

## PHENOMENES DE SURFACE

I. Mise en évidence qualitative de la tension superficielle .....	2
1. La tension superficielle provoque une différence de pression capillaire.....	2
a) Définition de la tension superficielle.....	2
b) Origine microscopique de la tension superficielle .....	2
c) Loi de LAPLACE (1806) .....	3
d) Illustration expérimentale de la loi de LAPLACE : bulle sphérique de savon .....	4
2. La tension superficielle est une force par unité de longueur.....	5
3. Mouillage d'un support solide par une goutte de liquide.....	6
a) Angle de mouillage ; relation de YOUNG-DUPRE (1805) .....	6
b) Illustration expérimentale .....	7
II. Mesure statique de la tension superficielle par ascension capillaire dans une cuve cunéiforme .....	10
1. Loi de JURIN (1750) .....	10
a) Dans un tube capillaire .....	10
b) Entre deux lames parallèles.....	11
c) Dans une cuve cunéiforme.....	12
2. Vérification expérimentale de la loi de JURIN dans une cuve cunéiforme.....	14
a) Traitement de l'image avec le logiciel ImageJ .....	14
d) Traitement numérique avec le logiciel Igor6.....	16
III. Mesure statique de la tension superficielle avec une balance d'arrachement	21
1. Méthode d'arrachement de la lame de WILHELMY .....	21
2. Etalonnage de la balance d'arrachement.....	22
3. Mesure de la tension superficielle .....	22
IV. Mesure dynamique de la tension superficielle.....	24
1. Par stalagmométrie (méthode des gouttes tombantes).....	24
a) Loi de TATE (1864) .....	24
b) Vérification expérimentale.....	24
2. Dans une cuve à ondes .....	27
a) Equation de propagation d'une onde linéaire à la surface d'un fluide parfait .....	27
b) Vérification expérimentale.....	30
V. Résumé.....	34
VI. Bibliographie.....	39

Ce montage a été présenté par Geoffrey LESCAUX le 8 novembre 2010 en salle d'électricité 67 du département de physique de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, en présence de l'examineur M. François TREUSSART.

# I. Mise en évidence qualitative de la tension superficielle

---

## 1. La tension superficielle provoque une différence de pression capillaire

### a) Définition de la tension superficielle

Pour augmenter de  $d\mathcal{A}$  une surface  $\mathcal{A}$  séparant un fluide 1 d'un fluide 2, il faut amener de nouvelles particules à la surface, dont le nombre  $dN$  est proportionnel à  $d\mathcal{A}$ , et donc fournir une énergie  $\delta W$  à la surface proportionnelle à  $dN$ , donc à  $d\mathcal{A}$  :

$$\delta W = \gamma_{12} d\mathcal{A}$$

Le coefficient de proportionnalité  $\gamma_{12}$  s'appelle la **tension superficielle** de la surface ou **énergie (libre spécifique) de surface**. Elle s'exprime en  $\text{J.m}^{-2}$  et représente l'**énergie à fournir à la surface pour l'augmenter d'une unité**.

Le principe de la thermodynamique pour une transformation réversible donne la variation d'énergie interne  $U$  :

$$dU = \delta W + \delta Q = \gamma_{12} d\mathcal{A} + T dS$$

A température constante, la variation d'énergie libre vaut :

$$dF = d(U - TS) = dU - T dS = \gamma_{12} d\mathcal{A} = d(\gamma_{12} \mathcal{A})$$

L'énergie libre vaut donc  $F = \gamma_{12} \mathcal{A}$ . La tension superficielle est l'énergie libre par unité de surface.

### b) Origine microscopique de la tension superficielle

La cohésion d'un liquide s'explique par l'existence d'une force attractive de type VAN DER WAALS entre ses molécules constitutives

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^7} \vec{u}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} E_p(r)$$

qui dérive d'une énergie potentielle

$$E_p = -\frac{k}{6r^6}$$

Pour une molécule située dans le volume du liquide, la résultante de cette force est nulle. Elle est due à l'attraction d'une douzaine d'autres molécules, dont les contributions respectives à la force résultante se compensent par symétrie.

Pour une molécule située à la surface du liquide, la résultante de cette force est non nulle et dirigée vers le bas, de la surface vers le fluide intérieur [T, p.414]. Elle est due à l'attraction d'environ six molécules. **La tension superficielle exprime la force avec laquelle les molécules de la surface sont attirées vers l'intérieur du liquide** [N, p.2]. Cette force est dite capillaire car elle n'existe qu'à la surface du liquide. La capillarité se réfère à tous les phénomènes qui sont liés à la forme d'une surface liquide.

La tension superficielle est égale à l'**énergie libre d'excès** d'une mole de liquide située dans la couche superficielle par rapport à une mole située à l'intérieur du liquide, divisée par l'aire occupée par une mole de molécules de surface [E, p.3].

Si la température  $T$  d'un liquide croît, l'agitation thermique des molécules augmente. Elles auront donc une plus grande facilité à quitter la surface pour se déplacer vers l'intérieur. Comme cette force qui attire les molécules vers l'intérieur est la tension superficielle, elle décroît quand la température augmente [N, p.10]. Entre la température de fusion et la température d'ébullition, cette décroissance est linéaire autour de la température ambiante :

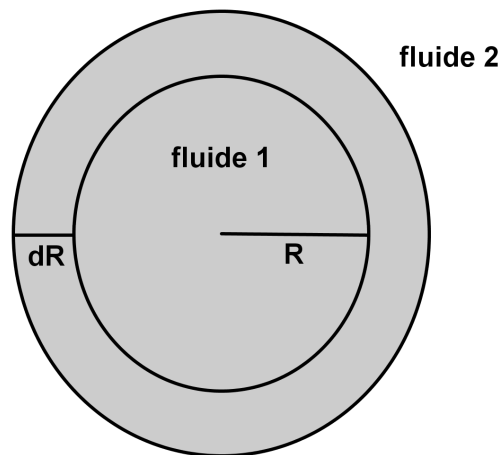
$$\gamma(T) = a - bT$$

### c) Loi de LAPLACE (1806)

Considérons une sphère de rayon  $R$  contenant un fluide 1, plongée dans un fluide 2. Si on augmente le rayon  $R$  de  $dR$ , le travail des forces de pression et capillaire s'écrit :

$$\delta W = -p_1 dV_1 - p_2 dV_2 + \gamma_{12} d\mathcal{A} = [R(p_2 - p_1) + 2\gamma_{12}]4\pi R dR$$

avec  $dV_1 = 4\pi R^2 dR = -dV_2$  et  $d\mathcal{A} = 4\pi(R + dR)^2 - 4\pi R^2 \approx 8\pi R dR$



**Figure 1** : Sphère contenant un fluide 1 plongée dans un fluide 2

La condition d'équilibre mécanique de l'interface 1/2 s'écrit [P, p.417] :

$$0 = \delta W \Leftrightarrow p_1 - p_2 = \frac{2\gamma_{12}}{R}$$

Par exemple, pour une goutte d'eau pure à 20°C dans l'air ( $\gamma = 73 \text{ mN.m}^{-1}$ ) de 1 mm de rayon,  $p_1 - p_2 = 146 \text{ Pa} \ll 1 \text{ atm}$ .

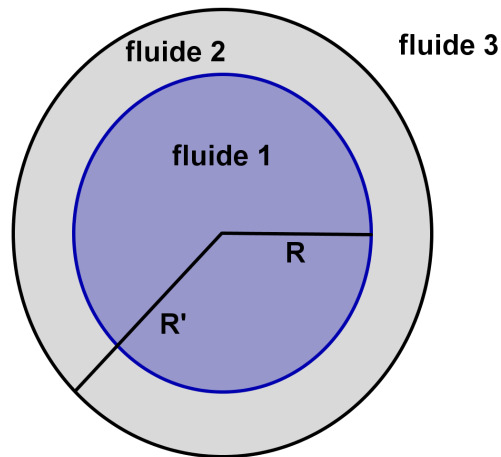
De façon plus générale, quand on traverse la surface de séparation de deux fluides 1 et 2 de tension superficielle  $\gamma_{12}$  et de rayons de courbure  $R$  et  $R'$  algébriques (positif/négatif si le centre du cercle est à l'intérieur/à l'extérieur de la surface) définis dans des plans orthogonaux, la différence de pression entre les deux fluides vaut en Pa

$$p_1 - p_2 = \gamma_{12} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

Cette **loi de LAPLACE** ([DG, p.17] ; [P, p.417] ; [N, p.2] ; [B, p.465] ; [G, p.56]) a été établie par Thomas YOUNG en 1805 [Y] et par Pierre-Simon de LAPLACE en 1806 [DL], d'où son nom d'**équation de LAPLACE-YOUNG**. Si la surface est une sphère, l'égalité  $R' = R$  redonne la formule établie ci-dessus :

$$p_1 - p_2 = \frac{2\gamma_{12}}{R}$$

Considérons le fluide 2 lui-même plongé d'un fluide 3.



**Figure 2 :** Coquille de fluide 2 située entre un fluide 1 et un fluide 3

La condition d'équilibre mécanique de l'interface 1/2 s'écrit

$$p_1 - p_2 = \frac{2\gamma_{12}}{R}$$

La condition d'équilibre mécanique de l'interface 2/3 s'écrit

$$p_2 - p_3 = \frac{2\gamma_{23}}{R'}$$

Donc

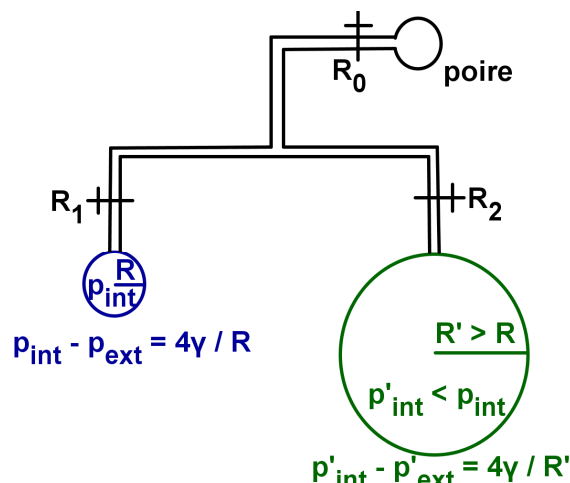
$$p_1 - p_3 = 2 \left( \frac{\gamma_{12}}{R} + \frac{\gamma_{23}}{R'} \right)$$

Si le fluide 1 et le fluide 3 sont l'air et le fluide 2 est un liquide glycérique (liquide contenant de l'eau, du savon pour faire des bulles, et de la glycérine pour rendre le mélange visqueux et ainsi faire mieux tenir les bulles) d'épaisseur  $R' - R \ll R$ ,  $\gamma_{\text{air/savon}} = \gamma_{12} = \gamma_{23}$ , la condition d'équilibre mécanique s'écrit ([P, p.417] ; [B, p.464])

$$p_{\text{air intérieur}} - p_{\text{air extérieur}} = \frac{4\gamma_{\text{air/savon}}}{R}$$

Si  $\gamma_{\text{air/savon}} = 30 \text{ mN.m}^{-1}$  et  $R = 1 \text{ cm}$ ,  $p_{\text{air intérieur}} - p_{\text{air extérieur}} = 12 \text{ Pa} \ll 1 \text{ atm}$

#### d) Illustration expérimentale de la loi de LAPLACE : bulle sphérique de savon



**Figure 3 :** mise en évidence de la dépendance de la dépression dans une bulle de savon en fonction de son rayon. La pression à l'intérieur de la petite bulle est supérieure à celle à l'intérieur de la grosse bulle.

Avec un liquide glycérique, on forme deux bulles de taille différente en adoptant la démarche suivante [P, p.417] :

- Ouvrir les robinets  $R_0$  et  $R_1$  et fermer le robinet  $R_2$  ;
- Former une bulle peu gonflée (de rayon  $R$ ) à l'aide de la poire et fermer le robinet  $R_1$  ;
- Ouvrir le robinet  $R_2$  ;
- Former une bulle bien gonflée (de rayon  $R' > R$ ) à l'aide de la poire ;
- Fermer le robinet  $R_0$  et ouvrir le robinet  $R_1$ .

Les deux bulles étant reliées, on observe que la petite bulle se dégonfle : elle se vide dans la grande. En effet, la surpression intérieure dans la petite bulle de savon de rayon  $R$

$$p_{\text{air intérieur}} - p_{\text{air extérieur}} = \frac{4\gamma_{\text{air/savon}}}{R}$$

est supérieure à la surpression intérieure dans la grosse bulle de savon de rayon  $R' > R$

$$p'_{\text{air intérieur}} - p'_{\text{air extérieur}} = \frac{4\gamma_{\text{air/savon}}}{R'}$$

avec  $p_{\text{air extérieur}} = p'_{\text{air extérieur}} = p_0 = 1 \text{ atm}$

$$R < R' \Leftrightarrow p_{\text{air intérieur}} > p'_{\text{air intérieur}}$$

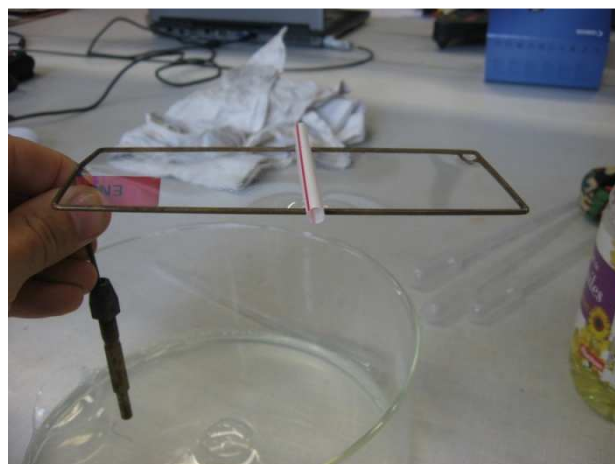
Par conséquent, quand les deux bulles sont reliées, l'air s'écoule de la petite vers la grosse, ce qui dégonfle la petite.

## 2. La tension superficielle est une force par unité de longueur

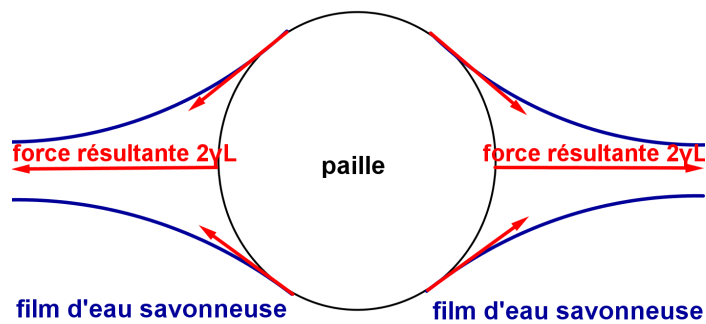
Pour former une lame liquide stable, on utilise un liquide glycérique, mélange qui contient :

- de l'eau ;
- du savon contenant des molécules d'acides gras contenant une tête polaire hydrophile et une queue lipophile (tel que l'acide oléique) qui produisent de chaque côté de la lame d'eau une couche monomoléculaire qui la protège et donc la stabilise (à la surface de l'eau, les têtes polaires sont dans le liquide et les queues dans l'air) ;
- de la glycérine qui rend le mélange visqueux et limite l'évaporation de la lame.

