électrode, on peut considérer en première approximation que la densité particulaire est constante et reliée à la concentration molaire de la solution c : $n(x = 0) = N_A c = n_0$ (où c est exprimée en $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3}$). Lorsque les ions Cl^- arrivent au niveau de l'électrode, ils réagissent et se transforment : on peut donc considérer qu'au niveau de l'électrode ($x = L$), la densité particulaire est constante $n(x = L) = n_1$.



En régime quasi-stationnaire (l'évolution des densités particules n_0 et n_1 est supposée lente devant le temps caractéristique de diffusion), la densité particulaire doit vérifier l'équation $\frac{d^2n}{dx^2} = 0$, c'est-à-dire que :

$$n(x) = Ax + b = \frac{n_1 - n_0}{L}x + n_0 \quad (3.25)$$

- * en utilisant les conditions aux limites. La densité particulaire varie linéairement selon la position, et le flux de particules est constant et vaut :

$$\vec{j}_N = -D \frac{dn}{dx} \vec{e}_x = D \frac{n_0 - n_1}{L} \vec{e}_x \quad (3.26)$$

orienté selon \vec{e}_x ($n_1 < n_0$).

Notons au passage que le phénomène de diffusion des réactifs à l'approche d'une électrode constitue un souci expérimental lors de la réalisation d'électrolyses : en effet si la vitesse de réaction est élevée, le phénomène de diffusion limite l'apport de réactifs, et la vitesse de réaction tend vers une valeur constante.



Exercice

En considérant une géométrie cylindrique, avec une électrode de rayon ℓ , et des conditions aux limites $n(\ell) = n_1$ et $n(d) = n_0$ ($d < \ell$) exprimer $n(r)$ en régime stationnaire.

En reprenant l'équation de diffusion en géométrie cylindrique, il vient $\frac{D}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dn}{dr} \right) = 0$. C'est-à-dire

$$r \frac{dn}{dr} = A \iff n(r) = A \ln(r) + B \quad (3.27)$$

soit en utilisant les conditions aux limites $A \ln \ell + B = n_1$ et $A \ln d + B = n_0$, $A = \frac{n_0 - n_1}{\ln \left(\frac{d}{\ell} \right)}$ et $B = n_0 - A \ln(d)$ d'où :

$$n(r) = \frac{n_0 - n_1}{\ln \left(\frac{d}{\ell} \right)} \ln \left(\frac{r}{d} \right) + n_0 \quad (3.28)$$

V. Analogies

On peut effectuer une analogie avec le transport de charges électriques, qui développe le même type de formalisme que celui de la diffusion de particules :

Diffusion de particules	Conduction électrique
$\vec{j}_N = -D \vec{\text{grad}} n$	$\vec{j} = \gamma E = -\gamma \vec{\text{grad}} V$
$\Phi_N = \iint_{(S)} \vec{j}_N \cdot d\vec{S}$	$I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$
n	V
D	γ
$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_N = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$

.	Diffusion de particules	Conduction électrique
Cause : gradient de ..	densité particulaire n	potentiel électrique V
Loi locale	$\vec{j}_N = -D \vec{\text{grad}} n$	$\vec{j} = \gamma E = -\gamma \vec{\text{grad}} V$
Débit	.. de particules $\Phi_N = \iint_{(S)} \vec{j}_N \cdot d\vec{S}$.. de charges $I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$
Conductivité	D	γ
Équation de conservation locale	$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } \vec{j}_N = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0$

Exercices

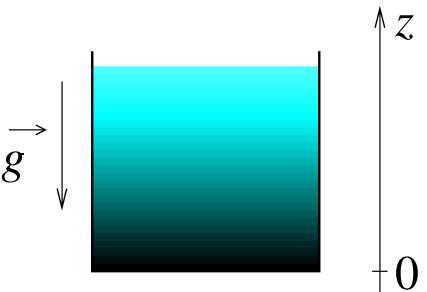
3. 1 Équilibre de sédimentation

On considère un ensemble de particules indépendantes, de rayon a , de masse m et de masse volumique μ , dispersées dans un solvant de masse volumique μ' et de viscosité η .

L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur \vec{g} (cf. schéma). On note D le coefficient de diffusion des particules dans le solvant.

Les collisions de ces particules avec les molécules du solvant sont équivalentes, en moyenne, à une force de friction $-6\pi\eta a \vec{u}$ sur chaque particule, \vec{u} étant le vecteur vitesse moyenne de la particule considérée.

On appelle $n(z)$ la densité volumique de particule.



- Montrer qu'en régime permanent, la loi de Fick se traduit par un courant de diffusion correspondant à une vitesse moyenne $\vec{u}_D = -\frac{D}{n} \frac{dn}{dz} \vec{e}_z$.
- On notera μ^* la masse volumique apparente, supposée positive, des particules. Pourquoi parle-t-on de masse volumique « apparente » (ou « effective ») ?
- Lorsque l'ensemble des particules sont à l'équilibre, donner l'expression de \vec{u}_D en fonction de η et d'autres grandeurs introduites dans l'énoncé.
- (a) Démontrer l'expression de la densité de particule $n(z)$ en fonction de sa valeur n_0 au fond du récipient et des données du problème.
(b) Calculer la variation relative de la densité de particules n entre la surface du liquide et le fond du récipient sachant que la hauteur du liquide vaut $h = 10$ cm.
- La densité de particule vérifie aussi la loi de répartition de Boltzmann : $n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{E_p^*}{k_B T}\right)$, où E_p^* est l'énergie potentielle apparente de la particule, T la température et k_B la constante de Boltzmann. En déduire la relation d'Einstein $D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a}$.

Données : $a = 5 \cdot 10^{-9}$ m ; $\eta = 10^{-3}$ SI ; $g = 9,8$ m·s⁻² ; $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J·K⁻¹.

Masse volumique effective des particules : $\mu^* = 10^2$ kg·m⁻³ ; $D = 4,3 \cdot 10^{-11}$ m²·s⁻¹.

- La loi de Fick s'écrit dans cette situation $\vec{j}_N = -D \vec{\text{grad}} n(z) = -D \frac{dn}{dz} \vec{e}_z = n(z) \vec{u}_D$, d'où le résultat.
- Chaque particule étant soumise à son poids et à la poussée d'Archimète, opposées en direction, le poids d'une particule semble être diminué lorsqu'on est entièrement plongé dans un fluide. On peut alors écrire $\vec{P} + \vec{\Pi} = \mu V \vec{g} - \mu' V \vec{g} = (\mu - \mu') V \vec{g} = \mu^* V \vec{g}$, correspondant à un poids apparent relié à une masse volumique « apparente » $\mu^* = \mu - \mu'$.
- À l'équilibre, la vitesse moyenne des particules est nulle. Cependant il ne faut pas tirer de conclusion trop rapide, $\vec{u}_D \neq \vec{0}$. En effet, en régime stationnaire, chaque particule de fluide, soumise à son poids, la poussée d'Archimète et à la force de friction, doit voir sa vitesse vérifier la LQM :

$$\vec{0} = \frac{4}{3} \pi a^3 \mu^* \vec{g} - 6\pi\eta a \vec{u} \iff \vec{u} = \frac{2a^2 \mu^*}{9\eta} \vec{g} \quad (3.29)$$

Notre sens physique nous indiquant que \vec{u}_D est orienté vers le haut et la vitesse précédente vers le bas, il faut globalement que chaque particule vérifie :

$$\vec{u}_D + \vec{u} = \vec{0} \iff \vec{u}_D = -\frac{2a^2 \mu^*}{9\eta} \vec{g} \quad (3.30)$$

- (a) On projette l'équation précédente selon l'axe (Oz) :

$$-\frac{D}{n} \frac{dn}{dz} = +\frac{2a^2 \mu^*}{9\eta} g \iff \frac{9\eta D}{2\mu^* a^2 g} \frac{dn}{dz} + n = 0 \quad (3.31)$$

Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1. On pose une distance caractéristique $H = \frac{9\eta D}{2\mu^* a^2 g} = 7,9$ m, et la solution s'écrit alors simplement

$$n(z) = n_0 e^{-z/H} \quad (3.32)$$

avec $n_0 = n(z=0)$.

(b) Avec $n(h) = n_0 e^{-h/H}$, la variation relative de densité de particules s'écrit :

$$\frac{|n(h) - n_0|}{n_0} = 1 - e^{-h/H} \underset{\substack{\uparrow \\ h/H \ll 1}}{\simeq} \frac{h}{H} = 1,3\% \quad (3.33)$$

5. On peut introduire l'énergie potentielle apparente liée à la force de pesanteur apparente : $E_p^* = m^* g z = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu^* g z$. Par identification :

$$-\frac{2\mu^* a^2 g z}{9\eta D} = -\frac{\frac{4}{3}\pi a^3 \mu^* g z}{k_B T} \iff D = \frac{k_B T}{6\pi\eta a} \quad (3.34)$$

3. 2 Oxydation d'un métal

En présence de dioxygène, un métal M se recouvre d'une couche d'oxyde métallique. On considère un mécanisme dans lequel les atomes M diffusent à travers la couche d'oxyde formée pour aller réagir avec l'oxygène de l'air. On modélise le phénomène en considérant que le métal occupe le demi-espace $x > 0$ et que la diffusion des atomes M se fait uniquement selon \vec{e}_x . L'épaisseur de la couche d'oxyde est notée $L(t)$. On note D le coefficient de diffusion du métal dans l'oxyde.

La diffusion étant le phénomène limitant, on peut considérer que la densité atomique en métal $n(x, t)$ est quasiment constante en $x = 0$ et $x = L$. On note n_0 et n_L ces deux densités.

1. Exprimer en fonction de n_0 , n_L et $L(t)$ le vecteur densité de courant \vec{j}_N des atomes M dans l'hypothèse d'un régime quasi-stationnaire.
2. L'épaisseur de la couche d'oxyde croît avec l'arrivée d'atomes M à l'interface avec le dioxygène. On note Ω le volume d'oxyde formé pour un atome de métal atteignant l'interface. Établir l'équation différentielle régissant $L(t)$ et la résoudre si $L(0) = 0$.
3. Donner en fonction de L et de D une durée caractéristique de la diffusion, puis une durée caractéristique de croissance de la couche en fonction de L , D , Ω , n_0 et n_L . En déduire un critère permettant de considérer le régime comme quasi-stationnaire.

1. Si on suppose le régime quasi-stationnaire,

$$\text{div } \vec{j}_N = 0 \iff \frac{d}{dx} \left(-D \frac{dn}{dx} \right) = 0 \iff n(x) = Ax + b \quad (3.35)$$

donc avec les conditions aux limites, $n(x) = \frac{n_L - n_0}{L}x + n_0$ puis

$$\vec{j}_N = D \frac{n_0 - n_L}{L} \vec{e}_x \quad (3.36)$$

2. Le flux du vecteur \vec{j}_N au travers d'un plan $x = \text{cste}$ nous donne le débit particulaire. Notons S la surface d'un de ses plans. Sachant qu'un atome de métal induit une augmentation du volume d'oxyde de Ω , on peut écrire la relation sur la variation du volume de la couche d'oxyde :

$$\frac{dV_{\text{oxyde}}}{dt} = S \frac{dL}{dt} = \Omega \iint_{(S)} \vec{j}_N \cdot d\vec{S} = \Omega j_{N,x} S = \Omega D \frac{n_0 - n_L}{L(t)} S \quad (3.37)$$

soit l'équation différentielle sur $L(t)$ suivante, en posant $\Delta n = n_0 - n_L$:

$$L(t) \frac{dL}{dt} = \Omega D \Delta n = \frac{1}{2} \frac{d(L^2)}{dt} \quad (3.38)$$

qui s'intègre, avec $L(0) = 0$, $L = \sqrt{2\Omega D \Delta n t}$.

3. D'après le cours, le temps caractéristique de diffusion sur une distance L s'écrit $t_{\text{diff}} = \frac{L^2}{D}$. On procède de la même façon à la détermination du temps caractéristique associé à l'équation différentielle précédente :

$$\frac{1}{2} \frac{d(L^2)}{dt} = \Omega D \Delta n \implies \frac{L^2/2}{t_{\text{croiss}}} \sim \Omega D \Delta n \iff t_{\text{croiss}} \sim \frac{L^2}{2D\Omega\Delta n} \quad (3.39)$$

Si le phénomène de diffusion n'est pas limitant, de sorte à être en régime quasi-stationnaire, il faut donc que $t_{\text{diff}} \ll t_{\text{croiss}}$, soit $2\Omega\Delta n \gg 1$.

3. 3 Diffusion du bore dans du silicium dopé

1. Dans le silicium uniformément dopé de type N , le passage du courant est essentiellement dû à un mouvement d' entraînement des électrons sous l'action d'un champ électrique appliqué \vec{E} . La vitesse moyenne d' entraînement des électrons est $\vec{v} = \mu \vec{E}$, la mobilité μ des électrons étant égale à $-0,13 \text{ m}^2 \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ à la température $T_1 = 300 \text{ K}$. On considère du silicium dopé de type N dont la résistivité ρ à 300 K est égale à $5 \cdot 10^{-3} \Omega \cdot \text{m}$. Calculer la concentration n_e des électrons.
2. On appelle D le coefficient de diffusion et $p(x, y, z, t)$ le nombre de particules qui diffusent par unité de volume à l'instant t au voisinage du point M de coordonnées (x, y, z) .
 - (a) Rappeler la loi de Fick relative à la diffusion.
 - (b) On suppose que la seule cause de variation de p est la diffusion et on traite un problème à une dimension, c'est-à-dire que l'on suppose que $p = p(x, t)$. Déterminer l'équation aux dérivées partielles régissant les évolutions de p .
3. Soit $p_1 = \int_0^y \exp(-u^2) du$ avec $y = ax/\sqrt{t}$. On donne $\int_0^\infty \exp(-u^2) du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
 - (a) Montrer que l'on peut choisir la constante positive a pour que p_1 soit une solution de l'équation de diffusion.
 - (b) On suppose $p(0, t) = p_0$ et $p(\infty, t) = 0$. Calculer les constantes A et B telles que $p(x, t) = B + A.p_1$ soit une solution de l'équation établie en 2.(b) qui satisfasse aux conditions aux limites établies ci-dessus.
4. Dans du silicium dopé de type N , de résistivité $5 \cdot 10^{-3} \Omega \cdot \text{m}$, on fait diffuser du bore, les conditions aux limites étant celles indiquées en 3.(b) avec $p_0 = 5 \cdot 10^{24} \text{ atomes/m}^3$. On désire qu'à la profondeur $x_1 = 2,7 \mu\text{m}$, p soit égale à la valeur n_e calculée en 1.. On réalise ainsi une jonction $P - N$ à la profondeur x_1 . À la température $T_2 = 1400 \text{ K}$, on constate qu'il faut une durée $t_1 = 2 \text{ h}$ pour que l'opération soit réalisée. Calculer la valeur du coefficient de diffusion D du bore dans le silicium à la température T_2 (on effectuera une résolution numérique).

1. Il suffit d'écrire le vecteur densité volumique de courant de charge :

$$\vec{j} = n_e(-e)\vec{v} = -n_e e \mu \vec{E} = \gamma \vec{E} = \frac{1}{\rho} \vec{E} \quad (3.40)$$

c'est-à-dire $n_e = -\frac{1}{e\mu\rho} = 9,6 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$.

