

# Introduction à la mécanique des fluides

## Sommaire

---

<b>1.1 Description d'un fluide . . . . .</b>	<b>2</b>
1.1.1 Échelle mésoscopique . . . . .	2
1.1.2 Particules de fluide . . . . .	2
1.1.3 Deux approches pour la description d'un écoulement . . . . .	2
1.1.4 Trajectoires et lignes de courant . . . . .	3
<b>1.2 Bilan de conservation de la masse . . . . .</b>	<b>5</b>
1.2.1 Vecteur densité de courant de masse . . . . .	5
1.2.2 Débit massique . . . . .	5
1.2.3 Débit volumique . . . . .	5
1.2.4 Équation de conservation de la masse . . . . .	5
<b>1.3 Écoulement stationnaire . . . . .</b>	<b>6</b>
1.3.1 Définition . . . . .	6
1.3.2 Conservation du flux massique et conséquences . . . . .	6
1.3.3 Propriétés cinématiques . . . . .	6
<b>1.4 Écoulement homogène et incompressible . . . . .</b>	<b>7</b>
1.4.1 Définition . . . . .	7
1.4.2 Conservation du débit volumique . . . . .	7

---

## Questions de cours :

- Présenter les approches eulérienne et lagrangienne. Définir les notions de trajectoire et de ligne de courant, et leur moyen d'obtention expérimental.
- Démontrer l'équation locale de conservation de la masse dans le cas général, après avoir défini les grandeurs adéquates.
- Écoulement stationnaire : définition, conséquences, propriétés cinématiques.
- Écoulement homogène et incompressible : définition, conséquences.

## Capacités exigibles du BO :

- Définir la particule de fluide comme un système mésoscopique de masse constante.
- Distinguer vitesse microscopique et vitesse mésoscopique.
- Citer des ordres de grandeur des masses volumiques de l'eau et de l'air dans les conditions usuelles.
- Définir le débit massique et l'écrire comme le flux du vecteur  $\mu \vec{v}$  à travers une surface orientée.
- Écrire les équations bilans, globale ou locale, traduisant la conservation de la masse.
- Définir un écoulement stationnaire et les notions de ligne de courant et de tube de courant de masse.
- Exploiter la conservation du débit massique.
- À partir d'une carte de champ des vitesses en régime stationnaire, décrire qualitativement le champ des accélérations.
- Définir un écoulement incompressible et homogène par un champ de masse volumique constant et uniforme. Relier cette propriété à la conservation du volume pour un système fermé.
- Définir le débit volumique et l'écrire comme le flux de  $\vec{v}$  à travers une surface orientée.
- Justifier la conservation du débit volumique le long d'un tube de courant indéformable.

# I. Description d'un fluide

## I.1 Échelle mésoscopique

Dès le chapitre T2 ont été évoquée l'échelle mésoscopique et la nécessité de considérer des volumes infinitésimaux contenant un grand nombre de particules, de taille caractéristique  $d$  vérifiant :

$$L \gg d \gg \ell \text{ et } r \quad (1.1)$$

avec  $L$  la taille typique du système,  $\ell$  le libre parcours moyen et  $r$  la distance entre particules.

Par exemple pour un système constitué d'un litre d'air à  $P = 1 \text{ bar}$  et  $T = 300 \text{ K}$ , de densité volumique  $n = \frac{N}{V} = \frac{P}{k_B T} = 2,4 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ , constitué de molécules de diamètre moyen  $d_m \sim 3 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ , il vient

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2} n \pi d_m^2} = 10^{-7} \text{ m} \quad (1.2)$$

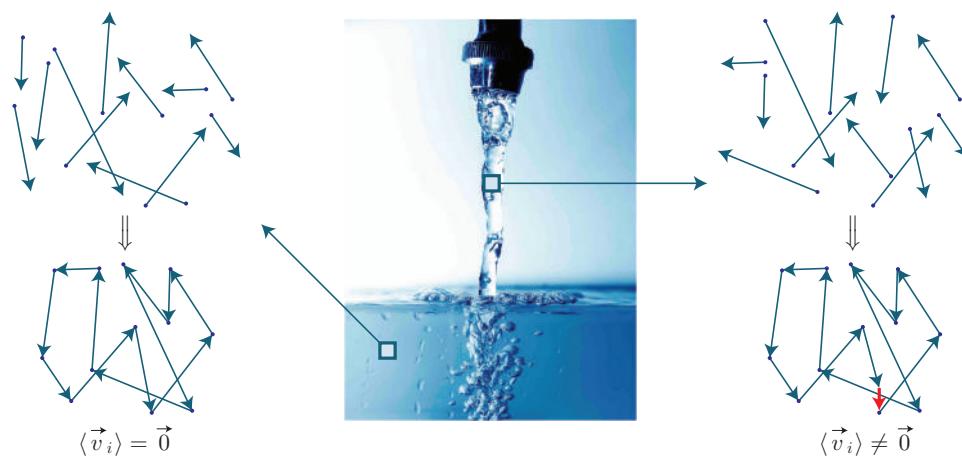
La taille du système est typiquement de  $L = \sqrt[3]{V} = 10 \text{ cm}$ , donc on peut considérer une particule de fluide de l'ordre de  $d = 10^{-4} \text{ m}$ , qui contient alors  $N = nd^3 \simeq 2,4 \cdot 10^{25} \times (10^{-4})^3 \simeq 2,4 \cdot 10^{13}$  molécules, très grand devant 1.

Pour l'eau liquide, on a typiquement  $n \simeq 3 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ ,  $\ell \sim 10^{-10} \text{ m}$  et  $L \sim 1 \text{ cm à } 1 \text{ m}$ , donc on pourra choisir  $d \simeq 10^{-6} \text{ m}$ , par exemple.

## I.2 Particules de fluide

Dans les chapitres qui suivent, on considérera un état fluide, c'est-à-dire liquide ou gazeux, où les constituants peuvent se déplacer librement les uns par rapport aux autres. On utilisera alors le terme de **particules de fluide** pour désigner un élément de volume infinitésimal.

Un tel volume contenant un nombre suffisamment grand de particules, on peut y définir localement des champs scalaires ou vectoriels mésoscopiques : masse volumique, pression, température, vitesse de l'écoulement, etc. à condition de **vérifier l'équilibre thermodynamique local**, hypothèse admise dans toute la suite du cours.



La vitesse mésoscopique de la particule de fluide  $\vec{v}(M, t) = \frac{1}{N} \sum_i \vec{v}_i$  est la vitesse moyenne des  $N$  molécules contenues dans le volume  $d\tau$  de cette particule de fluide. On peut l'identifier à la vitesse de « dérive » rencontrée lors de l'étude du mouvement des particules chargées. Elle diffère beaucoup de la vitesse quadratique moyenne  $v^*$  des molécules ou de la vitesse instantanée  $\vec{v}_i$  (qui possède une composante fortement aléatoire).

## I.3 Deux approches pour la description d'un écoulement

### a) Approche lagrangienne

\* L'approche la plus naturelle pour décrire un écoulement de fluide est d'isoler une particule de fluide de centre  $P$  et la suivre au cours de son mouvement : c'est l'approche classique de mécanique, on parle d'approche **lagrangienne**. [Vidéo 12](#).

Lagrange est un physicien et mathématicien célèbre qui a développé la mécanique analytique et s'est également penché sur le problème à trois corps en astrophysique.

Ainsi la position  $P$  comme la vitesse sont exprimées explicitement en fonction du temps :

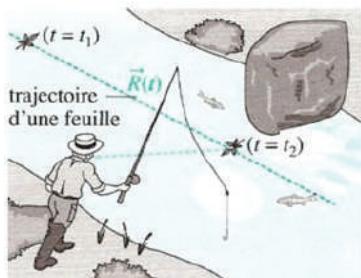
$$*\quad \overrightarrow{OP}(t) = x_P(t)\hat{e}_x + y_P(t)\hat{e}_y + z_P(t)\hat{e}_z \quad \text{et} \quad \vec{v}_P(t) = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \quad (1.3)$$

Notons que les particules de fluide peuvent se déformer au cours du mouvement.

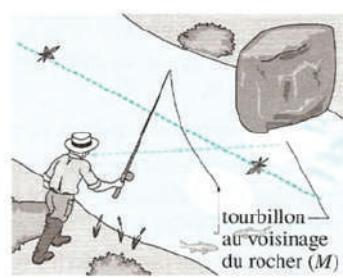
### b) Approche eulérienne

L'approche lagrangienne présente un défaut majeur d'un point de vue expérimental : il est complexe de suivre et mesurer explicitement différentes grandeurs physiques pour une particule de fluide qui se déplace.

\* On lui préfère souvent l'approche **eulérienne**, consistant à caractériser **à tout instant ET en un point fixe  $M$  de l'espace** l'évolution des des grandeurs intensives  $\mu$ ,  $\vec{v}$ ,  $P$ ,  $T$ , etc. en ce point.



Description lagrangienne



Description eulérienne

À gauche, approche lagrangienne où on suit un objet dans son mouvement ; à droite approche eulérienne où on cherche à décrire ce qu'il se passe en un point bien précis, et fixe, du fluide.

Cette approche **locale** est celle que l'on a déjà utilisé pour étudier la conduction thermique ou électrique, mais également bientôt en électromagnétisme. On définit alors différents champs comme le champ des vitesses  $\vec{v}(M, t) = \vec{v}(, x, y, z, t)$  pour lequel  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont les coordonnées du point  $M$  fixe de l'espace, indépendantes du temps. Si  $P$  se trouve en  $M$  à l'instant  $t$ , on a  $\vec{v}(M, t) = \vec{v}_P(t)$ , mais à  $t' \neq t$ , c'est une autre particule de fluide qui se trouve en  $M$ .

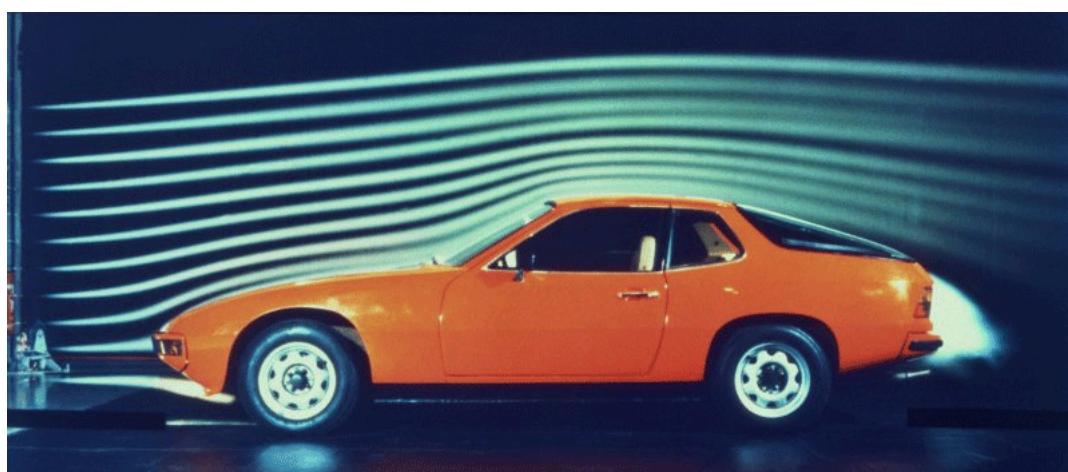
## 1.4 Trajectoires et lignes de courant

On définit deux types de courbes pour décrire l'écoulement, selon l'approche :

### Trajectoire

L'ensemble des points  $M$  atteints par la particule fluide  $P$  au cours du temps constitue la trajectoire de la particule fluide. C'est la description naturelle dans l'approche lagrangienne.

\* En pratique, on utilise des traceurs (gouttes de colorants, fumées, petites particules de densité proche de celle du fluide), et on filme ou photographie avec un **long temps de pose**.

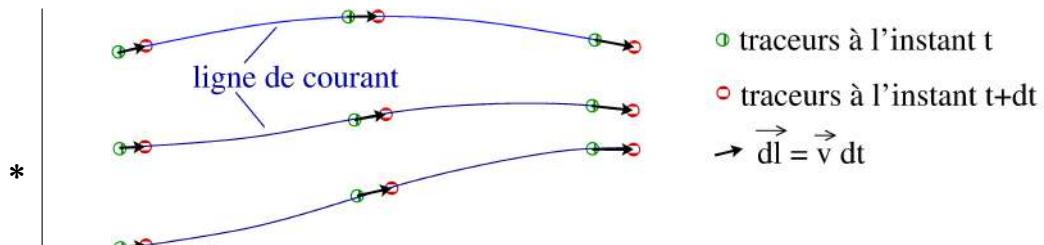


Vidéo d'expérience en tunnel à vent : <https://www.youtube.com/watch?v=wWNjRY0HZts>.

### Ligne de courant

Une ligne de courant du champ eulérien des vitesses  $\vec{v}(M, t)$  est une courbe qui, à un instant  $t$  donné, possède en tout point une tangente colinéaire à la vitesse des particules de fluides.

- \* En pratique, on utilise également des traceurs, mais on photographie avec un temps de pose très court.  
Un ensemble de lignes de courant qui s'appuient sur un contour fermé constitue un **tube de courant**.



\* Ci-dessous une prise avec un temps de pose très court pour pouvoir observer les lignes de courant autour du Concorde :

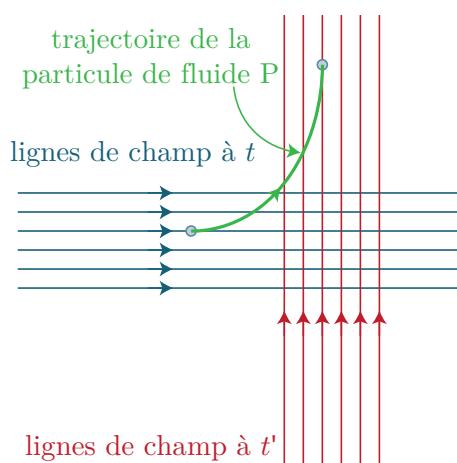


- \* L'équation des lignes de champ est déterminée de manière intrinsèque à partir de la relation  $\vec{v}(M, t) \wedge d\vec{l} = \vec{0}$ , avec  $d\vec{l}$  le vecteur déplacement élémentaire.



ATTENTION : en général les lignes de champ et les trajectoires ne coïncident pas.

Par exemple un jet d'eau que l'on tourne progressivement de  $90^\circ$  : les lignes de champ sont initialement à l'horizontale puis à la verticale, mais la trajectoire de la particule de fluide est une ligne courbe.  
**Vidéo 105-106**



## II. Bilan de conservation de la masse

Dans toute la suite, on utilisera l'approche eulérienne pour décrire les écoulements de fluides, avec des champs scalaires comme la masse volumique  $\rho(M, t)$ , et des champs vectoriels comme le champ de vitesses  $\vec{v}(M, t)$ . Odg à connaître :  $\rho(\text{eau}) = 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ,  $\rho(\text{air}) \sim 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  à  $T = 298 \text{ K}$  et  $P = 1 \text{ bar}$ .

### II.1 Vecteur densité de courant de masse

Par analogie avec la définition indirecte des vecteurs densité de courant électrique, thermique ou de particule, on définit  $\vec{j}_m$  le **vecteur densité de courant de masse**, de sorte que la masse  $\delta^2 m$  traversant en  $dt$  une surface  $dS$  élémentaire orientée s'écrit :

$$\delta^2 m = \vec{j}_m \cdot d\vec{S} dt \quad (1.4)$$

La norme s'exprime en  $\text{kg}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{s}^{-1}$ . Notons qu'il existe une expression simple du vecteur densité de courant de masse, par analogie avec la démonstration conduite dans le cadre de la conduction électrique :

$$\vec{j}_m(M, t) = \rho(M, t) \vec{v}(M, t) \quad (1.5)$$

avec  $\rho(M, t)$  la masse volumique du fluide et  $\vec{v}(M, t)$  la vitesse moyenne des particules contenues dans le volume mésoscopique  $d\tau$  autour de  $M$ .

### II.2 Débit massique

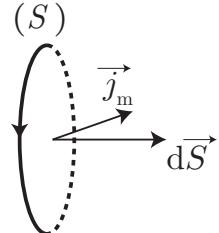
On définit le débit massique à travers une surface ( $S$ ) orientée comme le rapport entre la masse algébrique  $\delta m$  traversant ( $S$ ) pendant  $dt$  et le temps  $dt$  :

$$D_m = \frac{\delta m}{dt} \quad (1.6)$$

s'exprimant en  $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Ce débit n'est rien d'autre que le flux du vecteur  $\vec{j}_m$  :

$$D_m = \iint_{(S)} \vec{j}_m \cdot d\vec{S} \quad (1.7)$$



Si  $\rho$  et  $\vec{v}$  sont uniformes sur  $(S)$  avec  $\vec{v} \perp d\vec{S}$ ,  $D_m = \rho v S$ .

### II.3 Débit volumique

On introduit également le débit volumique :

$$D_v = \frac{\delta V}{dt} = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (1.8)$$

où le champ des vitesses est donc le vecteur densité de courant de volume. Dans le cas où  $\rho$  est uniforme,  $D_m = \rho D_v$ .

### II.4 Équation de conservation de la masse

Soit un volume ( $\mathcal{V}$ ) quelconque délimité par une surface fermée ( $S$ ) (matérielle ou fictive). Soit  $m(t)$  la masse comprise dans le volume ( $\mathcal{V}$ ) à l'instant  $t$ . Alors un bilan de masse conduit à :

$$m(t + dt) = m(t) + \delta m_{\text{entrant}} = m(t) - D_m dt \quad (1.9)$$

\* en notant  $D_m$  le débit massique (sortant du fait de l'orientation de l'intérieur vers l'extérieur des vecteurs surface élémentaire). Ainsi au premier ordre, on aboutit à l'équation intégrale de conservation de la masse :

$$\frac{dm}{dt} + D_m = 0 \quad (1.10)$$



## Exercice

Passer de l'équation intégrale à l'équation locale de bilan de masse.

En se servant de  $m(t) = \iiint_{(\mathcal{V})} \rho(M, t) d\tau$  et de la définition du débit massique :

$$\iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iint_{(S)} \vec{j}_m \cdot d\vec{S} = 0 \quad (1.11)$$

Avec le théorème de Green-Ostrogradski :

$$\iiint_{(\mathcal{V})} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iiint_{(\mathcal{V})} \operatorname{div}(\vec{j}_m) d\tau = 0 \quad (1.12)$$

et comme cette équation est valable pour n'importe quel volume ( $\mathcal{V}$ ), on aboutit à l'équation locale de conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}_m = 0 \quad (1.13)$$

## III. Écoulement stationnaire

### III.1 Définition



#### Manipulation

| Vidéos 95-96 et 190 pour montrer les différences entre stationnaire et instationnaire.