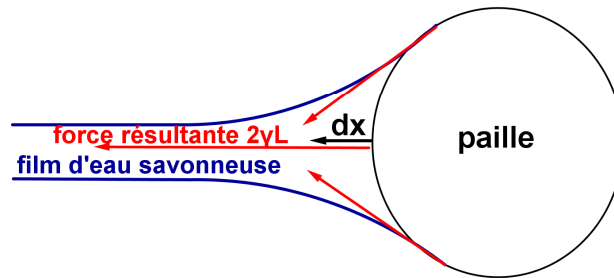
En trempant un cadre métallique de la largeur  $L$  dans un liquide glycérique, on forme ainsi un film de liquide stable. On pose sur ce film une paille au milieu du cadre. Si on perce un côté du film, la paille se déplace vers le côté opposé. Ce déplacement met en évidence la force capillaire qui s'exerce sur la paille.



**Figure 4 :** Manifestation de la tension superficielle par une force s'exerçant sur la paille dans un film de liquide glycérique perpendiculairement à sa longueur.



**Figure 5 :** Force capillaire (flèches) s'exerçant dans un film d'eau savonneuse sur une paille perpendiculairement à sa longueur.



**Figure 6 :** Force capillaire (flèches) s'exerçant perpendiculairement à sa longueur sur une paille dans un film d'eau savonneuse percé d'un côté, provoquant le déplacement de la paille vers le côté opposé.

Quand la paille se déplace de  $dx$  vers la gauche, la surface du film diminue de  $Ldx$  au-dessus et de  $Ldx$  en-dessous, soit de  $2Ldx$  au total. L'énergie fournie par la surface vaut

$$-\delta W = -\gamma d\mathcal{A} = -\gamma \times -2Ldx = 2\gamma Ldx = Fdx = -dE_p$$

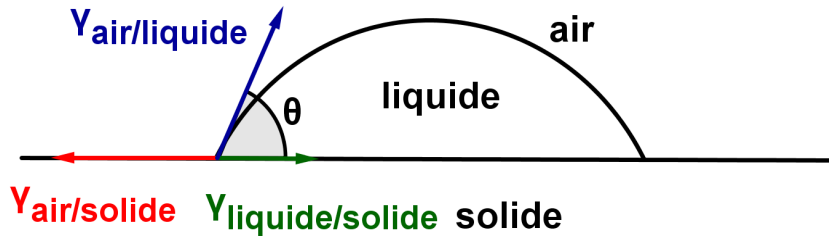
La force de tension superficielle, ou force capillaire, qui s'exerce sur la paille du côté où le film de savon n'a pas été percé a pour module  $F = 2\gamma L$  où  $\gamma$  est la tension superficielle et  $L$  est la longueur de la paille en contact avec le film de savon. Cette force dérive de l'énergie potentielle  $E_p = \gamma \mathcal{A}$  qui est égale à l'énergie libre. La tension superficielle  $\gamma = \frac{F}{2L}$  est donc la norme de la force par unité de longueur qui s'exerce perpendiculairement à la longueur de la paille, dans le plan de la surface.

**Une propriété fondamentale des liquides est leur tendance à se contracter de façon à présenter la surface la plus faible possible [E, p.2]. La tension superficielle est la force existant à la surface d'un liquide, due à l'attraction entre les molécules qui s'opposent à la rupture de la surface. Cette force de traction agit sur un élément de surface situé dans un plan tangent à la surface et s'oppose à la dilatation de cette surface [N, p.2].**

### 3. Mouillage d'un support solide par une goutte de liquide

#### a) Angle de mouillage ; relation de YOUNG-DUPRE (1805)

Lorsqu'on dépose une goutte de liquide sur un support solide, la ligne où les trois phases solide, liquide, vapeur (ou air) sont réunies est caractérisé par un **angle  $\theta$  dit de mouillage (ou de contact, ou de raccordement)** du support par le liquide :



**Figure 7 :** angle de mouillage  $\theta$  d'une surface solide par une goutte de liquide

Il dépend des propriétés des phases en présence. Cet angle est compris entre  $0^\circ$  et  $180^\circ$ . On distingue deux cas :

- Si  $0^\circ \leq \theta < 90^\circ$  (angle aigu), on dit que **le liquide mouille beaucoup le solide** (on parle de mouillage parfait si  $\theta = 0^\circ$ ). Exemple : goutte d'eau sur une table. Dans un tube capillaire, l'**interface liquide/vapeur** est **concave**.
- Si  $90^\circ < \theta \leq 180^\circ$  (angle obtus), on dit que **le liquide mouille peu le solide** (on parle de non-mouillage complet si  $\theta = 180^\circ$ ). Exemple : goutte de mercure sur une plaque de verre. Dans un tube capillaire, l'**interface liquide/vapeur** est **convexe**.

L'équilibre mécanique de la goutte posée sur une surface idéale (parfaitement plane et propre) donne la **relation de YOUNG-DUPRE** établie en 1805 ([Y] ; [DG, p.25] ; [N, p.2]) :

$$\gamma_{\text{air/solide}} = \gamma_{\text{liquide/solide}} + \gamma_{\text{air/liquide}} \cos \theta$$

$$\gamma_{\text{air/solide}} - \gamma_{\text{liquide/solide}} = \gamma_{\text{air/liquide}} \cos \theta \leq \gamma_{\text{air/liquide}}$$

Si  $\gamma_{\text{air/solide}} - \gamma_{\text{liquide/solide}} > \gamma_{\text{air/liquide}}$ , l'équilibre est impossible : la goutte s'étale alors sur le solide. La goutte mouille beaucoup le solide ( $\theta \approx 0^\circ$ ) si  $\gamma_{\text{air/solide}} - \gamma_{\text{liquide/solide}} \approx \gamma_{\text{air/liquide}}$ .

La goutte mouille très peu le solide ( $\theta \approx 180^\circ$ ) si  $\gamma_{\text{air/solide}} - \gamma_{\text{liquide/solide}} \approx -\gamma_{\text{air/liquide}}$

Dans la réalité, la surface est rugueuse : elle présente des défauts (taches, irrégularités) qui modifient la valeur de l'angle de mouillage  $\theta$  [DG, pp.40-41, pp.69-70]. En particulier :

- si on gonfle une goutte, l'angle de contact augmente sans que la ligne de contact ne bouge, jusqu'à une valeur maximale appelée **angle d'avancée**  $\theta_A$  au-delà de laquelle la ligne de contact bouge.
- si on dégonfle une goutte par aspiration, l'angle de contact diminue sans que la ligne de contact ne bouge, jusqu'à une valeur minimale appelée **angle de reculée**  $\theta_R$  en-dessous de laquelle la ligne de contact bouge.

D'une façon générale, l'angle  $\theta$  dépend de la manière dont on a préparé la goutte. On appelle **hystérésis** de l'angle  $\theta$  la différence  $\theta_A - \theta_R$ . Cette différence renseigne sur l'état de propreté et de rugosité de la surface sur laquelle repose la goutte.

Sur un support incliné, l'angle vers le bas est proche de l'angle d'avancée  $\theta_A$  et l'angle vers le haut est proche de l'angle de reculée  $\theta_R$ .

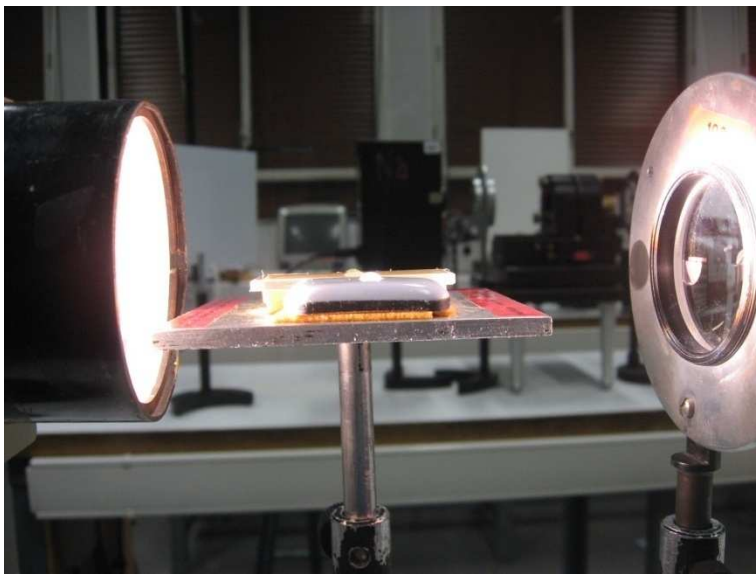
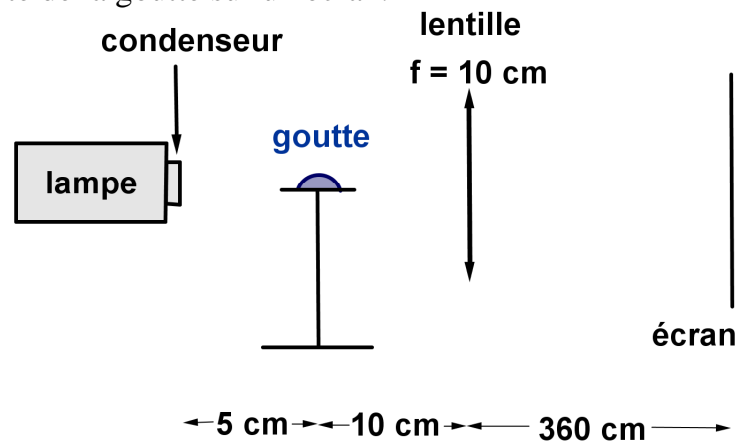
## b) Illustration expérimentale

On nettoie à l'alcool trois supports différents :

- téflon (polytétrafluoroéthylène) : fluoropolymère issu du tétrafluoroéthylène  $F_2C=CF_2$ , de formule  $(-CF_2-CF_2-)_n$ , possédant un grand pouvoir antiadhésif ;
- verre : formé de silice vitrifiée  $SiO_2$  et de fondants ( $Na_2O$ ,  $K_2O$ ,  $MgO$ ) ;
- parafilm : matériau thermoplastique flexible et semi-transparent, qui devient collant quand on l'étire, formé de polyéthylène et polypropylène.

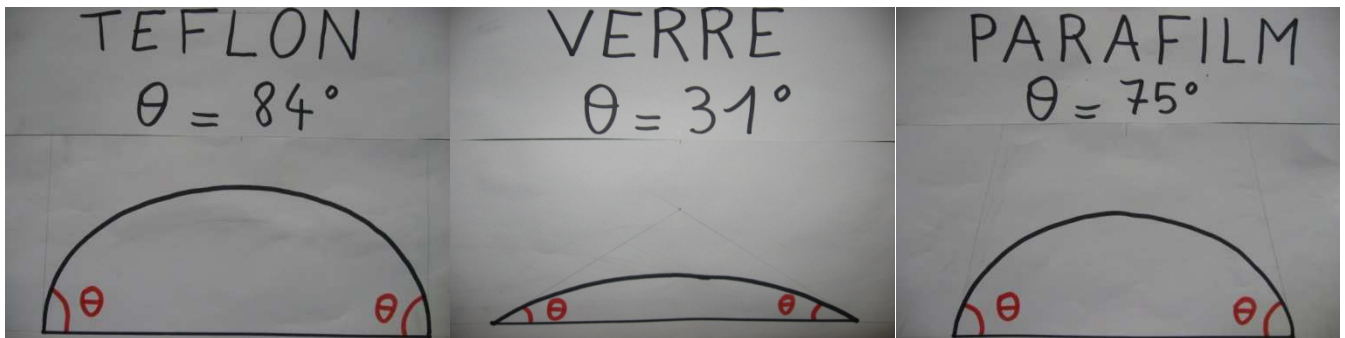
Sur chaque support, on dépose une goutte d'eau du robinet.

On mesure l'angle de mouillage sur chacun des supports par projection de l'image agrandie par une lentille convergente de la goutte sur un écran.



**Figure 8 :** mesure de l'angle de mouillage d'un support solide par une goutte de liquide





**Figure 9 :** Variation de l'angle de mouillage d'une goutte d'eau du robinet en fonction de la nature du support solide sur laquelle elle repose. L'angle est mesuré sur l'image de la goutte inversée et agrandie par une lentille convergente.

A l'aide d'un rapporteur, on mesure sur l'écran :

$$\begin{aligned}\theta_{\text{sur verre}} &= 31 \pm 5^\circ \\ \theta_{\text{sur parafilm}} &= 75 \pm 5^\circ \\ \theta_{\text{sur téflon}} &= 84 \pm 5^\circ\end{aligned}$$

**L'eau mouille beaucoup le verre mais peu le Téflon.** L'imperméabilité des vêtements Gore-Tex® est due à la présence de Téflon dans leur composition. Le tissu Gore-Tex® est percé de très petits trous (diamètre =  $0,2 \mu\text{m}$ ) qui laisse passer la vapeur d'eau dégagée par le corps humain mais pas l'eau de pluie qui est liquide. Ces vêtements Gore-Tex® se nettoient toujours à l'alcool, et non à l'eau.

On peut effectuer les mesures d'angle de mouillage en utilisant l'éthanol au lieu de l'eau.

On présente ci-dessous quelques méthodes de mesure statiques et dynamiques de la tension superficielle d'un liquide. Un souci majeur dans cette mesure est de limiter le plus possible la contamination du liquide pendant l'expérience, en particulier par des constituants tensio-actifs (oxygène, soufre, ...) qui abaissent la tension superficielle et par le solide réfractaire en contact avec le liquide [E, p. 6].

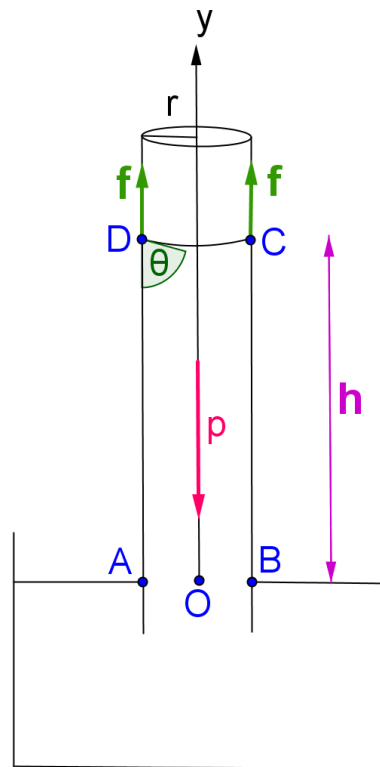
## II. Mesure statique de la tension superficielle par ascension capillaire dans une cuve cunéiforme

### 1. Loi de JURIN (1750)

Cette loi, établie par le médecin et physicien anglais James JURIN (1684-1750) en 1750, est traitée dans les ouvrages [B, §342, pp.471-472] ; [P, pp.419-420] et [G, pp.60-61].