2. (a) Il s'agit de $\vec{j}_N = -D \vec{\text{grad}} p(x, t) = -D \frac{\partial p}{\partial x} \vec{e}_x$ ici.
- (b) Cf cours, on aboutit à $\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$.
- (a) On veut vérifier que p_1 est bien solution de l'équation aux dérivées partielles que l'on vient d'écrire. Dérivons temporellement :

$$\frac{\partial p_1}{\partial t} = \frac{\partial p_1}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} = e^{-y^2} \frac{\partial y}{\partial t} = e^{-y^2} \left(-\frac{ax}{2t^{3/2}} \right) \quad (3.41)$$

et spatialement deux fois :

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = e^{-y^2} \frac{\partial y}{\partial x} = e^{-y^2} \frac{a}{\sqrt{t}} \implies \frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = -2y \frac{\partial y}{\partial x} e^{-y^2} \frac{a}{\sqrt{t}} = -\frac{2xa^3}{t^{3/2}} e^{-y^2} \quad (3.42)$$

On injecte alors dans l'équation différentielle :

$$e^{-y^2} \left(-\frac{ax}{2t^{3/2}} \right) = -D \frac{2xa^3}{t^{3/2}} e^{-y^2} \quad (3.43)$$

et la simplification conduit à $a = \pm \frac{1}{2\sqrt{D}}$, mais on peut bien choisir une constante positive. Pour la suite, $a = +\frac{1}{2\sqrt{D}}$.

- (b) La forme proposée vérifie bien l'équation différentielle, il faut juste s'assurer qu'elle vérifie les conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} p(0, t) = p_0 = B + A \times 0 \implies B = p_0 \\ p(\infty, t) = 0 = B + A \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \implies A = -\frac{2p_0}{\sqrt{\pi}} \end{array} \right. \quad (3.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} p(0, t) = p_0 = B + A \times 0 \implies B = p_0 \\ p(\infty, t) = 0 = B + A \times \frac{\sqrt{\pi}}{2} \implies A = -\frac{2p_0}{\sqrt{\pi}} \end{array} \right. \quad (3.45)$$

4. On cherche alors à résoudre l'équation suivante :

$$n_e = p_0 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{ax_1/\sqrt{t_1}} e^{-u^2} du \right) \iff \int_0^{ax_1/\sqrt{t_1}} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(1 - \frac{n_e}{p_0} \right) \quad (3.46)$$

La résolution numérique conduit à $a = 6,95 \cdot 10^7$ SI, soit $D = 5,2 \cdot 10^{-17}$ m²·s⁻¹, cohérent avec la littérature (on peut se référer à www.abcelectronique.com/annuaire/cours/cache/1228/diffusion-des-impuretes-dans-le-silicium.pdf, page 5).

3. 4 Réacteur nucléaire

Le fonctionnement du cœur d'un réacteur nucléaire limité par deux plans d'abscisse $x = \pm \frac{a}{2}$ et de section S est modélisé à 1D par :

- une production volumique par unité de temps σ de neutrons provenant des réactions de fission, avec $\sigma = \frac{n(x, t)}{\tau}$ où $n(x, t)$ est la densité volumique de neutrons ;
- une zone de piégeage appelée couverture : pour $x \geq \frac{a}{2}$ ou $x \leq -\frac{a}{2}$, on a $n = 0$.

La diffusion dans le cœur obéit à la loi de Fick avec un coefficient de diffusion D .

1. Établir l'équation vérifiée par $n(x, t)$. Quelle est la signification de τ ? Quelle serait l'évolution temporelle de n à x fixé sans le phénomène de diffusion? Commenter.
2. Déterminer $n(x)$ en régime permanent, en supposant que n ne s'annule pas pour $-a/2 < x < a/2$. En déduire qu'il existe une condition liant τ à D et a . Que se passe-t-il si τ est inférieur à la valeur requise? Exprimer $n(x)$ en fonction de a , S et N_0 , le nombre total de neutrons dans le réacteur. Quelle est la densité maximale des neutrons?
3. Déterminer le flux de neutrons vers les zones de couverture. Comparer le flux total sortant à la production totale de neutrons.
4. Lors d'un arrêt d'urgence, des barres de piégeage plongent dans le cœur du réacteur. Le taux de production volumique global des neutrons peut alors être négatif (si le piégeage l'emporte sur la fission) : $\sigma = \frac{n(x, t)}{\tau'}$ avec τ' algébrique.

Rechercher la solution de l'équation de diffusion sous la forme $n(x, t) = f(x)g(t)$. On suppose que le régime permanent était atteint à l'instant $t = 0$. En déduire le type de régime obtenu selon la valeur de τ' .

1. Un rapide bilan de particules sur une tranche de largeur dx et section S conduit à l'équation :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial j_{N,x}}{\partial t} = \sigma = \frac{n(x, t)}{\tau} \quad (3.47)$$

τ est ici un temps caractéristique de création de particule : en effet, en l'absence de phénomènes de diffusion, on aboutit à une équation différentielle d'ordre 1 de temps caractéristique τ , où $n(x, t) = n_0 e^{+t/\tau}$ (ce qui impose une divergence...). Cela montre le rôle de la diffusion, qui régule la création de particules de sorte à avoir un nombre de neutrons stable au cours du temps.

2. En régime permanent, en considérant que $j_{N,x}(x, t) = -D \frac{dn}{dx}$, on doit résoudre l'équation

$$\frac{d^2 n}{dx^2} + \frac{1}{\tau D} n(x) = 0 \quad (3.48)$$

de solution $n(x, t) = A \cos(kx + \varphi)$ où l'on pose $k = \sqrt{\frac{1}{\tau D}}$. Avec les conditions aux limites en $\pm a/2$, on a, avec $A \neq 0$:

$$\begin{cases} \cos\left(-\frac{ka}{2} + \varphi\right) = 0 \implies -\frac{ka}{2} + \varphi = p_1\pi + \frac{\pi}{2}, & p_1 \in \mathbb{Z} \\ \cos\left(\frac{ka}{2} + \varphi\right) = 0 \implies \frac{ka}{2} + \varphi = p_2\pi + \frac{\pi}{2}, & p_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.49)$$

$$\begin{cases} \cos\left(-\frac{ka}{2} + \varphi\right) = 0 \implies -\frac{ka}{2} + \varphi = p_1\pi + \frac{\pi}{2}, & p_1 \in \mathbb{Z} \\ \cos\left(\frac{ka}{2} + \varphi\right) = 0 \implies \frac{ka}{2} + \varphi = p_2\pi + \frac{\pi}{2}, & p_2 \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (3.50)$$

$$(3.51)$$

qui se réécrit, en tenant compte que $ka > 0$:

$$\begin{cases} \varphi = (p_1 + p_2 + 1)\pi, & (p_1 + p_2) \in \mathbb{Z} \\ ka = (p_2 - p_1)\pi, & (p_2 - p_1) \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (3.52)$$

$$(3.53)$$

On peut choisir $\varphi = 0$ (cela ne changerait que le signe de A ensuite), et $ka = \pi$ est la seule valeur possible pour avoir $n(x) > 0$ hormis aux extrémités. Alors :

$$n(x) = A \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (3.54)$$

et $\frac{\pi}{a} = \sqrt{\frac{1}{\tau D}} \iff \tau = \frac{a^2}{\pi^2 D}$.

Si $\tau < \frac{a^2}{\pi^2 D}$, on ne peut pas être en régime stationnaire avec $n(x) \neq 0$: il y a donc un régime transitoire dont on ne connaît pas la stabilité, cela peut diverger comme converger.

Connaissant le nombre total N_0 de neutrons dans le réacteur, on peut déterminer la constante A :

$$N_0 = \iiint_{(\mathcal{V})} n(x, t) d\tau = SA \int_{-a/2}^{a/2} n(x) dx = SA \frac{a}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \right]_{-a/2}^{a/2} = \frac{2aAS}{\pi} \quad (3.55)$$

d'où :

$$n(x) = \frac{\pi N_0}{2aS} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (3.56)$$

La densité maximale des neutrons est en $x = 0$ et vaut $n_{\max} = \frac{\pi N_0}{2aS}$.

3. Pour calculer le flux de neutrons, calculons déjà le vecteur densité volumique de particules :

$$\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\text{grad}} n(x) = -D \frac{dn}{dx} \vec{e}_x = +\frac{\pi^2 N_0 D}{2a^2 S} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \quad (3.57)$$

Le flux de neutrons **soutant** en $x = a/2$ vaut alors :

$$\Phi_N(a/2) = \iint_{(S)} \vec{j}_N \cdot d\vec{S} = \vec{j}_N(a/2) \cdot S \vec{e}_x = \frac{\pi^2 N_0 D}{2a^2 S} S = \frac{\pi^2 N_0 D}{2a^2 S} \quad (3.58)$$

et on trouve le même résultat en $x = -a/2$ (vecteur surface selon $-\vec{e}_x$!). Le flux total soutant vaut alors :

$$\Phi_{N,\text{soutant}} = \Phi_N(a/2) + \Phi_N(-a/2) = \frac{\pi^2 N_0 D}{a^2 S} \quad (3.59)$$

Sans faire de calcul, il est évident qu'avec un nombre total de neutrons constant, le flux total soutant est égal à la production totale de neutrons dans le réacteur. On peut le vérifier en calculant $\iiint_{(\mathcal{V})} \sigma d\tau$.

4. L'équation de diffusion se réécrit :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau'} n(x, t) \quad (3.60)$$

En injectant la forme de solution proposée (type "onde stationnaire" rencontrée en première année), on a alors :

$$f(x)g'(t) = Df''(x)g(t) + \frac{1}{\tau'} f(x)g(t) \quad (3.61)$$

soit en divisant par $Dg(t)$, supposé non nul, et en réorganisant les termes :

$$f''(x) + \frac{1}{D} \left(\frac{1}{\tau'} - \frac{g'(t)}{g(t)} \right) f(x) = 0 \quad (3.62)$$

Or à $t = 0$, le régime permanent était atteint, ce qui impose :

$$\frac{1}{\tau'} - \frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{1}{\tau_{\text{perm}}} = \frac{D\pi^2}{a^2} \iff g'(t) + \left(\frac{D\pi^2}{a^2} - \frac{1}{\tau'} \right) g(t) = 0 \quad (3.63)$$

Cette dernière équation différentielle est stable à condition que tous les coefficients de l'équation soient du même signe, c'est-à-dire $\left(\frac{D\pi^2}{a^2} - \frac{1}{\tau'} \right) > 0$. On distingue alors plusieurs cas :

- soit $\tau' < 0$, auquel cas $g(t) \rightarrow 0$ (logique, le piégeage l'emporte sur la fission, donc au bout d'un certain temps il n'y a plus de neutrons) ;
- soit $\tau' > 0$, auquel cas il faut que $\tau' > \frac{D\pi^2}{a^2}$, et $g(t) \rightarrow 0$ également ;
- soit $\tau' = \frac{D\pi^2}{a^2}$, on a alors $g'(t) = 0$, donc $g(t) = \text{cste}$ et on reste en régime permanent (logique) ;

Sinon, si $0 < \tau' < \frac{D\pi^2}{a^2}$, $g(t)$ diverge, ce qui précise un peu plus la question 2. !

3. 5 Bulle de champagne

d'après Centrale PC 2005

Une bulle de champagne unique, sphérique de centre O fixe et de rayon $a(t)$ contient $N_g(t)$ molécules de CO₂ assimilé à un gaz parfait. On note $C_g(t)$ la densité particulaire supposée uniforme de molécules de dioxyde de carbone dans la bulle. Le champagne occupe le reste de l'espace et on y note $C(r, t)$ la densité particulaire de molécules de dioxyde de carbone. On néglige la pesanteur, et la pression p est supposée uniforme.

L'équilibre chimique entre une bulle de champagne et la solution qui l'entoure dans une bouteille fermée où la pression est $P = P_i$ impose la relation $C = \chi P_i / k_B T$, χ ne dépend que de la température (supposée constante) et k_B est la constante de Boltzmann. Lorsqu'on ouvre la bouteille, la pression chute brutalement jusqu'à la pression atmosphérique $P = P_e$. La condition d'équilibre chimique n'est plus assurée qu'à l'interface entre la bulle et la solution : $C(r = a, t) = \chi P_e / k_B T$. Ainsi, $C(r, t)$ n'est plus uniforme et le dioxyde de carbone diffuse dans la solution.

On note $\vec{j} = j(r, t)\vec{e}_r$ le vecteur densité de flux de particules. Il satisfait à la loi de Fick avec le coefficient de diffusion D .

- Soit une coquille sphérique de champagne de centre O comprise entre les rayons r et $r + dr$. Exprimer le nombre $\delta^2 N_e$ de molécules de dioxyde de carbone qui entrent dans cet élément de volume entre t et $t + dt$.
- On se place en régime stationnaire. Montrer que la concentration $C(r)$ se met sous la forme $\alpha + \frac{\beta}{r}$.
- Bien que le régime ne soit pas stationnaire, on utilise la relation précédente. Exprimer α et β en fonction de $a(t)$, χ , P_i , P_e , k_B et T .
- En déduire la variation $\frac{dN_g}{dt}$ du nombre de molécules de CO₂ dans la bulle en fonction de D , $a(t)$, χ , p_e , p_i , k_B et T .
- Montrer que $a(t)$ est solution d'une équation différentielle du type $a(t)\frac{da}{dt} = K$, où K est une constante que l'on exprimera. Vérifier son homogénéité. En déduire l'expression de $a(t)$.
- Lors de la croissance d'une bulle à la surface d'un verre pour $P_e = 1$ bar et $P_i = 3$ bar, le rayon croît de $a_0 \simeq 10^{-6}$ m à $a_1 \simeq 10^{-5}$ m. Vérifier que dans ces conditions on a $K \simeq 4 \cdot 10^{-9}$ SI sachant que $D \simeq 3 \cdot 10^{-9}$ SI et $\chi \simeq 0,7$ SI. Évaluer la durée τ de cette phase.