Un écoulement est stationnaire si les différents champs eulériens sont indépendants du temps :  $\vec{v}(M, t) = \vec{v}(M)$ ,  $\rho(M)$ , etc. Notons que le caractère stationnaire d'un écoulement dépend du référentiel d'étude : le sillon laissé par un bateau se déplaçant à vitesse constante paraîtra stationnaire pour un passager, mais instationnaire pour une personne à quai.

### III.2 Conservation du flux massique et conséquences

Pour un écoulement stationnaire, les dérivées temporelles étant nulles :

- le débit massique est nul à travers une surface fermée  $D_m = 0$  (équation intégrale) ;
- $\operatorname{div} \vec{j}_m = 0$ , c'est-à-dire que  $\vec{j}_m$  est à flux conservatif.

\* Nous retrouvons les mêmes conséquences que lors de l'étude du transport de charges électriques :

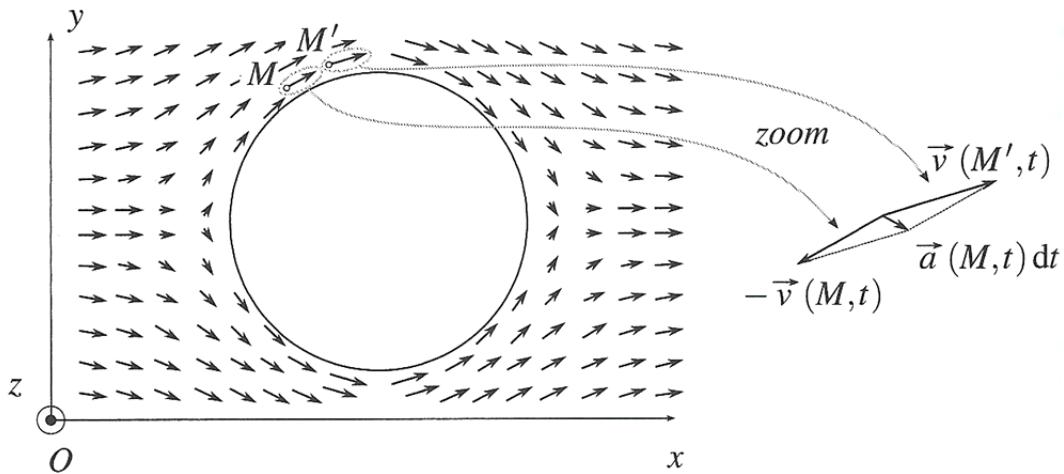
- en régime stationnaire le débit massique est conservé le long d'un tube de courant de masse ;
- à un point de rencontre de plusieurs tubes de courants de masse, on vérifie l'équivalent de la loi des noeuds,  $\sum D_{m,\text{entrant}} = \sum D_{m,\text{sortant}}$ .

### III.3 Propriétés cinématiques

#### Propriété

\* | En écoulement stationnaire, il y a identité des trajectoires et des lignes de courant.

Par conséquent, la carte du champ des vitesses d'un écoulement stationnaire permet de prévoir le mouvement d'une particule de fluide, mais également son accélération. Considérons par exemple la carte de champ des vitesses autour d'un cylindre lors d'un écoulement stationnaire :



Pour calculer l'accélération, considérons une particule de fluide  $P$  située en  $M$  à l'instant  $t$ . À un instant  $t + \Delta t$ , elle se sera déplacée de  $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}(M, t)\Delta t$ . L'accélération d'une particule de fluide  $P$  peut alors se calculer à l'aide d'un taux d'accroissement :

$$\vec{a}_P(M, t) = \frac{\vec{v}_P(t + \Delta t) - \vec{v}_P(t)}{\Delta t} = \frac{\vec{v}(M', t + \Delta t) - \vec{v}(M, t)}{\Delta t} \quad (1.14)$$

En se servant de la stationnarité de l'écoulement,  $\vec{v}(M', t) = \vec{v}(M', t + \Delta t)$ , d'où simplement :

$$*\quad \vec{a}_P(M) = \frac{\vec{v}(M') - \vec{v}(M)}{\Delta t} \quad (1.15)$$

que l'on peut tracer graphiquement pour connaître la direction et le sens.

Notons que bien que la vitesse en  $M$  ne dépende pas explicitement du temps, dans un écoulement stationnaire, un fluide peut être accéléré au cours de son mouvement : on parle d'**accélération convective**, car liée au mouvement du fluide.

## IV. Écoulement homogène et incompressible

### IV.1 Définition

Un écoulement **homogène et incompressible** est un écoulement pour lequel la masse volumique du fluide est constante dans le temps et dans l'espace,  $\rho(M, t) = \rho = \text{cste}$ . C'est en général un bon modèle pour les liquides. **Vidéo 50**

En réalité, la définition plus rigoureuse est :

- un écoulement est homogène si la masse volumique est uniforme ;
- un écoulement est incompressible lorsque le volume d'une particule de fluide se conserve au cours de l'écoulement.

Par conséquent, un système fluide fermé garde toujours le même volume s'il se déforme.

**!** Ne pas confondre avec un fluide incompressible, dont la masse volumique est invariable, et par conséquent ne pourra être qu'en écoulement homogène et incompressible ! On peut par contre étudier l'écoulement d'un gaz, compressible par nature, qui pourra s'écouler de manière homogène et incompressible : c'est souvent le cas des écoulements à des vitesses faibles devant la vitesse du son.

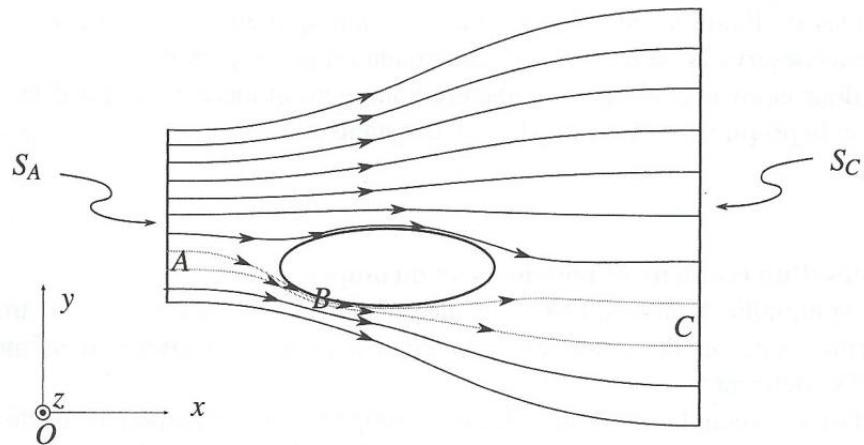
### IV.2 Conservation du débit volumique

Étant donné que  $\rho = \text{cste}$ , l'équation locale de conservation de la masse s'écrit :

$$*\quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \implies \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (1.16)$$

c'est-à-dire que  $\vec{v}$  est à flux conservatif, c'est-à-dire encore que le débit volumique se conserve à travers toute section d'un tube de courant.

On peut alors interpréter assez aisément une carte de lignes de champs pour ce type d'écoulement :



Le tube de courant entre les points  $A$  et  $C$  présente un resserrement en  $B$  et un élargissement en  $C$ , ce qui se traduit pour les vitesses moyennes au niveau des différentes sections :

$$\langle v(C) \rangle < \langle v(A) \rangle \ll \langle v(B) \rangle \quad (1.17)$$

\*

Remarquons également que si la vitesse est uniforme dans les sections droites d'un tube de courant de masse, on peut très simplement exprimer des relations entre sections et vitesses via l'égalité des débits volumiques :

$$v_A S_A = v_B S_B = v_C S_C \quad (1.18)$$

# Exercices

## 1. 1 Débit de la Loire

Au niveau d'Orléans, le débit moyen de la Loire est  $D_v = 350 \text{ m} \cdot \text{s}^{-3}$ , avec une vitesse typique de  $v = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

1. Estimer la largeur du fleuve si la profondeur moyenne est de 2 m.
2. Comment évolue la vitesse du fleuve s'il s'élargit de 20 m ?

- 
1.  $D_v = Sv = h \times L \times v$ , en notant  $h$  la profondeur,  $L$  la largeur. Ainsi  $L = \frac{D_v}{hv} = 175 \text{ m}$
  2. Si le fleuve s'élargit, en supposant que le débit volumique est constant, la vitesse moyenne du fluide diminue :  $hLv = hL'v'$  d'où  $v' = \frac{L}{L'}v = 0,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

## 1. 2 Caractéristiques des écoulements

On considère l'écoulement bidimensionnel d'un fluide tel qu'en un point  $M(x, y)$  la vitesse du fluide soit donnée par  $\vec{v} = kx\vec{e}_x + ky\vec{e}_y$

1. L'écoulement est-il uniforme ? stationnaire ? compressible ?
2. Déterminer l'équation des trajectoires des particules et des lignes de courant.
3. Reprendre les questions précédentes si le champ des vitesses de l'écoulement est donné en coordonnées cylindriques par :

$$\vec{v}(r > a) = \frac{\Gamma e^{-t/\tau}}{2\pi r} \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{v}(r < a) = \frac{\Gamma e^{-t/\tau} r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta \quad (1.19)$$

- 
1. Un tel écoulement n'est pas uniforme, vu que le champ des vitesses dépend des coordonnées  $x$  et  $y$ . Il est stationnaire dans la mesure où il ne dépend pas explicitement du temps. Quant à la compressibilité, il faut calculer  $\operatorname{div} \vec{v}$  :

$$\operatorname{div} \vec{v} =_d \operatorname{iff} pkxx + \frac{\partial ky}{\partial y} = 2k \neq 0 \quad (1.20)$$

donc l'écoulement est compressible.

2. Les lignes de courant sont définies par  $\vec{v} \wedge d\vec{r} = \vec{0}$ , c'est-à-dire :

$$(kx\vec{e}_x + ky\vec{e}_y) \wedge (dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y) = (kxdy - kydx)\vec{e}_z = \vec{0} \quad (1.21)$$

c'est-à-dire  $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$  après projection. En intégrant, on trouve donc  $\ln(x) = \ln(y) + \text{cste}$ , c'est-à-dire une équation du type  $y = \alpha x$ . Il s'agit également de l'équation de trajectoire des particules, étant donné que l'écoulement est stationnaire.

3. L'écoulement n'est ni uniforme, ni stationnaire, étant donné la dépendance spatiale et temporelle du champ des vitesses. Calculons la divergence :

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\text{theta}}}{\partial \theta} = 0 \quad (1.22)$$

donc l'écoulement est incompressible.

La trajectoire des particules est trouvée en identifiant en un point  $M(R(t), \alpha(t))$  le vecteur vitesse en coordonnées eulériennes et lagrangiennes :

$$\dot{R}\vec{e}_r + r\dot{\alpha}\vec{e}_\theta = \frac{\Gamma e^{-t/\tau} R}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta \implies R = \text{cste} \quad \text{et} \quad \alpha(t) = \alpha_0 - \frac{\Gamma \tau}{2\pi a^2} e^{-t/\tau} \quad (1.23)$$

pour  $r < a$ , et de même pour  $r > a$ ,  $R = \text{cste}$  et  $\alpha(t) = \alpha_0 - \frac{\Gamma \tau}{2\pi R^2} e^{-t/\tau}$ . Dans tous les cas, la trajectoire est une portion de cercle (ou plusieurs tours) de rayon constant.

Concernant les lignes de courant, on trouve simplement qu'il s'agit de cercles, car  $\vec{v} \wedge d\vec{l} = \vec{0}$  conduit à  $dr = 0$ , c'est-à-dire  $r = \text{cste}$ .

## 1. 3 Vitesse en formalisme eulérien

Soit un écoulement bidimensionnel défini en formalisme lagrangien sous la forme :

$$X(t) = X_0(1 + bt) \quad \text{et} \quad Y(t) = Y_0 \quad (1.24)$$

1. Déterminer le champ des vitesses en formalisme eulérien  $\vec{v}(x, y, t)$ .
  2. Que dire de l'accélération ? On précise qu'en formalisme eulérien, l'accélération s'écrit :  $\vec{a}(x, y, t) = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y}$ . Était-ce prévisible ?
- 

1. Exprimons la vitesse en formalisme lagrangien :

$$\vec{v}_P t = \frac{\partial}{\partial t} (X(t) \vec{e}_x + Y(t) \vec{e}_y) = X_0 b \vec{e}_x \quad (1.25)$$

puis on l'exprime en fonction de  $X(t)$  :

$$\vec{v}_P(t) = \frac{X(t)}{1 + bt} b \vec{e}_x \implies \vec{v}(M, t) = \frac{bx}{1 + bt} \vec{e}_x \quad (1.26)$$

avec  $M(x, y)$  un point fixe de l'espace.

2. Calculons l'accélération en utilisant l'expression donnée dans l'énoncé :

$$\vec{a}(x, y, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{bx}{1 + bt} \right) \vec{e}_x + \frac{bx}{1 + bt} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{bx}{1 + bt} \right) = -\frac{b^2 x}{(1 + bt)^2} \vec{e}_x + \frac{b^2 x}{(1 + bt)^2} \vec{e}_x = \vec{0} \quad (1.27)$$

Deux remarques : d'une part on pouvait s'y attendre, étant donné qu'en formalisme lagrangien la vitesse était indépendante du temps; d'autre part on constate qu'en formalisme eulérien, l'accélération n'est pas simplement la dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps (la deuxième partie correspond au développement du terme  $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}$ , que l'on appelle l'accélération convective).

## 1. 4 Run, run, run

Vaut-il mieux courir ou marcher sous la pluie ?

Il s'agit ici de se demander comment évolue le débit volumique à travers une surface, si cette dernière est mobile dans un écoulement. Supposons donc une pluie purement verticale, avec des gouttes d'eau de densité volumique  $n$ , se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}_g = -v_g \vec{e}_z$ . Modélisons une personne comme un parallélépipède de hauteur  $h$  (selon  $\vec{e}_z$ ), largeur  $L$  (selon  $\vec{e}_y$ ) et épaisseur  $e$  (selon  $\vec{e}_x$ ), se déplaçant à vitesse constante  $\vec{v}_p = v_p \vec{e}_x$ .

Déterminons la quantité de gouttes d'eau reçue par la personne sur un trajet de longueur  $\ell$ . Pour ce faire, on se place dans le référentiel de la personne, seul moyen de faire un bilan de particules. Ainsi les gouttes d'eau ont un vecteur vitesse  $\vec{v}'_g = -v_g \vec{e}_z - v_p \vec{e}_x$ .

- les gouttes arrivant sur la surface verticale  $S_v = L \cdot e$  ont un débit particulaire de :

$$\Phi_{\text{vert}} = n \vec{v}'_g \cdot (-S_v \vec{e}_z) = nv_g L e \quad (1.28)$$

- les gouttes arrivant sur la surface frontale  $S_{\text{front}} = hL$  ont quant à elles un débit particulaire de :

$$\Phi_{\text{front}} = n \vec{v}'_g \cdot (-S_{\text{front}} \vec{e}_x) = nv_p h L \quad (1.29)$$

Ainsi la quantité de gouttes captées par les deux surfaces durant le temps du mouvement  $\ell/v_p$  vaut :

$$N_g = (\Phi_{\text{vert}} + \Phi_{\text{front}}) \frac{\ell}{v_p} = n L \ell \left( \frac{ev_g}{v_p} + h \right) \quad (1.30)$$

On constate donc que la quantité de pluie est inversement proportionnelle à la vitesse : l'instinct de courir le plus vite possible est donc correct. Notons tout de même que la conclusion est modifiée en cas de vent de dos, où on peut montrer qu'il est préférable de courir à la vitesse du vent !

## 1. 5 Écoulement irrotationnel

Un écoulement est **irrotationnel** ou **non tourbillonnaire** ou **potentiel**ssi  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$ .

1. Montrer qu'on peut définir dans ce cas un potentiel scalaire des vitesses  $\phi$ .

2. Dans le cas d'un écoulement incompressible, quelle équation vérifie  $\phi$  ?

3. Donner le lien entre le vecteur densité de courant de masse et le potentiel des vitesses. Analogie ?

Un fluide circule dans un tuyau avec un débit volumique  $D_v$  fixé. À l'extrémité  $O$  du tuyau, un diffuseur envoie le fluide de manière isotrope (on néglige la présence du tuyau) :  $\vec{v}(M, t) = v(r, t)\vec{e}_r$  en coordonnées sphériques. On suppose l'écoulement incompressible.

4. Déterminer l'expression du champ de vitesse. Vérifier son caractère irrotationnel et déterminer une expression du potentiel des vitesses. Représenter les lignes de courant et les surfaces équipotentielles.

1. On a vu dans le cours sur les champs vectoriels qu'un rotationnel nul impliquait qu'il existait une fonction  $\phi$  telle que  $\vec{v} = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi$ , comme  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}} \phi) = \vec{0}$ .

2. Si l'écoulement est incompressible,  $\text{div } \vec{v} = 0 = \text{div } \overrightarrow{\text{grad}} \phi = \Delta \phi$  par définition du laplacien scalaire. Cette équation se retrouvera en électromagnétisme où, par exemple, le potentiel électrique pourra vérifier  $\Delta V = 0$  sous certaines conditions.

3.  $\vec{j}_m = \rho \vec{v} = -\rho \overrightarrow{\text{grad}} \phi$ , on peut faire une analogie avec la conduction électrique, thermique ou de particules (respectivement loi d'Ohm, loi de Fourier et de Fick).