#### a) Dans un tube capillaire

Lorsqu'on plonge un tube capillaire cylindrique en verre de rayon  $r$  dans un liquide de masse volumique  $\rho$  et de tension superficielle  $\gamma$ , ce dernier monte jusqu'à une hauteur  $h$  :



**Figure 10** : ascension capillaire d'un liquide dans un tube capillaire

Si l'angle de mouillage sur le verre égal à  $\theta \approx 0$ , le liquide contenue entre les sections AB et CD est soumis à son poids  $\vec{p} = -\rho\pi r^2 h g \vec{u}_y$  et à la force capillaire  $\vec{F} = 2\pi r \gamma \vec{u}_y$ .

A l'équilibre,  $\vec{F} + \vec{p} = \vec{0}$ , on obtient la loi de JURIN :

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g r}$$

Pour une valeur quelconque  $\theta$  de l'angle de mouillage sur le verre, on assimile le ménisque à une portion de sphère de rayon  $R = \frac{r}{\cos \theta}$ . La pression juste en-dessous du ménisque vaut  $p_- = p_0 - \rho gh$  et celle juste au-dessus vaut  $p_+ = p_0$ . On établit la **loi de JURIN** à partir de la loi de LAPLACE :

$$\rho gh = p_0 - (p_0 - \rho gh) = p_+ - p_- = \gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \right) = \frac{2\gamma}{R} = \frac{2\gamma \cos \theta}{r}$$

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho gr}$$

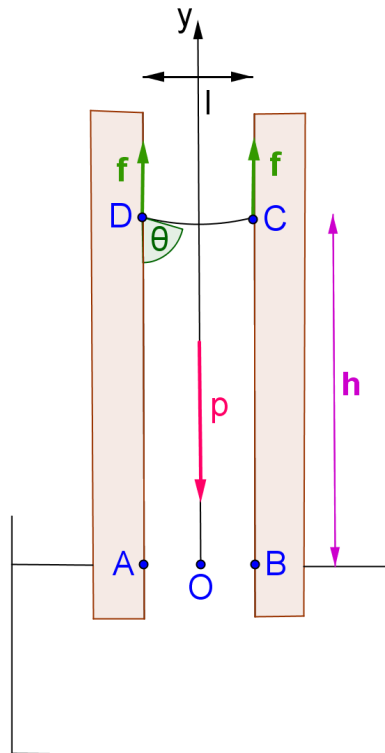
Autre démonstration : le liquide contenue entre les sections AB et CD est soumis à son poids  $\vec{p} = -\rho \pi r^2 h g \vec{u}_y$  et à la force de pression  $\pi r^2 (p_0 - p_-) \vec{u}_y = \pi r^2 (p_+ - p_-) \vec{u}_y = \pi r^2 \frac{2\gamma \cos \theta}{r} \vec{u}_y = 2\pi r \gamma \cos \theta \vec{u}_y$ . La somme de ces deux forces est nulle donc

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho gr}$$

La hauteur  $h$  est maximale (positive) pour  $\theta = 0^\circ$  (mouillage parfait) et minimale (négative) pour  $\theta = 180^\circ$  (non-mouillage complet).

### b) Entre deux lames parallèles

Plongeons dans un liquide deux lames de verre verticales parallèles, séparées par une distance  $l$ . Le liquide s'élève entre les lames à une hauteur  $h$  au-dessus du plan de la surface libre :



**Figure 11** : ascension capillaire d'un liquide entre deux lames de verre parallèles

Si l'angle de mouillage sur le verre égal à  $\theta \approx 0$ , les forces qui s'exercent sur le parallélépipède de liquide compris entre les sections AB et CD, de côtés  $dx$  (perpendiculaire au plan de la figure),  $l$  et  $h$  :

- la force capillaire vaut  $\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{dF_C} + \overrightarrow{dF_D} = \gamma dx \overrightarrow{u_y} + \gamma dx \overrightarrow{u_y} = 2\gamma dx \overrightarrow{u_y}$
- le poids vaut  $\overrightarrow{dp} = -\rho l h dx \overrightarrow{g} \overrightarrow{u_y}$

A l'équilibre,  $\overrightarrow{dF} + \overrightarrow{dp} = \vec{0}$ , la loi de JURIN s'écrit :

$$h = \frac{2\gamma}{\rho g l}$$

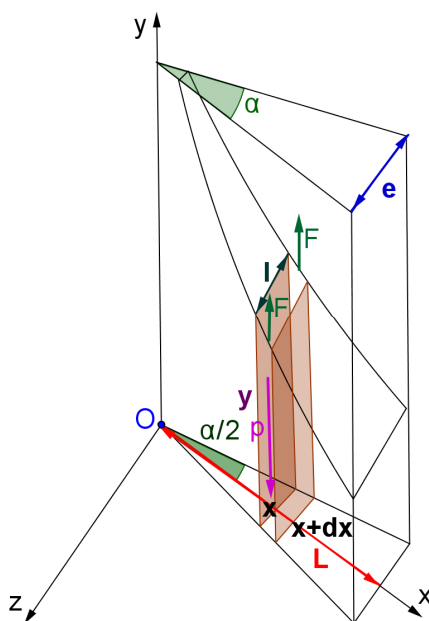
Pour une valeur quelconque  $\theta$  de l'angle de mouillage sur le verre, on assimile le ménisque à une portion de sphère de rayon  $R = \frac{l/2}{\cos \theta}$ . La pression juste en-dessous du ménisque vaut  $p_0 - \rho g h$  et celle juste au-dessus vaut  $p_0$ . On établit la **loi de JURIN** à partir de la loi de LAPLACE :

$$\rho g h = p_0 - (p_0 - \rho g h) = \gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \frac{\gamma}{R} = \frac{2\gamma \cos \theta}{l}$$

$$h = \frac{2\gamma \cos \theta}{\rho g l}$$

### c) Dans une cuve cunéiforme

Dans une cuve cunéiforme (en forme de coin) remplie de liquide coloré, le liquide s'élève là où les parois se rapprochent. La surface séparant le liquide de l'air situé au-dessus prend une forme de type hyperbolique :



**Figure 12** : ascension capillaire d'un liquide dans une cuve cunéiforme

Considérons les forces qui s'exercent sur le parallélépipède de liquide de côtés  $dx$ ,  $l$  et  $y$  :

- la force capillaire  $\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{dF_C} + \overrightarrow{dF_D} = \gamma dx \overrightarrow{u_y} + \gamma dx \overrightarrow{u_y} = 2\gamma dx \overrightarrow{u_y}$
- le poids  $\overrightarrow{dp} = -\rho l y dx g \overrightarrow{u_y}$

A l'équilibre,  $\overrightarrow{dF} + \overrightarrow{dp} = \vec{0}$ , la loi de JURIN s'écrit :

$$y = \frac{2\gamma}{\rho g l}$$

Comme

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2x} = \frac{e}{2L}$$

la loi de JURIN s'écrit finalement

$$y = \frac{2\gamma}{\rho g l} = \frac{a}{x}$$

où

$$a = \frac{\gamma}{\rho g \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{2L\gamma}{\rho g e}$$

Cette formule est valable si l'angle de mouillage sur le verre est nul :  $\theta \approx 0$ . Pour une valeur quelconque  $\theta$  de l'angle de mouillage sur le verre,

$$a = \frac{\gamma \cos \theta}{\rho g \tan \frac{\alpha}{2}} = \frac{2L\gamma \cos \theta}{\rho g e}$$

D'après [D, table 5.16, p.5.95], la tension superficielle de l'éthanol vaut, pour une température  $T$  comprise entre sa température de fusion  $-114^\circ\text{C}$  et sa température d'ébullition  $78,3^\circ\text{C}$  :

$$\gamma_{\text{éthanol}}(T = 20^\circ\text{C}) = 24,05 - 0,0832T(^{\circ}\text{C}) = 22,386 \text{ mN.m}^{-1}$$

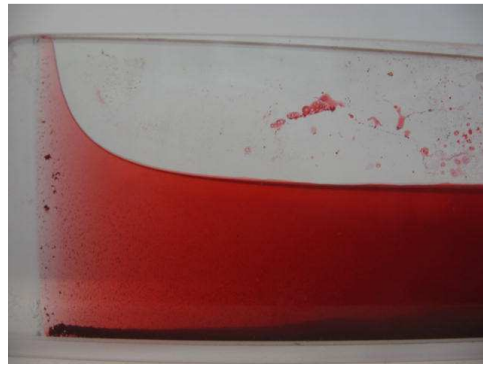
D'après [D, table 1.15, p.1.211], la masse volumique de l'éthanol à  $20^\circ\text{C}$  vaut  $\rho = 789,4 \text{ kg.m}^{-3}$ . Sachant que  $e = 10^{-2} \text{ m}$  ;  $L = 10^{-1} \text{ m}$  ;  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $\theta \approx 0$  ; on en déduit que

$$a = 0,5781.10^{-4} \text{ m}^2$$

## 2. Vérification expérimentale de la loi de JURIN dans une cuve cunéiforme

### a) Traitement de l'image avec le logiciel ImageJ

Ouvrir le logiciel ImageJ. Ouvrir la photographie : **File→Open→cuve cunéiforme.JPG** :



**Figure 13** : ascension capillaire d'un liquide (l'éthanol coloré) dans un tube capillaire

L'image fait 640 pixels de long sur 480 pixels de large ; 8-bit (inverting LUT) ; 300K.

La coordonnée  $x$  varie de 0 à 640 pixels de la gauche vers la droite.

La coordonnée  $y$  varie de 0 à 480 pixels du haut vers le bas.

La hauteur du liquide varie de  $y=41$  en haut à  $y=443$  en bas sur une hauteur de 4 cm.

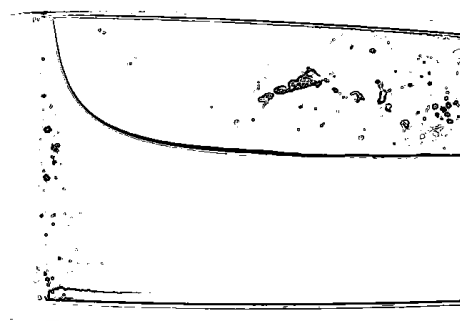
L'échelle est donc de 402 pixels pour 4 cm.

Surligner les points de changement brutal d'intensité : **Process→Find Edges** :



**Figure 14** : mise en évidence des points de changement brutal d'intensité

Convertir l'image en noir et blanc : **Process→Binary→Make Binary** :



**Figure 15** : mise en noir et blanc de l'image

Faire le contour de l'interface avec l'outil **Polygon selections**

Créer une nouvelle image : **File→New→Image**

Name : interface ; Type : 8-bit ; Fill With : White ; Width: 640 pixels ; Height: 400 pixels ; Slices: 1. Cliquer sur OK

Dans l'image « cuve cunéiforme », cliquer gauche sur l'interface et copier l'interface (**Control C**). Dans l'image « interface », cliquer gauche puis coller l'interface (**Control V**).

L'interface est copiée en noire sur fond blanc :



**Figure 16** : interface entre le liquide et l'air

(Si l'interface est copiée en blanc sur fond noir, il faut inverser les deux couleurs :

**Edit→Paste Control→Transfer Mode : Difference** )

Sauvegarder les coordonnées  $x$ - $y$  de tous les points de l'image « interface » :

**Analyze→Tools→Save XY Coordinates**

Background Value : 255

Ne pas cocher « Invert Y Coordinates » ni « Suppress Log Output »

Cliquer sur OK

**Save « interface.txt »** (3203 pixels, 1.04%). Il s'agit d'un tableau à 3 colonnes et 3203 lignes :

- la 1<sup>ère</sup> colonne représente l'abscisse  $x$  des points ;
- la 2<sup>e</sup> colonne représente l'ordonnée  $y$  des points ;
- la 3<sup>e</sup> colonne représente la couleur des points (noire = 0).





Tracer la courbe  $y = f(x)$

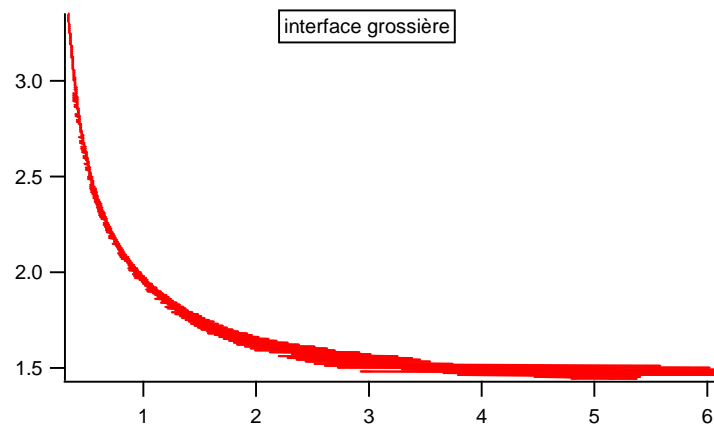
**Windows→New Graph**

**Y Waves : Ycm**

**X Wave : Xcm**

**Title: Interface grossière**

**Do It**



**Figure 18 :** interface grossière entre le liquide et l'air

Affiner la courbe  $y = f(x)$  :

**Macros spéciales→Ménisque→Macro**

**Taper : « extrait(Xcm, Ycm) »**

**Windows→New Graph**

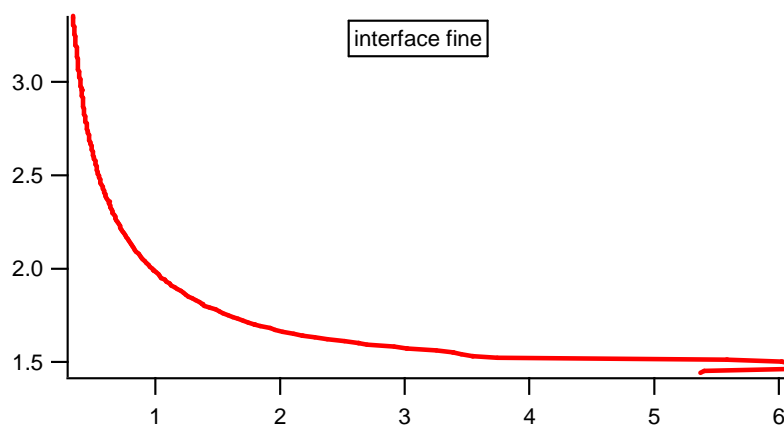
**Y Waves : base\_Y**

**X Wave : base\_X**

**Title: Interface fine**

**Do It**

La courbe « Interface fine » apparaît :



**Figure 19 :** interface fine entre le liquide et l'air

On constate qu'elle ne représente pas une fonction car il existe un intervalle de base\_X où il y a deux valeurs différentes de base\_Y pour une valeur donnée de base\_X. Pour que la courbe « Interface fine » représente une fonction, il faut donc supprimer des points.