- Effectuons un bilan de particules sur cette coquille sphérique :

$$\delta^2 N_e = \delta N_{\text{entrant}}(r) - \delta N_{\text{sortant}}(r + dr) = (\vec{j} \cdot \vec{S} dt)_r - (\vec{j} \cdot \vec{S} dt)_{r+dr} \quad (3.64)$$

$$= (j(r, t) \times 4\pi r^2 dt) - (j(r + dr, t) 4\pi (r + dr)^2 dt) = -4\pi \frac{\partial r^2 j(r, t)}{\partial r} dr dt \quad (3.65)$$

- En régime stationnaire, $\delta^2 N_e = 0$, donc $r^2 j(r) = A = -r^2 D \frac{dC}{dr}$, soit encore :

$$\frac{dC}{dr} = -\frac{A}{Dr^2} \implies C(r) = \alpha + \frac{\beta}{r} \quad (3.66)$$

- On utilise la condition aux limites en $r = a(t)$ et pour $r \rightarrow +\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{\chi P_e}{k_B T} = C(r \rightarrow +\infty) = \alpha \\ \frac{\chi P_e}{k_B T} = \alpha + \frac{\beta}{a(t)} \end{array} \right. \implies \beta = \frac{\chi(P_e - P_i)}{k_B T} a(t) \quad (3.67)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C = \frac{\chi P_e}{k_B T} = C(r \rightarrow +\infty) = \alpha \\ \frac{\chi P_e}{k_B T} = \alpha + \frac{\beta}{a(t)} \end{array} \right. \implies \beta = \frac{\chi(P_e - P_i)}{k_B T} a(t) \quad (3.68)$$

4. La variation du nombre de molécules est reliée au flux sortant de particules en $r = a$:

$$\frac{dN_g}{dt} = -\Phi(r = a) = +D \frac{\partial C}{\partial r}(r = a(t)) \times 4\pi a^2 = -D \frac{\beta}{a^2} \times 4\pi a^2 = -4\pi D \frac{\chi(P_e - P_i)}{k_B T} a(t) \quad (3.69)$$

5. Le nombre de molécules N_g s'exprime en considérant que le gaz contenu dans la bulle est parfait :

$$PV = nRT = N_g k_B T \iff N_g = \frac{P_e \frac{4}{3} \pi a^3}{k_B T} \quad (3.70)$$

donc

$$\frac{dN_g}{dt} = \frac{4\pi P_e}{k_B T} a^2 \frac{da}{dt} \quad (3.71)$$

d'où en injectant dans l'équation précédente et en simplifiant :

$$a \frac{da}{dt} = D\chi \left(\frac{P_i}{P_e} - 1 \right) = K \quad (3.72)$$

bien homogène car $\left[a \frac{da}{dt} \right] = [D] = L^2 \cdot T^{-1}$ et $[\chi] = \left[\frac{P_i}{P_e} - 1 \right] = 1$.

6. La résolution est rendue possible en écrivant $a \frac{da}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d(a^2)}{dt}$:

$$\frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} a_0^2 = Kt \iff a(t) = \sqrt{a_0^2 + 2Kt} \quad (3.73)$$

Dans ces conditions, $K = 4,2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Enfin, la durée de cette phase vaut :

$$\tau = \frac{a_1^2 - a_0^2}{2K} = 12 \text{ ms} \quad (3.74)$$

3. 6 Résolution de problème : taille critique d'une bactérie

Pour vivre, une bactérie aérobie a besoin de consommer le dioxygène dissous dans l'eau au voisinage de sa surface.

On admet que la consommation en oxygène d'une bactérie est proportionnelle à sa masse et on introduit \mathcal{A} la consommation de dioxygène par unité de masse et de temps, mesuré en $\text{mol} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$.

Montrer que la bactérie ne peut dépasser une certaine taille critique.

Données : $\mathcal{A} = 0,02 \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$; concentration molaire de dioxygène dans l'eau $c_0 = 2 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$; coefficient de diffusion du dioxygène dans l'eau : $D = 2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

On va modéliser la bactérie comme une sphère de rayon a , de masse volumique μ proche de celle de l'eau. Cette dernière consomme une quantité de dioxygène dont on peut calculer le flux particulaire entrant :

$$\Phi(a) = \mathcal{A} \times V_{\text{bactérie}} \times \mathcal{N}_A = \frac{4}{3} \pi a^3 \mu \mathcal{A} \mathcal{N}_A \quad (3.75)$$

L'idée est de se servir de ce débit, et de déterminer à quelle condition sur le rayon le phénomène de diffusion n'empêche pas la bactérie de respirer, c'est-à-dire que la densité particulaire de dioxygène à sa surface n'est jamais nulle malgré ce débit.

Pour cela, modélisons l'eau comme un fluide à l'équilibre, où l'on cherche à déterminer la densité particulaire en dioxygène $n(O_2)$. Par le même raisonnement qu'à l'exercice 3.5, en supposant être en régime stationnaire, on peut montrer qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$n(O_2)(r) = \alpha + \frac{\beta}{r} \quad (3.76)$$

où $\alpha = n(O_2)(r \rightarrow \infty) = \mathcal{N}_A c_0$, et la constante β se détermine via $\Phi(a)$:

$$\Phi(a) = - \iint_{(S)} \vec{j}_N \cdot d\vec{S} = -(-D \frac{\partial n(O_2)}{\partial r} \vec{e}_r)(r = a) \cdot 4\pi a^2 \vec{e}_r = -D 4\pi a^2 \frac{\beta}{a^2} \iff \beta = -\frac{\Phi(a)}{4\pi D} \quad (3.77)$$

En regroupant les morceaux, il vient finalement :

$$n(O_2)(r) = \mathcal{N}_A c_0 - \frac{\mathcal{A} a^3 \mu \mathcal{N}_A}{3 D r} \quad (3.78)$$

et la condition que $n(a) > 0$ conduit à $a < \sqrt{\frac{3 D c_0}{\mathcal{A} \mu \mathcal{N}_A}} = 8 \mu\text{m}$.

Notons que la bactérie E. Coli mesure approximativement $1 \mu\text{m}$, ce qui laisse à penser que les ordres de grandeur développés ici sont cohérents.

Diffusion thermique

Sommaire

4.1 Différents modes de transferts thermiques	3
4.1.1 Introduction expérimentale	3
4.1.2 Le rayonnement	3
4.1.3 La convection	3
4.1.4 La conduction ou diffusion thermique	4
4.2 Équilibre thermodynamique local	4
4.2.1 Un premier exemple	4
4.2.2 Énoncé	4
4.3 Description de la conduction thermique	5
4.3.1 Vecteur densité de courant thermique	5
4.3.2 Flux thermique à travers une surface	5
4.3.3 Loi phénoménologique de Fourier	5
4.4 Établissement de l'équation de la chaleur	6
4.4.1 Bilan d'énergie à 1D	6
4.4.2 Cas général	7
4.4.3 Équation de la diffusion thermique (ou équation de la chaleur)	7
4.4.4 Analogies	7
4.5 Conditions aux limites	8
4.5.1 Continuité des flux thermiques	8
4.5.2 Paroi calorifugée	8
4.5.3 Contact parfait	8
4.5.4 Transfert conducto-convectif	8
4.6 Étude en régime stationnaire	9
4.6.1 Exemple unidimensionnel	9
4.6.2 Notion de résistance thermique	9
4.6.3 ARQS thermique	11
4.6.4 Autres calculs de résistances thermiques	13
4.7 Étude en régime forcé	13
4.7.1 Modélisation	14
4.7.2 Résolution de l'équation de diffusion	14
4.7.3 Effet de peau thermique	15

Questions de cours :

- Présenter la notion d'équilibre thermodynamique local et sa conséquence.
- Vecteur densité de courant thermique, flux thermique, loi de Fourier : énoncé, interprétation physique, odg des conductivités (air, eau, béton, acier, cuivre).
- Établir l'équation de la diffusion thermique à une dimension. Interpréter physiquement.
- Présenter les différents types de conditions aux limites (interface entre deux milieux, paroi calorifugée, contact parfait, transfert conducto-convectif).
- Régime stationnaire de diffusion thermique : calcul du champ de température et du flux thermique (cartésien selon \vec{e}_x , cylindrique ou sphérique selon \vec{e}_r , au choix du khôleur).
- Notion de résistance thermique : définition, associations, condition d'utilisation, calcul en géométrie cartésienne à 1D.
- Modélisation thermique d'une pièce avec un chauffage électrique : équation différentielle sur T , circuit électrique équivalent, interprétation.
- Onde thermique : résolution, relation de dispersion et épaisseur de peau, effet de peau.

Capacités exigibles du BO :

- Citer les trois modes de transfert thermique.
- Expliquer que la diffusion est un déplacement d'énergie de proche en proche dans la matière macroscopiquement immobile.
- Exprimer le flux thermique comme le flux du vecteur \vec{j}_Q à travers une surface orientée.
- Utiliser les champs scalaires intensifs (volumiques ou massiques) associés à des grandeurs extensives de la thermodynamique.
- Énoncer et utiliser la loi de Fourier. Citer quelques ordres de grandeur de conductivité thermique dans les conditions usuelles : air, eau, béton, acier.
- Pour un milieu évoluant à volume constant, établir l'équation locale traduisant le premier principe dans le cas d'un problème ne dépendant qu'une d'une seule coordonnée d'espace en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
- Admettre et utiliser une généralisation en géométrie quelconque en utilisant l'opérateur divergence et son expression fournie.
- Établir l'équation de diffusion vérifiée par la température, avec ou sans terme source.
- Analyser une équation de diffusion en ordre de grandeur pour relier des échelles caractéristiques spatiale et temporelle.
- Relier l'équation de diffusion à l'irréversibilité temporelle du phénomène.
- Exploiter la linéarité de l'équation de diffusion.
- Manipuler le terme source local et intégral de l'effet Joule.
- Exploiter la continuité du flux thermique.
- Exploiter la continuité de la température pour un contact thermique parfait.
- Utiliser la relation de Newton (fournie) à l'interface solide-fluide.
- Traduire le contact avec une paroi calorifugée.
- Définir la notion de résistance thermique par analogie avec l'électrocinétique. Énoncer les conditions d'application de l'analogie.
- Établir l'expression de la résistance thermique d'un cylindre calorifugé latéralement.
- Exploiter des associations de résistances thermiques en série ou en parallèle.
- Mettre en évidence un temps caractéristique d'évolution de la température. Justifier l'ARQS.
- Établir l'analogie avec un circuit électrique RC.
- Établir la relation de dispersion des ondes thermiques en géométrie unidirectionnelle. Mettre en évidence le déphasage lié à la propagation.
- Établir une distance caractéristique d'atténuation.

I. Différents modes de transferts thermiques

I.1 Introduction expérimentale

Le premier principe $\Delta E = W + Q$ fait intervenir deux formes de transfert d'énergie : ce qui n'est pas clairement identifiable à un travail (W) est appelé transfert thermique (Q). En réalité le transfert thermique est une somme de travaux liés à des déplacements microscopiques, qu'on ne peut connaître en détail et donc calculer.



Manipulation

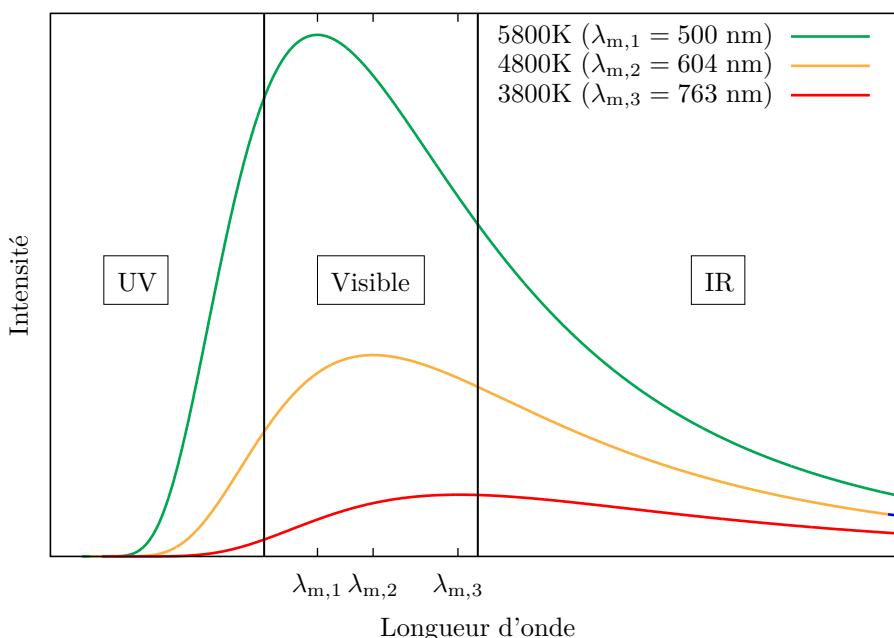
Présenter

- une manip de convection type <https://www.youtube.com/watch?v=fqnkhC6jC7M>;
- une observation à la caméra thermique ;
- vidéo de la manip type Ingen Housz : 4 tiges métalliques différentes plongées dans un bain thermostaté et caméra thermique ? (à voir si envisageable).

I.2 Le rayonnement

Un corps chaud émet un rayonnement électromagnétique (qui n'a donc pas besoin de milieu matériel pour se propager), d'après la théorie du corps noir.

- La puissance totale émise est liée à la surface S du corps et à sa température de surface T par la loi de Stefan-Boltzmann $P = \sigma ST^4$ avec σ une constante ;
- la longueur d'onde d'émission maximale est donnée par la loi de Wien : $\lambda_{\max} = \frac{2,9 \cdot 10^{-3}}{T}$ avec λ_{\max} en mètre et T en kelvin, comme illustré ci-dessous avec des spectres d'émission de corps noirs à différentes températures.



Ainsi pour le Soleil, la température de surface de 5800 K conduit à une longueur d'onde maximale dans le visible, autour de 500 nm (vert), tandis qu'un corps à température ambiante rayonne dans l'infra-rouge ($\lambda_{\max} \sim 1 \mu\text{m}$).

Notons qu'un corps peut aussi être chauffé en recevant un rayonnement électromagnétique (cf. http://www.hk-phy.org/energy/domestic/heat_phy/flash/heat_transfer3.swf).

I.3 La convection

Il s'agit d'un mouvement d'ensemble de la matière, qui emporte avec elle son énergie interne. Elle a lieu uniquement au sein d'un fluide. On distingue :

- la convection naturelle liée à un gradient de température, dont le moteur est la poussée d'Archimède (la densité du fluide a tendance à diminuer avec la température). Par exemple l'échauffement de l'air au niveau d'un radiateur va provoquer sa montée, l'air froid descendant et se faisant chauffer à son tour ;
- la convection forcée lorsqu'on provoque le déplacement du fluide. C'est par exemple le cas avec les ventilateurs : le renouvellement forcé de la couche d'air au-dessus d'un processeur d'ordinateur permet d'améliorer le transfert thermique du solide vers le gaz.

1.4 La conduction ou diffusion thermique

L'expérience de chauffage des extrémités de tiges métalliques de natures différentes montre d'une part qu'il y a un flux d'énergie des températures élevées vers les températures basses, tendant à uniformiser la température, le tout **sans déplacement macroscopique de matière**. D'autre part on constate que le temps d'uniformisation, souvent assez long (échelle de la minute voire plus) est différent selon le matériau, ce que l'on va tenter de quantifier par la suite.

D'un point de vue microscopique, ce phénomène s'explique par l'agitation thermique des atomes, qui se transmet de proche en proche du fait des collisions.

II. Équilibre thermodynamique local

II.1 Un premier exemple

Prenons l'exemple de deux systèmes : Σ_1 , un corps froid à $T_0 < T_{\text{amb}}$ laissé au contact de Σ_2 , l'air d'une pièce à température ambiante T_{amb} . Σ_1 va recevoir un transfert thermique jusqu'à atteindre un état et une température d'équilibre (celle de la pièce si on suppose que cette dernière joue le rôle de thermostat).

Cependant tous les états intermédiaires du système Σ_1 sont des états hors d'équilibre, ce qui n'est pas le cadre de la thermodynamique rencontrée en première année (où l'on applique les deux principes entre deux états d'équilibre ce qui permet de prédire par exemple que la variation d'énergie de Σ_1 sera $\Delta E = mc(T_{\text{amb}} - T_0)$). Une difficulté apparaît alors : comment définir, hors des états d'équilibre, certaines grandeurs comme la température ou l'entropie ?