4. Étant donné que l'écoulement est incompressible, on a  $\text{div } \vec{v} = 0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 v(r, t))}{\partial r}$ . Ainsi en intégrant,  $v(r, t) = \frac{A}{r^2} + B$ . Pour déterminer les constantes, utilisons la conservation du débit volumique, comme l'écoulement est incompressible :

$$D_v = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot d\vec{S} = v(r, t) \iint_{(S)} r^2 d\theta \sin\theta d\varphi = v(r, t) \times 4\pi r^2 = 4\pi A + 4\pi Br^2 \quad (1.31)$$

Or, le débit volumique étant constant, cela impose  $B = 0$  et  $A = \frac{D_v}{4\pi}$ . D'où un champ de vitesse :

$$\vec{v} = \frac{D_v}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad (1.32)$$

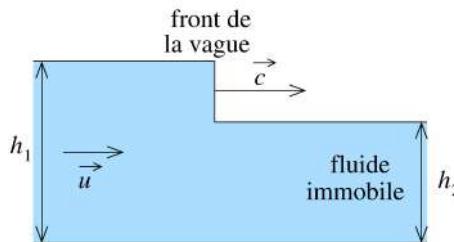
On vérifie que  $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = \vec{0}$  à l'aide d'un formulaire pour le rotationnel en sphérique. Enfin il faut déterminer le potentiel  $\phi$  associé :

$$\vec{v} = \frac{D_v}{4\pi r^2} \vec{e}_r = -\overrightarrow{\text{grad}} \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \quad (1.33)$$

soit après projection,  $\phi$  ne dépend que de  $r$  et vérifie  $\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{D_v}{4\pi r^2}$  soit  $\phi(r) = \frac{D_v}{4\pi r}$ .

Les équipotentielles sont alors des cercles concentriques de centre  $O$ , et les lignes de courant sont telles que  $\vec{e}_r \wedge d\vec{l} = \vec{0}$ , c'est-à-dire  $d\theta = 0$  (soit encore des droites perpendiculaires aux équipotentielles passant par  $O$ ).

## 1. 6 Modélisation de discontinuités dans un écoulement



Une vague est modélisée par un front qui se propage à la vitesse  $c$ . Avant le passage de la vague, le fluide, incompressible, est immobile. Après son passage, il a la vitesse  $u$ . De même, la hauteur du fluide avant le passage de la vague est  $h_1$ , et  $h_2$  après son passage.

1. Déterminer une relation liant les grandeurs  $c$ ,  $u$ ,  $h_1$  et  $h_2$ .

De l'eau s'écoule par un robinet à vitesse constante  $u$ . Elle provient d'une canalisation indéformable horizontale de section  $S$ . On ferme brutalement le robinet. Une zone de discontinuité de pression et de masse volumique remonte la canalisation à la vitesse  $c$ .

2. Donner une relation entre  $c$ ,  $u$ ,  $\rho_1$  (masse volumique du fluide à l'arrêt) et  $\rho_2$  (masse volumique du fluide en mouvement).

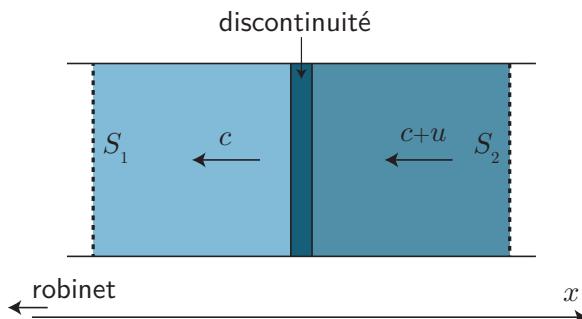
Dans les deux cas, on peut utiliser un point de vue eulérien ou lagrangien.

1. Appliquons ici le formalisme eulérien. On effectue un bilan de masse pendant  $dt$  à un système fermé constitué de deux parois verticales (une du côté du fluide en mouvement, l'autre du côté immobile), et des parois horizontales (sol et dessus du front de la vague) :

$$m(t + dt) - m(t) = \delta m_{\text{entrant}} \iff \rho(h_1 - h_2)Lcdt = \rho h_1 L u dt \quad (1.34)$$

en notant  $L$  la dimension transversale de l'écoulement et  $\delta m_{\text{entrant}}$  correspondant ici à la masse entrant du côté du fluide immobile. Il vient alors

$$(h_1 - h_2)c = h_1 u \quad (1.35)$$



2. Dans ce deuxième cas de figure, plaçons-nous dans un formalisme lagrangien, on se place dans le référentiel lié à la discontinuité. On considère une surface fixe fermée constituée de la surface latérale de la conduite, et de deux surfaces  $S_1$  et  $S_2$  situées de part et d'autre de la discontinuité. En régime stationnaire, le débit massique total sortant de la surface fermée est nul :

$$D_{m,1} + D_{m,2} = 0 \iff \rho_1 c S = -\rho_2(c + u)S \iff (\rho_2 - \rho_1)c = \rho_1 u \quad (1.36)$$

en supposant la vitesse uniforme sur toute la section et l'écoulement incompressible.

# Actions de contact sur un fluide

## Sommaire

<b>2.1 Forces dans un fluide . . . . .</b>	<b>2</b>
2.1.1 Les forces volumiques . . . . .	2
2.1.2 Les forces de contact surfaciques . . . . .	2
<b>2.2 Forces de pression . . . . .</b>	<b>2</b>
2.2.1 Étude sur des surfaces . . . . .	2
2.2.2 Force volumique et applications . . . . .	4
2.2.3 Poussée d'Archimède . . . . .	6
<b>2.3 Forces de viscosité . . . . .</b>	<b>8</b>
2.3.1 Étude de l'écoulement de Couette plan . . . . .	8
2.3.2 Différents types de fluides . . . . .	9
2.3.3 Interprétation physique : un phénomène de diffusion (HP) . . . . .	10
<b>2.4 Conditions aux limites . . . . .</b>	<b>10</b>
2.4.1 Conditions d'adhérence à l'interface fluide-solide . . . . .	10
2.4.2 Conditions aux limites à l'interface entre deux fluides . . . . .	11

## Questions de cours :

- Pression : définition, expression de la force de pression, démonstration de la force volumique de pression.
- Démontrer la relation fondamentale de la statique des fluides, et l'appliquer à un liquide incompressible en présentant quelques applications.
- Démontrer l'expression du champ de pression au sein d'un gaz parfait isotherme soumis uniquement au champ de pesanteur. Interpréter physiquement.
- Présenter l'écoulement de Couette plan. Exprimer la force de viscosité et interpréter physiquement. Odg de viscosités dynamiques.

## Capacités exigibles du BO :

- Identifier la force de pression comme étant une action normale à la surface.
- Utiliser l'équivalent volumique des actions de pression  $\overrightarrow{-\text{grad } P}$ .
- Exprimer l'évolution de la pression avec l'altitude dans les cas d'un fluide incompressible et de l'atmosphère isotherme dans le modèle du gaz parfait.
- Relier l'expression de la force surfacique de viscosité au profil de vitesse dans le cas d'un écoulement parallèle.
- Exprimer la dimension du coefficient de viscosité dynamique. Citer l'ordre de grandeur de la viscosité de l'eau.
- Citer la condition d'adhérence à l'interface fluide-solide.
- Outils mathématiques : intégrer une expression de la forme  $\frac{\partial f}{\partial x} = g(x, y)$  à  $y$  fixé en introduisant une fonction  $\Phi(y)$  inconnue comme « constante d'intégration ».

# I. Forces dans un fluide

Il existe deux types de forces extérieures s'exerçant sur un volume ( $\mathcal{V}$ ) de fluide.

## I.1 Les forces volumiques

Une force volumique est une force qui s'exerce sur tous les points du volume ( $\mathcal{V}$ ). On la caractérise par une densité volumique de force  $\vec{f}_v = \frac{\delta \vec{F}}{d\tau}$  où  $\delta \vec{F}$  est la force élémentaire s'exerçant sur l'élément  $d\tau$ . La force totale est alors l'intégrale de la densité volumique de force :

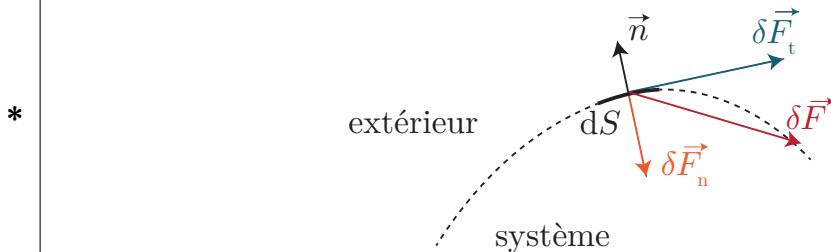
$$\vec{F} = \iiint_{(\mathcal{V})} \vec{f}_v d\tau \quad (2.1)$$

Citons par exemple :

- le poids  $\delta \vec{P} = \delta m \vec{g} = \mu d\tau \vec{g}$  conduisant à  $\vec{f}_v = \mu \vec{g}$  ;
- la force de Lorentz  $\vec{f}_v = \rho (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$ .

## I.2 Les forces de contact surfaciques

Une force de contact surfacique est une force exercée sur tous les points d'une surface ( $S$ ). Considérons un élément de surface infinitésimal  $d\vec{S} = dS \vec{n}$  autour de  $M$ , avec  $\vec{n}$  la normale en  $M$  à cette surface. La force élémentaire  $\delta \vec{F}$  exercée sur la surface  $dS$  peut généralement se décomposer en une composante normale  $\delta \vec{F}_n$  correspondant à une force de pression, et une composante tangentielle  $\delta \vec{F}_t$  appelée force de cisaillement ou force de viscosité.



On peut ainsi définir une force surfacique, encore appelée contrainte, et exprimée en  $N \cdot m^{-2}$  ou en pascal :

$$\sigma = \frac{\delta \vec{F}}{dS} = \frac{\delta \vec{F}_n}{dS} + \frac{\delta \vec{F}_t}{dS} = \vec{\sigma}_n + \vec{\sigma}_t \quad (2.2)$$

On va étudier dans les deux prochaines sections ces deux types de contraintes, jouant un rôle essentiel dans l'écoulement des fluides.

# II. Forces de pression

## II.1 Étude sur des surfaces

### a) Définition

La pression dans un fluide correspond à des actions de contact, c'est-à-dire des actions de courte portée : interactions répulsives liées à l'agitation moléculaire et interactions attractives (Van der Waals par exemple). En un point  $M$  d'une surface délimitant le fluide étudié, la force de pression élémentaire exercée par l'extérieur sur le fluide étudié s'écrit :

$$\delta \vec{F}_{\text{pression}} = -P(M) d\vec{S} = -P(M) dS \vec{n} \quad (2.3)$$

avec  $dS$  la surface élémentaire autour de  $M$  et  $\vec{n}$  le vecteur normal, **dirigé de l'intérieur du fluide vers l'extérieur**. Ainsi on identifie la pression à la contrainte normale,  $\vec{\sigma}_n = -P(M) \vec{n}$ .

L'unité de la pression est le pascal (Pa), ou celle d'une force surfacique en  $N \cdot m^{-2}$ . On rencontre d'autres unités :  $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $1 \text{ atm} = 1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$  et est équivalent à  $76 \text{ cmHg}$ .

La force totale s'exerçant sur une surface  $S$  finie correspond alors à la somme des forces élémentaires :

$$\vec{F}_{\text{pression}} = \iint_{(S)} \delta \vec{F}_{\text{pression}} = - \iint_{(S)} P(M) dS \vec{n} \quad (2.4)$$

Le cm Hg est le "centimètre de mercure" et correspond à une hauteur de mercure liquide. Ce concept sera développé en II.2.

## b) Calcul de la résultante des forces de pression

### i) Cas d'un champ de pression uniforme

Lorsque le champ de pression est uniforme,  $P(M) = P_0 = \text{cste}$ , on peut assez simplement calculer la résultante des forces de pression sur une surface fermée. Si on considère par exemple un cube de côté  $a$ , les forces de pression vont s'opposer deux à deux pour chaque face, et la résultante des forces de pression sur le cube est nulle. Le résultat peut se généraliser :

$$\iint_{(S)} P_0 dS \vec{n} = \vec{0} \quad (2.5)$$

Une pression de 1 bar =  $10 \text{ N} \cdot \text{cm}^{-2}$ , implique une force considérable exercée par exemple sur une main d'adulte (l'équivalent d'une charge de 100 kg). Le résultat précédent permet alors de comprendre pourquoi on n'est pas écrasé : l'effet des forces de pression se compensent quasiment sur notre corps. Pour illustrer le fait que les forces de pression sont importantes :

[https://www.youtube.com/watch?v=N4BVw0wQ\\_7k](https://www.youtube.com/watch?v=N4BVw0wQ_7k)

### Exercice

Calculer le rayon minimal que doit avoir une ventouse pour permettre à un individu de 70 kg de se suspendre à un plafond. On négligera la pression dans le volume d'air enfermé par la ventouse.

Le poids de l'individu doit être compensé par les forces de pression de l'air ambiant sur la surface courbe de la ventouse. Cependant on peut se ramener à la surface « projetée » de la ventouse sur la paroi : on considère la surface  $(S_1)$  de la ventouse, et  $(S_2)$  le disque qui s'appuie sur les bords de la ventouse de rayon  $r$ , au niveau de la paroi.  $(S) = (S_1) \cup (S_2)$  est alors une surface fermée où règne une pression  $P_0$ , donc d'après ce qui précède :

$$\iint_{(S)} P(M) d\vec{S} = \vec{0} = \iint_{(S_1)} P(M) d\vec{S} + \iint_{(S_2)} P(M) d\vec{S} = \vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{ventouse}} - P_0 \pi r^2 \vec{e}_z \quad (2.6)$$

avec  $\vec{e}_z$  le vecteur unitaire vertical orienté vers le haut. Lors de la traction d'un individu sur une ventouse, par application de la LQM en statique à la ventouse  $\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{ventouse}} + \vec{F}_{\text{indiv} \rightarrow \text{ventouse}} = \vec{0}$ . Puis en appliquant la LQM à l'individu à l'équilibre et en utilisant la 3e loi de Newton :

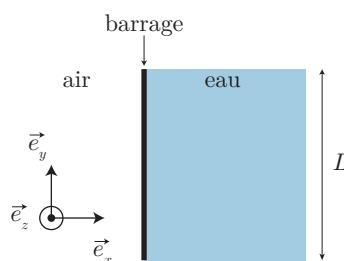
$$\vec{F}_{\text{air} \rightarrow \text{ventouse}} - mg \vec{e}_z + \vec{R}_{\text{plafond}} = \vec{0} \quad (2.7)$$

Soit à la limite du décollement,  $\vec{R}_{\text{plafond}} = \vec{0}$ , d'où un rayon minimal

$$r = \sqrt{\frac{mg}{\pi P_0}} = 4,7 \text{ cm} \quad (2.8)$$

Il faudra certainement considérer un rayon plus élevé, étant donné que l'on n'a pas pris en compte le fait que le vide était partiel entre la ventouse et la paroi.

### ii) Force de pression sur un barrage



Considérons un barrage plan de hauteur  $h$  et largeur  $L$ , soumis d'un côté aux forces de pression de l'air, et de l'autre à celles de l'eau. On précise qu'il règne dans l'eau une pression  $P(z) = P_0 - \rho g z$ , avec  $\rho$  la masse volumique de l'eau et  $P_0 = 1 \text{ bar}$  la pression atmosphérique, et on supposera la pression de l'air uniforme, de valeur  $P_0$ . Calculons la résultante des forces de pression sur le barrage :

- du côté de l'air, on a simplement  $\vec{F}_{\text{air}} = P_0 S \vec{e}_x = P_0 h L \vec{e}_x$ ;
- du côté de l'eau, étant donné que la pression n'est pas la même sur toute la hauteur, on va effectuer explicitement le calcul de l'intégrale. On découpe pour cela la surface en une infinité de surfaces élémentaires  $d\vec{S} = dy dz \vec{e}_x$ , d'où :

$$\vec{F}_{\text{eau}} = - \iint_{(S)} P(z) dy dz \vec{e}_x = - \int_0^L dy \int_{-h}^0 (P_0 - \rho g z) dz \vec{e}_x = -L \left[ P_0 z - \frac{1}{2} \rho g z^2 \right]_{-h}^0 \vec{e}_x$$

d'où finalement :

$$\vec{F}_{\text{eau}} = -P_0 S \vec{e}_x - \frac{1}{2} \rho g h^2 L \vec{e}_x \quad (2.9)$$

- \* La résultante des forces de pressions vaut :

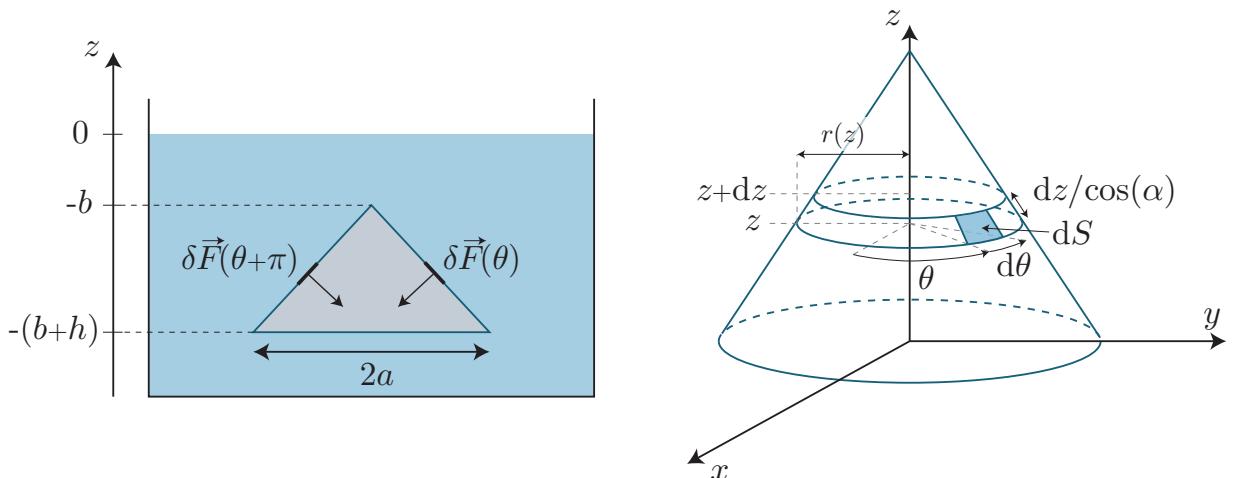
$$\vec{F}_{\text{air}} + \vec{F}_{\text{eau}} = -\frac{1}{2} \rho g h^2 L \vec{e}_x \quad (2.10)$$

On constate, et c'est souvent le cas, que seule la surpression dans l'eau  $P(z) - P_0$  joue un rôle dans le calcul des forces de pression.

Le point d'application de la résultante des forces de pression, appelé centre de poussée  $P$ , est tel que la somme des moments en  $P$  de toutes les forces élémentaires de pression est nul  
 $\iint_{(S)} \overrightarrow{PM} \wedge P(M) d\vec{S} = \vec{0}$ . Pour le barrage plan précédent, on peut montrer que  $P$  se trouve en  $L/2$ , à une hauteur  $z = h/3$ .