Pour déterminer les points de la courbe « Interface fine » à supprimer :

**Graph→Show Info**

**Drag cursor A to graph trace.** Parcourir les points avec la flèche >.

On constate que les points 0 à 1144 doivent être supprimés.

**Graph→Hide Info**

Pour supprimer les points 0 à 1144 de la courbe « Interface fine » :

**Data→Delete Points**

**Dimension : rows**

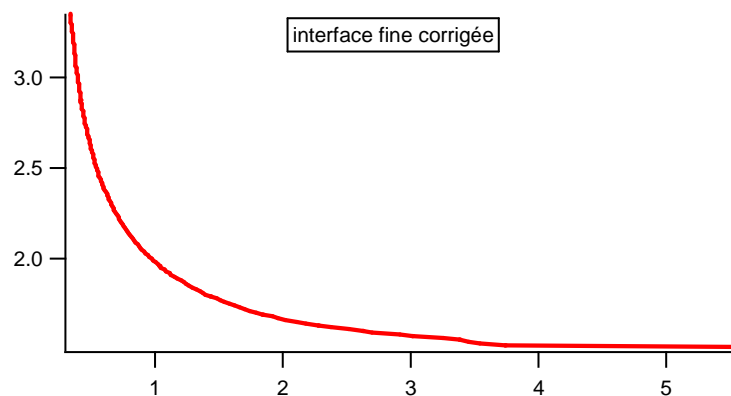
**First Point : 0**

**Number of points : 1145**

**Wave(s): sélectionner « base\_X » et « base\_Y »**

**Do It**

Les points 0 à 1144 de la courbe « Interface fine » sont supprimés :



**Figure 20 :** interface fine entre le liquide et l'air, corrigée par suppression des points indésirables

Remplacer le tracé continu par des points :

**Clic droit→Modify Trace Appearance**

**Mode : Dots**

**Size : 2**

Nommer les deux axes :

**Clic droit→Axis Properties**

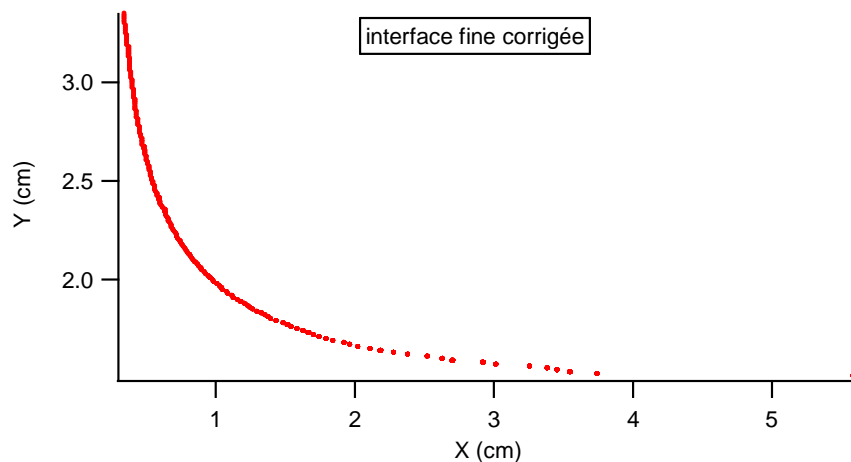
**Axis left : Axis label : Y (cm)**

**Axis Range :** la valeur minimale  $y = 1,5124378$  donne l'ordre de grandeur du coefficient  $c$  de la fonction  $f(x) = a / (x+b) + c$  définie ci-dessous.

**Axis bottom : Axis label : X (cm)**

**Axis Range :** la valeur minimale vaut  $x = 0,33830845$

**Do It**



**Figure 21 :** interface entre le liquide et l'air

Pour déterminer l'équation de l'hyperbole :

**Analysis→Curve Fitting**

Function and Data : « fit\_hyp » de la forme  $f(x) = a / (x+b) + c$

Y Data: base\_Y ; X Data: base\_X

Spécifier la valeur des coefficients (en utilisant un point et non une virgule pour séparer les unités des dixièmes) :

On a montré que  $a = 0,5781\text{cm}^2$ . Prenons  $a = 1$ . Par ailleurs, prenons  $b = 0$  et  $c = 0$ .

La fonction hyperbole est tracée en rouge sur les points rouges. Dans la fenêtre Curve Fit

Fitting to : fit\_hyp

Pass	chi square	K0	K1	K2
3	0.239202	0.551938	-0.0533913	1.38739

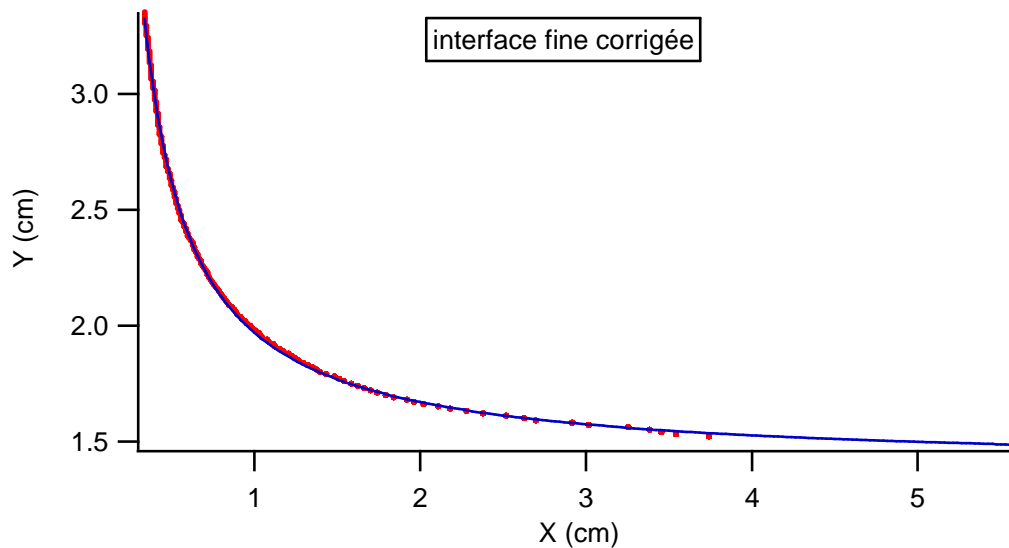
cliquer sur OK. Noter les valeurs des coefficients qui apparaissent :

$$a = 0,55194 \pm 0,00116 \text{ cm}^2$$

$$b = -0,053387 \pm 0,000678 \text{ cm}$$

$$c = 1,3874 \pm 0,000566 \text{ cm}$$

Pour mettre la courbe en bleu, clic droit sur la courbe, spécifier « color » bleu.



**Figure 22 :** fonction hyperbolique représentant l'interface entre le liquide et l'air

Puisque  $a = 0,55194 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ , la tension superficielle de l'éthanol vaut :

$$\gamma = \frac{\rho g e a}{2L} = 21,4 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

Sachant que  $\Delta e = \Delta L = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  et  $\Delta a = 1,16 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2$ , l'incertitude relative sur  $\gamma$  vaut

$$\frac{\Delta \gamma}{\gamma} = \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta a}{a} = (50 + 5 + 2,1) \cdot 10^{-3} = 5,71\%$$

L'incertitude absolue sur  $\gamma$  vaut  $\Delta \gamma = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Conclusion : la valeur expérimentale

$$\gamma = 21,4 \pm 1,2 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1} \Leftrightarrow 20,2 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1} \leq \gamma \leq 22,6 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$$

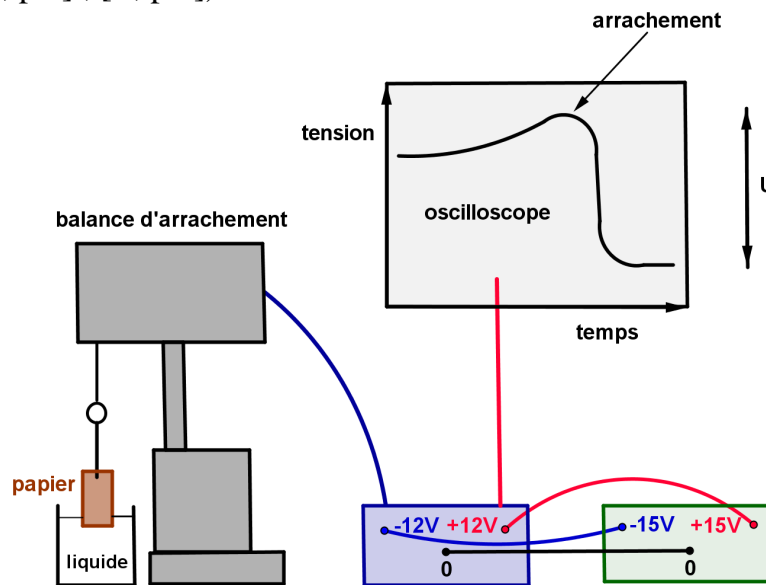
est compatible avec la valeur tabulée

$$\gamma_{\text{éthanol}}(T = 20^\circ\text{C}) = 24,05 - 0,0832T(^{\circ}\text{C}) = 22,386 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$$

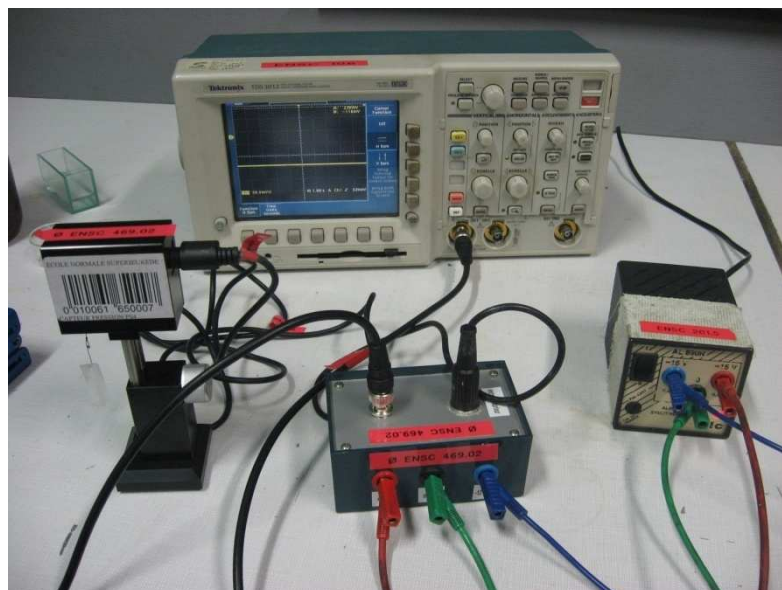
# III. Mesure statique de la tension superficielle avec une balance d'arrachement

## 1. Méthode d'arrachement de la lame de WILHELMY

Une fine plaque de platine ou une fine lame de microscope (ou un cylindre) est suspendue à l'un des bras d'une balance et plonge dans un liquide contenu dans un réservoir. La tension superficielle est déterminée en mesurant la traction au moment où la lame se détache de la surface. C'est la **méthode (d'arrachement ou de détachement) de la lame de WILHELMY** ([G, pp.62-63] ; [N, p.8] ; [E, p.7]).



**Figure 23 :** schéma de la balance d'arrachement permettant de mesurer la force capillaire s'exerçant sur une lame de papier en contact avec un bain de liquide (méthode de la lame de WILHELMY)



**Figure 24 :** balance d'arrachement permettant de mesurer la force capillaire s'exerçant sur une lame de papier en contact avec un bain de liquide (méthode de la lame de WILHELMY)

## 2. Etalonnage de la balance d'arrachement

Le domaine dans lequel on utilise la balance est linéaire : si on applique une force  $F$  sur le croché, la tension  $V$  mesurée vaut

$$F = aV + b \Rightarrow F_2 - F_1 = a(V_2 - V_1)$$

Pour trouver la valeur du coefficient  $a$ , **on étalonne la balance à l'aide d'une masse  $m = 100$  mg**. On règle le calibre de l'oscilloscope à 1 s / carreau et 60 mV / carreau.

On mesure la différence entre le potentiel avec la masse et le potentiel sans la masse :

$$U_m = U_{\text{avec masse}} - U_{\text{sans masse}} = (404 \pm 6) \text{ mV}$$

$$\Delta U_m = \Delta U_{\text{avec masse}} + \Delta U_{\text{sans masse}} = 3 + 3 = 6 \text{ mV}$$

Cette différence de potentiel  $U_m$  est proportionnelle au poids  $mg$  qui s'exerce sur la masse. Le coefficient de proportionnalité vaut

$$a = \frac{mg}{U_m} = \frac{9,81 \cdot 10^{-4}}{0,404} = 2,43 \text{ mN.V}^{-1}$$

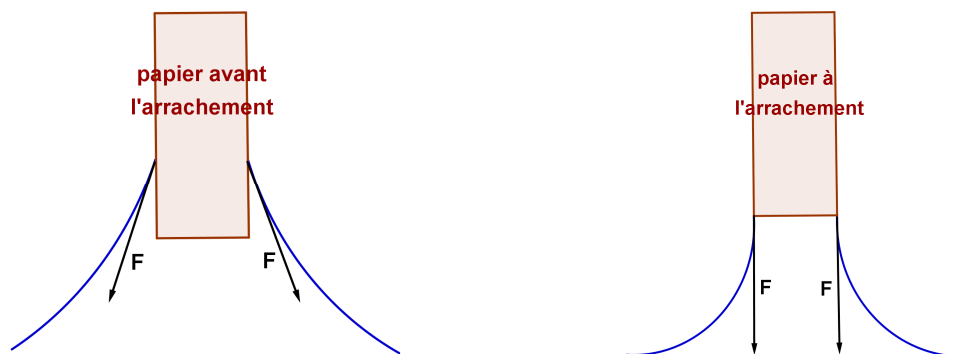
avec une incertitude relative égale à

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta U_m}{U_m} = \frac{1}{100} + \frac{6}{404} = 2,5\%$$

## 3. Mesure de la tension superficielle

Considérons un morceau de papier rectangulaire de largeur  $L = 1,2 \pm 0,05$  cm et d'épaisseur  $\varepsilon \ll L$ . On place en-dessous une cuve contenant un liquide de tension superficielle  $\gamma$ . On manipule avec des gants pour éviter les pollutions (le gras sur les doigts agit comme une **espèce tensio-active**, c'est-à-dire s'adsorbant fortement aux surfaces et diminuant leur tension superficielle). On trempe complètement le morceau de papier dans le liquide. Puis on le soulève en montant la potence de la balance ou on abaisse la cuve de sorte que seul l'arête inférieure du rectangle de papier, de périmètre  $p = 2L + 2\varepsilon \approx 2L$ , soit en contact avec le liquide.