Pour pouvoir appliquer les outils de la thermodynamique, il faut pouvoir réaliser l'approximation qu'à chaque instant le système Σ_1 est « quasiment » à l'équilibre. Cela va dépendre de deux temps mis en jeu ici :

- le temps caractéristique d'évolution τ_{ev} , de l'ordre de 10 minutes ;
- si on considère Σ_1 (ou Σ_2) seul, isolé dans un calorimètre, le temps caractéristique pour atteindre l'équilibre τ_{eq} est de l'ordre de la dizaine de secondes (on peut imaginer apporter quasi-instantanément une certaine quantité d'énergie ΔE et évaluer au bout de combien de temps le système est à l'équilibre thermodynamique).

Dans ces conditions, $\tau_{\text{ev}} \gg \tau_{\text{eq}}$, on peut alors considérer qu'à tout instant t , le système se trouve quasiment à l'équilibre avec une énergie $E_1(t)$, la température $T_1(t)$ étant alors la même que celle qu'aurait Σ_1 dans le véritable état d'équilibre thermodynamique d'énergie invariable $E_1 = E_1(t)$: on parle d'équilibre thermodynamique local pour Σ_1 .

II.2 Énoncé

Équilibre thermodynamique local

Dans un système Σ globalement hors d'équilibre, l'**équilibre thermodynamique local** est réalisé dans tous les systèmes de Σ à condition que l'on puisse distinguer deux échelles de temps nettement séparées en ordre de grandeur :

$$\tau_{\text{ev}} \gg \tau_{\text{eq}} \quad (4.1)$$

τ_{ev} étant le temps caractéristique d'évolution du système complet et τ_{eq} le temps caractéristique de retour à l'équilibre des différents sous-systèmes « découpés » dans le système complet et pris isolément. Dans ce cas, les différents sous-systèmes sont proches de l'équilibre thermodynamique.

Ce mode de transfert existe toujours dans les fluides dès qu'il y a un gradient de température, mais il est souvent masqué par la convection.

* Soit par exemple un mur séparant l'intérieur d'une maison chauffée et l'extérieur. Il est parcouru constamment par un flux d'énergie depuis l'intérieur vers l'extérieur, plus froid. On peut découper ce mur en un grand nombre de sous-systèmes de volumes infinitésimaux (typiquement mésoscopiques), de sorte à pouvoir vérifier la condition précédente sur chaque sous-système. On peut alors parler de température en chaque point du système à un instant donné : $T(M, t)$ sera la température moyenne du volume mésoscopique, $u(M, t)$ l'énergie interne massique de ce même volume, etc.

III. Description de la conduction thermique

III.1 Vecteur densité de courant thermique

Par analogie avec la définition du vecteur densité de courant électrique volumique ou du vecteur densité de courant de particules, on définit le vecteur **densité de courant thermique** \vec{j}_Q comme le vecteur tel que le transfert thermique $\delta^2 Q$ traversant en dt une surface $d\vec{S}$ élémentaire orientée s'écrit :

$$\delta^2 Q = \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} dt \quad (4.2)$$

avec \vec{j}_Q exprimé en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$.

III.2 Flux thermique à travers une surface

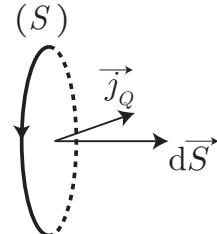
On définit le flux thermique (ou courant thermique) à travers une surface (S) orientée comme le rapport entre l'énergie δQ traversant (S) pendant dt et le temps dt :

$$\Phi = \frac{\delta Q}{dt} \quad (4.3)$$

s'exprimant en W .

* Ce débit n'est rien d'autre que le flux du vecteur \vec{j}_Q :

$$\Phi = \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} \quad (4.4)$$



III.3 Loi phénoménologique de Fourier

On peut exprimer le vecteur densité de courant thermique à l'aide d'une loi semblable à la loi de Fick relative au flux de particules :

Loi phénoménologique de Fourier

Dans le cas où :

- les variations spatiales de température, caractérisées par $\overrightarrow{\text{grad}} T(M, t)$ ne sont pas trop intenses ;
- la température ne varie pas trop rapidement dans le temps ;

le vecteur densité de courant thermique \vec{j}_Q s'écrit :

*

$$\vec{j}_N = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \quad (4.5)$$

avec λ la conductivité thermique, en $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, caractéristique du matériau.

Ordres de grandeur à connaître à 25°C :

$$\lambda(\text{air}) = 2,6 \cdot 10^{-2} \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}, \quad \lambda(\text{eau}) = 0,60 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}, \quad \lambda(\text{béton}) = 0,92 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}, \quad \lambda(\text{acier}) = 16 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \text{ et } \lambda(\text{cuivre}) = 4,0 \cdot 10^2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}.$$

* Le signe $-$ s'interprète via l'expérience : le transfert thermique spontané a lieu des zones chaudes vers les zones froides, donc à l'opposé du gradient de température.

Notons que la conductivité thermique varie dans une gamme moins importante que la conductivité électrique : près de 20 ordres de grandeur entre les isolants et les conducteurs électriques, contre 4 entre isolants et conducteurs thermiques (polystyrène expansé : $3,9 \cdot 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ - argent $418 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).

La conductivité thermique des gaz augmente avec la température, mais diminue pour les liquides et solides. Remarquons également que les très bonnes conductivités électrique et thermique sont corrélées : ce sont les électrons libres qui en sont responsables.

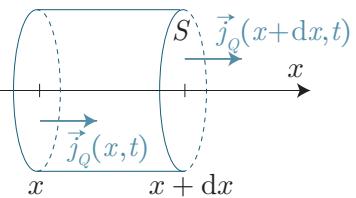
IV. Établissement de l'équation de la chaleur

IV.1 Bilan d'énergie à 1D

Démonstration



* Considérons un solide indéformable et immobile, homogène, de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ . Ce dernier, calorifugé latéralement, est soumis à des transferts thermiques uniquement selon l'axe (Ox), c'est-à-dire $\vec{j}_Q(x) = j_Q(x)\vec{e}_x$. On suppose le système hors d'équilibre, mais il est possible de considérer un équilibre thermodynamique local en le découplant en tranches de longueur dx .



Appliquons le premier principe à une tranche comprise entre les abscisses x et $x + dx$ entre les instants t et $t + dt$:

$$d^2U + d^2E_c^0 = d^2W^0 + d^2Q \quad (4.6)$$

Or $d^2U = dm(u(x + dx, t) - u(x, t)) = \rho S dx \frac{\partial u}{\partial t} dt = \rho S dx dt \frac{\partial u}{\partial t}$ en introduisant l'énergie interne massique u . D'autre part durant cette durée dt , on peut calculer les échanges thermiques au niveau des faces d'entrée et de sortie :

$$d^2Q = \delta Q_{\text{entrant}}(x) - \delta Q_{\text{sortant}}(x + dx) = j_Q(x, t)Sdt - j_Q(x + dx, t)Sdt = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx dt \quad (4.7)$$

* d'où en regroupant les termes :

$$\rho S dx dt \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx dt \iff \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = 0 \quad (4.8)$$

On aboutit à une équation locale de conservation de l'énergie, similaire à celles déjà rencontrées auparavant.

Dans le cas où, en plus d'un transfert thermique sur ses frontières en x et $x + dx$, le système est chauffé ou refroidi par une production d'énergie *in situ* (effet Joule, réaction chimique exo- ou endothermique, etc.), on peut ajouter un terme supplémentaire au bilan d'énergie :

$$\delta^2Q_{\text{suppl}} = p_v S dx dt \quad (4.9)$$

d'où l'équation locale suivante $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial j_Q}{\partial x} = p_v$.



Exercice

À titre d'entraînement, effectuer le même raisonnement pour des géométries cylindriques et sphériques, en considérant des tranches infinitésimales (couronne cylindrique ou calotte sphérique) et des transferts thermiques selon \vec{e}_r uniquement. Montrer :

- en géométrie cylindrique $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r j_Q(r, t)) = p_v$;
- en géométrie sphérique $\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j_Q(r, t)) = p_v$.

IV.2 Cas général

* On retrouve la généralisation usuelle (déjà rencontrée pour le transport de charges et de particules) pour les équations locale et globale de conservation de l'énergie lors d'un transfert thermique par conduction :

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_Q = p_v \quad \text{et} \quad \frac{dU}{dt} + \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}_{\text{sortant}} = \iiint_{(V)} p_v d\tau \quad (4.10)$$

La démonstration n'est pas au programme.

IV.3 Équation de la diffusion thermique (ou équation de la chaleur)

Obtenir l'équation de diffusion est chose aisée, en utilisant $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T$ et $u = cT + \text{cste}$:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \vec{j}_Q = -\lambda \operatorname{div} (\overrightarrow{\operatorname{grad}} T) = -\lambda \Delta T \quad (4.11)$$

d'où en réutilisant l'équation locale :

Équation de la diffusion thermique

Pour un système homogène, de masse volumique ρ , capacité thermique massique c et conductivité thermique λ , la température dans le système $T(M, t)$ vérifie l'équation de diffusion :

*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T + \frac{p_v}{\rho c} \quad (4.12)$$

en posant $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ la diffusivité thermique, exprimée en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ et p_v la puissance volumique reçue par le système.

Comme on retrouve une équation de diffusion, les éléments énoncés dans le chapitre précédent restent valables :

- cette équation traduit l'irréversibilité du phénomène, comme elle n'est pas invariante par renversement du temps ;
- cette équation différentielle aux dérivées partielles est linéaire, on peut donc lui appliquer le principe de superposition ;
- en ordre de grandeur, la longueur caractéristique de diffusion thermique est reliée à D et au temps caractéristique τ par $L \sim \sqrt{D\tau}$.

Quelques ordres de grandeur à 25 °C : $D(\text{air}) \simeq 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $D(\text{eau}) \simeq 1,4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $D(\text{cuivre}) \simeq 1,1 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $D(\text{acier}) \simeq 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $D(\text{bois}) \simeq 2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

* Cela permet d'interpréter l'expérience initiale, la longueur caractéristique de diffusion thermique, à τ constant, augmente à mesure que la diffusivité thermique augmente. On ne peut également que conseiller d'utiliser une cuillère en bois plutôt qu'en acier pour remuer dans une casserole :

$$\frac{\tau_{\text{acier}}}{\tau_{\text{bois}}} = \frac{D_{\text{bois}}}{D_{\text{acier}}} \simeq \frac{1}{50} \quad (4.13)$$

IV.4 Analogies

On peut effectuer une analogie avec le transport de charges électriques et de particules, qui développent le même type de formalisme :

	Diffusion de particules	Conduction électrique	Conduction thermique
Cause : gradient de ..	densité particulaire n	potentiel électrique V	température T
Loi locale	$\vec{j}_N = -D \overrightarrow{\operatorname{grad}} n$	$\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \overrightarrow{\operatorname{grad}} V$	$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T$
Débit	.. de particules $\Phi_N = \iint_{(S)} \vec{j}_N \cdot d\vec{S}$.. de charges $I = \iint_{(S)} \vec{j} \cdot d\vec{S}$.. d'énergie $\Phi = \iiint_{(V)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S}$
Conductivité	D	γ	λ
Équation locale	$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_N = 0$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$	$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_Q = 0$
Équation de diffusion	$\frac{\partial n}{\partial t} = D \Delta n$.	$\frac{\partial T}{\partial t} = D \Delta T$

V. Conditions aux limites

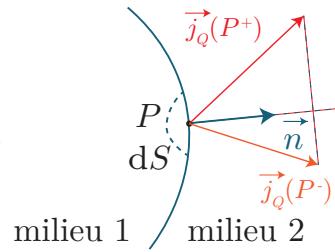
V.1 Continuité des flux thermiques

Considérons l'interface entre deux milieux différents, où l'on observe un flux thermique. Étant donné que l'interface est d'épaisseur nulle, elle ne stocke pas d'énergie. Il y a ainsi **continuité du flux thermique entre les deux milieux**, que l'on peut traduire par :

$$\Phi(P^-, t) = \Phi(P^+, t) \quad (4.14)$$

$$\Leftrightarrow \vec{j}_Q(P^-, t) \cdot \vec{n} = \vec{j}_Q(P^+, t) \cdot \vec{n} \quad (4.15)$$

en considérant une surface élémentaire de l'interface $d\vec{S} = dS \vec{n}$ autour de P . On a donc **continuité de la composante normale du vecteur densité de courant thermique**.



Par exemple entre deux milieux où la conduction est l'unique mode de transfert thermique, si on se place en géométrie unidimensionnelle on pourra écrire avec des notations évidentes :

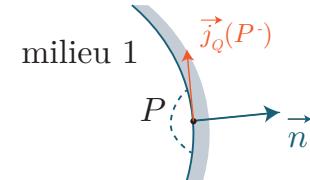
$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial t}(x_0, t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial t}(x_0, t) \quad (4.16)$$



S'il y a continuité du flux thermique, il n'en est rien, de manière générale, pour la température !

V.2 Paroi calorifugée

Si une frontière d'un milieu est calorifugée, **aucun transfert thermique n'a lieu normalement à cette paroi**, en reprenant ce qui a été dit précédemment : $\vec{j}_Q(P^-, t) \cdot \vec{n} = \vec{j}_Q(P^+, t) \cdot \vec{n}^0 = 0$. Cependant **rien n'empêche un transfert thermique tangentiellement à cette surface**.



V.3 Contact parfait

Un contact thermique à l'interface entre deux milieux est dit parfait si la température est continue à l'interface :

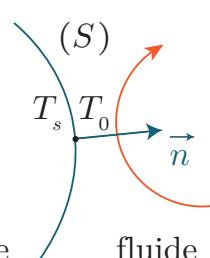
$$T(P^-, t) = T(P^+, t) \quad (4.17)$$

V.4 Transfert conducto-convectif

À la surface d'un solide en contact avec un fluide, on a souvent besoin de prendre en compte la convection dans le fluide. Les échanges d'énergie du solide vers le fluide à cette interface sont modélisés par la loi de Newton (qui n'est pas à connaître) :

$$\vec{j}_Q = h(T_s - T_0) \vec{n} \Leftrightarrow \Phi = \iint_{(S)} h(T_s - T_0) dS \quad (4.18)$$

$$\Leftrightarrow \delta^2 Q = h(T_s - T_0) dS dt \quad (4.19)$$



avec T_s la température à la surface du solide, T_0 la température du fluide, h le coefficient conducto-convectif en $\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$. Ce dernier dépend de la nature du solide et du fluide, de la vitesse du fluide, de la forme de la surface (et même de la température).

Quelques odg :

$\text{W}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{m}^{-2}$	Solide/gaz	Solide / eau
Convection naturelle	5 à 30	$4\cdot10^2$ à 10^3
Convection forcée	10 à $3\cdot10^2$	$3\cdot10^2$ à $1,2\cdot10^4$

VI. Étude en régime stationnaire

VI.1 Exemple unidimensionnel

Étudions la diffusion thermique selon l'axe (Ox) d'un barreau cylindrique de longueur L et section S calorifugé latéralement, de conductivité thermique λ . Notons T_A et T_B les températures aux deux extrémités en $x = 0$ et $x = L$ respectivement.