### iii) Calcul de la pression sur un cône

Pour le dernier exemple, considérons un cône de hauteur  $h$  et de rayon de base  $a$ , plongé entièrement dans un liquide de masse volumique  $\rho$  où règne un champ de pression  $P(z) = P_0 - \rho g z$ . Le sommet du cône se trouve à une distance  $b$  au-dessous de la surface de l'eau. On cherche la résultante des forces de pression sur la surface latérale. On se place en coordonnées cylindriques d'axe ( $Oz$ ), et on repère une surface élémentaire via les coordonnées  $(\theta, z)$  : on fait varier  $\theta$  de  $d\theta$  et  $z$  de  $dz$ , comme illustré ci-dessous.



- \* Avant de se lancer dans les calculs, il est souhaitable d'étudier les éléments de symétrie pour ce problème. On peut en effet constater que pour les deux surfaces élémentaires symétriques par rapport à l'axe ( $Oz$ ), les forces de pression élémentaires associées possèdent des composantes horizontales opposées en direction qui s'annulent (car  $P$  ne dépend que de  $z$ ). Par conséquent, la résultante des forces de pression est dirigée selon  $-\vec{e}_z$ . Ainsi :

$$\vec{F} = - \iint_{(S)} P(M) dS (\vec{n} \cdot \vec{e}_z) \vec{e}_z = - \iint_{(S)} P(M) \sin \alpha dS \vec{e}_z \quad (2.11)$$

De plus,  $dS = r(z)d\theta \frac{dz}{\cos \alpha}$  et  $r(z) = -(b+z)\tan \alpha$ . On peut alors intégrer par rapport à  $z$  et  $\theta$  :

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-(b+h)}^{-b} P(z)(b+z)(\tan \alpha)^2 \vec{e}_z \quad (2.12)$$

En notant que  $\tan \alpha = a/h$ , un calcul d'intégrales conduit au résultat  $\vec{F} = -\pi a^2 \left( P_0 + \rho g \left( b + \frac{2h}{3} \right) \right) \vec{e}_z$

## II.2 Force volumique et applications

### a) Force de pression sur une particule de fluide

Les forces de pression ont une équivalent volumique. Pour le déterminer, considérons une particule de fluide de forme cubique de côtés  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  en coordonnées cartésiennes.

#### Démonstration

Calculons la résultante des forces de pression sur cette particule de fluide, en notant  $P(x, y, z)$  le champ de pression :

$$\delta \vec{F} = (P(x, y, z) - P(x + dx, y, z)) dy dz \vec{e}_x \quad (2.13)$$

$$+ (P(x, y, z) - P(x, y + dy, z)) dx dz \vec{e}_y \quad (2.14)$$

$$+ (P(x, y, z) - P(x, y, z + dz)) dx dy \vec{e}_z \quad (2.15)$$

$$= - \left( \frac{\partial P}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial P}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial P}{\partial z} \vec{e}_z \right) dx dy dz = - \overrightarrow{\text{grad}}(P) d\tau \quad (2.16)$$

d'où l'on tire la densité volumique de force de pression :

$$\vec{f}_{\text{pression}} = - \overrightarrow{\text{grad}} P \quad (2.17)$$

Cela s'interprète aisément : la résultante des forces de pression sur un petit élément est dirigée dans le sens opposé du gradient de pression, c'est-à-dire des zones de fortes pressions vers celles de faibles pressions.

### b) Relation fondamentale de la statique des fluides

#### i) Démonstration

On se place dans un référentiel galiléen dans lequel le fluide est à l'équilibre (c'est-à-dire que toutes les particules de fluide sont à l'équilibre). On suppose qu'en plus des forces de pression, le fluide est soumis à des forces dont la résultante est décrite par une densité volumique de force  $\vec{f}_v$ . En appliquant la loi de la quantité de mouvement à une particule de fluide à l'équilibre :

$$\vec{f}_{\text{pression}} d\tau + \vec{f}_v(M) d\tau = \vec{0} \iff \overrightarrow{\text{grad}} P = \vec{f}_v(M) \quad (2.18)$$

qui constitue la **relation fondamentale de la statique des fluides**. Sa résolution peut nous permettre de déterminer le champ de pression au sein d'un fluide, ce qu'on illustre par les deux exemples qui suivent.

## ii) Champ de pression dans un liquide incompressible

Considérons le cas d'un liquide incompressible, de masse volumique constante et uniforme  $\rho$ , placé dans un champ de pesanteur uniforme  $\vec{g} = -g\hat{e}_z$ . La relation de la statique des fluides s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}} P = -\rho g \hat{e}_z \quad (2.19)$$

soit projetée selon les trois axes :

$$* \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = 0 \Rightarrow P(y, z) \\ \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow P(z) \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \Rightarrow P(z) \\ \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \Rightarrow P(z) = P_0 - \rho g z \end{cases} \quad (2.21)$$

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g \\ P(z) = P_0 - \rho g z \end{cases}} \quad (2.22)$$

avec  $P_0 = P(z = 0)$ .

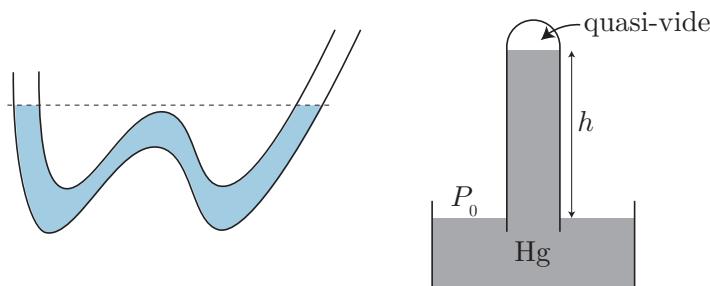


L'expression du champ de pression n'est valable que si l'axe vertical est orienté vers le haut, à l'opposé de  $\vec{g}$ . Si on inverse le sens de l'axe, on trouve évidemment  $P(z) = P_0 + \rho g z$

On peut en conclure que la pression augmente avec la profondeur ; on constate également que les surfaces de niveau isobares sont des plans horizontaux.

Un ordre de grandeur à retenir :  $\rho g \simeq 0,1 \text{ bar}\cdot\text{m}^{-1}$  pour l'eau liquide (soit encore une augmentation de pression de 1 bar tous les 10 m).

Quelques applications :



- \* deux points du même fluide situés à la même altitude ont même pression. Les surfaces libres, soumises à la même pression atmosphérique  $P_0$  ont donc la même altitude (principe des vases communicants), et sont horizontales ;
- \* le fonctionnement du baromètre de Toricelli, un tube rempli de mercure retourné sur une cuve contenant également du mercure, s'explique en considérant que la surface libre extérieure est à la pression atmosphérique  $P_0$ . Ainsi au sein de la colonne de mercure, la pression décroît jusqu'à tendre vers 0 (en réalité dès qu'on atteint la pression de vapeur saturante du mercure, ce dernier se vaporise. Néanmoins  $P_{\text{sat}} \simeq 0$ ). La mesure de la hauteur  $h$  donne accès à la pression via  $P(h) - P_0 = -\rho(\text{Hg})gh$  soit  $P_0 = \rho(\text{Hg})gh$ , et avec  $\rho(\text{Hg}) = 13,5 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ , on trouve  $h = 76 \text{ cm}$  lorsque  $P_0 = 1 \text{ bar}$ .

Ce calcul explique pourquoi l'eau n'est pas utilisée en tant que baromètre, car il faudrait une hauteur de 10 m pour que la pression de l'eau soit quasi-nulle. Cela explique d'ailleurs pourquoi les pompes à eau aspirantes ne peuvent fonctionner au-dessus de 10 m de la surface libre de l'eau, car au-delà l'eau se vaporise. Il est alors préférable d'utiliser une pompe refoulante, placée à l'altitude où se trouve l'eau.

## iii) Champ de pression au sein d'un gaz parfait isotherme

Contrairement au cas des liquides, la masse volumique d'un gaz dépend de la pression. Plus particulièrement, si on assimile l'air de l'atmosphère à un gaz parfait,

$$\rho = \frac{\delta m}{d\tau} = \frac{nM}{V} = \frac{MP}{RT_0} \quad (2.23)$$

en notant  $T_0$  la température de l'atmosphère, supposée constante par la suite. En suivant le même calcul que précédemment, on aboutit à une équation différentielle pour le champ de pression  $P(z)$  (axe ( $Oz$ ) orienté vers le haut) :

$$* \quad \frac{dP}{dz} + \rho g = 0 \iff \frac{dP}{dz} + \frac{MP}{RT_0} g = 0 \iff \frac{dP}{dz} + \frac{1}{H} P(z) = 0 \quad (2.24)$$

en posant  $H = \frac{RT_0}{Mg}$  une hauteur caractéristique associée à cette équation différentielle d'ordre 1.

La condition au limites  $P(z=0) = P_0$  conduit alors à

$$P(z) = P_0 e^{-z/H} \quad (2.25)$$

Plusieurs commentaires à ce résultat :

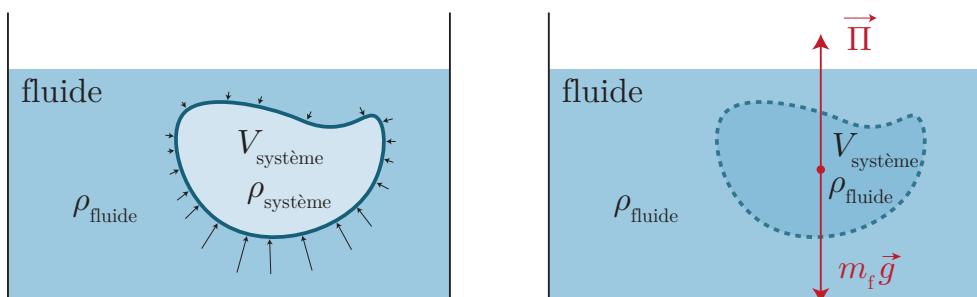
- la pression diminue exponentiellement avec l'altitude, avec une distance caractéristique  $H$  valant pour l'air ambiant ( $M = 29,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ ) à la température  $T_0 = 288 \text{ K}$ ,  $H \simeq 8,4 \text{ km}$  ;
- on pourra considérer la pression constante à l'échelle de la centaine de mètres ;
- le terme exponentiel se met sous la forme  $\exp\left(-\frac{Mgz}{RT_0}\right) = \exp\left(-\frac{mgz}{k_B T}\right)$  avec  $m = \frac{M}{N_A}$ . Ce terme correspond à un **facteur de Boltzmann** qui traduit la compétition entre deux phénomènes physiques : la pesanteur, d'énergie potentielle de pesanteur  $mgz$ , et l'agitation thermique, d'énergie  $k_B T$ , qui conduit les molécules de gaz à occuper tout l'espace.

## II.3 Poussée d'Archimède

### Définition

Dans un référentiel  $\mathcal{R}$ , la **poussée d'Archimède** est la **résultante des forces de pression** qui s'exerce sur un objet immobile dans  $\mathcal{R}$ , par **l'ensemble des fluides au repos qui l'entourent**.

Considérons le cas d'un seul fluide qui entoure un objet délimité par une surface fermée. Dans le cas d'un champ de pression non uniforme, où le gradient de pression est dirigé vers le bas, l'objet placé dans le fluide subit des forces pressantes plus importantes sur le dessous que le dessus.



L'expression de la poussée d'Archimède peut alors se calculer assez simplement :

### Poussée d'Archimède

Un corps entièrement plongé dans un fluide au repos subit une force verticale ascendante opposée au poids du fluide déplacé :

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{système}} \vec{g} \quad (2.26)$$

avec  $\rho_{\text{fluide}}$  la **masse volumique du fluide** (pas du système), et  $V_{\text{système}}$  le volume occupé par le système.



## Démonstration

\*

Pour le démontrer, rien de plus simple. Enlevons l'objet et remplaçons-le par le fluide, de même forme et même volume, occupant la même position. Cette portion de fluide est à l'équilibre et subit son poids et la résultante des forces de pression :  $m_{\text{fluide}} \vec{g} + \vec{F}_{\text{pression}} = \vec{0}$ . Or, la résultante des forces de pression s'exerce aussi bien sur le fluide que sur l'objet initial, c'est donc la poussée d'Archimède :

$$\vec{\Pi} = -m_{\text{fluide}} \vec{g} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{système}} \vec{g} \quad (2.27)$$

Pour terminer, revenons à l'exemple du calcul des forces de pression sur la surface latérale d'un cône. Le cône dans son ensemble est soumis à la résultante des forces de pression (poussée d'Archimède), que l'on peut décomposer en une force sur la surface latérale, et une sur la base du cône :

$$\vec{\Pi} = +\rho \left( \frac{\pi a^2 h}{3} \right) g \vec{e}_z = \vec{F} + \vec{F}_{\text{base}} \quad (2.28)$$

et comme la force de pression sur la base vaut :

$$\vec{F}_{\text{base}} = P(-(b+h)) S \vec{e}_z = (P_0 + \rho g(b+h)) \pi a^2 \vec{e}_z \quad (2.29)$$

il vient

$$\vec{F} = +\rho \left( \frac{\pi a^2 h}{3} \right) g \vec{e}_z - (P_0 + \rho g(b+h)) \pi a^2 \vec{e}_z = -\pi a^2 \left( P_0 + \rho g \left( b + \frac{2h}{3} \right) \right) \vec{e}_z \quad (2.30)$$

résultat identique à ce que l'on avait trouvé après un long calcul.



Pour appliquer cette méthode, il faut que la surface soit fermée et entièrement entourée de fluides.

## III. Forces de viscosité



### Manipulation

Mise en évidence expérimentale : vidéo d'écoulement laminaire de fluide visqueux avec colorants 192-193, 609, 613, 614.

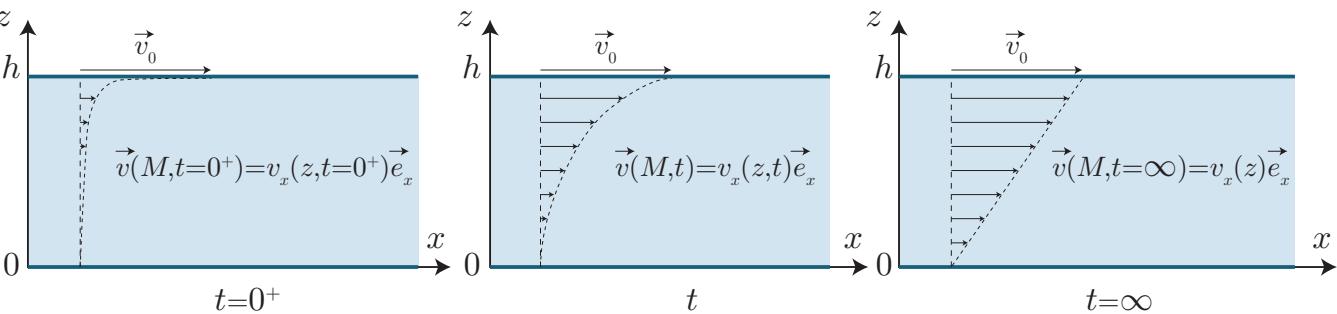
#### III.1 Étude de l'écoulement de Couette plan

Il existe principalement trois types d'écoulement de fluides :

- l'**écoulement de Couette** est un écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois se déplacent à des vitesses constantes, mais différentes : le fluide est mis en mouvement par le mouvement des parois ;
- l'**écoulement de Poiseuille** est un écoulement de fluide visqueux dans une conduite dont les parois sont immobiles : le fluide est mis en mouvement par le gradient de pression entre l'entrée et la sortie de la conduite (comme l'écoulement de charges dans un conducteur ohmique soumis à une différence de potentiel) ;
- l'**écoulement gravitaire** est un écoulement de fluide provoqué par la pesanteur.

On va étudier dans ce chapitre un premier type d'écoulement, appelé écoulement de Couette plan. Un fluide s'écoule entre deux plans parallèles, celui en  $z = 0$  est maintenu fixe, et celui en  $z = h$  se translate horizontalement à la vitesse constante  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ .

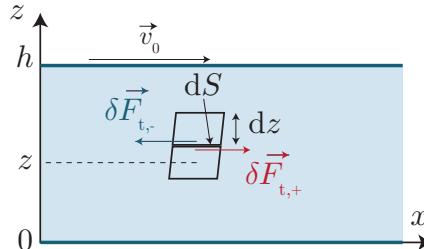
### a) Observation du champ de vitesses



- \* Du fait des symétries du problème, en supposant les dimensions horizontales de la plaque très grandes devant  $h$ , on peut s'attendre à un champ de vitesse de la forme  $\vec{v}(M,t) = v_x(z,t) \vec{e}_x$ .
- \* Lors de la mise en mouvement de la plaque, on observe un régime transitoire durant lequel les couches de fluide à son voisinage se mettent en mouvement, et transmettent de proche en proche de la quantité de mouvement à des couches de fluide plus éloignées. Au bout d'un certain temps, le profil de vitesse est linéaire.

### b) Expression de la force de viscosité

Considérons deux particules de fluide de surface  $dS$  horizontale et de hauteur  $dz$  l'une au-dessus de l'autre, la première étant à une altitude  $z$ . On peut construire l'expression de la force élémentaire exercée par la particule de fluide du dessus sur celle du dessous en lien avec le sens physique :



- \* la force va être d'autant plus importante que la différence de vitesse entre les deux particules est importante, différence spatiale que l'on peut quantifier par  $\frac{\partial v_x}{\partial z}$ ;
- \* la particule de fluide va être freinée ou accélérée par la couche du dessus, selon la vitesse relative des deux : si  $\frac{\partial v_x}{\partial z} > 0$ , celle du dessus est plus rapide et la force est bien dirigée selon  $+\vec{e}_x$  de sorte à l'accélérer, et vice versa ;
- \* plus la surface de contact est grande, plus la norme de la force est importante, donc la force est proportionnelle à  $dS$  ;
- \* la force dépend du fluide choisi, caractérisé par un coefficient  $\eta$  caractéristique d'icelui.

Cela amène alors à l'expression :

$$\delta\vec{F}_{t,+} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{e}_x \iff \sigma_t = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \vec{e}_x \quad (2.31)$$

- \* et de la même façon, la force exercée par la particule de fluide du dessous sur celle du dessus s'exprime par :

$$\delta\vec{F}_{t,-} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} dS \vec{e}_x \quad (2.32)$$

où  $\eta$  est appelé **viscosité dynamique** du fluide.