A l'arrachement, la force totale qui s'exerce sur le morceau de papier est la somme de son poids  $\vec{p} = -mg\vec{u}_z$ , de la tension  $\vec{T}$  du fil et de la force capillaire  $\vec{F} = -p\gamma\vec{u}_z$ .



**Figure 25 :** Force capillaire s'exerçant sur un petit objet au contact d'un liquide. A l'instant où l'on retire l'objet, la force passe par un maximum et devient verticale (à droite).

Après l'arrachement, la force totale qui s'exerce sur le morceau de papier est la somme de son poids  $\vec{p} = -mg\vec{u}_z$  et de la tension  $\vec{T}$  du fil.

On choisit comme liquide l'éthanol  $\text{CH}_3\text{-CH}_2\text{OH}$ . On règle le calibre de l'oscilloscope à 1 s / carreau et 35 mV / carreau. On mesure la différence entre le potentiel à l'arrachement et le potentiel après l'arrachement. Il faut faire les deux mesures très rapprochées dans le temps pour

pouvoir négliger l'évaporation de l'éthanol dont le papier est imprégné entre l'instant d'arrachement et l'instant après arrachement. On obtient

$$U = U_{\text{à l'arrachement}} - U_{\text{après l'arrachement}} = (221 \pm 3) \text{ mV}$$

$$\Delta U = \Delta U_{\text{à l'arrachement}} + \Delta U_{\text{après l'arrachement}} = 1 + 2 = 3 \text{ mV}$$

Le module de la force capillaire vaut

$$aU = F = p\gamma \approx 2L\gamma$$

La tension superficielle du liquide éthanol vaut

$$\gamma = \frac{a}{2L} U = (22,4 \pm 1,8) \text{ mN.m}^{-1}$$

avec une incertitude égale à

$$\Delta\gamma = \gamma \left( \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta U}{U} \right) = 22,4 \cdot 10^{-3} \times \left( \frac{1}{100} + \frac{6}{404} + \frac{0,05}{1,2} + \frac{3}{221} \right) = 1,8 \text{ mN.m}^{-1}$$

$$20,6 \text{ mN.m}^{-1} \leq \gamma \leq 24,2 \text{ mN.m}^{-1}$$

Cette valeur est compatible avec la valeur tabulée dans [D, table 5.16, p.5.95] : la tension superficielle de l'éthanol vaut, pour une température  $T$  comprise entre sa température de fusion  $-114^\circ\text{C}$  et sa température d'ébullition  $78,3^\circ\text{C}$  :

$$\gamma_{\text{éthanol}}(24,3^\circ\text{C}) = 24,05 - 0,0832 \times 24,3 = 22,03 \text{ mN.m}^{-1}$$

Dans l'eau, on mesure  $U = (370 \pm 4) \text{ mV}$  donc  $\gamma_{\text{eau}} = 37,5 \pm 3,0 \text{ mN.m}^{-1}$ . Cette valeur correspond à de l'eau contenant des impuretés. Elle vaut à peu près la moitié de la valeur tabulée  $\gamma_{\text{eau pure}}(20^\circ\text{C}) = 72,79 \text{ mN.m}^{-1}$ .

On pourrait également faire la mesure avec l'acétone et comparer la valeur obtenue avec la valeur tabulée dans [D, table 5.16, p.5.90] : la tension superficielle de l'acétone vaut, pour une température  $T$  comprise entre sa température de fusion  $-94^\circ\text{C}$  et sa température d'ébullition  $56^\circ\text{C}$  :

$$\gamma_{\text{acétone}}(T = 20^\circ\text{C}) = 26,26 - 0,112T(^{\circ}\text{C}) = 24,02 \text{ mN.m}^{-1}$$

# IV. Mesure dynamique de la tension superficielle

## 1. Par stalagmométrie (méthode des gouttes tombantes)

### a) Loi de TATE (1864)

Juste avant qu'une goutte de masse  $m_{\text{suspendue}}$  ne se détache du reste de liquide contenu dans un tube capillaire, cette goutte est soumise à son poids  $\vec{p} = -m_{\text{suspendue}}g\vec{u}_z$  et à la force capillaire  $\vec{F} = 2\pi r\gamma\vec{u}_z$ , où  $r$  est le rayon du cercle de la section de la goutte à l'endroit où elle se détache.

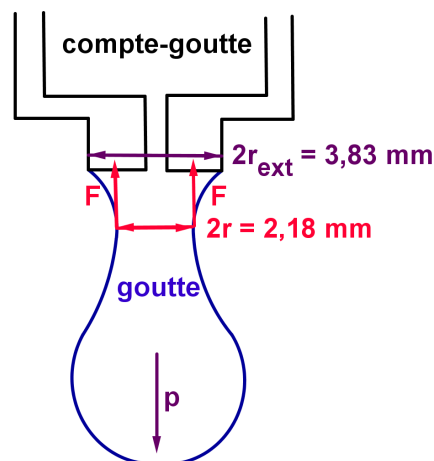


Figure 26 : détachement d'une goutte de liquide

L'équilibre  $\vec{0} = \vec{p} + \vec{F}$  donne la **loi de TATE** [P, p.421 et p.425], établie par T. TATE en 1864 [T] :

$$\frac{\gamma}{m_{\text{suspendue}}} = \frac{g}{2\pi r}$$

qui est une constante indépendante du liquide. Pour deux liquides différents 1 et 2 tombant dans le même compte-goutte, on a donc :

$$\frac{\gamma_1}{m_{1\text{suspendue}}} = \frac{\gamma_2}{m_{2\text{suspendue}}} = \frac{g}{2\pi r}$$

En supposant qu'une fraction  $f \leq 1$  de la goutte suspendue de masse  $m_{\text{suspendue}}$  se détache (l'autre fraction restant suspendue au compte-goutte), la masse de la goutte détachée vaut :

$$m_{\text{détachée}} = f m_{\text{suspendue}}$$

$f$  dépend de  $rV^{-1/3}$  où  $V$  est le volume de la goutte. La **loi de TATE** s'écrit donc ([N, p.5] ; [E, p.9]) :

$$\frac{\gamma}{m_{\text{détachée}}} = \frac{g}{2\pi r f}$$

### b) Vérification expérimentale

On cherche à vérifier la loi de TATE en supposant que le facteur de correction  $f=1$ . La masse d'une goutte vaut :

$$m_{\text{détachée}} = m_{\text{suspendue}} = m$$



Soit un liquide de masse  $M$  contenant  $n$  gouttes. Pour déterminer la masse  $m = \frac{M}{n}$  d'une goutte de liquide, il y a deux façons de procéder :

- 1<sup>ère</sup> méthode :

On remplit un compte-goutte d'une masse  $M$  connue du liquide que l'on vide goutte à goutte. On compte le nombre  $n$  de gouttes.

- 2<sup>e</sup> méthode :

On fait tomber un nombre déterminé de gouttes ( $n \geq 100$ ) dans un récipient taré posé sur une balance. On mesure la masse  $M$  des  $n$  gouttes.

On choisit la 2<sup>e</sup> méthode : à l'aide de la balance Ohaus® Pionner™, on mesure avec la précision  $\Delta m = 0,01$  g la masse  $M$  de  $n=100$  gouttes d'un liquide. On en déduit la masse  $m = \frac{M}{n}$  d'une goutte de liquide.



**Figure :** Mesure de la masse de 100 gouttes d'un liquide (l'huile d'olive).

Pour les valeurs de tension superficielle des liquides à 20°C au contact de l'air, on peut se référer à [D, table 5.16] :

Acétone  $\text{CH}_3\text{--CO--CH}_3$  : pour une température  $T$  comprise entre sa température de fusion - 94°C et sa température d'ébullition 56°C [D, table 5.16, p.5.90] :

$$\gamma(20^\circ\text{C}) = 26,26 - 0,112T(^{\circ}\text{C}) = 24,02 \text{ mN.m}^{-1}$$

Ethanol  $\text{CH}_3\text{--CH}_2\text{OH}$  ; pour une température  $T$  comprise entre sa température de fusion -114°C et sa température d'ébullition 78,3°C [D, table 5.16, p.5.95] :

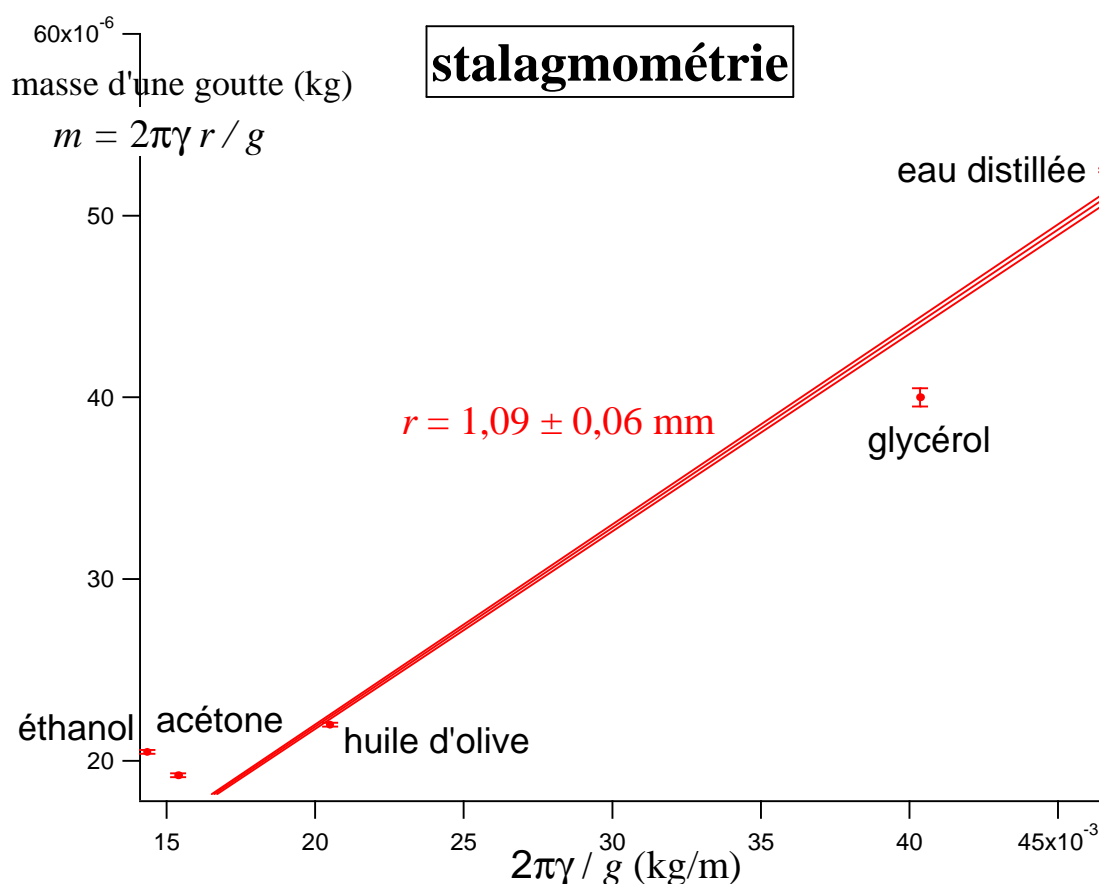
$$\gamma(20^\circ\text{C}) = 24,05 - 0,0832T(^{\circ}\text{C}) = 22,386 \text{ mN.m}^{-1}$$

Glycérol (ou glycérine)  $\text{HOCH}_2\text{--CHOH--CH}_2\text{OH}$   $\gamma(20^\circ\text{C}) = 63 \text{ mN.m}^{-1}$

Si on trace  $y = m$  en fonction de  $x = \frac{2\pi\gamma}{g}$ , la loi de TATE s'écrit

$$m = r \frac{2\pi\gamma}{g} \Leftrightarrow y = rx$$

liquide	masse $M$ de $n$ gouttes (en g à $\Delta M = 0,01$ g près)	nombre $n$ de gouttes	masse $m$ d'une goutte (g) $m = \frac{M}{n}$	incertitude sur la masse $m$ d'une goutte (g) $\Delta m = \frac{\Delta M}{n}$	tension superficielle $\gamma$ tabulée à 20°C (mN.m <sup>-1</sup> )	rayon du cercle de la section de la goutte à l'endroit où elle se détache $r = \frac{mg}{2\pi\gamma}$ (mm)
éthanol	2,05	100	0,0205	10 <sup>-4</sup>	22,39	1,43
acétone	1,92	100	0,0192	10 <sup>-4</sup>	24,02	1,25
huile d'olive	2,20	100	0,0220	10 <sup>-4</sup>	32	1,07
glycérol/glycérine	0,80	20	0,0400	5.10 <sup>-4</sup>	63	0,991
eau distillée	5,25	100	0,0525	10 <sup>-4</sup>	72,79	1,13



**Figure :** vérification expérimentale de la loi de TATE, qui suppose constant le rayon  $r$  du cercle de la section de la goutte à l'endroit où elle se détache d'un compte-goutte donné

Remarque pour les liquides visqueux : il faut 16 minutes pour faire tomber 100 gouttes d'huile d'olive, et 15 minutes pour faire tomber 20 gouttes de glycérol.

La fonction « Curve Fitting line » du logiciel Igor6 donne, en imposant  $a = 0$  :

fonction	$b = r$ (m)
$y = a + bx$	$0,0010939 \pm 5,09.10^{-5}$
$y + \Delta y = a + bx$	$0,0011003 \pm 4,96.10^{-5}$
$y - \Delta y = a + bx$	$0,0010875 \pm 5,23.10^{-5}$

On retiendra donc :

$$1,04 \text{ mm} \leq r \leq 1,15 \text{ mm}$$

$$r = 1,09 \pm 0,06 \text{ mm}$$

Cette valeur est inférieure au rayon extérieur du compte-goutte, égal à  $1,915 \pm 0,005$  mm.

On mesure ensuite la masse de 100 gouttes d'eau du robinet :  $M = 5,64$  g. La masse d'une goutte d'eau du robinet vaut donc  $m = 0,0564$  g. On en déduit la tension superficielle de l'eau du robinet :

$$\gamma_{\text{eau robinet}} = \frac{g}{2\pi r} m = 80,8 \text{ mN.m}^{-1}$$

avec une incertitude égale à

$$\Delta\gamma_{\text{eau robinet}} = \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta r}{r} \right) \gamma_{\text{eau robinet}} = \left( \frac{0,0001}{0,0564} + \frac{0,06}{1,09} \right) \times 80,8 \text{ mN.m}^{-1} = 4,6 \text{ mN.m}^{-1}$$

$$76,2 \text{ mN.m}^{-1} \leq \gamma_{\text{eau robinet}} \leq 85,4 \text{ mN.m}^{-1}$$

Cette valeur est proche de  $\gamma_{\text{eau pure}}(20^\circ\text{C}) = 72,79 \text{ mN.m}^{-1}$ .