Manipulation

Retour sur l'expérience type Ingen Housz.

Pour déterminer le champ de température, deux méthodes sont possibles.

i) Résolution de l'équation de la diffusion thermique

En régime stationnaire et en l'absence de terme source, la température vérifie l'équation de Laplace $\Delta T = 0$. Comme T ne dépend que de la position x , il vient en intégrant $T(x) = ax + b$, soit avec les conditions aux limites :

$$T(x) = \frac{T_B - T_A}{L}x + T_A \quad (4.20)$$

* permettant alors de calculer le flux thermique

$$\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dx} \hat{e}_x = -\lambda \left(\frac{T_B - T_A}{L} \right) \hat{e}_x \implies \Phi = \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = (T_A - T_B) \frac{\lambda S}{L} \quad (4.21)$$

ii) Conservation du flux

On peut également utiliser le fait qu'en régime permanent, d'après l'équation locale, $\operatorname{div} \vec{j}_Q = 0$, c'est-à-dire que \vec{j}_Q est à flux conservatif. Donc :

$$\Phi = \text{cste} = \iint_{(S)} \vec{j}_Q \cdot d\vec{S} = -\lambda \frac{dT}{dx} S \quad (4.22)$$

* puis on effectue une séparation des variables :

$$dT = -\frac{\Phi}{\lambda S} dx \implies T(x) - T_A = -\frac{\Phi}{\lambda S} x \quad (4.23)$$

d'où avec la condition aux limites en $x = L$, $\Phi = (T_A - T_B) \frac{\lambda S}{L}$. Il ne reste qu'à réinjecter l'expression de Φ pour trouver $T(x)$.

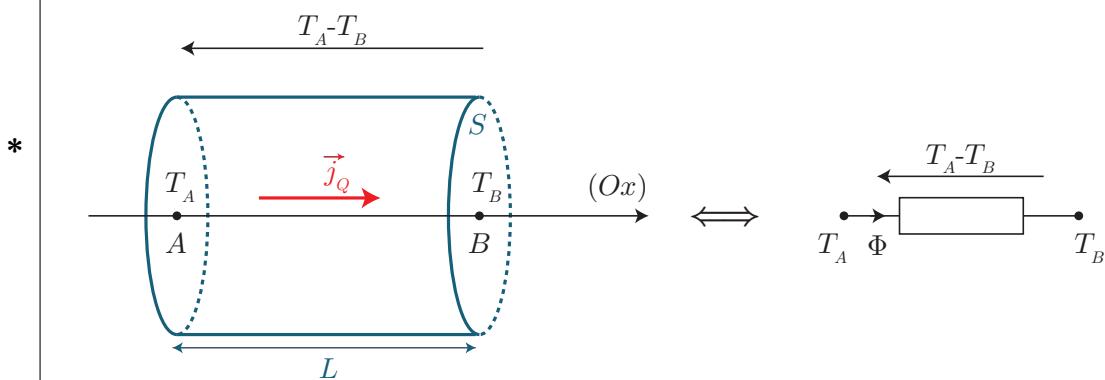
Cette méthode, bien qu'un peu plus longue en coordonnées cartésiennes, s'avère particulièrement efficace en géométries cylindrique ou sphérique !

VI.2 Notion de résistance thermique

a) Définition

On va poursuivre l'analogie engagée entre les transports électrique et thermique, en définissant une résistance thermique. Comme on effectue un parallèle entre potentiel électrique et température d'une part, et entre le courant électrique et le flux thermique d'autre part, on peut définir une résistance thermique :

$$R_{AB} = \frac{V_A - V_B}{I} \iff R_{AB} = \frac{T_A - T_B}{\Phi_{A \rightarrow B}} \quad (4.24)$$



En électricité, $R = \frac{L}{\gamma S}$, donc il suffit de remplacer la conductivité électrique par la conductivité thermique.

* La résistance thermique s'exprime en $K \cdot W^{-1}$. En géométrie cartésienne, on a déterminé le flux $\Phi_{1 \rightarrow 2} = (T_1 - T_2) \frac{\lambda S}{L}$, d'où :

$$R_{th} = \frac{L}{\lambda S} \quad (4.25)$$

b) Association en série

Dans une maison, une étude approfondie des transferts thermiques de l'intérieur d'une pièce vers l'extérieur doit entre autres tenir compte des différentes couches, par exemple pour un mur : enduit, brique, air, isolant, placo ; ou pour le double vitrage : verre, air (ou gaz noble), verre.

* Ces différentes couches sont **traversées par le même flux thermique**, on peut conclure à une **association en série des résistances thermiques**, avec la même loi qu'en électrocinétique :

$$R_{th,eq} = \sum_i R_{th,i} \quad (4.26)$$

Il faut évidemment pouvoir définir une résistance thermique pour chaque couche.

Exemple : pour un double vitrage où les épaisseurs d'air et de verre ($\lambda(\text{verre}) \sim 1,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$) sont identiques, en géométrie unidimensionnelle, on a

$$R_{th} = \frac{2e}{\lambda(\text{verre})S} + \frac{e}{\lambda(\text{air})S} = \frac{e}{\lambda(\text{verre})S} \left(2 + \frac{\lambda(\text{verre})}{\lambda(\text{air})} \right) \simeq 60 R_{th,\text{verre}} \quad (4.27)$$

On gagne un facteur 60 sur la résistance thermique par rapport à un simple vitrage de même surface, et donc pour une même différence de températures, on gagne également un facteur 60 sur le flux thermique qui constitue une perte en hiver.

c) Association en parallèle

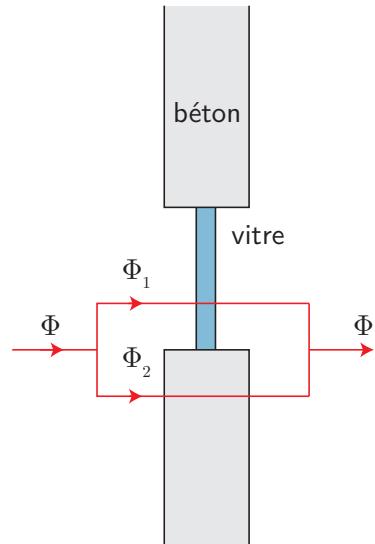
Il faut aussi tenir compte de toutes les ouvertures au sein d'une maison. Considérons un mur en béton de $S = 15 \text{ m}^2$ de $e = 30 \text{ cm}$ d'épaisseur, et que l'on y perce une fenêtre de $S' = 1 \text{ m}^2$ en plaçant un simple vitrage de $e' = 5 \text{ mm}$ d'épaisseur, le flux thermique qui traverse tout le mur se partage entre le béton et la fenêtre.

* On peut alors ici considérer une **association de résistances thermiques en parallèle**, chaque partie étant **soumise à la même différence de températures** :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{\Delta T}{R_{th,1}} + \frac{\Delta T}{R_{th,2}} = \frac{\Delta T}{R_{th,eq}} \quad (4.28)$$

qui conduit à la formule classique d'association de résistances en parallèle :

$$\frac{1}{R_{th,eq}} = \sum_i \frac{1}{R_{th,i}} \quad (4.29)$$



Exercice



Calculer la résistance thermique avec et sans la fenêtre.

Pour le béton seul, $R_{\text{béton,seul}} = \frac{e}{\lambda S} = 2,2 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$. Pour le béton percé, $R_{\text{béton,percé}} = 2,3 \cdot 10^{-2} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$, la fenêtre $R_{\text{fenêtre}} = \frac{e'}{\lambda S'} = 3,3 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$, et donc l'association parallèle des deux résistances thermiques conduit à

$$\frac{1}{R_{\text{béton+fenêtre}}} = \frac{1}{R_{\text{béton,percé}}} + \frac{1}{R_{\text{fenêtre}}} \iff R_{th,eq} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \quad (4.30)$$

soit en comparaison, $R_{\text{bétonseul}}/R_{\text{béton+fenêtre}} \simeq 8$.

Si une des résistances d'un assemblage parallèle est beaucoup plus petite que les autres, c'est elle qui domine la résistance équivalente de l'ensemble, et c'est à travers elle que s'écoulera l'essentiel du flux thermique. Dans le cas d'une isolation, ce matériau est le point faible de l'assemblage : il apparaît donc peu économique d'ajouter une couche d'isolant à un mur si on ne change pas une fenêtre en simple vitrage d'abord.

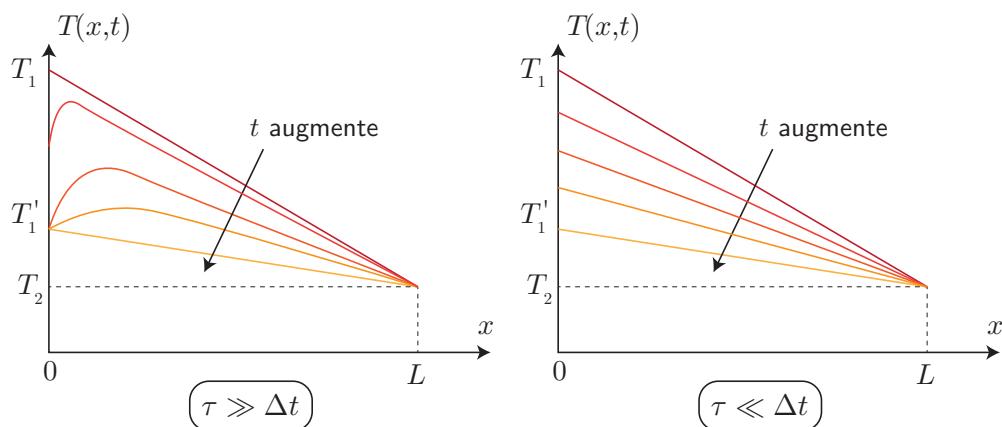
Les points faibles d'une habitation d'un point de vue thermique sont appelés des « ponts thermiques ».

VI.3 ARQS thermique

a) Exemple

Considérons le cas d'une barre de longueur L dans laquelle règne initialement un régime stationnaire avec T_1 et T_2 les températures aux extrémités. On modifie la température T_1 jusqu'à T'_1 , le passage de l'une à l'autre durant un temps Δt .

Comparons les résultats d'une simulation numérique selon la valeur de Δt par rapport à $\tau \sim L^2/D$, temps caractéristique de diffusion (c'est-à-dire ici le temps au bout duquel la variation à une extrémité se répercute à l'autre extrémité distante de L) :



- * Pour que le profil de température reste approximativement affine à chaque instant, il faut que $\tau \ll \Delta t$, c'est-à-dire que l'on modifie lentement les conditions aux limites de sorte à ce que le système dans son ensemble puisse s'adapter.

b) Définition

ARQS thermique

L'ARQS thermique permet de considérer que les lois similaires à l'électrocinétique (résistance thermique et leur association, équivalent de la loi des mailles ou des nœuds) sont valables même en régime lentement variable.

- * Elle est vérifiée lorsque le temps caractéristique d'évolution de la température, dans un système de longueur caractéristique L et de diffusivité thermique D , est très inférieur au temps caractéristique de variation des sources d'énergie ou des conditions aux limites Δt :

$$\tau = \frac{L^2}{D} \ll \Delta t \iff L \ll \sqrt{D\Delta t} \quad (4.31)$$

Exercice

Peut-on utiliser la notion de résistance thermique pour étudier les évolutions thermiques d'un bâtiment, dont les murs ont une épaisseur de 7 cm de béton de capacité thermique volumique $c_{\text{vol}} = 2,5 \cdot 10^3 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-3}$? Même question pour un mur de 30 cm.

On calcule la diffusivité : $D = \frac{\lambda}{\rho c} = \frac{\lambda}{c_{\text{vol}}} = 3,7 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Dans le premier cas on trouve $\tau \sim 4 \text{ h}$, dans le second cas $\tau' \sim 3 \text{ jours}$. Dans le premier cas, l'ARQS sera a priori possible, mais pas pour le second, où l'inertie thermique du mur doit être prise en compte.

c) Analogie avec un circuit électrique RC

Cherchons à modéliser l'évolution de la température d'une pièce soumise à des pertes thermiques. Il faut alors considérer :

- la résistance thermique R_{th} des murs et parois diverses qui séparent la pièce de l'extérieur et qui sert à évaluer les échanges thermiques avec l'extérieur ;
- la capacité thermique C de la pièce, pour l'essentiel celle de l'air, du mobilier contenu dans la pièce : cette grandeur va servir à évaluer les modifications de température de la pièce pour un apport donné d'énergie thermique.

* On suppose que l'ARQS s'applique ici, et on note $T(t)$ la température de la pièce, supposée uniforme, mais évoluant lentement au cours du temps. Appliquons le premier principe à l'intérieur de la pièce, immobile :

$$dU = \delta Q = \Phi_{\text{entrant}} dt \iff C \frac{dT}{dt} dt = \frac{T_0 - T(t)}{R_{\text{th}}} dt \quad (4.32)$$



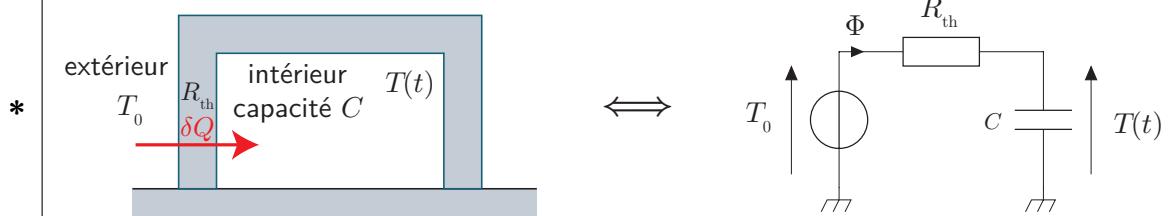
Ne pas se tromper sur le signe du flux. Le plus simple consiste à vérifier la cohérence physique : si $T_0 > T(t)$, le flux thermique est positif, ce qui est cohérent, la pièce reçoit un transfert thermique.

On aboutit à une équation différentielle sur T :

$$R_{\text{th}} C \frac{dT}{dt} + T(t) = T_0 \quad (4.33)$$

tout à fait identique à celle d'un circuit RC, de constante de temps $\tau = R_{\text{th}} C$. La résolution est classique, notons que la température de la pièce tend vers la température extérieure au bout de quelques τ .

On peut d'ailleurs poursuivre l'analogie électrique en représentant le circuit électrique équivalent :



où chaque système (extérieur et intérieur) se comporte comme un générateur de tension (où la valeur est la température).

Exercice

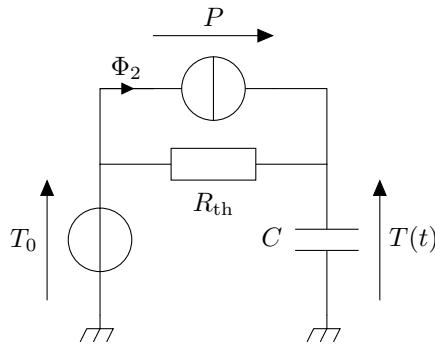


Si on ajoute dans la pièce un radiateur électrique de puissance P , quel est le générateur électrique équivalent ? Et comment représenter le circuit électrique équivalent ?