### c) La viscosité dynamique

Le coefficient que l'on vient d'introduire, la viscosité dynamique  $\eta$ , s'exprime en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , mais on utilise plus couramment une unité secondaire, le poiseuille (symbole PI), correspondant à des  $\text{Pa} \cdot \text{s}$ . Citons quelques ordres de grandeur :

- l'hélium liquide à très basse température :  $\eta = 0$  (état superfluide, sans viscosité) ;
- air à  $T = 298 \text{ K}$  et  $P = 1 \text{ bar}$  :  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ PI}$  (à connaître) ;
- eau à  $T = 298 \text{ K}$  et  $P = 1 \text{ bar}$  :  $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ PI}$  (à connaître) ;
- glycérine pure :  $\eta = 0,80 \text{ PI}$  ;
- huiles : de  $10^{-2}$  à  $10^3 \text{ PI}$  (huile de vidange moteur :  $\eta \sim 0,1 \text{ PI}$ ) ;
- verre à  $500^\circ \text{C}$  :  $\eta \sim 10^{13} \text{ PI}$ .

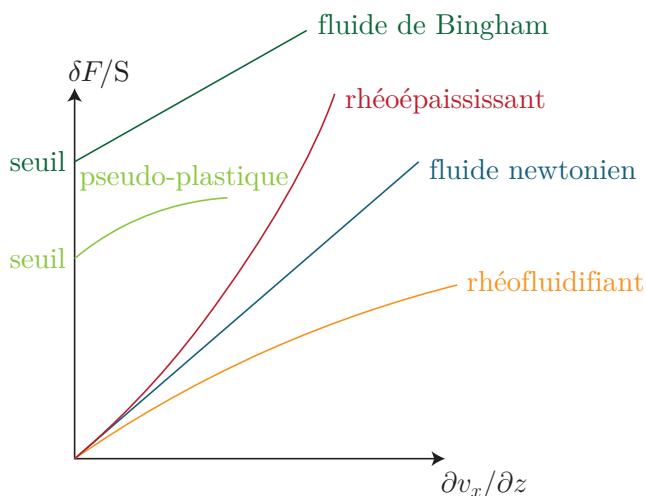
Notons que la viscosité des gaz augmente avec la température tout en dépendant peu de la pression, alors que la viscosité d'un liquide diminue lorsque la température augmente mais augmente avec la pression, ce qui implique certainement des comportements microscopiques différents pour le transfert de quantité de mouvement.

### III.2 Différents types de fluides

Pour une grande majorité de fluides, qualifiés de **fluides newtoniens**, l'expression précédente est valable et la viscosité ne dépend que de la température et de la pression.

Cependant, certains fluides qualifiés alors de **non newtoniens** ont un comportement plus complexe. Citons notamment :

- les fluides rhéofluidifiants dont la viscosité décroît si la vitesse de cisaillement augmente (ketchup, moutarde, sables mouvants) ;
- les fluides rhéoépaisseurs dont la viscosité croît si la vitesse de cisaillement augmente (ciment liquide, suspension de maïzéna), cf. <https://www.youtube.com/watch?v=G6Cs9VF6Zng> ;
- les fluides pseudo-plastiques (et les fluides de Bingham) présentent un seuil de contrainte en deçà duquel le fluide ne s'écoule pas (utile pour les peintures qui doivent pouvoir s'étaler et ensuite ne plus couler spontanément). Par exemple : le dentifrice, la mayonnaise, les fluides électro- ou magnétorhéologiques.



### III.3 Interprétation physique : un phénomène de diffusion (HP)

#### a) Force volumique de viscosité

Il existe également un équivalent volumique des forces de viscosité agissant sur une particule de fluide de volume  $d\tau$ . L'expression suivante n'est pas exigible :

$$\vec{f}_{v, \text{visc}} = \eta \Delta \vec{v} \quad (2.33)$$

On peut la vérifier dans le cas de l'écoulement de Couette plan précédent. Écrivons l'ensemble des forces de viscosité qui s'exercent sur les surfaces en  $z + dz$  et en  $z$  d'une particule de fluide :

$$\delta F_x = \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_{z+dz} dx dy - \eta \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big|_z dx dy = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} d\tau \quad (2.34)$$

soit dans ce cas présent,  $f_{v, \text{visc}, x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$  cohérent avec la formule qui vient d'être donnée.

#### b) Équation de diffusion

Toujours dans le cas de l'écoulement de Couette plan, on admet que l'accélération d'une particule de fluide s'écrit  $\vec{a} = \frac{\partial v_x}{\partial t} \vec{e}_x$ . L'application de la loi de la quantité de mouvement à une particule de fluide dans le référentiel de la plaque fixe – supposé galiléen – conduit, avec l'axe ( $Oz$ ) ascendant à :

$$\rho d\tau \vec{a} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} d\tau \vec{e}_x - \overrightarrow{\text{grad}}(P) d\tau + \rho \vec{g} d\tau \iff \frac{\partial v_x}{\partial t} \vec{e}_x = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \vec{e}_x - \overrightarrow{\text{grad}} P - \rho g \vec{e}_z \quad (2.35)$$

soit projetée selon  $\vec{e}_x$ , en considérant que  $P$  ne dépend que de  $z$  :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \quad (2.36)$$

Cela correspond à une équation de diffusion, de coefficient de diffusion  $D = \frac{\eta}{\rho} = \nu$ , appelé **viscosité cinétique**. Ainsi le champ des vitesses obéit à une équation de diffusion, correspondant physiquement à la diffusion de quantité de mouvement de proche en proche au sein des différentes couches de fluide en mouvement.

## IV. Conditions aux limites



### Manipulation

Vidéos de conditions aux limites : 174, 175, 184, 185.

#### IV.1 Conditions d'adhérence à l'interface fluide-solide

Reprendons l'équation différentielle précédente, mais plaçons-nous en régime permanent. On doit donc résoudre  $\frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0$ , ce qui s'intègre simplement en  $v_x(z) = Az + B$ . Pour déterminer les constantes  $A$  et  $B$ , il faut alors connaître des valeurs particulières du champ de vitesse. On va se servir ici du fait qu'il y a une interface entre le fluide et des solides.

##### Condition d'adhérence

\* À l'interface entre un fluide et un solide, dans le référentiel d'étude, le fluide ne peut pas avoir une vitesse différente de celle du solide du fait de la viscosité (le fluide adhère à la paroi à son contact) :

$$\vec{v}(M_f \in \text{fluide}, t) = \vec{v}(M_s \in \text{solide}, t) \quad (2.37)$$

en notant  $M$  un point de l'interface,  $M_f$  un point appartenant au fluide infiniment proche de  $M$ , et  $M_s$  un point appartenant au solide infiniment proche de  $M$  également.

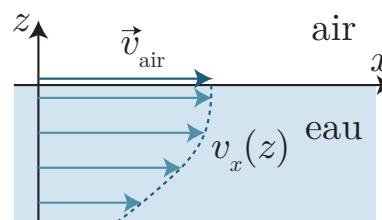
Ainsi, pour l'écoulement de Couette plan, on a  $v_x(0) = 0$  et  $v_x(h) = v_0$  d'où  $v_x(z) = v_0 \frac{z}{h}$ , conforme aux observations expérimentales du champ de vitesse.

#### IV.2 Conditions aux limites à l'interface entre deux fluides

La surface libre de l'océan est un exemple d'interface entre deux fluides. Outre la condition cinématique de continuité des vitesses, on doit ajouter une condition aux limites dynamique entre les forces de cisaillement :

$$\eta_1 \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_{\text{fluide } 1} = \eta_2 \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_{\text{fluide } 2} \quad (2.38)$$

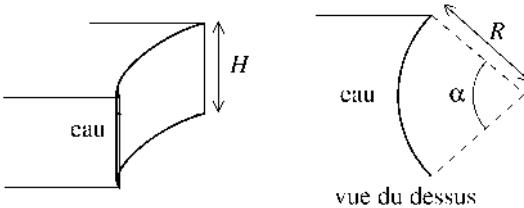
Dans le cas précis de l'interface air - eau,  $\eta_{\text{air}} = 0,02 \eta_{\text{eau}}$ , si bien que l'on peut écrire  $\eta_1 \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} \right)_{\text{fluide } 1} = 0$ , comme illustré sur le schéma ci-contre.



Dans le cadre très simplifié d'écoulements dits parfaits, on peut être amené à considérer que le fluide en contact avec le solide glisse sur ce dernier. On le reverra au chapitre MF5.

# Exercices

## 2. 1 Barrage cylindrique



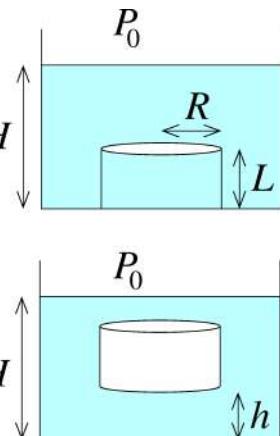
On considère un barrage constitué par une portion de cylindre, de rayon  $R$ , d'angle  $\alpha$  et de hauteur  $H$ .

Calculer la résultante des forces de pression exercées sur le barrage. Comparer à la force qui s'exercerait sur le barrage s'il était plan, avec la même largeur d'eau.

## 2. 2 Résultante des forces de pression sur un cylindre immergé

Un récipient repose sur une surface horizontale. Le fond du récipient présente en son milieu une excroissance cylindrique de hauteur  $L$  et de rayon  $R$ . Le récipient est rempli d'eau, de masse volumique  $\rho$ , sur une hauteur  $H$  supérieure à  $L$ . La pression atmosphérique est  $P_0$ .

1. Déterminer la résultante des forces de pression exercée sur ce cylindre.
2. Considérons un cylindre de hauteur  $L$  et de rayon  $R$  immergée dans l'eau et dont le fond est à une distance  $h$  du fond du récipient.
  - (a) Déterminer la résultante des forces de pression s'exerçant sur le cylindre.
  - (b) Vérifier le principe d'Archimède avec ce système.



## 2. 3 Verre retourné

On remplit complètement d'eau un verre cylindrique de hauteur  $h = 10\text{ cm}$  et de rayon  $R = 3\text{ cm}$ . On pose sur le verre un feuille de papier, puis on retourne l'ensemble. On constate que dans un premier temps, la feuille de papier ne tombe pas. Expliquer.

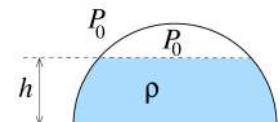
Tout est affaire de pression. Initialement, l'air qui surmonte l'eau dans le verre est à la pression atmosphérique. La pression au fond du verre est donc égale à cette pression additionnée de la pression hydrostatique correspondant à la hauteur de la colonne d'eau. Supposons que celle-ci soit d'environ 5 centimètres. La pression hydrostatique vaut alors 0,5 % de la pression atmosphérique (dans l'eau, la pression augmente de 1 atmosphère quand on s'enfonce de 10 mètres).

Lorsque le verre est renversé et qu'on lâche la feuille, la pression s'exerçant sur cette dernière dépasse donc légèrement la pression atmosphérique. L'ensemble eau-feuille se met alors à chuter en bloc. Ce faisant, le volume d'air dans le verre augmente, sa pression diminue et lorsque celle-ci a diminué de 0,5 %, la pression au niveau de la feuille devient égale à la pression atmosphérique : la chute cesse. Si la hauteur d'air au-dessus de l'eau est de 1 centimètre, on calcule facilement que l'ensemble eau-feuille descend de un vingtième de millimètre : une chute imperceptible. Il faudrait évoquer la tension superficielle pour expliquer pourquoi l'eau ne s'écoule pas malgré une ouverture minime : cette dernière est en effet une interaction attractive.

## 2. 4 Équilibre d'une cloche

Une cloche hémisphérique de rayon  $a$  et de masse  $m$  repose sur un plan horizontal. Elle contient de l'eau jusqu'à une hauteur  $h$ . On note  $\rho$  la masse volumique de l'eau.

Montrer que la cloche se soulève si la hauteur d'eau dépasse une valeur critique  $h_c$  que l'on exprimera en fonction des données.



Du fait des symétries, la force de pression exercée par l'eau sur la cloche est verticale et orientée vers le haut. Si cette dernière dépasse en norme le poids, la cloche va se soulever et l'équilibre mécanique est rompu (dans les faits, il faudrait aussi tenir compte de la tension superficielle). Calculons donc la résultante des forces de pression selon  $\vec{e}_z$ .

On découpe la surface hémisphérique en des surfaces infinitésimales d'aire  $dS = ad\theta a \sin \theta d\varphi$  orienté selon  $+\vec{e}_r$ . Alors

$$F_z = \iint_{(S)} (P(z) - P_0) dS \vec{e}_r = \int_{\theta_{\min}}^{\pi/2} \int_0^{\varphi=2\pi} \rho g(h-z) ad\theta a \sin \theta d\varphi \vec{e}_r \cdot \vec{e}_z = 2\pi \rho g a^2 \int_{\theta_{\min}}^{\pi/2} (h-z) \sin \theta \cos \theta d\theta \quad (2.39)$$

Comme  $z = a \cos \theta$ , on peut effectuer le changement de variable où  $dz = -a \sin \theta d\theta$ . Les bornes sont alors  $z = h$  pour  $\theta_{\min}$  et  $z = 0$  pour  $\theta = \pi/2$  :

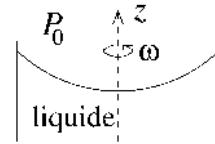
$$F_z = 2\pi \rho g a^2 \int_h^0 (h-z) \frac{-dz}{a} \frac{z}{a} = 2\pi \rho g \left[ \frac{hz^2}{2} - \frac{hz^2}{3} \right]_0^h = \pi \rho g \frac{h^3}{3} \quad (2.40)$$

Enfin, il y a décollement si  $F_z > mg$ , soit  $h > \left(\frac{3m}{\pi\rho}\right)^{1/3}$ .

## 2. 5 Surface libre d'un cylindre en rotation

Un récipient cylindrique contenant un liquide de masse volumique  $\rho$  est en rotation autour de son axe à la vitesse constante  $\omega$ .

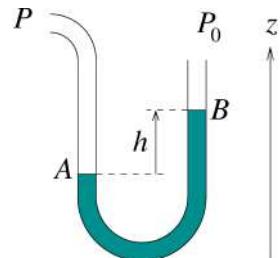
On admet que dans le référentiel tournant, non galiléen, le principe fondamental de la statique peut toujours s'écrire à condition d'ajouter la force d'inertie d'en-trainement. Pour un point  $M$  de masse  $m$  et de projeté orthogonal  $H$  sur l'axe de rotation, celle-ci a pour expression :  $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 \vec{HM}$ .



1. Déterminer l'expression de la pression en un point  $M$  d'altitude  $z$  et distant de  $r$  de l'axe de rotation.
2. En déduire l'équation  $z(r)$  de la surface liquide. On note  $R$  le rayon du cylindre et  $h$  la hauteur du fluide sans rotation ( $\omega = 0$ ).

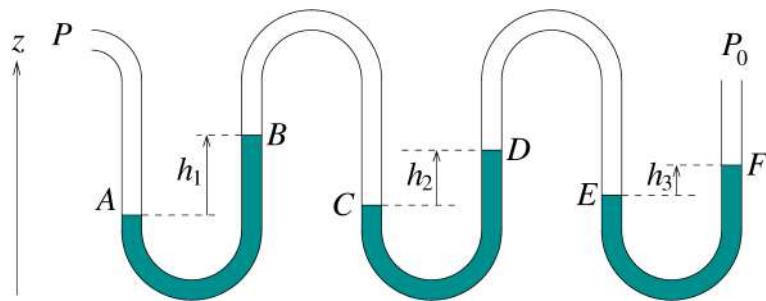
## 2. 6 Manomètres

Un manomètre peut être réalisé de la manière suivante. Un tube en U est partiellement rempli d'un liquide incompressible de masse volumique  $\rho_1$ . Un côté du tube est en contact avec l'atmosphère de pression  $P_0$ , l'autre avec un gaz dont on veut mesurer la pression  $P$ .



1. Exprimer  $P$  en fonction de la la différence de hauteur  $h = z_B - z_A$ .

On considère maintenant le dispositif suivant, appelé un manomètre hydrostatique à colonne fractionnée :



L'ouverture à gauche est de nouveau en contact avec le gaz dont on veut mesurer la pression  $P$ , l'ouverture de droite avec l'atmosphère de pression  $P_0$ .

Un premier liquide incompressible de masse volumique  $\rho_1$  emplit les 3 tubes en U dans les parties grisées (AB, CD, EF). Un second liquide incompressible de masse volumique  $\rho_2$ , non miscible avec le premier, emplit les parties non grisées (BC, DE).

On remplit les tubes de manière à ce que les points A, B, C, D, E, soient au même niveau lorsque la pression est la même des deux côtés ( $P = P_0$ ).

2. Lorsque  $P \neq P_0$ , montrer que les hauteurs  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  sont égales. Est-ce le cas si, au lieu d'utiliser un liquide pour le second fluide, on utilise un gaz ?
3. (a) Exprimer  $P$  en fonction de  $P_0$  et des hauteurs dans le cas où le second fluide est un liquide.  
(b) Exprimer  $P$  en fonction de  $P_0$  et des hauteurs dans le cas où le second fluide est un gaz.
4. Quel(s) avantage(s) voyez-vous à ce système par rapport au tube simple ?

1. La pression en  $A$  est  $P$  (gaz dont on peut négliger la variation de pression avec l'altitude). Par conséquent, en appliquant la relation fondamentale de l'hydrostatique au fluide incompressible  $dP(z) = -\rho g dz$ . Avec  $P(A) = P$  et  $P(B) = P_0$ , l'intégration conduit à :

$$P(B) - P(A) = -\rho gh \iff P = P_0 + \rho gh \quad (2.41)$$

2. À partir du moment où tous les fluides sont incompressibles, les volumes restent constants. Donc si l'extrémité du tuyau se déplace de  $h$ , l'autre extrémité également. Par conséquent  $h_1 = h_2 = h_3$ . Par contre avec un gaz, compressible, les hauteurs seront différentes puisque les volumes BC et DE ne seront pas identiques.