## 2. Dans une cuve à ondes

### a) Equation de propagation d'une onde linéaire à la surface d'un fluide parfait

Considérons la propagation d'une onde linéaire à la surface d'un fluide **parfait** (c'est-à-dire non visqueux) [G, p.328-333]. L'onde a pour fréquence  $\nu$ , pulsation  $\omega = 2\pi\nu$ , longueur d'onde  $\lambda$ , vecteur d'onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Elle se propage suivant l'axe des  $x$  à la vitesse

$$c = \lambda\nu = \frac{\lambda}{2\pi} 2\pi\nu = \frac{\omega}{k}$$

à la surface d'une couche de liquide d'épaisseur moyenne  $h$ , limitée inférieurement par le plan horizontal  $y = 0$  (l'axe des  $y$  étant dirigé vers le haut), de masse volumique  $\rho$  constante et de tension superficielle  $\gamma$ .

L'écoulement est supposé **irrotationnel** ( $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} = \vec{0}$ ). On cherche des ondes bidimensionnelles caractérisées par le potentiel des vitesses  $\Phi(x, y, t)$  défini par  $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\Phi$ . L'écoulement est supposé **incompressible** ( $\text{div}\vec{v} = 0$ ), donc  $\Phi$  vérifie l'**équation de LAPLACE**

$$\Delta\Phi = 0$$

L'**équation de BERNOULLI** pour cet écoulement instationnaire, homogène, parfait, incompressible et irrotationnel s'écrit (cf. [S, p.443]) :

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gy = 0$$

Si on néglige l'énergie cinétique massique  $\frac{v^2}{2}$ , l'accélération convective  $\vec{v} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \frac{v^2}{2} + \overrightarrow{\text{rot}}\vec{v} \wedge \vec{v}$  a un module négligeable devant celui de l'accélération locale  $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}$ , et l'équation de BERNOULLI devient

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gy = 0$$

On suppose que la courbure de la surface reste faible, donc  $\frac{\partial y_0}{\partial x}(x, t) \ll 1$  où  $y_0(x, t)$  est la hauteur instantanée de la surface par rapport au fond.

La loi de LAPLACE donne

$$p_0 - p = \gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right)$$

où  $p_0$  est la pression extérieure au-dessus de l'interface,  $p$  est la pression intérieure en-dessous de l'interface,  $\frac{1}{R} = \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}$  est la courbure locale instantanée de la surface, et  $R' \rightarrow \infty$ .

$$p = p_0 - \gamma \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}$$

**Au fond du récipient (en  $y = 0$ ), la vitesse du fluide normale à la surface est nulle donc**

$$\vec{v}(x, y = 0, t) \cdot \vec{u}_y = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$$

Si on néglige l'effet du mouvement convectif horizontal sur le déplacement de l'interface, **la composante verticale de la vitesse du fluide sur l'interface est égale à celle de l'interface :**

$$\vec{v}(x, y = y_0, t) \cdot \vec{u}_y = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=y_0} = \frac{\partial y_0}{\partial t}$$

On cherche les solutions de l'équation de LAPLACE sous la forme :

$$\Phi(x, y, t) = F(u)G(y)$$

où  $u = x - ct \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = 1$ .

$$0 = \Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = G \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + F \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = G \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + F \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \Rightarrow \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2}$$

Donc

$$\begin{cases} \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = -k^2 < 0 \\ \frac{1}{G} \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = k^2 > 0 \end{cases}$$

où  $k$  est une constante indépendante  $x$ ,  $y$  et  $t$ , choisie réelle pour que  $F$  ne diverge pas.

$$\begin{cases} F(u) = Ae^{jku} + Be^{-jku} \\ G(y) = Ce^{ky} + De^{-ky} \end{cases}$$

$$\Phi(x, y, t) = [Ae^{jk(x-ct)} + Be^{-jk(x-ct)}][Ce^{ky} + De^{-ky}]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = k[Ae^{jk(x-ct)} + Be^{-jk(x-ct)}][Ce^{ky} - De^{-ky}]$$

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$\begin{cases} 0 = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=0} = k[Ae^{jk(x-ct)} + Be^{-jk(x-ct)}][C - D] \\ \frac{\partial y_0}{\partial t} = \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=y_0} = k[Ae^{jk(x-ct)} + Be^{-jk(x-ct)}][Ce^{ky_0} - De^{-ky_0}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = C \\ \frac{\partial y_0}{\partial t} = 2kC[Ae^{ja(k-ct)} + Be^{-ja(k-ct)}]\text{sh}(ky_0) \end{cases}$$

$$\Phi(x, y, t) = 2C[Ae^{jk(x-ct)} + Be^{-jk(x-ct)}]\text{ch}(ky)$$

Dérivons par rapport au temps l'équation de BERNOUILLI sur l'interface ( $y = y_0$ ) :

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gy \right)_{y=y_0} = \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \right)_{y=y_0} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial t} \right)_{y=y_0} + g \frac{\partial y_0}{\partial t}$$

Comme  $p = p_0 - \gamma \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{\partial p}{\partial t} = -\gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{\partial y_0}{\partial t} \right)$  et  $\left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=y_0} = \frac{\partial y_0}{\partial t}$  :

$$\left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{\gamma}{\rho} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right)_{y=y_0} = 0$$

Sachant que

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -k^2 c^2 \Phi \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2kC [Ae^{jk(x-ct)} + Be^{-jk(x-ct)}] \text{sh}(ky) \\ \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} = -k^2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} \end{cases}$$

on obtient

$$0 = -k^2 c^2 \Phi(y = y_0) + \left( g + \frac{\gamma}{\rho} k^2 \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=y_0}$$

$$k^2 c^2 \Phi(y = y_0) = \left( g + \frac{\gamma}{\rho} k^2 \right) \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{y=y_0}$$

$$k^2 c^2 \cdot 2C [Ae^{jk(x-ct)} + Be^{-jk(x-ct)}] \text{ch}(ky_0) = \left( g + \frac{\gamma}{\rho} k^2 \right) \cdot 2kC [Ae^{jk(x-ct)} + Be^{-jk(x-ct)}] \text{sh}(ky_0)$$

$$kc^2 \text{ch}(ay_0) = \left( g + \frac{\gamma}{\rho} k^2 \right) \text{sh}(ky_0)$$

avec  $y_0 = h$  en moyenne.

Conclusion : le carré de la vitesse de propagation de l'onde linéaire à la surface du fluide parfait vaut

$$c^2 = \left( g + \frac{\gamma}{\rho} k^2 \right) \frac{\text{th}(hk)}{k} = \left( 1 + \frac{\gamma}{\rho g} k^2 \right) \frac{g}{k} \text{th}(hk) = (1 + k^2 \ell_c^2) \frac{g}{k} \text{th}(hk)$$

où la longueur capillaire vaut

$$\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$

En **eau profonde**,  $h \gg \lambda = \frac{2\pi}{k}$ , alors  $hk \gg 1$  et  $\text{th}(hk) \approx 1 \Rightarrow c^2 \approx (1 + k^2 \ell_c^2) \frac{g}{k} = \left( \frac{1}{k} + k \ell_c^2 \right) g = \left( \frac{\lambda}{2\pi} + \frac{2\pi}{\lambda} \ell_c^2 \right) g$ .

Le signe de

$$\frac{dc}{d\lambda} = \left( \frac{1}{2\pi} - \frac{2\pi}{\lambda^2} \ell_c^2 \right) g = [\lambda^2 - (2\pi \ell_c)^2] \frac{g}{2\pi \lambda^2} = (\lambda - 2\pi \ell_c) \frac{(\lambda + 2\pi \ell_c) g}{2\pi \lambda^2}$$

est celui de  $(\lambda - 2\pi \ell_c)$ .

La fonction  $c(\lambda)$  est décroissante si  $\lambda \leq 2\pi \ell_c$  et croissante si  $\lambda \geq 2\pi \ell_c$ .

La vitesse  $c(\lambda)$  prend sa valeur minimale  $2\ell_c g$  pour  $\lambda = 2\pi \ell_c$ .

Si  $\lambda \ll \ell_c$ ,  $k \ell_c \gg 1$ ,  $c^2 \approx k^2 \ell_c^2 \frac{g}{k} \Rightarrow c \approx k \ell_c \sqrt{\frac{g}{k}} = \ell_c \sqrt{gk} = \sqrt{\frac{k\gamma}{\rho}} = \ell_c \sqrt{g \frac{2\pi}{\lambda}}$ . Il s'agit d'une

**onde capillaire**.

Si  $\lambda \gg \ell_c$ ,  $k\ell_c \ll 1$ ,  $c^2 \approx \frac{g}{k} \Rightarrow c \approx \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$ . Il s'agit d'une **onde de gravité**, comme la houle à la surface de la mer. Pour des vagues régies par la gravité, les plus grandes longueurs d'onde arrivent en premier à la plage.

En **eau peu profonde**,  $h \ll \lambda = \frac{2\pi}{k}$ , alors  $hk \ll 1$  et  $\text{th}(hk) \approx hk \Rightarrow c^2 \approx (1 + k^2\ell_c^2)gh = \left(1 + \frac{4\pi^2}{\lambda^2}\ell_c^2\right)gh$  est une fonction décroissante de  $\lambda$  et une fonction croissante de  $h$ . On explique ainsi le **déferlement des vagues** : la vitesse de propagation est plus grande à la crête d'une vague qu'à sa base.

Si  $\lambda \ll \ell_c$ ,  $k\ell_c \gg 1$ ,  $c^2 \approx k^2\ell_c^2gh = k^2\frac{\gamma h}{\rho} \Rightarrow c \approx k\sqrt{\frac{\gamma h}{\rho}} = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\frac{\gamma h}{\rho}}$ . Il s'agit d'une **onde capillaire**.

Si  $\lambda \gg \ell_c$ ,  $k\ell_c \ll 1$ ,  $c^2 \approx gh \Rightarrow c \approx \sqrt{gh}$ . Il s'agit d'une **onde de gravité**.

L'équation de propagation de l'onde linéaire à la surface du fluide parfait

$$\frac{4\pi^2\nu^2}{k^2} = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 = \left(1 + \frac{\gamma}{\rho g}k^2\right)\frac{g}{k}\text{th}(hk)$$

s'écrit finalement :

$$\frac{4\pi^2\nu^2}{k\text{th}(hk)} = g + \gamma\frac{k^2}{\rho}$$

## b) Vérification expérimentale

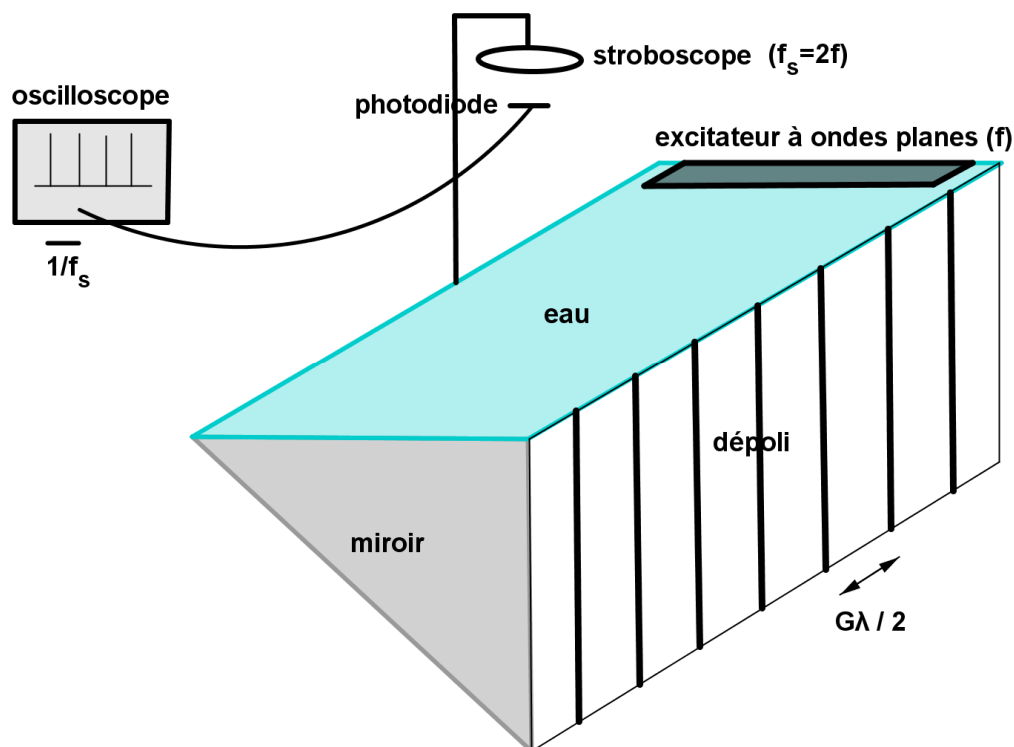


Figure 27 : cuve à ondes



**Figure 28** : cuve à ondes (réf. Matlabo AC-03A)

La cuve est constituée d'un cadre cuvette à fond transparent de dimensions 60×50 cm, comportant sur son pourtour un dispositif amortisseur en mousse alvéolée destiné à absorber les réflexions des ondes parasites. Un système d'évacuation d'eau commandé par une pince de Mohr permet le réglage en hauteur de l'eau dans la cuve et sa vidange totale. Le cadre est monté sur trois tiges verticales dont deux sont équipées de vis calantes de mise à niveau. Une source lumineuse (lampe à iode de 70 W) est placée au-dessus de la cuve par l'intermédiaire d'un bras rigide, réglable en hauteur, fixé sur le bord de la cuve. Un système stroboscopique est monté articulé par rapport à la source lumineuse. Sous la cuve est posé un miroir incliné et calé à 45°, renvoyant le faisceau lumineux incident vers un écran amovible en plexiglas dépoli de 60×38 cm. En enlevant le miroir et l'écran en plexiglas, l'image se forme horizontalement sur la table.

On nettoie la cuve, le miroir de projection et le plexiglas dépoli avec un produit pour vitres (ou avec de l'acétone puis de l'éthanol). Veuillez ne pas utiliser de produit de nettoyage à base de silicone. On règle l'horizontalité de la cuve à l'aide d'un niveau à bulle.

Il n'est pas opportun de remplir la cuve d'eau pure (distillée) car elle serait très vite polluée par les poussières environnantes, ce qui modifierait la valeur de sa tension superficielle  $\gamma_{\text{eau pure}}(20^\circ\text{C}) = 72,79 \text{ mN.m}^{-1}$ . La cuve est donc remplie d'eau du robinet (bien propre), sur une hauteur  $h = 7 \text{ mm}$  mesurée avec une incertitude  $\Delta h = 1 \text{ mm}$ . On affine l'horizontalité de la cuve de sorte de la hauteur d'eau  $h$  soit uniforme sur l'ensemble de la cuve.