On peut supposer qu'il s'agira de l'équivalent d'un générateur de courant, montrons-le via l'application du premier principe :

$$dU = C \frac{dT}{dt} dt = \delta Q = \frac{T_0 - T(t)}{R_{\text{th}}} dt + P dt \iff \Phi = \Phi_1 + \Phi_2 \quad (4.34)$$

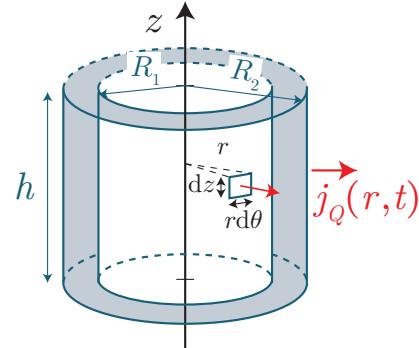
avec $\Phi_1 = \frac{T_0 - T_1}{R_{\text{th}}}$, $\Phi_2 = P$ et Φ le flux thermique (« courant ») traversant la capacité thermique. Cela revient bien à ajouter un flux thermique $\Phi_2 = P$ supplémentaire, et donc une source de courant, d'où le schéma électrique suivant :



VI.4 Autres calculs de résistances thermiques

a) Géométrie cylindrique

Pour pratiquer le calcul de résistance thermique, reprenons la méthode précédente sur une géométrie cylindrique, afin de déterminer la résistance thermique d'un manchon cylindrique de hauteur h , de rayon intérieur R_1 (de température T_1 uniforme sur la surface cylindrique) et de rayon extérieur R_2 (de température T_2). Il est traversé par une densité de courant thermique $\vec{j}_Q = -\lambda \frac{dT}{dr} \hat{e}_r$ radiale. On se place en régime stationnaire.



Utilisons la conservation du flux thermique, et calculons ce dernier sur un cylindre de rayon $R_1 < r < R_2$ quelconque :

$$\Phi = \text{cste} = \iint_{(S)} -\lambda \frac{dT}{dr} r d\theta dz = -\lambda \frac{dT}{dr} r \int_0^h dz \int_0^{2\pi} d\theta = -\lambda \frac{dT}{dr} 2\pi r h \quad (4.35)$$

car les intégrations ne portent pas sur la variable r , donc r et $\frac{dT}{dr}$ peuvent sortir de l'intégrale.
On sépare les variables :

$$* \quad dT = -\frac{\Phi}{2\pi\lambda rh} dr \iff T(r) - T_1 = \frac{\Phi}{2\pi\lambda h} \ln\left(\frac{R_1}{r}\right) \quad (4.36)$$

soit en utilisant l'autre condition aux limites $T(R_2) = T_2$, on peut obtenir l'expression de $T(r)$, mais surtout l'expression du flux thermique :

$$\Phi = 2\pi\lambda h \frac{T_2 - T_1}{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)} \implies R_{\text{th}} = \frac{T_1 - T_2}{\Phi} = \frac{\ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}{2\pi\lambda h} \quad (4.37)$$

À titre d'exercice, vous pouvez réaliser la même démarche pour une coquille sphérique, vous trouverez $R_{\text{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$.

b) Résistance thermique de conducto-convection

Dans le cas de la conducto-convection, via la loi de Newton, on avait :

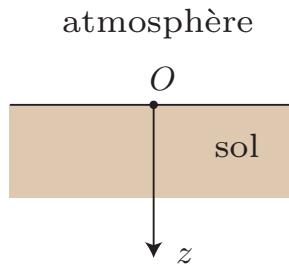
$$\Phi = \iint_{(S)} h(T_s - T_0) dS = h(T_s - T_0) S \implies R_{\text{th}} = \frac{T_s - T_0}{\Phi} = \boxed{\frac{1}{hS}} \quad (4.38)$$

VII. Étude en régime forcé

VII.1 Modélisation

On cherche à étudier l'évolution de la température du sol en fonction du temps et de la profondeur. On modélise le sol comme un matériau semi-infini $z > 0$ rempli d'un matériau homogène de conductivité thermique λ , masse volumique ρ et capacité thermique massique c . On peut modéliser l'évolution de la température de l'atmosphère comme une sinusoïde :

$$T(z < 0, t) = T_0 + \theta_m \cos \omega t \quad (4.39)$$



Cette évolution permet de prendre en compte l'évolution saisonnière ou journalière (jour-nuit) de la température (selon la valeur de ω). Du fait de l'invariance par translation selon les directions orthogonales à \vec{e}_z , le champ de température s'écrit $T(M, t) = T(z, t)$: on a un problème unidimensionnel. La température doit alors satisfaire :

- *
 - l'équation de diffusion thermique $\frac{\partial T}{\partial t} = D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ pour $z > 0$;
 - la condition aux limites en $z = 0$, où l'on suppose pour simplifier que le contact thermique est parfait, soit $T(z = 0, t) = T_0 + \theta_m \cos \omega t$

VII.2 Résolution de l'équation de diffusion

i) Passage en notations complexes

Du fait de la condition aux limites, on va chercher une solution de la forme :

$$T(z, t) = T_0 + F(z) \cos(\omega t + \varphi(z)) \implies \underline{T}(z, t) = T_0 + \underline{F}(z) e^{j\omega t} \quad (4.40)$$

- * en passant en notations complexes et en posant $\underline{F}(z) = F(z) e^{j\varphi(z)}$. On remplace dans l'équation de diffusion :

$$j\omega \underline{F}(z) = D \frac{d^2 \underline{F}(z)}{dz^2} \iff \frac{d^2 \underline{F}(z)}{dz^2} - \frac{j\omega}{D} F(z) = 0 \quad (4.41)$$

ii) Relation de dispersion

S'agissant d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, on peut chercher $\underline{F}(z)$ sous la forme $\underline{F}(z) = \underline{A} e^{-j\underline{k}z}$ (avec \underline{k} complexe). Ainsi la solution se met-elle sous la forme

$$\underline{T}(z, t) = T' + \underline{A} e^{j(\omega t - \underline{k}z)} \quad (4.42)$$

- * ce qui ressemble à une onde progressive (à ceci près que \underline{k} est complexe et n'est pas simplement le nombre d'onde rencontré en première année). Cette forme de solution peut être proposée dès le début lors de la résolution de ce type de problème. Cela nous ramène à la résolution de l'équation caractéristique :

$$\underline{k}^2 = -\frac{j\omega}{D} \quad (4.43)$$

Dans ce cadre, cette relation entre \underline{k} et ω porte le nom de **relation de dispersion**, dont la signification physique apparaîtra clairement lorsque sera étudiée la physique des ondes.

iii) Onde thermique

Les solutions de la relation de dispersion $\underline{k}^2 = -\frac{j\omega}{D} = \frac{\omega}{D} e^{-j\pi/2}$ sont, avec $\omega > 0$:

$$\underline{k} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} e^{-j\pi/4} = \pm \sqrt{\frac{\omega}{D}} \frac{(1-j)}{\sqrt{2}} = \pm \frac{1+j}{\delta} \quad (4.44)$$

- * On pose $\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}$ une grandeur homogène à une longueur, appelée **épaisseur de peau** dont le sens physique sera développé peu après.
Avec les deux racines possibles, il vient :

$$\underline{F}(z) = \underline{A} e^{\frac{1+j}{\delta} z} + \underline{B} e^{-\frac{1+j}{\delta} z} \quad (4.45)$$

où \underline{A} est nécessairement nul car \underline{F} ne peut diverger pour $z \rightarrow +\infty$. Ainsi la température se réécrit :

$$\underline{T}(z, t) = T' + |\underline{B}| \exp \left(-z/\delta + j(\omega t - z/\delta + \arg(B)) \right) \quad (4.46)$$

soit en notations réelles :

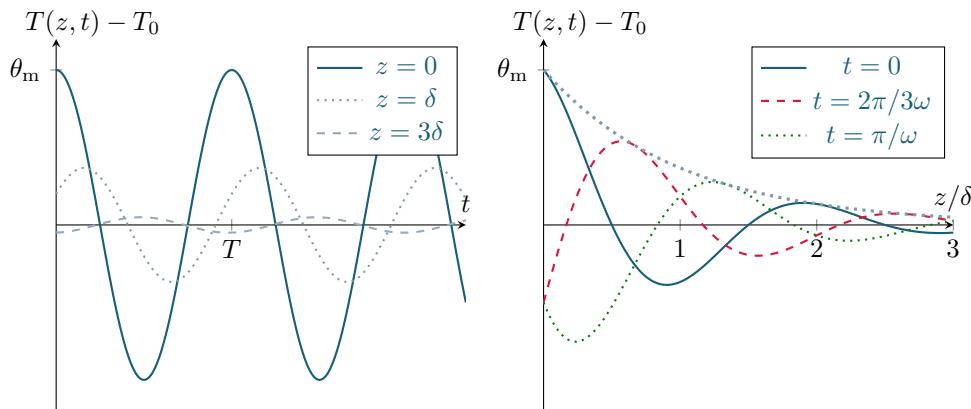
$$T(z, t) = T' + |\underline{B}| e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta + \underbrace{\arg(B)}_{\varphi}) \quad (4.47)$$

En se servant de la condition aux limites en $z = 0$, qui doit être vérifiée pour tout temps, il faut nécessairement que $T' = T_0$, $|\underline{B}| = \theta_m$ et $\varphi = 0$, donc finalement :

$$T(z, t) = T_0 + \theta_m e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \quad (4.48)$$

VII.3 Effet de peau thermique

Ci-dessous est représentée l'évolution de la fluctuation de la température $T(z, t) - T_0$ en fonction du temps en différents points, et en fonction de l'espace pour différents temps :



Effectuons une analyse physique :

- la température à un point d'altitude z dans le matériau possède bien un comportement sinusoïdal de même fréquence que pour la température de l'atmosphère, mais avec un **déphasage** $-z/\delta$ qui dépend de la profondeur ;
- l'amplitude des variations de température décroît exponentiellement avec la profondeur, l'échelle spatiale caractéristique associée est λ qui correspond à l'épaisseur caractéristique à laquelle l'onde thermique pénètre dans le milieu. On parle alors d'**effet de peau**. Pour $z \gg \delta$, $T(z, t) \simeq T_0$.
- Sur la représentation spatiale, le point d'intersection entre la fonction $T(z, t)$ avec la courbe enveloppe $\theta_m e^{-z/\delta}$ se déplace à la vitesse v_φ au cours du temps. Il est tel que $\cos(\omega t - z/\delta) = 1 = \cos(\omega(t + \Delta t) - (z + \Delta z)/\delta)$, conduisant à $\Delta z = \omega\delta\Delta t$, soit $v_\varphi = \omega\delta$: on parle de **vitesse de phase**.

Odg : prenons le sol terrestre, avec $\rho \sim 2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $c \sim 9 \cdot 10^2 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$, $\lambda \sim 0,8 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. L'épaisseur de peau vaut alors 11 cm pour des variations journalières ($\omega = 2\pi/1 \text{ jour} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$), et 2,1 m pour des variations annuelles. C'est pourquoi une cave profondément enterrée est relativement peu sensible à l'alternance diurne de température et à l'alternance annuelle : sa température reste à peu près constante (on appelle parfois cela « l'effet cave »).

Cette décroissance est due au fait que le matériau absorbe de l'énergie thermique provenant de l'extérieur, donc au bout d'une certaine distance il n'y a plus d'échanges énergétiques possibles, la température locale ne varie plus.

Exercices

4. 1 Bilan entropique

Soit deux thermostats de température T_1 et T_2 reliés par un barreau de section S , de longueur L , de conductivité thermique λ , de masse volumique ρ et de capacité thermique massique c .

1. Établir l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x, t)$.
2. Déterminer $T(x)$ en régime permanent.
3. Pour une tranche d'épaisseur dx et pendant l'intervalle de temps dt , exprimer la variation d'entropie dS , l'entropie échangée δS_e et l'entropie créée δS_c en régime permanent.
4. Déterminer l'entropie créée par unité de temps et de volume en fonction du gradient de température.

1. Cf cours.

2. Cf cours, on a alors $T(x) = \frac{T_2 - T_1}{L}x + T_1$ en choisissant un axe (Ox) colinéaire à la barre, et $T(0) = T_1$, $T(L) = T_2$.

3. Appliquons le second principe à la tranche d'épaisseur dx pendant dt :

$$dS = \delta S_e + \delta S_c \iff \delta S_c = -\delta S_e \quad (4.49)$$

\uparrow
RS

Puis calculons l'entropie échangée, en considérant les échanges en x et en $x + dx$:

$$\delta S_e = \frac{\delta Q(x)}{T(x)} + \frac{\delta Q(x+dx)}{T(x+dx)} = \frac{j_Q(x)Sdt}{T(x)} - \frac{j_Q(x+dx)Sdt}{T(x+dx)} = -Sdxdt \frac{dj_Q(x)/T(x)}{dx} \quad (4.50)$$

$$= +\lambda Sdxdt \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{T(x)} \frac{dT}{dx} \right) = -\lambda Sdxdt \frac{1}{T(x)^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 \quad (4.51)$$

\uparrow
 $T''(x) = 0$

4. Ainsi

$$\frac{\delta S_c}{d\tau dt} = +\lambda \frac{1}{T(x)^2} \left(\frac{dT}{dx} \right)^2 = \frac{\lambda}{T(x)^2} (\overrightarrow{\text{grad}} T)^2 \quad (4.52)$$

Notons que le second principe imposant $\delta S_c > 0$, on a donc nécessairement $\lambda > 0$.

4. 2 Combustible nucléaire

Un barreau de combustible nucléaire assimilé à un cylindre infini a un rayon $R = 14,5 \text{ mm}$. La réaction nucléaire en son sein dégage une puissance thermique volumique $P_t = 700 \text{ MW}\cdot\text{m}^{-3}$. La conductivité thermique de l'uranium est $\lambda = 27 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

1. En appliquant le premier principe pendant une durée dt à une couche cylindrique comprise entre les rayons r et $r + dr$, établir l'équation de diffusion dans ce barreau.
2. Déterminer en régime permanent la loi de température dans le barreau. À la périphérie la température a pour valeur $T_0 = 200^\circ\text{C}$. Que vaut T_{\max} ?
3. Pour $T > 500^\circ\text{C}$, le barreau fond. On prend donc un barreau creux de rayon intérieur $R' = 11 \text{ mm}$. On suppose qu'il n'y a pas de chaleur évacuée par le centre. Répondre aux mêmes questions qu'en 1).