3. (a) D'après ce qui précède, les points  $A$ ,  $C$  et  $E$  d'une part,  $B$ ,  $D$  et  $F$  d'autre part sont à la même altitude. On a  $P_A = P = P_B + \rho_1 gh$ ;  $P_C = P_B + \rho_2 gh = P_D + \rho_1 gh$ ;  $P_E = P_D + \rho_2 gh = P_F + \rho_1 gh$  et  $P_F = P_0$  D'où finalement

$$P = P_0 + (3\rho_1 - 2\rho_2)gh \quad (2.42)$$

- (b) Dans le cas des gaz, la pression est quasiment constante du fait de la faible masse volumique. Par conséquent :  $P = P_A = P_B + \rho_1 gh_1$ ;  $P_B = P_C = P_D + \rho_1 gh_2$ ;  $P_D = P_E = P_F + \rho_1 gh_3$  et  $P_F = P_0$ . D'où :

$$P = P_0 + \rho_1 g(h_1 + h_2 + h_3) \quad (2.43)$$

4. Dans le cas du gaz, la différence de hauteur  $\frac{P - P_0}{\rho_1 g}$  est répartie sur 3 tubes en U plutôt qu'un seul : cela permet de faire un manomètre plus petit (rappelons que  $\Delta P = 1 \text{ bar} \iff \Delta h = 10 \text{ m}$  pour l'eau).

Dans le cas du liquide, on a  $h_1 = \frac{P - P_0}{3\rho_1 - 2\rho_2}$  donc on peut facilement en choisissant bien les masses volumiques :

- soit prendre  $3\rho_1 - 2\rho_2 \simeq 0$  de sorte à avoir un appareil très sensible à de faibles variations de pression ;
- soit au contraire prendre  $3\rho_1 - 2\rho_2$  très grand, ce qui permet de mesurer de grands écarts de pression avec un petit appareil.

## 2. 7 Pression au sommet de l'Everest

On considère que la température de l'air (gaz parfait) décroît linéairement avec l'altitude. Au niveau de la mer, la température vaut  $20^\circ\text{C}$ , et au sommet de l'Everest (altitude 8850 m) elle vaut  $-40^\circ\text{C}$ . La masse molaire de l'air est  $M = 29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ .



1. Déterminer la loi de variation de la température avec l'altitude.
2. Établir la loi de variation de la pression avec l'altitude. En déduire la pression au sommet de l'Everest en fonction de la pression au niveau de la mer.
3. Montrer que, dans l'atmosphère, on a une relation du type  $PV^k = \text{cste}$ . Calculer  $k$ .

1. En introduisant  $T_1 = 20^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = -40^\circ\text{C}$  et  $h = 8850 \text{ m}$ , on peut donc écrire la loi affine de température :

$$T(z) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{h} z = a + bz \quad (2.44)$$

avec l'axe ( $Oz$ ) orienté vers le haut.

2. On part de la relation fondamentale de l'hydrostatique projetée selon l'axe ( $Oz$ ) :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = \frac{-Mg}{RT(z)} P(z) \quad (2.45)$$

soit en séparant les variables :

$$\frac{dP}{P} = \frac{-Mg}{R} \frac{1}{a + bz} dz \implies \ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{Mg}{Rb} \ln\left(\frac{a + bz}{a}\right) \quad (2.46)$$

soit en prenant l'exponentielle :

$$P(z) = P_0 \left(1 + \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right) \frac{z}{h}\right)^{\frac{Mgh}{R(T_1 - T_2)}} \quad (2.47)$$

D'où en  $z = h$ , la pression au sommet de l'Everest est :

$$P(h) = P_0 \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{Mgh}{R(T_1 - T_2)}} \quad (2.48)$$

3. On a trouvé précédemment que

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right) = -\frac{Mg}{Rb} \ln\left(\frac{a+bz}{a}\right) \iff \ln(P) + \frac{Mg}{Rb} \ln(T) = \text{cste} \quad (2.49)$$

Or, si on vérifie une loi du type  $PV^k = \text{cste}$ , via la loi des gaz parfaits  $P^{1-k}T^k = \text{cste}$ , soit encore  $PT^{\frac{k}{1-k}} = \text{cste}$ . On identifie donc  $\frac{Mg}{Rb} = \frac{k}{1-k}$ , conduisant à

$$k = \frac{\frac{Mg}{Rb}}{1 + \frac{Mg}{Rb}} = \frac{Mgh}{Mgh + R(T_2 - T_1)} = 1,25 \quad (2.50)$$

## 2. 8 Montgolfière

Une montgolfière de volume  $V = 5000 \text{ m}^3$  est remplie d'air à la température  $T' = 75^\circ\text{C}$ . L'air environnant est à  $T = 17^\circ\text{C}$ . L'enveloppe du ballon et la nacelle ont une masse totale  $m$  et un volume négligeable par rapport au volume  $V$ . La pression atmosphérique est supposée égale à  $P_0 = 1,013 \text{ bar}$  à l'extérieur comme à l'intérieur du ballon.

1. Déterminer l'expression et la valeur numérique de la masse volumique de l'air à l'intérieur du ballon et à l'extérieur.
2. Déterminer la valeur maximale de  $m$  pour que la montgolfière puisse décoller.
3. Même question lorsque le ballon est rempli d'hélium à la même température que l'air environnant.

*Données :* Masse molaire de l'air  $M_{\text{air}} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ; masse molaire de l'hélium  $M_{\text{He}} = 4,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. En supposant qu'il s'agisse de gaz parfait, on passe sans peine de  $PV = nRT$  à  $\rho = \frac{MP}{RT}$ . Numériquement  $\rho_{\text{ext}} = 1,22 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\rho_{\text{int}} = 1,02 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .
2. Bilan des forces : poids + poussée d'Archimède. Il y a décollement si  $(m + \rho_{\text{int}}V)\vec{g} - \rho_{\text{ext}}V\vec{g}$  est non nul et orienté vers le haut. Il faut donc que

$$\rho_{\text{ext}}Vg > (m + \rho_{\text{int}}V)g \iff m < (\rho_{\text{ext}} - \rho_{\text{int}})V = 1,01 \cdot 10^3 \text{ kg} \quad (2.51)$$

3. Le même raisonnement conduit à  $m < (\rho_{\text{ext}} - \rho_{\text{He}})V = 5,25 \cdot 10^3 \text{ kg}$ .

## 2. 9 Masse de l'atmosphère terrestre

Évaluer de deux façons la masse de l'atmosphère terrestre. Comparer à la masse de la Terre,  $M_T = 6,0 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ . On précise que la température moyenne de l'atmosphère terrestre est d'environ  $T = 288 \text{ K}$  et le rayon de la Terre est  $R_T = 6400 \text{ km}$

## 2. 10 Glissement sur plan incliné

Un bloc parallélépipédique de masse  $M = 1 \text{ kg}$  glisse sur un plan incliné d'un angle  $\alpha = 10^\circ$  par rapport au plan horizontal. Ce plan est recouvert d'un film d'huile d'épaisseur  $e = 5 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ . On suppose que le profil de vitesse du film de fluide entre le bloc et le plan est linéaire. La surface de contact est  $S = 0,02 \text{ m}^2$  et la viscosité de l'huile  $\eta = 8 \cdot 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

Déterminer la vitesse limite de glissement du bloc.

## 2. 11 Force exercée par un écoulement

On considère deux plaques planes fixes en  $z = -\frac{a}{2}$  et  $z = +\frac{a}{2}$ , de largeur  $L_y \gg a$  suivant  $\vec{e}_y$ , et  $L_x \ll a$  suivant  $\vec{e}_x$ .

Entre ces deux plaques s'écoule un fluide de viscosité  $\eta$ , avec un débit volumique  $Q$ . On cherche un champ de vitesse de la forme  $\vec{v} = (bz^2 + cz + d)\vec{e}_x$ .

1. Déterminer complètement le champ de vitesse.
2. Déterminer la force visqueuse que le fluide exerce sur chaque plaque.

## 2. 12 Viscosimètre de Couette

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux de viscosité  $\eta$  entre deux cylindres concentriques de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ , tournant autour de leur axe commun aux vitesses angulaires respectives  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . On propose un champ des vitesses du fluide de la forme

$$\vec{v} = \left( Ar + \frac{B}{r} \right) \vec{e}_\theta \quad (2.52)$$

1. Déterminer complètement le champ des vitesses.
2. Par analogie avec le cas de l'écoulement plan, exprimer la force de cisaillement exercée par le fluide intérieur sur le fluide extérieur à travers une surface élémentaire d'aire  $dS$  normale à  $\vec{e}_r$ . Déterminer le couple exercé par le fluide sur le cylindre extérieur.
3. On utilise le viscosimètre pour mesurer la viscosité de l'huile d'olive. Un opérateur exerce un couple  $C$  pour maintenir le cylindre extérieur fixe, le cylindre intérieur tournant à la vitesse constante  $\omega_1 = 3$  tours par seconde. On mesure  $C = 9,4 \cdot 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}$ . On donne  $R_1 = 4,8 \text{ cm}$ ,  $R_2 = 5,0 \text{ cm}$ ,  $h = 15 \text{ cm}$ . Déterminer la viscosité de l'huile d'olive.

# Écoulements internes incompressibles et homogènes dans une conduite cylindrique

## Questions de cours :

- Présenter les deux modes de transport de quantité de mouvement, avec leur temps caractéristique associé. Définir alors le nombre de Reynolds et expliciter son sens physique.
- Ecoulement de Poiseuille cylindrique : par la méthode de votre choix, déterminer le champ de vitesses et en déduire la loi de Hagen-Poiseuille.
- Présenter la notion de perte de charge régulière. Représenter l'allure du diagramme de Moody, en distinguant différentes zones, et interpréter physiquement.

## Capacités exigibles du BO :

- Décrire les différents régimes d'écoulement (laminaire et turbulent).
- Relier le débit volumique à la vitesse débitante.
- Décrire qualitativement les deux modes de transfert de quantité de mouvement : convection et diffusion.
- Interpréter le nombre de Reynolds comme le rapport d'un temps caractéristique de diffusion de quantité de mouvement sur un temps caractéristique de convection.
- Évaluer le nombre de Reynolds et l'utiliser pour caractériser le régime d'écoulement.
- Dans le cas d'un écoulement à bas nombre de Reynolds, établir la loi de Hagen-Poiseuille et en déduire la résistance hydraulique.
- Exploiter le graphe de la chute de pression en fonction du nombre de Reynolds, pour un régime d'écoulement quelconque.
- Exploiter un paramétrage adimensionné permettant de transposer des résultats expérimentaux ou numériques sur des systèmes similaires réalisés à des échelles différentes.

L'observation d'un filet d'eau sortant d'un robinet montre qu'il existe de nombreux types d'écoulements selon le diamètre du tuyau, le degré d'ouverture du robinet, etc. L'idée est de caractériser de manière générale les écoulements, de prévoir le type d'écoulement selon les paramètres de la conduite et du fluide. On s'intéressera enfin à la variation de la pression du fluide aux extrémités d'une conduite afin de permettre un écoulement stationnaire.

## I. Différents types d'écoulements

### I.1 Vitesse débitante

Rappelons quelques définitions :

- le débit volumique est défini par  $D_v = \frac{\delta V}{\delta t} = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot d\vec{S}$ . S'il est constant, il peut être mesuré via le rapport entre le volume en sortie d'une conduite et le temps durant lequel l'écoulement se produit ;
- \* ▪ le débit massique est défini par  $D_m = \frac{\delta m}{\delta t} = \iint_{(S)} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$ . Dans le cas d'un écoulement incompressible et homogène, on a simplement  $D_m = \rho D_v$ .

On définit alors la vitesse débitante  $U$  d'un écoulement de section  $S$  par le rapport  $U = \frac{D_v}{S}$ . Il peut être vu comme la moyenne de la vitesse du fluide sur une section droite de l'écoulement :

$$U = \frac{1}{S} \iint_{(S)} \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (3.1)$$

Le champ des vitesses  $\vec{v}$  ne peut pas toujours être déterminé, cependant le débit volumique est accessible expérimentalement, permettant d'évaluer  $U$ . C'est cette vitesse que l'on pourra utiliser comme ordre de grandeur de la vitesse du fluide lors de calculs d'ordres de grandeur.

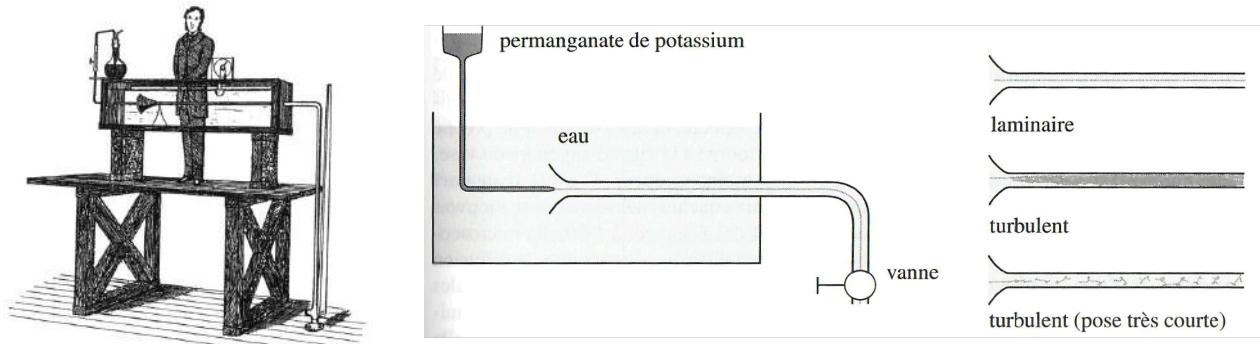
### I.2 Expérience historique de Reynolds



#### Manipulation

Vidéo de l'expérience de Reynolds. <https://www.youtube.com/watch?v=VYiXa0uc8kg>

En 1883, Osborne Reynolds a mené une célèbre expérience illustrant les différents régimes d'écoulement, représentée ci-dessous par un schéma de Reynolds (à gauche) et sa schématisation (droite). Un mince filet de permanganate de potassium, de couleur violette, est injecté à l'entrée d'un tube en verre dans lequel s'écoule de l'eau. La vitesse débitante est réglée via une vanne, et le colorant permet d'observer l'écoulement dans le tube.



Reynolds constata alors que :

- pour de faibles vitesses débitantes, le filet de permanganate reste rectiligne, parallèle aux parois du tuyau horizontal, traduisant le fait que les couches de fluide glissent les unes sur les autres sans se mélanger. On qualifie l'écoulement de **laminaire** ;
- \* ▪ pour de grandes vitesses débitantes, le filet coloré se mélange très vite à l'eau qui l'entoure, en suivant une trajectoire désordonnée et aléatoire. Les particules de fluide tourbillonnent de façon non régulière et chaotique, se coupent, voire fusionnent : on qualifie l'écoulement de **turbulent**. Il est alors impossible de prédire la vitesse du fluide en un point donné à partir de sa connaissance à un instant donné antérieur.

Bien que la vitesse débitante puisse être constante, l'écoulement turbulent est une réponse non stationnaire et aléatoire à une excitation stationnaire et témoigne du caractère non-linéaire des lois

régissant la dynamique des fluides.

Outre la vitesse débitante, Reynolds a pu également constater que le diamètre de la conduite influençait l'écoulement et l'apparition du régime turbulent, tout comme la nature du fluide (sa viscosité). En particulier pour un fluide visqueux, on observe un écoulement turbulent pour des vitesses débitantes bien plus élevées que pour l'eau, à masse volumique équivalente.

Conclusion : l'apparition de la turbulence dépend donc de manière couplée d'un certain nombre de paramètres, ceci laisse envisager qu'elle est régie par une loi d'échelle, faisant intervenir un nombre adimensionné que l'on va construire.

## II. Le nombre de Reynolds

On cherche à interpréter l'expérience précédente. Deux phénomènes physiques interviennent ici : d'une part le phénomène de convection du fluide, transport longitudinal de quantité de mouvement, et d'autre part la viscosité, que l'on a interprété dans le chapitre précédent comme étant un phénomène de diffusion de la quantité de mouvement transversalement à l'écoulement. C'est la compétition entre ces deux modes qui va déterminer la nature de l'écoulement.

### II.1 Les modes de transport de la quantité de mouvement

Chaque phénomène peut être caractérisé par un vecteur densité volumique de transport de quantité de mouvement  $\vec{j}_p$  à travers une surface orientée  $d\vec{S}$  vérifiant :

$$\delta^2 p = \vec{j}_p \cdot d\vec{S} dt \quad (3.2)$$

avec  $\delta^2 p$  la quantité élémentaire de quantité de mouvement traversant la surface  $dS$  pendant  $dt$ .

#### a) Transport par convection

Considérons l'écoulement de Couette plan, étudié au chapitre MF2, pour lequel le champ des vitesses se met sous la forme  $\vec{v} = v_x(z, t)\vec{e}_x$ . Déterminons la quantité de mouvement élémentaire traversant la surface élémentaire perpendiculaire à l'écoulement, de section  $d\vec{S} = dy dz \vec{e}_x$  :

$$\delta^2 p_x = \delta^2 m v_x \quad (3.3)$$

avec  $\delta^2 m = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} dt (= \rho v_x dy dz dt)$ .

\* Ainsi par identification, comme  $\delta^2 p_x = (\rho v_x \vec{v}) \cdot d\vec{S} dt$ , le vecteur densité de courant de convection s'écrit

$$\vec{j}_{p,conv} = \rho v_x \vec{v} \quad (3.4)$$

On peut faire une analogie avec les autres phénomènes de transport : le vecteur densité de courant est le produit de la densité volumique  $\rho v_x$  de la grandeur physique transportée par le champ des vitesses (analogie avec le transport de masse où  $\vec{j}_m = \rho \vec{v}$ ).