On place dans la cuve le générateur d'ondes planes en forme de U, parallèlement au petit côté de la cuve et à proximité de la languette de mousse (les vis de réglage d'inclinaison face au champ d'expérience). A l'aide de ces vis on règle l'inclinaison du U de façon à ce que l'arête affleure la surface du liquide et que l'on obtienne un phénomène de tension superficielle. On relie le tuyau cristal au générateur pneumatique.

On met en marche l'excitateur d'ondes planes à la surface de l'eau. A l'aide du potentiomètre « excitateur », on fait varier sa fréquence  $\nu$  (mais on ne peut pas la mesurer). Pour observer le phénomène d'ondes planes dans les meilleures conditions, on utilise des fréquences basses.

Pour effectuer les mesures de vitesse de propagation  $c = \lambda\nu$ , on stabilise l'image des vagues d'eau projetée sur l'écran dépoli à l'aide du stroboscope. On met en route le disque stroboscopique en l'amenant dans le champ d'éclairage. A l'aide du potentiomètre « stroboscope », on fait varier sa fréquence  $\nu_s$  et on mesure cette dernière à l'aide d'une photodiode placée sous le stroboscope et branchée à un oscilloscope. L'incertitude sur la mesure est  $\Delta\nu_s = 0,5$  Hz. L'amplitude des pics valant 247 mV, on choisit comme calibre de l'oscilloscope 50 mV par carreau. Comme la fréquence  $\nu_s$  varie dans notre expérience de 27 à 56 Hz, on choisit comme calibre temporel de l'oscilloscope 20 ms par carreau (de sorte que 5 à 11 pics soient visibles sur l'écran).

On obtient sur le dépoli, de grandissement  $G = 1,72$ , une image formée d'une alternance de traits sombres et brillants qui se déplacent ensemble. Une fois fixée la fréquence  $\nu$  de l'excitateur, on fait varier la fréquence  $\nu_s$  du stroboscope de façon à immobiliser l'alternance de traits sombres et brillants sur le dépoli. Cela se produit :

- si  $\nu_s = \nu$ , alors la distance entre deux traits sombres verticaux sur le dépoli vaut  $G\lambda$ , produit du grandissement  $G$  par la longueur d'onde  $\lambda$  de l'onde se propageant à la surface de l'eau ;
- si  $\nu_s = 2\nu$ , alors la distance entre deux traits sombres verticaux sur le dépoli vaut  $G\lambda/2$ .

On règle  $\nu_s = 2\nu$ . En mesurant la distance  $L = 10G\frac{\lambda}{2} = 5G\lambda$  entre 10 traits sombres verticaux, avec une précision de  $\Delta L = 2$  mm, on en déduit le module du vecteur d'onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{10G\pi}{L}$  associé à la longueur d'onde  $\lambda$ . L'équation de propagation de l'onde à la surface de l'eau s'écrit

$$\frac{4\pi^2\nu^2}{k \operatorname{th}(hk)} = g + \gamma \frac{k^2}{\rho} \Leftrightarrow y = a + bx$$

où  $x = \frac{k^2}{\rho} = \frac{4\pi^2}{\rho\lambda^2}$  ;  $y = \frac{4\pi^2\nu^2}{k \operatorname{th}(hk)} = \frac{2\pi\nu^2\lambda}{\operatorname{th}(\frac{2\pi h}{\lambda})}$  ;  $a = g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $b = \gamma \approx 50 \text{ mN.m}^{-1}$

A l'aide des couples de points mesurés  $(\nu_s ; L)$ , on trace  $y = a + bx$ .

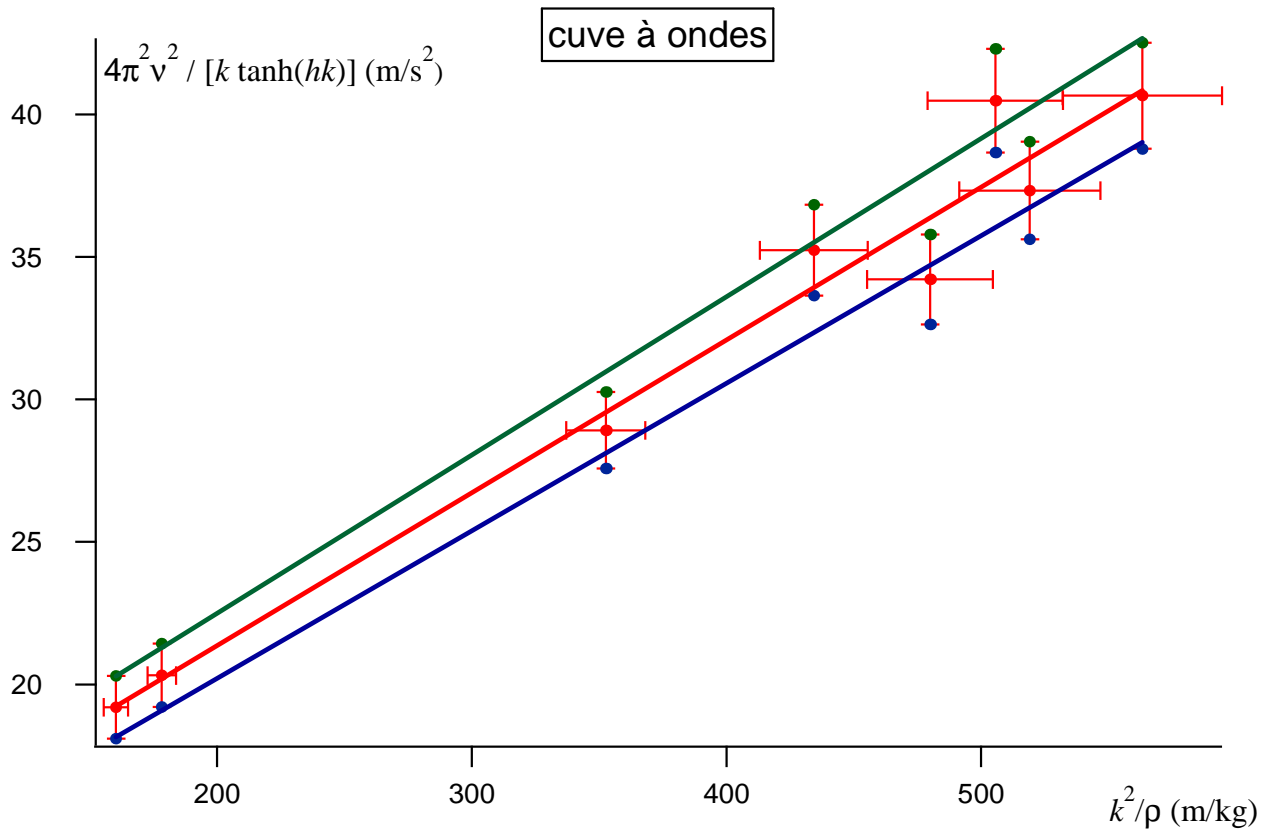
En fonction des incertitudes  $\Delta L$ ,  $\Delta h$  et  $\Delta\nu_s$ , les incertitudes sur  $k$ ,  $\nu$ ,  $x$  et  $y$  valent :

$$\begin{aligned} \Delta k &= k \frac{\Delta L}{L} ; \Delta \nu = \frac{\Delta \nu_s}{2} ; \Delta x = \frac{2k\Delta k}{\rho} = \frac{2k^2\Delta L}{\rho L} = \frac{2x\Delta L}{L} \\ \Delta y &= \left| \frac{\partial y}{\partial \nu} \right|_{k,h} \Delta \nu + \left| \frac{\partial y}{\partial k} \right|_{\nu,h} \Delta k + \left| \frac{\partial y}{\partial h} \right|_{\nu,k} \Delta h \\ &= \frac{8\pi^2\nu}{k \operatorname{th}(hk)} \Delta \nu + \frac{4\pi^2\nu^2}{k^2 \operatorname{sh}^2(hk)} \left( hk + \frac{\operatorname{sh}(2hk)}{2} \right) \Delta k + \frac{4\pi^2\nu^2}{\operatorname{sh}^2(hk)} \Delta h \\ &= \left[ \frac{2\pi\nu}{\operatorname{sh}(hk)} \right]^2 \left[ \frac{\operatorname{sh}(2hk)}{2k\nu} \Delta \nu_s + \left( h + \frac{\operatorname{sh}(2hk)}{2k} \right) \frac{\Delta L}{L} + \Delta h \right] \end{aligned}$$

Voici les points expérimentaux obtenus :

$L$ (m)	$\nu_s$ (Hz)
0.072	55.6
0.075	52.2
0.076	54.0
0.078	49.0
0.082	48.5
0.091	41.7
0.128	29.4
0.135	27.8





**Figure 29 :** droite dont le coefficient directeur vaut la tension superficielle de l'eau du robinet

La fonction « Curve Fitting line » du logiciel Igor6 donne :

fonction	$a = g \text{ (m.s}^{-2}\text{)}$	$b = \gamma_{\text{eau robinet}} \text{ (mN.m}^{-1}\text{)}$
$y = a + bx$	$10,63 \pm 1,67$	$53,651 \pm 3,93$
$y + \Delta y = a + bx$	$11,393 \pm 1,73$	$55,541 \pm 4,08$
$y - \Delta y = a + bx$	$9,8667 \pm 1,61$	$51,762 \pm 3,79$

$$48,0 \text{ mN.m}^{-1} \leq \gamma_{\text{eau robinet}} \leq 59,6 \text{ mN.m}^{-1}$$

Cette valeur est inférieure à  $\gamma_{\text{eau pure}}(20^{\circ}\text{C}) = 72,8 \text{ mN.m}^{-1}$ . Les impuretés diminuent donc la tension superficielle de l'eau.

$$8,3 \text{ m.s}^{-2} \leq g \leq 13,1 \text{ m.s}^{-2}$$

La valeur obtenue de  $g$  est compatible avec sa valeur à la latitude de Paris  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ .

## V. Résumé

---

A écrire au tableau et à distribuer aux étudiants.

# Montage 2 de physique : PHENOMENES DE SURFACE

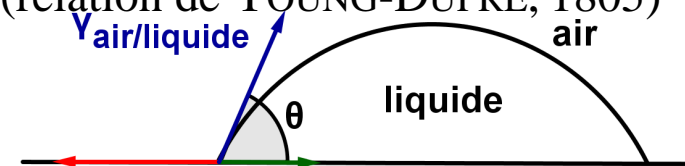
## MISE EN EVIDENCE QUALITATIVE

Le travail à fournir pour augmenter de  $d\mathcal{A}$  la surface  $\mathcal{A}$  séparant un fluide 1 d'un fluide 2 vaut  $\delta W = \gamma d\mathcal{A}$  où  $\gamma$  est la tension superficielle de la surface.

Lors du déplacement  $dx$  de la paille, la surface fournit le travail  $-\gamma d\mathcal{A} = -\gamma \times -2Ldx = Fdx \Rightarrow \gamma = \frac{F}{2L} = \text{norme de } \frac{\text{force}}{\text{longueur}} \perp \text{longueur}$

## ANGLE DE MOUILLAGE

$\gamma_{\text{air/solide}} = \gamma_{\text{liquide/solide}} + \gamma_{\text{air/liquide}} \cos \theta$   
(relation de YOUNG-DUPRE, 1805)



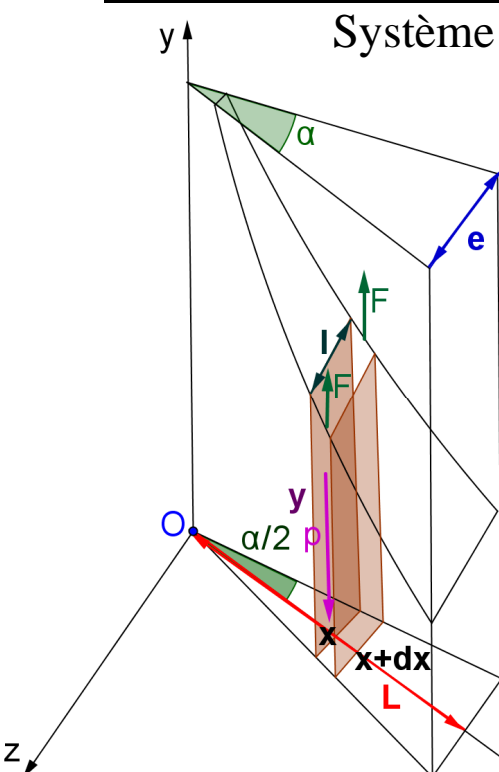
$\gamma_{\text{air/solide}}$   $\gamma_{\text{liquide/solide}}$  solide

Pour l'eau, on mesure avec une précision de  $5^\circ$ :  $\leftarrow 5 \text{ cm} \rightarrow \leftarrow 10 \text{ cm} \rightarrow \leftarrow 360 \text{ cm} \rightarrow$

$$\theta_{\text{sur verre}} = 31^\circ < \theta_{\text{sur parafilm}} = 75^\circ < \theta_{\text{sur téflon}} = 84^\circ$$

## ASCENSION CAPILLAIRE DANS UNE CUVE CUNEIFORME

### 1. Loi de JURIN (1750)



Système : parallélépipède de liquide de côtés  $dx$ ,  $l$  et  $y$

$$\vec{0} = \vec{dF} + \vec{dp} = 2\gamma dx \vec{u}_y - \rho l y dx g \vec{u}_y$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{l}{2x} = \frac{e}{2L} \Rightarrow y = \frac{2\gamma}{\rho g l} = \frac{a}{x}$$

$$\text{où } a = \frac{2L\gamma}{\rho g e} = 0,5781 \text{ cm}^2$$

éthanol à  $20^\circ\text{C}$  :  $\gamma = 22,386 \text{ mN} \cdot \text{m}^{-1}$  ;

$$\rho = 789,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} ; \theta \approx 0 ; g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$e = 10^{-2} \text{ m} ; L = 10^{-1} \text{ m}$$

$$\Delta e = \Delta L = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

### 2. Vérification expérimentale

#### a) Traitement de l'image avec le logiciel ImageJ

Echelle :  $4 \text{ cm} = 443 - 41 = 402 \text{ pixels}$ .

Création d'un tableau Xpixel, Ypixel des points de l'interface.

## b) Traitement numérique avec le logiciel Igor6

Waves : Xpixel ; Ypixel ; Xcm =  $\frac{4}{402}$  Xpixel ; Ycm =  $\frac{4}{402}$  Ypixel

Affiner l'interface obtenue et supprimer les points indésirables.