-
1. Au vu de la géométrie, on peut considérer que les transferts thermiques sont radiaux, et $\vec{j}_Q = j_{Q,r}(r, t)\vec{e}_r = -\lambda \frac{dT}{dr}\vec{e}_r$.
Appliquons alors le premier principe au système ainsi défini pendant une durée dt :

$$d^2H = \mu(2\pi r dr h)c \frac{dT}{dt} dt = \delta Q_{\text{entrant}}(r) - \delta Q_{\text{sortant}}(r + dr) + (2\pi r dr h)P_t dt \quad (4.53)$$

$$= j_{Q,r}(r)2\pi rh dt - j_{Q,r}(r + dr)2\pi(r + dr)h dt + (2\pi r dr h)P_t dt \quad (4.54)$$

$$= -2\pi rh dt \frac{\partial(rj_{Q,r})}{\partial r} dr + (2\pi r dr h)P_t dt \quad (4.55)$$

soit en injectant la loi de Fourier et en simplifiant :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\mu c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{P_t}{\mu c} \quad (4.56)$$

2. En régime permanent, déterminons $T(r)$ en isolant la dérivée :

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{P_t r}{\lambda} \implies r \frac{dT}{dr} = -\frac{P_t r^2}{2\lambda} + A \implies \frac{dT}{dr} = -\frac{P_t r}{2\lambda} + \frac{A}{r} \quad (4.57)$$

soit en intégrant à nouveau, le champ de température s'écrit :

$$T(r) = -\frac{P_t r^2}{4\lambda} + A \ln(r) + B \quad (4.58)$$

On connaît une condition aux limites en $r = R$, et pour $r \rightarrow 0$, la température ne peut pas physiquement diverger, donc $A = 0$. Ainsi :

$$T(R) = T_0 = B - \frac{P_t}{4\lambda} R^2 \implies T(r) = T_0 + \frac{P_t}{4\lambda} (R^2 - r^2) \quad (4.59)$$

La température maximale se situe en $r = 0$ et vaut :

$$T_{\max} = T(r=0) = T_0 + \frac{P_t R^2}{4\lambda} = 1,52 \cdot 10^3 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (4.60)$$

3. Comme le barreau fond avant $r = 0$, cette géométrie est sans doute plus adaptée. On reprend la même démarche que précédemment, le champ de température peut alors se mettre sous la forme :

$$T(r) = -\frac{P_t r^2}{4\lambda} + A' \ln(r) + B' \quad (4.61)$$

Il nous faut des conditions aux limites :

- on a toujours $T(R) = T_0$;
- on exploite le fait qu'il n'y a pas de transfert thermique par le centre du barreau, en $r = R'$. Cela se traduit concrètement par $j_{Q,r}(r = R') = 0$, soit encore $\frac{dT}{dr}(r = R') = 0$.

Cette deuxième condition nous permet d'obtenir A' :

$$-\frac{P_t R'}{2\lambda} + \frac{A}{R'} = 0 \iff A' = \frac{P_t R'^2}{2\lambda} \quad (4.62)$$

puis $B = T_0 + \frac{P_t R^2}{4\lambda} - A \ln(R)$, d'où finalement :

$$T(r) = T_0 + \frac{P_t}{4\lambda} (R^2 - r^2) + \frac{P_t R'^2}{2\lambda} \ln \left(\frac{r}{R} \right) \quad (4.63)$$

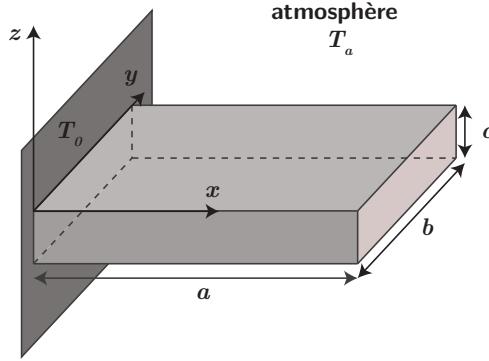
Ainsi la température maximale se situe en $r = R'$, et

$$T'_{\max} = T_0 + \frac{P_t}{4\lambda} (R^2 - R'^2) + \frac{P_t R'^2}{2\lambda} \ln \left(\frac{R'}{R} \right) = 345 \text{ } ^\circ\text{C} \quad (4.64)$$

ce qui permet d'éviter la fusion du barreau.

4. 3 Ailette de refroidissement

Pour évacuer de la chaleur d'une source vers l'atmosphère, on a souvent recours au dispositif présenté ci-dessous. Il est constitué d'une plaque de cuivre de côtés a selon \vec{e}_x , b selon \vec{e}_y , et $c \ll b$ selon \vec{e}_z , collée en $x = 0$ à la source de chaleur qui impose $T(x = 0) = T_0$. Cette plaque, de conductivité thermique λ , est plongée dans l'atmosphère, qui est assimilée à une source de température T_a constante, du fait de l'utilisation d'un ventilateur qui renouvelle l'air. On étudie un régime stationnaire. On suppose qu'un élément de surface dS de la plaque de température $T(x)$ cède à l'atmosphère une énergie : $\delta^2 Q = h(T(x) - T_a)dSdt$.



1. En faisant un bilan pour la tranche de plaque comprise entre x et $x + dx$, démontrer l'équation différentielle en $T(x)$.

Faire apparaître une grandeur δ en fonction de h , λ , b et c .

2. En déduire que la température $T(x)$ peut se mettre sous la forme suivante :

$$T(x) = T_e + (T_0 - T_e) \cosh\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \sinh\left(\frac{x}{\delta}\right) \quad (4.65)$$

où B est une constante que l'on déterminera en fonction de h , λ , L et des autres données du problème.

En déduire $T(L)$ et effectuer l'application numérique.

3. Déterminer le flux thermique évacué par l'ailette. On pourra éventuellement supposer que la température dans l'ailette est quasiment constante, de valeur T_0 .
4. En supposant que les pertes thermiques par convection sont données par la même loi pour la plaque et la tige, déterminer le rendement de l'ailette, rapport des flux thermiques sortant de la plaque avec et sans ailette (en ne considérant que la surface bc de la plaque).
5. On cherche à dimensionner un radiateur de processeur. Ce dernier dissipe 100 W en fonctionnement, sa température ne doit pas dépasser 360 K et l'espace disponible maximal est un cube de 3 cm de côté. En prenant des ailettes de 2 mm d'épaisseur, déterminer le nombre d'ailettes nécessaires.

Données : $h = 150 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, $a = 2 \text{ cm}$, $b = 3 \text{ cm}$, $c = 2 \text{ mm}$, $T_0 = 360 \text{ K}$, $T_e = 300 \text{ K}$.

1. Appliquons le premier principe à une tranche de tige de largeur dx située en x , pendant une durée dt :

$$\delta^2 H = 0 = \delta Q_{\text{entrant}}(x) - \delta Q_{\text{sortant}}(x + dx) - \delta Q_{\text{newton}} = \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} bcdxdt - h(T(x) - T_e) \underbrace{(2(b+c)dx)}_{\text{surf. latérale}} dt \quad (4.66)$$

↑
RP

d'où l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{2h(b+c)}{\lambda bc}(T(x) - T_e) = 0 \quad (4.67)$$

On pose $\delta = \sqrt{\frac{\lambda bc}{2h(b+c)}}$ = 5 cm une longueur caractéristique, de sorte que l'équation différentielle suivante s'écrit :

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{1}{\delta^2} T(x) = -\frac{1}{\delta^2} T_e \quad (4.68)$$

2. La solution de l'équation homogène s'obtient en résolvant le polynôme caractéristique $r^2 - \frac{1}{\delta^2} = 0$, c'est-à-dire $r = \pm \frac{1}{\delta}$, d'où :

$$T_h = A \cosh\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \sinh\left(\frac{x}{\delta}\right) \quad (4.69)$$

Une solution particulière est $T_p = T_a$, donc finalement :

$$T(x) = T_a + A \cosh\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \sinh\left(\frac{x}{\delta}\right) \quad (4.70)$$

Pour déterminer les constantes A et B , il faut se servir des conditions aux limites :

- en $x = 0$, $T(0) = T_0$, c'est-à-dire $T_0 = T_a + A$ donc $A = T_0 - T_a$;
- en $x = a$, on a continuité du flux thermique dans la barre avec le flux thermique de conducto-convection : $\Phi(x = a^-) = \Phi(x = a^+)$.

Exploitons cette dernière condition :

$$\Phi(x = a^-) = \Phi(x = a^+) \iff -\lambda \frac{dT}{dx}(a)S = h(T(a) - T_e)S \quad (4.71)$$

se réécrivant :

$$-\frac{\lambda}{\delta} \left(A \sinh \left(\frac{a}{\delta} \right) + B \cosh \left(\frac{a}{\delta} \right) \right) = h \left(A \cosh \left(\frac{a}{\delta} \right) + B \sinh \left(\frac{a}{\delta} \right) \right) \quad (4.72)$$

soit après réarrangement, et en posant $u = \frac{\lambda}{h\delta}$, il vient :

$$B = -A \frac{1 + u \tanh \left(\frac{a}{\delta} \right)}{u + \tanh \left(\frac{a}{\delta} \right)} \quad (4.73)$$

Numériquement, $T(a) = 355$ K, ce qui était assez prévisible au vu de la grande conductivité thermique du cuivre.

- 3.** Si on suppose que la température est constante sur l'ailette, le flux thermique sortant de la plaque avec ailette vaut (en n'oubliant pas la face terminale) :

$$\Phi_{\text{sortant,ailette}} = h(T_0 - T_a) \times (2(c + b)a + bc) = 12,1 \text{ W} \quad (4.74)$$

On peut également, étant donné que l'on est en régime stationnaire, calculer le flux sortant de l'ailette en calculant le flux entrant dans l'ailette en $x = 0$! On trouve alors :

$$\Phi_{\text{sortant,ailette}} = \Phi(x = 0) = -\lambda \frac{dT}{dx}(x = 0) = -\frac{\lambda bcB}{\delta} = 11,4 \text{ W} \quad (4.75)$$

On peut cela étant effectuer le calcul exact du flux sortant par conducto-convection :

$$\Phi'_{\text{sortant,ailette}} = 2(b + c)h \int_0^a (T(x) - T_a)dx + h(T(a) - T_a)bc \quad (4.76)$$

$$= 2(b + c)h\delta [A \sinh(x/\delta) + B \cosh(x/\delta)]_0^a + h(T(a) - T_a)bc = 11,4 \text{ W} \quad (4.77)$$

C'est plus petit, c'est logique vu que la température dans l'ailette décroît légèrement quand x augmente, et on retrouve bien le résultat du flux entrant en $x = 0$.

- 4.** La puissance thermique dissipée par la surface bc de la plaque seule vaut :

$$\Phi_{\text{sortant,plaque}} = h(T_0 - T_a)bc = 0,54 \text{ W} \quad (4.78)$$

donc le rendement de l'ailette vaut

$$\eta = \frac{\Phi_{\text{sortant,ailette}}}{\Phi_{\text{sortant,plaque}}} \simeq 21 \quad (4.79)$$

ce qui prouve bien son efficacité.

- 5.** D'après les calculs précédents, il faut donc un nombre d'ailettes de $\sim 100/11,4 \sim 9$. Cela laisse donc 1,5 mm entre chaque ailette, c'est sans doute un peu juste mais faisable.

4. 4 Double vitrage

On ne considère que des régimes permanents. L'intérieur d'une pièce est séparé de l'extérieur par une paroi vitrée de surface S , orthogonale à l'axe Ox , et dont le verre a une conductivité thermique λ . Ses faces interne et externe sont respectivement aux températures T_i et T_e avec $T_e < T_i$.

- La paroi est une simple vitre d'épaisseur e . Évaluer le flux thermique Φ_1 sortant de la pièce à travers cette paroi en fonction de λ , S , e , T_i et T_e . Exprimer littéralement la résistance thermique R_{th} de la paroi vitrée.
- La paroi est un ensemble de deux vitres de même épaisseur e , séparées par une épaisseur e' d'air, de conductivité thermique λ' . On ne tient compte que de la conduction.
 - Évaluer le flux thermique Φ_2 sortant de la pièce puis Φ_2/Φ_1 .
 - A.N. : $T_e = 270$ K, $T_i = 292$ K, $e = 4$ mm, $e' = 16$ mm, $\lambda = 1,2 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et $\lambda' = 0,025 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Calculer Φ_2/Φ_1 et les températures T_1 et T_2 des faces en regard des deux vitres. Représenter graphiquement les variations de température en fonction de x dans le double vitrage.

3. En plus de la conduction étudiée ci-dessus, on doit tenir compte des échanges thermiques superficiels entre le verre et l'air. Une surface de verre d'aire S , à la température T_s , échange avec l'air, à la température T_f , le flux thermique $\Phi = hS(T_s - T_f)$ avec $h > 0$.

- (a) Montrer que ces échanges superficiels introduisent une résistance thermique $R_{\text{th,cc}}$ supplémentaire. Donner l'expression de $R_{\text{th,cc}}$.
- (b) Dans les questions 1) et 2), les températures de l'air à l'intérieur et à l'extérieur sont T'_i et T'_e . Soit h_e le coefficient d'échange entre le verre et l'air extérieur et h_i celui relatif aux autres contacts verre-air. Les flux Φ_1 et Φ_2 des questions 1) et 2) deviennent respectivement Φ'_1 et Φ'_2 . Exprimer Φ'_1 et Φ'_2 . Exprimer Φ'_1 et Φ'_2 en fonction de T'_i , T'_e , h_i , h_e et des paramètres e , λ , λ' et S .
A.N. : $h_i = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$, $h_e = 14 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Calculer Φ'_2/Φ'_1 . Conclusion ?

1. Cf cours, on se place en régime permanent, on utilise la conservation du flux thermique, et on trouve après intégration

$$\Phi = T_i - T_e \frac{\lambda S}{e} \quad (4.80)$$

soit une résistance thermique $R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda S}$

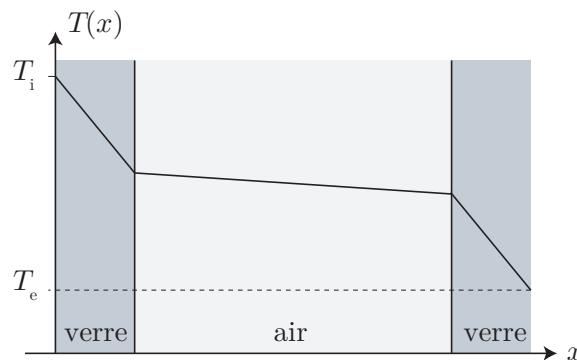
2. (a) On a ici trois résistances en série, qui se somment, d'où

$$\Phi_2 = \frac{T_i - T_e}{\frac{2e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S}} \quad (4.81)$$

ce qui nous permet d'exprimer le rapport des flux thermiques :

$$\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = \frac{\frac{e}{\lambda S}}{\frac{2e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S}} = \frac{1}{2 + \frac{e' \lambda}{e \lambda'}} \quad (4.82)$$

(b) On trouve numériquement $\frac{\Phi_2}{\Phi_1} = 5,2 \cdot 10^{-3} = \frac{1}{194}$ ce qui est énorme. L'allure des variations de température est représentée ci-dessous :



On a en effet dans chaque zone une allure affine, mais dont la pente λ/e est plus importante dans le verre que dans l'air (numériquement, d'un facteur 192 !).

3. (a) Cf. cours, on trouve $R_{\text{th,cc}} = \frac{1}{hS}$.

(b) On additionne toujours les résistances en parallèle :

$$\Phi'_1 = \frac{T'_i - T'_e}{\frac{1}{h_i S} + \frac{e}{\lambda S} + \frac{1}{h_e S}} \quad \text{et} \quad \Phi'_2 = \frac{T'_i - T'_e}{\frac{3}{h_i S} + \frac{2e}{\lambda S} + \frac{e'}{\lambda' S} + \frac{1}{h_e S}} \quad (4.83)$$

On trouve alors $\Phi'_2/\Phi'_1 = 0,17$, c'est un ordre de grandeur un peu plus réaliste.