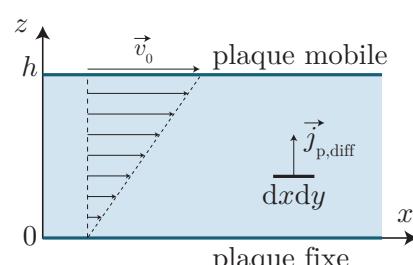
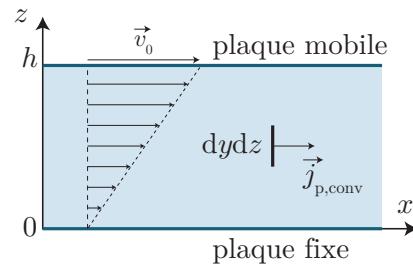
L'expression du vecteur densité de courant de convection de quantité de mouvement montre que le transport par convection se fait à la vitesse  $\vec{v}$ , dont l'ordre de grandeur est la vitesse débitante  $U$ . Ainsi le temps caractéristique pour que le phénomène de convection se ressente sur une distance caractéristique  $L$  est simplement :

$$\tau_{conv} \sim \frac{L}{U} \quad (3.5)$$

#### b) Transport par diffusion

Toujours pour l'écoulement de Couette plan, étudions l'effet de la viscosité. La force élémentaire de viscosité exercée à la travers la surface  $dx dy$  par une particule de fluide en  $z^-$  sur une particule de fluide en  $z^+$  est  $\delta \vec{F}_{z^- \rightarrow z^+} = -\eta \frac{dv_x}{dz} dx dy \vec{e}_x$ . Cette force élémentaire correspond à un transfert de quantité de mouvement élémentaire  $\delta \vec{p} = \delta p_x \vec{e}_x$  pendant une durée  $dt$  à travers  $dx dy$  dans le sens  $+\vec{e}_z$  :

$$* \quad \delta \vec{F}_{z^- \rightarrow z^+} = \frac{\delta p_x}{dt} \vec{e}_x \quad (3.6)$$





Bien que la quantité de mouvement, grandeur vectorielle, soit orientée selon  $\vec{e}_x$ , le phénomène de diffusion se produit selon la direction transverse  $\vec{e}_z$ .

- \* Il vient  $\vec{j}_{p,\text{diff}} = \frac{\delta p_x}{dxdydt} \vec{e}_z = -\eta \frac{dv_x}{dz} \vec{e}_z$ , que l'on peut réécrire, comme  $\rho = \text{cste}$  en introduisant la **viscosité cinématique**  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  :

$$\vec{j}_{p,\text{diff}} = -\nu \overrightarrow{\text{grad}} (\rho v_z) \quad (3.7)$$

faisant apparaître une loi similaire à la loi de Fick ou de Fourier. Cela n'est pas très surprenant avec l'interprétation physique vue au chapitre MF2, où  $\nu$  correspondait au coefficient de diffusion de l'équation de diffusion de la quantité de mouvement.

Le temps caractéristique associé à ce phénomène de diffusion pour une distance  $L$  est donc :

\*  $\tau_{\text{diff}} \sim \frac{L^2}{\nu} \quad (3.8)$

La viscosité cinématique  $\nu$  s'exprimant en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , relie à la fois la masse volumique et la viscosité dynamique. Ainsi l'eau, bien que plus visqueuse que l'air (d'un facteur 50), est aussi bien plus dense. Ainsi  $\nu_{\text{eau}} = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1} < \nu_{\text{air}} = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  à la pression 1,0 bar à 20 °C, ce qui peut surprendre.

## II.2 Définition du nombre de Reynolds

Ces deux modes d'écoulement qui viennent d'être mis en évidence ont des effets contraires :

- \* □ la diffusion, c'est-à-dire la viscosité, tend à homogénéiser, à lisser les écoulements et sera donc le phénomène majoritaire d'un écoulement laminaire ;
- la convection, c'est-à-dire l'inertie, tend à rendre au contraire l'écoulement plus agité et sera donc le phénomène majoritaire d'un écoulement turbulent.

On peut alors définir de deux manières assez simples le nombre de Reynolds  $Re$ , nombre sans dimension dont la valeur va nous indiquer le régime d'écoulement :

- en utilisant les densités de courant :

$$Re \sim \frac{\left\| \vec{j}_{p,\text{conv}} \right\|}{\left\| \vec{j}_{p,\text{diff}} \right\|} \sim \frac{\rho U^2}{\nu \frac{\rho U}{L}} \Rightarrow Re = \frac{UL}{\nu} = \frac{\rho UL}{\eta} \quad (3.9)$$

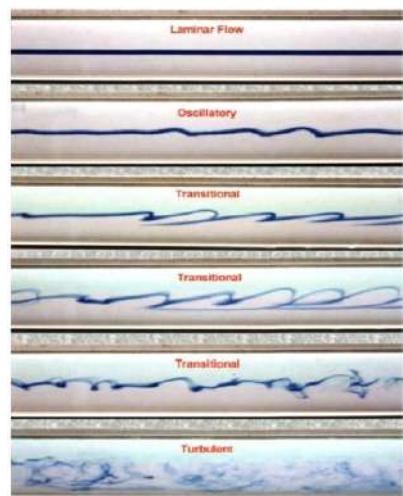
- \* □ en utilisant les temps caractéristiques :

$$Re \sim \frac{\tau_{\text{diff}}}{\tau_{\text{conv}}} \sim \frac{\frac{L^2}{\nu}}{\frac{L}{U}} = \frac{UL}{\nu} \quad (3.10)$$

Ainsi :

- \* □ si  $Re \ll 1$ , l'écoulement est **laminaire** le transport de quantité de mouvement par diffusion domine, ce qui est équivalent à  $\tau_{\text{diff}} \ll \tau_{\text{conv}}$  car la diffusion se manifeste plus rapidement ;
- si  $Re \gg 1$ , l'écoulement est **turbulent**, le transport de quantité de mouvement par convection domine, ce qui est bien équivalent à  $\tau_{\text{diff}} \gg \tau_{\text{conv}}$ .

Expérimentalement, les conclusions de l'étude réalisée par Reynolds montrent que dans une conduite circulaire, la transition entre les deux régimes se produit autour de  $Re \simeq 2000$ . Elle n'est cependant pas abrupte : autour de cette valeur critique l'écoulement possède des phases d'écoulement laminaire ou turbulent.



## Exercice

À partir de quelle vitesse  $U$  l'écoulement de l'eau dans un tube de diamètre  $D = 10\text{ cm}$  devient-il turbulent ? Qu'en est-il pour l'air dans les CNTP ?

\*  $U_{\lim} = \frac{\nu Re}{D} \simeq 2\text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$  pour l'eau, et  $30\text{ cm}\cdot\text{s}^{-1}$  pour l'air. Ainsi l'écoulement d'eau dans une conduite est rarement laminaire.

La définition du nombre de Reynolds est générale, et ne s'applique pas qu'aux écoulements dans une conduite. Citons notamment pour des écoulements laminaires : la lubrification de pièces en mouvement, la circulation sanguines dans les capillaires, l'écoulement de roche, magma ou glacier, etc. Et pour les écoulements turbulents : l'écoulement atmosphérique, l'écoulement autour d'une aile d'avion ou d'une voiture, le jet d'eau d'un robinet, etc.

### II.3 Similarité des écoulements

L'intérêt de définir un nombre adimensionné caractérisant l'écoulement est qu'il fait apparaître la notion de **similarité des écoulements** : deux écoulements a priori différents par leurs propriétés géométriques et la nature des fluides mis en jeu sont qualifiés de similaires dynamiquement s'ils possèdent le même nombre de Reynolds.

\* Ainsi, pour pouvoir étudier l'écoulement d'air autour d'une maquette réduite de voiture à l'échelle 1/100<sup>e</sup>, il faudrait augmenter la vitesse de l'air d'un facteur 100 pour travailler avec le même nombre de Reynolds. Cela peut s'avérer compliqué à mettre en œuvre, on peut alors changer de fluide : l'usage de l'eau n'implique qu'un facteur 7 sur la vitesse.

Notons néanmoins que le nombre de Reynolds n'est pas le seul nombre adimensionné de la mécanique des fluides (citons les nombres de Mach, Prandtl, Péclet, etc.) et le passage à l'échelle réduite ne pourra pas conserver l'ensemble de ces nombres. Il faut faire un choix quant aux phénomènes physiques que l'on souhaite privilégier.

<https://www.youtube.com/watch?v=DndctbZkVT8>, modèles réduits physiques.

## III. Chute de pression en écoulement stationnaire dans une conduite horizontale - Pertes de charge régulières

Du fait des forces de viscosité, on doit appliquer un gradient de pression entre les extrémités d'une conduite dans laquelle on souhaite transporter un fluide. L'objectif est alors de déterminer ce gradient de pression en fonction des paramètres de l'écoulement : on parle de **perte de charge régulière** lorsqu'on considère des conduites horizontales droites de section constante.

### III.1 Loi de Hagen-Poiseuille

#### a) Détermination du champ des vitesses

Intéressons-nous à l'écoulement incompressible en régime stationnaire d'un fluide de masse volumique constante  $\rho$ , de viscosité dynamique  $\eta$  dans une conduite cylindrique de rayon  $R$ , de longueur  $L$  et d'axe ( $Ox$ ). Cet écoulement est produit par une différence de pression  $\Delta P = P(0) - P(L) > 0$  imposée. On suppose que la pression est uniforme sur la section du tuyau et ne dépend que de  $x$ .

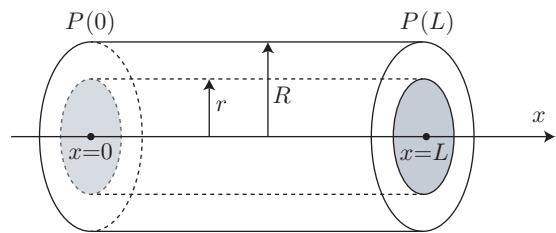
\* Comme l'écoulement est stationnaire, les trajectoires des particules de fluide sont identiques aux lignes de courant, ce sont des droites parallèles à ( $Ox$ ). Du fait de l'invariance par rotation autour de l'axe ( $Ox$ ), on peut supposer que le champ de vitesse  $\vec{v} = v\vec{e}_x$  ne dépend que de  $x$  et  $r$ . Or, l'écoulement est incompressible, donc  $\operatorname{div} \vec{v} = 0 = \frac{\partial v}{\partial x}$ . Ainsi on recherche le champ de vitesse  $\vec{v} = v(r)\vec{e}_x$ .

Il existe deux moyens d'obtenir l'équation vérifiée par le champ de vitesse, que l'on va présenter.

### i) Loi de la quantité de mouvement à un volume macroscopique

On prend comme système un cylindre de rayon  $r$ , de longueur  $L$  et d'axe ( $Ox$ ). On distingue :

- \* ■ les forces de pression, dont la résultante vaut simplement  $\vec{F}_p = \Delta P \pi r^2 \vec{e}_x$  (la résultante sur les parois latérales est nulle, par symétrie) ;
- les forces de viscosité sur les parois latérales, de surface  $2\pi r L$ , du fait de l'écoulement de la couche de fluide en  $r^+$  :  $\vec{F}_{visc} = \eta 2\pi r L \frac{dv}{dr} \vec{e}_x$  ;
- la force de pesanteur, négligée ici.



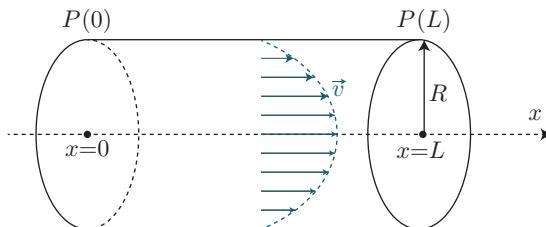
Comme on est en régime stationnaire, la quantité de mouvement de chaque particule de fluide est constante au cours du temps, et il en est de même pour l'ensemble du système, d'où en appliquant la LQM au système dans le référentiel de la conduite, supposé galiléen :

$$*\quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} = \Delta P \pi r^2 \vec{e}_x + \eta 2\pi r L \frac{dv}{dr} \vec{e}_x \implies \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P r}{2\eta L} \quad (3.11)$$

d'où après intégration et condition d'adhérence en  $r = R$  où  $v(R) = 0$  :

$$\vec{v} = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) \vec{e}_x \quad (3.12)$$

On obtient un profil parabolique de vitesse à symétrie de révolution :



### ii) Loi de la quantité de mouvement à une particule de fluide

On peut effectuer le même raisonnement à un système mésoscopique. Cette méthode est ici plus compliquée, mais est parfois indispensable pour d'autres situations physiques. Le système étudié est une particule de fluide de dimension  $dr$ ,  $rd\theta$  et  $dx$ , située au voisinage du point  $M(r, \theta, x)$  en coordonnées cylindriques. Les forces qui s'exercent sur cette particule de fluide de volume  $d\tau = r dr d\theta dx$  sont :

- \* ■ la résultante des forces de pression :  $-\overrightarrow{\text{grad}}(P)d\tau$  ;
- la force de viscosité exercée par la particule au-dessus de  $r+dr$  :  $+\eta \frac{dv}{dr} \Big|_{r+dr} (r+dr) d\theta dx \vec{e}_x$  ;
- \* ■ la force de viscosité exercée par la particule en dessous de  $r$  :  $-\eta \frac{dv}{dr} \Big|_r r d\theta dx \vec{e}_x$  ;
- la force de pesanteur, négligée ici.

On note qu'il n'y a pas d'autre force de viscosité, car seules les deux particules de fluide mentionnées possèdent une vitesse différente de celle du système.

La LQM conduit alors à

$$-\overrightarrow{\text{grad}}(P)d\tau + \eta \frac{dv}{dr} \Big|_{r+dr} (r+dr) d\theta dx \vec{e}_x - \eta \frac{dv}{dr} \Big|_r r d\theta dx \vec{e}_x = \vec{0} \quad (3.13)$$

- \* En projetant selon  $\vec{e}_r$  et  $\vec{e}_\theta$ , on obtient  $\frac{\partial P}{\partial r} = 0$  et  $\frac{\partial P}{\partial \theta} = 0$ , donc la pression ne dépend que de  $x$ . La projection selon  $\vec{e}_x$  conduit alors, à l'ordre 1, à :

$$-\frac{dP}{dx} d\tau + \eta \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) dr d\theta dx = 0 \iff \frac{dP}{dx} = \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \quad (3.14)$$

On retrouve une situation déjà rencontrée dans un précédent chapitre, à savoir une équation de la forme  $f(x) = g(r)$ , ce qui signifie dans les faits que les deux membres sont indépendants de  $r$  et de  $x$  et constituent une constante  $K$ . Ainsi en intégrant et en utilisant les conditions aux limites

$$* \quad \begin{cases} \frac{dP}{dx} = K \implies P(x) = Kx + P(0) = \frac{P(L) - P(0)}{L}x + P(0) \implies K = -\frac{\Delta P}{L} & (3.15) \\ \frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) = K = -\frac{\Delta P}{L} \implies r \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P r^2}{2\eta L} \implies v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) & (3.16) \end{cases}$$

qui conduit après une seconde intégration au champ de vitesse que l'on avait trouvé lors de la première démonstration.

### b) Loi de Hagen-Poiseuille

À partir de l'expression du champ de vitesse, on peut en déduire l'expression du débit volumique :

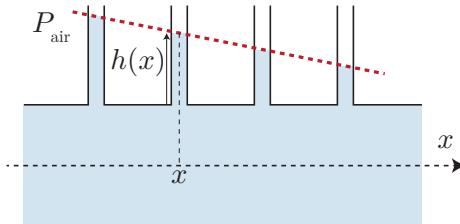
$$D_v = \iint_{(S)} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} v(r) r dr d\theta = \frac{\Delta P}{4\eta L} 2\pi \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P = D_v \quad (3.17)$$

Cette formule constitue la loi de Hagen-Poiseuille, faisant apparaître la dépendance en  $R^4$  pour le débit volumique d'un fluide visqueux en régime laminaire. La vitesse débitante vaut alors :

$$U = \frac{D_v}{\pi R^2} = \frac{R^2 \Delta P}{8\eta L} \quad (3.18)$$

### c) Profil de la pression

On a déjà calculé, via l'application de la LQM sur une particule de fluides, le profil de pressions :  $P(x) = P(0) - \frac{\Delta P}{L}x$ . On peut le visualiser simplement en connectant à la conduite cylindrique des tuyaux verticaux dans lesquels aucun écoulement n'a lieu et qui servent à visualiser la pression dans la conduite.



#### Exercice

Justifier l'observation expérimentale. On pourra relier l'expression de  $h(x)$  à la pression dans la conduite cylindrique.

Au sein de chaque tube vertical, le fluide est à l'équilibre mécanique et doit vérifier l'équation fondamentale de la statique des fluides. On a ainsi  $P_t(z) = P_t(0) - \rho g z$ . Or en  $z = 0$ , la continuité de la pression implique  $P_t(0) = P(x)$ , avec  $P(x)$  la pression au sein d'une section droite de la conduite. D'autre part au niveau de la surface libre, la pression est égale à la pression atmosphérique  $P_{air}$ , donc  $P_t(h) = P_{air}$ . D'où  $\rho g h = P(x) - P_{air} = \text{cste} - \frac{\Delta P}{L}x$ , c'est-à-dire que  $h(x)$  se met sous la forme  $h(x) = h_0 - \frac{\Delta P}{\rho g L}x$ , conforme à l'observation expérimentale.

## III.2 Analogie électrocinétique : résistance hydraulique

On peut à nouveau effectuer une analogie avec l'électrocinétique, en introduisant une nouvelle résistance. En effet, la pression et la différence de pression peuvent être associées respectivement au potentiel et à la tension électrique ; le débit volumique peut être associé au courant électrique, et la loi d'Hagen-Poiseuille peut donc se réécrire :

$$\Delta P = P(0) - P(L) = R_{hyd} D_v \iff U = \Delta V = RI \quad (3.19)$$

en posant  $R_{hyd} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$ . La loi d'Hagen-Poiseuille apparaît donc comme l'analogie de la loi d'Ohm. Les résistances suivent alors les mêmes règles d'association : la résistance de tuyaux en série (parcourus par le même débit) est la somme des résistances de chaque tronçon, la résistance de tuyaux branchés en parallèle (soumis à la même différence de pression) est l'inverse de la somme des inverses des résistances de chaque tronçon.

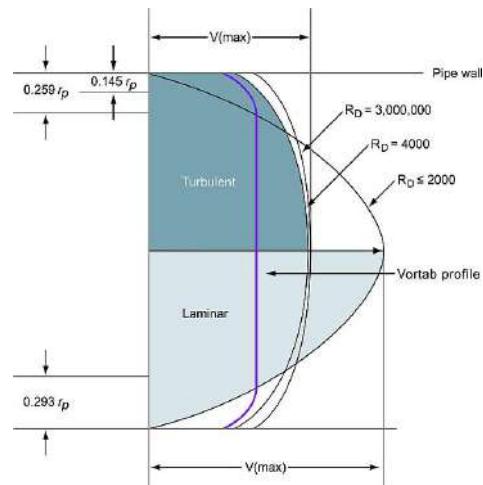
La résistance hydraulique augmentant très fortement lorsqu'on diminue le rayon de la conduite, cela impose de sévères limitations dans le domaine de la microfluidique ou pour les capillaires sanguins.