Déterminer l'équation de l'hyperbole  $f(x) = a / (x+b) + c$  avec la fonction « Curve Fitting fit\_hyp ». Choisir  $a = 1$  et  $b = c = 0$ .

$$a = ( \quad \pm \quad ). 10^{-4} \text{m}^2$$

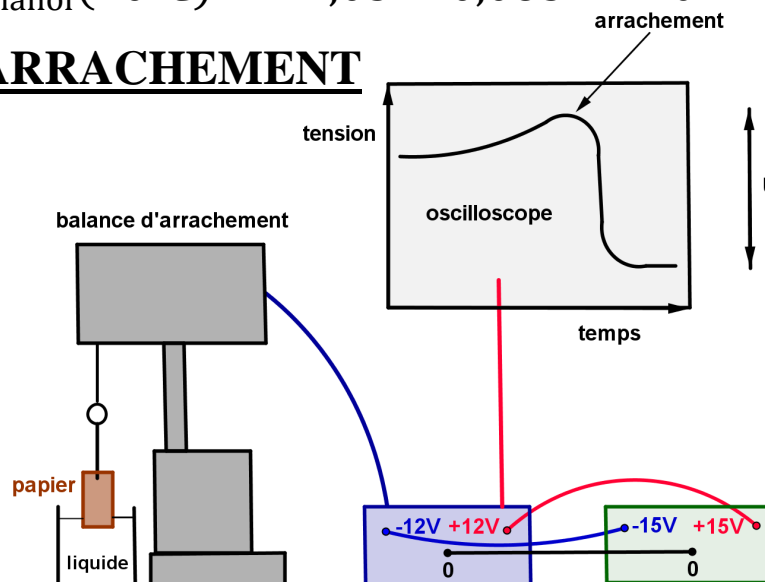
$$\gamma = \frac{\rho g e a}{2L} = 387,2a = ( \quad \pm \quad ). 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$$

$$\Delta\gamma = \gamma \left( \frac{\Delta e}{e} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta a}{a} \right) = \quad . 10^{-3} \times (50 + 5 + \quad) . 10^{-3} = \quad . 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$$

$$\text{mN.m}^{-1} \leq \gamma \leq \quad \text{mN.m}^{-1}$$

à comparer à  $\gamma_{\text{éthanol}}(20^\circ\text{C}) = 24,05 - 0,0832 \times 20 = 22,4 \text{ mN.m}^{-1}$

## BALANCE D'ARRACHEMENT



Calibre temporel de l'oscilloscope : 1 s / carreau

Etalonnage de la balance à l'aide d'une masse  $m = 100 \text{ mg}$  :

Calibre de l'oscilloscope : 60 mV / carreau

$$U_m = U_{\text{avec masse}} - U_{\text{sans masse}} = ( \quad \pm \quad ) \text{ mV}$$

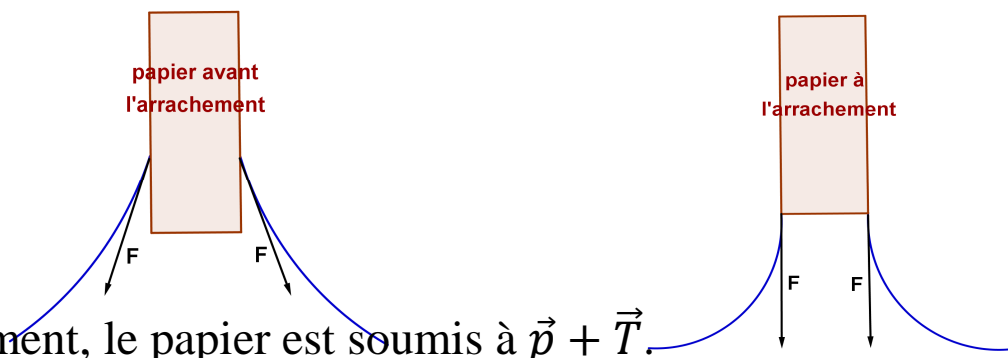
$$\Delta U_m = \Delta U_{\text{avec masse}} + \Delta U_{\text{sans masse}} = \quad + \quad = \quad \text{ mV}$$

$$a = \frac{mg}{U_m} = \frac{9,81 \cdot 10^{-4}}{\quad} = \quad \text{ mN.V}^{-1}$$

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta U_m}{U_m} = \frac{1}{100} + \quad$$

On trempe un morceau de papier rectangulaire de largeur  $L = 1,2 \pm 0,05 \text{ cm}$  et d'épaisseur  $\varepsilon \ll L$  sur sa face inférieure de périmètre  $p = 2L + 2\varepsilon \approx 2L$  dans un liquide de tension superficielle  $\gamma$ .

A l'arrachement, ce papier est soumis à  $\vec{p} + \vec{T} + \vec{F} = -mg\vec{u}_z + \vec{T} - p\gamma\vec{u}_z$



Après l'arrachement, le papier est soumis à  $\vec{p} + \vec{T}$ .

Calibre de l'oscilloscope : 35 mV / carreau. Dans l'éthanol :

$$U = U_{\text{à l'arrachement}} - U_{\text{après l'arrachement}} = ( \quad \pm \quad ) \text{ mV}$$

$$\Delta U = \Delta U_{\text{à l'arrachement}} + \Delta U_{\text{après l'arrachement}} = \quad + \quad = \quad \text{ mV}$$

Le papier est soumis à la force de tension superficielle  $aU = F = p\gamma \approx 2L\gamma$

$$\gamma = \frac{a}{2L} U = ( \quad \pm \quad ) \text{ mN.m}^{-1}$$

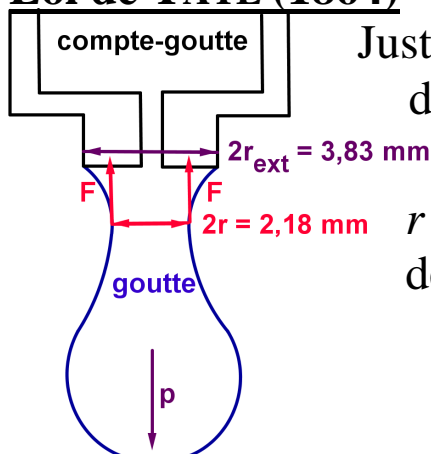
$$\Delta\gamma = \gamma \left( \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta U}{U} \right) = \quad .10^{-3} \times \left( \frac{1}{100} + \quad + \frac{0,05}{1,2} + \quad \right) = \quad \text{ mN.m}^{-1}$$

$$\text{ mN.m}^{-1} \leq \gamma \leq \quad \text{ mN.m}^{-1}$$

$$\text{à comparer à } \gamma_{\text{éthanol}}(T^{\circ}\text{C}) = 24,05 - 0,0832 \times \quad = \quad \text{ mN.m}^{-1}$$

## STALAGMOMETRIE

### 1. Loi de TATE (1864)



Juste avant que la goutte de masse  $m$  ne se détache du reste de liquide :

$$\vec{0} = \vec{p} + \vec{F} = -mg\vec{u}_z + 2\pi r\gamma\vec{u}_z$$

$r$  est le rayon du cercle délimitant la section de la goutte à l'endroit où elle se détache.

$$\frac{\gamma}{m} = \frac{g}{2\pi r} \Leftrightarrow \gamma = rx \text{ où } \gamma = m \text{ et } x = \frac{2\pi\gamma}{g}$$

### 2. Vérification expérimentale

On mesure  $m$  pour différents liquides de  $\gamma$  connue. On trace  $\gamma = rx$

La fonction « Curve Fitting line » d'Igor6 donne :  $r = 1,09 \pm 0,06 \text{ mm}$

$$M_{50 \text{ gouttes eau robinet}} = ( \quad \pm 0,01 ) \text{ g} \Rightarrow m = \frac{M}{50} = ( \quad \pm 2.10^{-4} ) \text{ g}$$

$$\gamma = \frac{g}{2\pi r} m = 1,432 m(\text{g}) = ( \quad \pm \quad ) \text{ mN.m}^{-1}$$

$$\Delta\gamma = \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta r}{r} \right) \gamma = \left( \frac{2.10^{-4}}{m} + \frac{0,06}{1,09} \right) \times \quad \text{ mN.m}^{-1} = \quad \text{ mN.m}^{-1}$$

$$\text{ mN.m}^{-1} \leq \gamma \leq \quad \text{ mN.m}^{-1}$$

à comparer à  $\gamma_{\text{eau pure}}(20^{\circ}\text{C}) = 72,8 \text{ mN.m}^{-1}$ .

# CUVE A ONDES

Loi de LAPLACE :

$$p_0 - p = \gamma \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) = \gamma \frac{\partial^2 y_0}{\partial x^2}$$

Equation de BERNOUILLI :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gy = 0 ; \quad \Delta \Phi = 0$$

Potentiel des vitesses :

$$\Phi(x, y, t) = A \cosh(ky) e^{jk(x-ct)}$$

$$\text{Carré de la vitesse de l'onde : } c^2 = \lambda^2 \nu^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \left( g + \gamma \frac{k^2}{\rho} \right) \frac{\text{th}(hk)}{k}$$

$$\frac{4\pi^2 \nu^2}{k \text{th}(hk)} = g + \gamma \frac{k^2}{\rho} \Leftrightarrow y = a + bx$$

$$x = \frac{k^2}{\rho} ; y = \frac{4\pi^2 \nu^2}{k \text{th}(hk)} ; a = g = 9,81 \text{ m.s}^{-2} ; b = \gamma \approx 50 \text{ mN.m}^{-1}$$

La cuve est remplie d'eau du robinet sur une hauteur  $h = 7 \text{ mm}$  ( $\Delta h = 1 \text{ mm}$ ). Pour différentes valeurs de la fréquence  $\nu$  de l'excitateur d'ondes planes à la surface de l'eau :

- on règle la fréquence  $\nu_s$  du stroboscope, mesurée à l'aide d'une photodiode avec une précision  $\Delta \nu_s = 0,5 \text{ Hz}$ , à la valeur  $\nu_s = 2\nu$  ;

- on mesure la distance  $L = 10G \frac{\lambda}{2} = 5G\lambda$  entre 10 traits sombres verticaux ( $G = 1,72$  est le grandissement) avec une précision de  $\Delta L = 2 \text{ mm}$ . On en déduit le vecteur d'onde  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{10G\pi}{L}$ .

A l'aide des couples  $(\nu_s ; L)$  de points mesurés, on trace  $y = a + bx$ .

$$\text{Calcul des incertitudes : } \Delta k = k \frac{\Delta L}{L} ; \Delta \nu = \frac{\Delta \nu_s}{2} ; \Delta x = \frac{2k\Delta k}{\rho} = \frac{2x\Delta L}{L}$$

$$\Delta y = \left| \frac{\partial y}{\partial \nu} \right|_{k,h} \Delta \nu + \left| \frac{\partial y}{\partial k} \right|_{\nu,h} \Delta k + \left| \frac{\partial y}{\partial h} \right|_{\nu,k} \Delta h = \left[ \frac{2\pi \nu}{\text{sh}(hk)} \right]^2 \left[ \frac{\text{sh}(2hk)}{2k\nu} \Delta \nu_s + \left( h + \frac{\text{sh}(2hk)}{2k} \right) \frac{\Delta L}{L} + \Delta h \right]$$

Ajout de deux points de mesure :

Calibre de l'oscilloscope : 20 ms et 50 mV / carreau

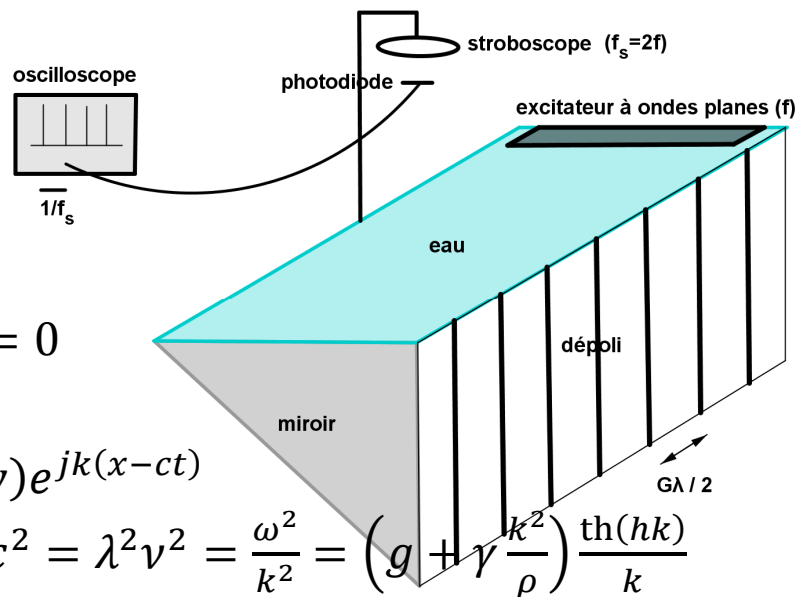
$$\nu_s = \quad \text{Hz} ; L = \quad \text{cm}$$

$$\nu_s = \quad \text{Hz} ; L = \quad \text{cm}$$

La fonction « Curve Fitting line » du logiciel Igor6 donne :

$$\begin{array}{ll} \text{m.s}^{-2} \leq g \leq & \text{m.s}^{-2} \\ \text{mN.m}^{-1} \leq \gamma \leq & \text{mN.m}^{-1} \end{array}$$

à comparer à  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$  et  $\gamma_{\text{eau pure}}(20^\circ\text{C}) = 72,8 \text{ mN.m}^{-1}$



## VI. Bibliographie

---

- [B] Georges BRUHAT, *Mécanique*, Masson, 6<sup>e</sup> édition, Masson et Cie
- [D] John A. DEAN, *Lange's Handbook of Chemistry*, 15<sup>th</sup> edition, McGraw Hill, Inc., 1999, <http://chemister.da.ru/Books/Chemie/Spravochniki/dean.pdf>
- [DG] Pierre-Gilles DE GENNES, Françoise BROCHARD-WYART, David QUERE, *Gouttes, bulles, perles et ondes*, Nouvelle édition avec CR-Rom, Belin, 2005
- [DL] Pierre-Simon DE LAPLACE, *Œuvres complètes de Laplace, tome IV, supplément au livre X du traité de mécanique céleste*, p.394 ; 2<sup>e</sup> supplément au livre X, p.419, chap. I, 1806
- [E] Nicolas EUSTATHOPOULOS, Enrica RICCI, Béatrice DREVET, *Tension superficielle*, Techniques de l'Ingénieur, Matériaux métalliques **M67**, 1999
- [G] Etienne GUYON, Jean-Pierre HULIN, Luc PETIT, *Hydrodynamique physique*, CNRS
- [N] Bernard LE NEINDRE, *Tensions superficielles et interfaciales*, Techniques de l'Ingénieur, Constantes physico-chimiques **K475**, 1993
- [P] José-Philippe PEREZ, *Thermodynamique, Fondements et applications*, 3<sup>e</sup> édition, Dunod
- [S] Marie-Noëlle SANZ et Bernard SALAMITO, *Physique Tout-En-Un PC-PC\**, Dunod 2009
- [T] T. TATE, *On the magnitude of a drop of liquid formed under different circumstances*, Philosophical Magazine Series 4, **27**:181181, 176-180, 1864
- [Y] Thomas YOUNG, *An essay on the cohesion of fluids*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, **95**, 1805, pp.65-87