4. 5 Gel d'un lac

Lorsque l'air au dessus d'un lac de surface S est à température $T_a < T_F$, on constate que l'épaisseur $e(t)$ de la couche de glace croît lentement avec $e(t) \propto \sqrt{t}$ pour t élevé. On note T_F la température de l'eau liquide, supposée uniforme, et $T(z, t)$ la température de la glace pour $0 \leq z \leq e(t)$. On suppose que le profil de température $T(z, t)$ est le même que si le régime était stationnaire (approximation des régimes quasi-stationnaires).

On donne la température de fusion $T_F = 273\text{ K}$ et la chaleur latente de fusion $\Delta_{\text{fus}}h = 330\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ de la glace, ainsi que sa masse volumique μ , sa capacité thermique massique $c = 2,1\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et sa conductivité thermique λ . On adoptera la même valeur μ pour la masse volumique de l'eau liquide.

1. On suppose que l'air impose sa température T_a à la surface du lac, c'est-à-dire que $T(z = 0, t) = T_a$ (hypothèse (H)).

(a) Exprimer le flux thermique Φ traversant la couche de glace dans le sens des z décroissants en fonction de λ , $e(t)$, S , T_a et T_F .

(b) Montrer que $e(t)$ est solution de $e \frac{de}{dt} = \frac{\lambda(T_F - T_a)}{\mu\Delta_{\text{fus}}h}$ et déterminer $e(t)$ pour $e(t = 0) = e_0$.

(c) En déduire une durée caractéristique τ des variations de $e(t)$. Discuter la validité de l'ARQS.

2. En réalité, l'hypothèse (H) n'est pas satisfaisante en général : le transfert thermique de la glace vers l'air met en jeu simultanément la diffusion thermique selon \vec{e}_z et la convection selon \vec{e}_x et \vec{e}_y : on parle de transport *conducto-convectif*. Dans ce cas, la loi phénoménologique de Newton donne l'expression du flux thermique sortant $\Phi_{cc} = hS(T_s - T_a)$ où $T_s = T(z = 0, t)$ est la température de la surface du lac et h un coefficient constant, d'autant plus élevé qu'un vent fort souffle au dessus du lac.

(a) Justifier brièvement la continuité du flux thermique en $z = 0$

(b) En déduire l'expression de T_s en fonction de T_a , T_F , h et λ . À quelle condition le modèle de la question 1. est-il valable ? On ne demande pas d'établir la nouvelle expression de $e(t)$.

1. (a) On utilise la continuité du flux thermique selon \vec{e}_z (orienté vers le bas) :

$$\Phi = \text{cste} = j_{Q,z}S = -\lambda \frac{dT}{dz}S \implies \Phi(e(t) - 0) = -\lambda S(T(e(t)) - T(0)) \implies \Phi = \frac{\lambda S(T_a - T_F)}{e(t)} \quad (4.84)$$

(b) En régime stationnaire, ce flux thermique est relié à l'énergie cédée par l'eau pour effectuer le changement d'état. En effectuant un bilan d'énergie à la glace pendant une durée dt , on peut écrire :

$$m_{\text{gelé pendant } dt}(-\Delta_{\text{fus}}h) = \Phi dt \iff (\mu S de(t))\Delta_{\text{fus}}h = \frac{\lambda S}{e(t)}(T_F - T_a)dt \quad (4.85)$$

d'où l'équation différentielle suivante :

$$e(t) \frac{de}{dt} = \frac{\lambda(T_F - T_a)}{\mu\Delta_{\text{fus}}h} \quad (4.86)$$

Elle se résout simplement en écrivant $e \frac{de}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^2}{2} \right)$. On trouve alors après simplification $e(t) = \sqrt{e_0^2 + 2 \frac{\lambda(T_F - T_a)}{\mu\Delta_{\text{fus}}h} t}$.

(c) On peut réécrire l'équation différentielle en termes d'ordre de grandeur :

$$\frac{e_c^2}{2\tau} \sim \frac{\lambda(T_F - T_a)}{\mu\Delta_{\text{fus}}h} \iff \tau \sim \frac{e_c^2 \mu \Delta_{\text{fus}}h}{2\lambda(T_F - T_a)} \quad (4.87)$$

à comparer au temps caractéristique de diffusion thermique à travers la glace : $\tau_{\text{diff}} \sim \frac{e_c^2}{D}$, avec $D = \frac{\lambda}{\mu c}$. Pour être en régime quasi-stationnaire, il ne faut pas que la diffusion thermique soit limitante, donc :

$$\tau \gg \tau_{\text{diff}} \iff \Delta_{\text{fus}}h \gg c(T_F - T_a) \quad (4.88)$$

après simplification. Cette condition est vérifiée si $T_F - T_a \ll 1,6 \cdot 10^2\text{ K}$, ce qui est tout le temps le cas.

2. (a) Une paroi d'épaisseur nulle ne peut stocker d'énergie.

(b) Utilisons la continuité du flux thermique (attention aux signes et convention entrant/sortant) à l'interface :

$$\Phi = -\Phi_{cc} \iff \frac{\lambda S}{e} (T_s - T_F) = -hS(T_s - T_a) \quad (4.89)$$

soit après réarrangement :

$$T_s = \frac{T_a + \frac{\lambda}{he} T_F}{1 + \frac{\lambda}{he}} \quad (4.90)$$

Le modèle de la question 1. est valable à condition que $T_s \simeq T_a$, c'est-à-dire si $\frac{\lambda}{he} \ll 1$, de sorte que le phénomène de conducto-convection soit suffisamment important devant la conduction thermique pour que la température de surface soit bien celle de l'air ambiant.

4. 6 Température d'un conducteur électrique

Un câble électrique est constitué d'un noyau de cuivre cylindrique infiniment long de rayon $R_1 = 2,55$ mm, de conductivité électrique γ , de conductivité thermique λ_1 , entouré d'une gaine isolante concentrique de rayon $R_2 > R_1$, de conductivité thermique λ_2 . Les échanges thermiques avec l'air ambiant, de température T_0 , à la surface de la gaine se font par convection avec un coefficient h . On fait passer dans le câble un courant I .

Déterminer l'expression littérale de la température maximale dans le câble en fonction de l'intensité le traversant.

Déterminons le champ de température dans le cuivre et dans la gaine isolante. On se place en coordonnées cylindriques, en régime permanent. Commençons par le cuivre, dont le bilan thermique contient une puissance volumique :

$$p_v = \vec{j} \cdot \vec{E} = \vec{j}^2 / \gamma = \frac{(I/(\pi R_1^2))^2}{\gamma} = \frac{I^2}{\gamma \pi^2 R_1^4} \quad (4.91)$$

L'application du premier principe à une tranche de longueur dx pendant dt conduit à l'équation

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{d(r j_{Q,r})}{dr} + p_v \iff \frac{d(r j_{Q,r})}{dr} = p_v r \iff j_{Q,r} = \frac{p_v r}{2} + \frac{A}{r} \quad (4.92)$$

avec en réalité $A = 0$ sinon le flux thermique diverge au centre du câble. Soit avec la loi de Fourier :

$$-\lambda_1 \frac{dT}{dr} = \frac{p_v r}{2} \iff T(r) = B - \frac{p_v r^2}{4\lambda_1} \quad (4.93)$$

la température au sein du câble est donc maximale au centre, et il faut donc déterminer B . Il faut donc étudier le champ de température dans la gaine. On a cette fois

$$\frac{d(r j_{Q,r})}{dr} = 0 \quad (4.94)$$

pour $R_1 < r < R_2$, soit après intégration $j_{Q,r}(r) = \frac{C}{r}$ puis $T(r) = -\frac{C}{\lambda_2} \ln(r) + D$.

Quelles sont les conditions aux limites ?

- En $r = R_2$, on a continuité du flux thermique, soit avec la loi de conducto-convection de Newton

$$\frac{C}{R_2} = h(T(R_2) - T_0) \iff \frac{C}{R_2} = h \left(D - \frac{C}{\lambda_2} \ln(R_2) - T_0 \right) \quad (4.95)$$

- en $r = R_1$, on a également continuité du flux thermique :

$$\frac{C}{R_1} = \frac{p_v R_1}{2} \iff C = \frac{p_v R_1^2}{2} \quad (4.96)$$

- il reste à faire une hypothèse supplémentaire car ces deux équations ne font pas intervenir B : on suppose donc que le contact thermique est parfait entre le conducteur et l'isolant, soit

$$T(R_1^-) = T(R_1^+) \iff B - \frac{p_v R_1^2}{4\lambda_1} = -\frac{C}{\lambda_2} \ln(r) + D \quad (4.97)$$

On obtient finalement le champ de température dans tout le câble :

$$\begin{cases} T(r < R_1) = T_0 + \frac{I^2}{2\gamma\lambda_2\pi^2 R_1^2} \left(\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\lambda_2}{hR_2} \right) + \frac{I^2}{4\gamma\lambda_1\pi^2 R_1^4} (R_1^2 - r^2) \\ T(R_1 < r < R_2) = T_0 + \frac{I^2}{2\gamma\lambda_2\pi^2 R_1^2} \left(\ln\left(\frac{R_2}{r}\right) + \frac{\lambda_2}{hR_2} \right) \end{cases} \quad (4.98)$$

$$(4.99)$$

donc la température maximale se situe au centre, en $r = 0$:

$$T_{\max} = T_0 + \frac{I^2}{2\gamma\lambda_2\pi^2R_1^2} \left(\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \frac{\lambda_2}{hR_2} + \frac{\lambda_2}{2\lambda_1} \right) \quad (4.100)$$

4. 7 Effusivité

Lorsqu'on touche une table en bois et une table en acier, toutes deux à température ambiante, celle en bois paraît "plus chaude". On se propose d'interpréter cet effet en adoptant le modèle suivant :

- la main est assimilée au demi-espace $x < 0$ et la table au demi-espace $x > 0$;
- les conditions initiales à l'instant $t = 0$ où la main vient au contact de la table sont $T(x < 0, t = 0) = T_{01} = 37^\circ\text{C}$ et $T(x > 0, t = 0) = T_{02} = 17^\circ\text{C}$.

On se donne les conductivités thermiques λ_1 et λ_2 et les diffusivités thermiques D_1 et D_2 . On cherche des solutions de l'équation de la chaleur de la forme :

$$T(x < 0, t) = T_1(x, t); T(x > 0, t) = T_2(x, t) \text{ avec } T_i(x, t) = \alpha_i + \beta_i \int_0^{u_i} \exp(-v^2) dv \quad (4.101)$$

en posant $u_i = \frac{x}{2\sqrt{D_i t}}$

1. En dehors de l'instant $t = 0$, on s'impose la continuité de la température en $x = 0$. Quelle autre relation peut-on écrire en $x = 0$?
2. Déterminer α_1 , α_2 , β_1 et β_2 . On utilisera $\int_0^{+\infty} \exp(-v^2) dv = \sqrt{\pi}/2$.
3. En déduire que la température de l'interface s'exprime comme une moyenne des températures T_{01} et T_{02} pondérée par les effusivités E_i des matériaux, qu'on exprimera en fonction de D_i et λ_i . Sachant que $E_{\text{main}} = 10^3$, $E_{\text{acier}} = 10^4$ et $E_{\text{bois}} = 10$ en unités SI, calculer la température à la jonction $T_j = T(x = 0, t)$ pour un contact main-acier et un contact main-bois. Conclure.
4. En réalité, la main et la table ont une épaisseur $e \simeq 1 \text{ cm}$ finie. Montrer que le modèle des demi-espaces est valable pour un contact suffisamment bref.
5. Pour un contact long entre la main et la table, on adopte un modèle où la température est stationnaire. Déterminer la température T_j de l'interface en fonction de λ_1 , λ_2 , T_{01} et T_{02} . Commenter.

1. On peut bien évidemment écrire la continuité du flux thermique en $x = 0$ à tout instant.

2. Utilisons les différentes conditions aux limites :

- continuité de la température en $x = 0$, imposant $\alpha_1 = \alpha_2$ car $u_i = 0$;
- limite en $x \rightarrow \pm\infty$ (ou pour $t = 0$) : $T_1(-\infty, t) = T_{10} = \alpha_1 - \beta_1 \sqrt{\pi}/2$ et $T_2(+\infty, t) = T_{20} = \alpha_2 + \beta_2 \sqrt{\pi}/2$, car $\int_0^{-\infty} \exp(-v^2) dv = - \int_0^{+\infty} \exp(-w^2) dw = -\sqrt{\pi}/2$;
- continuité du flux thermique en $x = 0$:

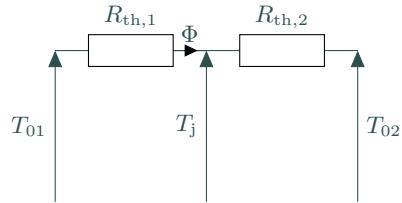
$$\lambda_1 \frac{dT_1}{dx}(x = 0) = \lambda_2 \frac{dT_2}{dx}(x = 0) \iff \lambda_1 \beta_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \exp(-u_1^2) \Big|_{x=0} = \lambda_2 \beta_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \exp(-u_2^2) \Big|_{x=0} \quad (4.102)$$

d'où avec $\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{D_i t}}$:

$$\frac{\lambda_1 \beta_1}{\sqrt{D_1}} = \frac{\lambda_2 \beta_2}{\sqrt{D_2}} \quad (4.103)$$

Ainsi après simplifications, en introduisant $E_i = \frac{\lambda_i}{\sqrt{D_i}}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{T_{01}E_1 + T_{02}E_2}{E_1 + E_2} = T_j$, $\beta_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\alpha_1 - T_{01})$, $\beta_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(T_{02} - \alpha_2)$.

3. Cf 2. pour l'expression théorique. Ainsi $T_{\text{main-bois}} \simeq 37^\circ\text{C}$ mais $T_{\text{main-acier}} \simeq 19^\circ\text{C}$, ce qui explique que le métal nous paraisse plus froid que le bois, bien qu'ils soient à la même température.
4. Un modèle en demi-espace est valable à condition que le temps de l'expérience soit très petit devant le temps de diffusion thermique, c'est-à-dire si $t_{\text{exp}} \ll \frac{e^2}{D_{\min}}$.
5. Durant un temps long, on peut se placer en régime stationnaire, où l'utilisation des résistances thermiques est autorisée. Avec une surface de contact S , on a une résistance thermique pour chaque élément $R_{\text{th},i} = \frac{e}{\lambda_i S}$. En notant T_{jonct} la température à la jonction, entre les deux résistances thermiques en série, on peut représenter le circuit électrique équivalent :



Et il vient simplement par continuité du flux :

$$\Phi = \frac{T_{01} - T_j}{R_{\text{th},1}} = \frac{T_j - T_{02}}{R_{\text{th},2}} \iff T_j = \frac{\frac{T_{01}}{R_{\text{th},1}} + \frac{T_{02}}{R_{\text{th},2}}}{\frac{1}{R_{\text{th},1}} + \frac{1}{R_{\text{th},2}}} = \frac{\lambda_1 T_{01} + \lambda_2 T_{02}}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (4.104)$$

On ne pondère donc plus les températures par les effusivités, mais par les conductivités thermiques. Après un temps long, l'impression de température sera différente qu'après un bref toucher (mais toujours plus froid pour le métal, dont la conductivité thermique est plus importante que celle du bois).