C'est bien la viscosité qui est responsable de la nécessité d'imposer une différence de pression pour maintenir un écoulement stationnaire. En particulier, on peut calculer la puissance dissipée par les frottements visqueux au sein de l'écoulement et l'on trouve  $\mathcal{P}_{\text{visc}} = R_{\text{hyd}} D_v^2$ , analogue à la puissance dissipée par effet Joule.

### III.3 Écoulements quelconques

#### a) Profil de vitesse

Dans le cas d'un écoulement turbulent, on ne peut définir le profil des vitesses dans une section, du fait de la composante aléatoire à la fois dans le temps et l'espace de la vitesse locale. On peut cependant effectuer une moyenne temporelle, ce qui permet d'obtenir un profil régulier à symétrie de révolution, tel qu'ilustré ci-contre. On n'a cependant que des lois empiriques pour exprimer  $\langle v(M, t) \rangle$ . Ce qui est à retenir est que globalement la vitesse est quasi-constante, l'essentiel des variations se concentrant sur les parois.



Néanmoins lorsque l'écoulement est turbulent, il est impossible d'utiliser la loi de Hagen-Poiseuille : on doit alors utiliser des abaques ou des lois empiriques.

#### b) Formule de Darcy-Weisbach

De manière générale, la chute de pression dans un tuyau de longueur  $L$ , diamètre  $D$  peut toujours s'exprimer sous la forme

$$\Delta P = \lambda \frac{L}{D} \frac{\rho U^2}{2} \quad (3.20)$$

appelée formule de **Darcy-Weisbach**. On parle ici de **pertes de charge régulières**. On justifiera physiquement son expression au chapitre MF5. Le coefficient sans dimension  $\lambda$  est le coefficient de perte de charge dépendant :

- du nombre de Reynolds  $Re$  caractérisant l'écoulement ;
- de la rugosité relative  $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{D}$ , où  $\varepsilon$  est la valeur moyenne des écarts à la surface parfaite.

#### Exercice



Dans le cas d'un écoulement laminaire, exprimer le coefficient  $\lambda$  en fonction du nombre de Reynolds  $Re$ .

En injectant l'expression de la perte de charge  $\Delta P$  en fonction de  $U$  dans l'expression de  $\lambda$  :

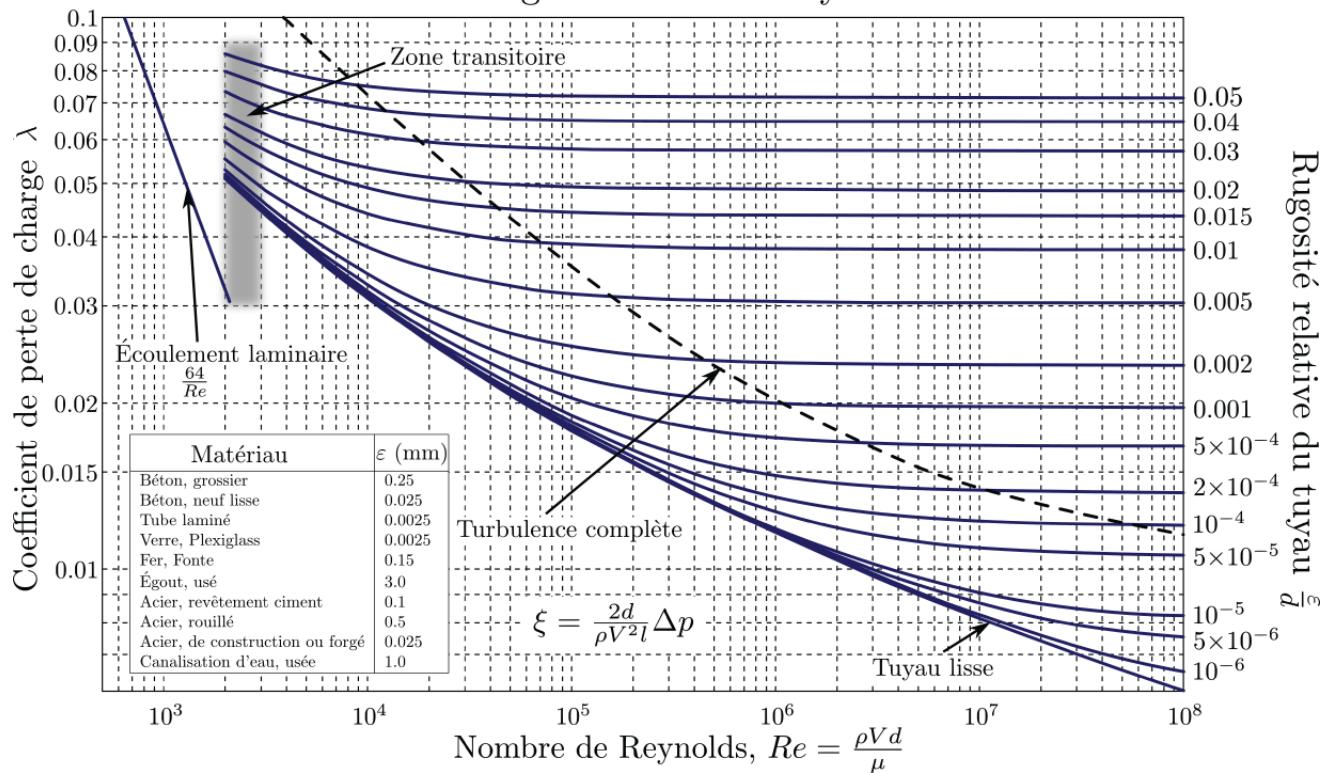
$$\lambda = \frac{\Delta P}{\frac{L}{2} \frac{\rho U^2}{2}} = \frac{\frac{8\eta L}{R^2} u}{\frac{L \rho U^2}{4R}} = \frac{32\eta}{\rho U R} = \frac{64}{Re} \quad (3.21)$$

car on prend le diamètre de la conduite comme distance caractéristique pour exprimer le nombre de Reynolds.

#### c) Utilisation du diagramme de Moody

Pour les écoulements turbulents, un diagramme appelé **diagramme de Moody** permet de déterminer le coefficient de perte de charge  $\lambda$  pour différentes rugosités de conduite. On se place en échelle logarithmique afin de prendre en compte la très grande plage de variation du nombre de Reynolds :

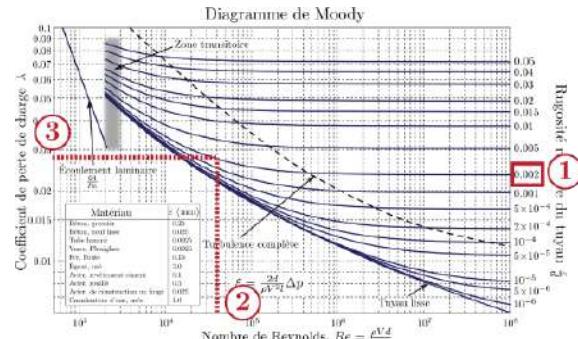
## Diagramme de Moody



- \* ▪ Tout à gauche, on retrouve la courbe concernant les écoulements laminaires, où  $\lambda = \frac{64}{Re}$ , indépendant de l'état de surface de la conduite ;
- \* ▪ pour un nombre de Reynolds compris entre 2000 et 3000, on a une zone de transition, la valeur lue est à prendre avec précaution ;
- \* ▪ pour des valeurs supérieures de  $Re$ , l'écoulement est turbulent : on calcule d'abord la rugosité relative pour déterminer la courbe à considérer (axe de droite), puis on lit pour une valeur de  $Re$  le coefficient de perte de charge  $\lambda$  sur l'axe de gauche.

Que retenir physiquement de ce diagramme ?

- plus le tuyau est rugueux, plus  $\lambda$  est élevé et la chute de pression importante pour une vitesse débitante donnée ;
- plus le fluide est visqueux, plus le nombre de Reynolds est faible, donc plus  $\lambda$  est grand ;
- à grand nombre de Reynolds, ce qui est majoritairement le cas des écoulements industriels, le coefficient de perte de charge est quasiment constant (on se situe à droite de la courbe en pointillés de « turbulence complète »). Dans ce cas, la chute de pression  $\Delta P = \frac{\lambda L \rho U^2}{D}$  est proportionnelle à  $U^2$ , mais inversement proportionnelle au diamètre, ce qui indique bien que pour des écoulements turbulents, les effets de la viscosité n'interviennent de manière conséquente qu'au voisinage de la paroi.



## IV. Chute de pression en écoulement stationnaire au niveau d'obstacles - Pertes de charge singulières

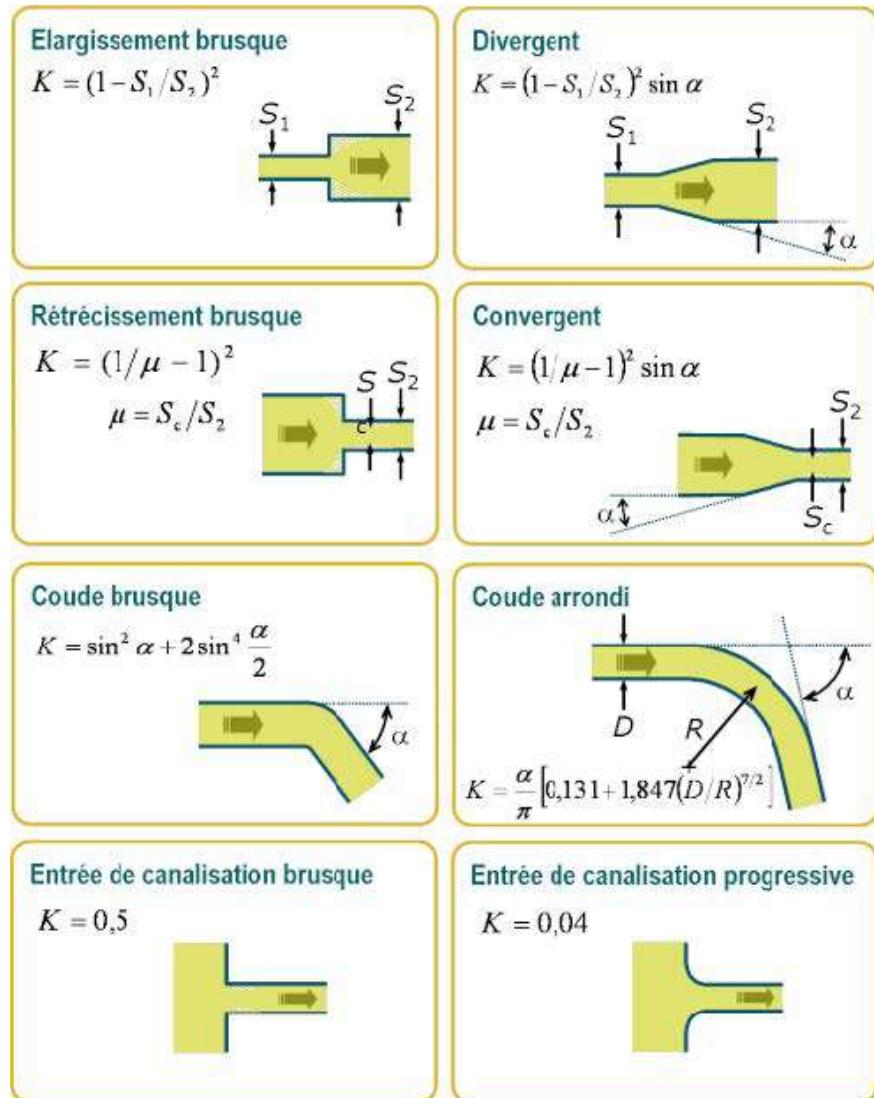
### IV.1 Coefficient de perte de charge singulière

Lorsque le fluide rencontre certains éléments spécifiques d'une conduite (coude, vanne, changement de section brusque ou progressif), des chutes de pression se produisent également : on parle de **pertes**

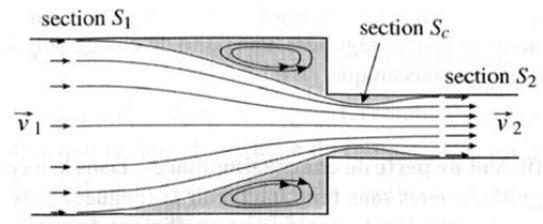
**de charge singulières.** Elles se mettent sous la forme :

$$\Delta P = \zeta \frac{\rho U^2}{2} \quad (3.22)$$

faisant apparaître un coefficient de perte de charge singulière  $\zeta$  (parfois noté  $K$  ou  $\lambda$  également) qui est également tabulé, comme illustré ci-dessous :



Notons en particulier dans le cas d'un rétrécissement brusque de section qu'il apparaît une zone dite d'eau morte où le fluide paraît quasi-immobile, et d'un rétrécissement juste en aval du changement de section : on parle de **section effective**  $S_c$ .



## IV.2 Exemple

Considérons un écoulement de pétrole dans un oléoduc. La conduite est de rayon  $R = 0,60 \text{ m}$  et les aspérités du tuyau ont une taille moyenne de  $0,25 \text{ mm}$ . La viscosité du pétrole est de  $0,3 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , sa masse volumique est  $\rho = 0,853 \text{ kg}\cdot\text{L}^{-1}$  et le débit volumique est de  $3,5 \text{ m}^3\cdot\text{s}^{-1}$ .



### Exercice

Déterminer la différence de pression à imposer à un oléoduc de  $1 \text{ km}$  s'il présente au milieu un coude arrondi de rayon de courbure  $R_c = 2 \text{ m}$  avec un angle de  $45^\circ$  ainsi qu'un agrandissement de section d'un facteur 2.

Calculons le nombre de Reynolds :  $Re \sim \frac{2R\rho D_v}{\pi R^2} = 1,06 \cdot 10^4$ , et  $U = 3,1 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

- Concernant les pertes de charge régulières, la rugosité relative vaut  $\varepsilon_r = \frac{0,25 \cdot 10^{-3}}{2R} = 2,1 \cdot 10^{-4}$ , ainsi une lecture sur le diagramme de Moody conduit à  $\lambda \simeq 3 \cdot 10^{-2}$  ;
- pour les pertes de charges singulières, on peut calculer les coefficients associés au coude  $\zeta_{\text{coude}} = 0,11$  et à l'agrandissement  $\zeta_{\text{agr}} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = 0,25$ .

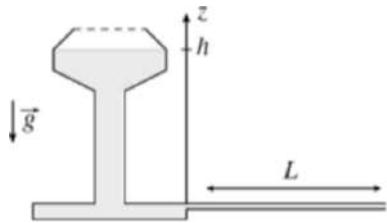
En conclusion, en additionnant les pertes de charges :

$$\Delta P = \frac{\rho U^2}{2} \left( \zeta_{\text{coude}} + \zeta_{\text{agr}} + \frac{\lambda L}{D} \right) = 1,04 \text{ bar} \quad (3.23)$$

On note que  $\frac{\lambda L}{D} = 25 \gg \zeta_{\text{agr}}, \zeta_{\text{coude}}$  : les pertes de charge singulières sont ici prépondérantes, du fait de la grande longueur de conduite.

# Exercices

## 3. 1 Château d'eau



Un château d'eau de hauteur  $h = 25 \text{ m}$ , alimente un village en eau potable.

1. Pourquoi peut-on dire que le fluide est quasiment au repos dans le réservoir ? Que vaut alors la pression au pied du château d'eau ?
2. Soit une conduite cylindrique de longueur  $L = 100 \text{ m}$  et de section  $S = 1 \text{ cm}^2$  partant du pied de ce château d'eau. L'autre extrémité est à l'air libre. Quel débit peut-on attendre, en supposant *a priori* l'écoulement laminaire ? En déduire la valeur de la vitesse débitante  $U$ .
3. Calculer le nombre de Reynolds pour cet écoulement. Conclure.
4. Dans une maison, on souhaite obtenir des débits assez importants pour remplir une baignoire par exemple. Dans certaines maisons anciennes, on n'obtient pas satisfaction, on dit qu'on manque de pression. Qu'est-il préférable de faire pour obtenir un débit plus important ?

1. Considérons un écoulement incompressible de l'eau. Par conséquent le débit volumique est identique au sommet et dans la conduite. Comme la différence de section est importante, la vitesse au sommet est beaucoup plus faible que la vitesse au pied du château. Le fluide est donc quasiment au repos. On peut alors appliquer les relations d'hydrostatique, et la pression au pied du château d'eau vaut simplement  $P = P_0 + \rho gh = 3,5 \text{ bar}$  (1 bar tous les 10 m pour de l'eau).
2. Si on suppose l'écoulement laminaire, on peut donc appliquer la relation de Poiseuille et

$$D_v = \frac{\pi R^4}{8\eta L} \Delta P = \frac{S^2 \rho gh}{8\pi\eta L} = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} \quad (3.24)$$

en considérant que le fluide, en sortie de canalisation, est à une pression de  $P_0 = 1 \text{ bar}$ . Soit une vitesse débitante  $U = \frac{D_v}{S} = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

3. Le nombre de Reynolds s'exprime ainsi :  $Re \sim \frac{\rho U 2 \sqrt{S/\pi}}{\eta} \simeq 1,1 \cdot 10^5$ . Donc l'écoulement n'est pas laminaire, et la relation de Poiseuille ne s'applique pas.
4. Comme on peut difficilement modifier la longueur de canalisation entre la baignoire et l'arrivée d'eau, le mieux pour augmenter le débit consisterait à augmenter le diamètre des tuyaux, qui se sont certainement réduits avec le temps et les dépôts de calcaire.

## 3. 2 Écoulement du sang dans une artère

Le sang est assimilable à un fluide incompressible visqueux, de masse volumique  $\rho$  et de viscosité  $\eta$ . Il s'écoule dans une artère modélisée par un cylindre vertical de rayon  $R$ , de hauteur  $h$  et d'axe ( $Oz$ ) ascendant. On se place en régime laminaire permanent. La vitesse du fluide est de la forme  $\vec{v} = v(r) \vec{e}_z$ .

En  $z = h$ , la pression est prise égale à  $P_1$  et en  $z = 0$  elle vaut  $P_1 + \rho gh + \Delta P$  où  $\Delta P$  est la surpression imposée par le cœur à la base du cylindre permettant l'écoulement du fluide malgré la viscosité.

1. Appliquer la loi de la quantité de mouvement au fluide contenu dans un cylindre de rayon  $r < R$  et de hauteur  $h$  sachant que l'on est en régime permanent. En déduire  $\frac{dv}{dr}$  puis  $v(r)$ .
2. Déterminer le débit massique  $D_m$  en fonction de  $\Delta P$  et des autres données.
3. On s'intéresse à une artère telle que  $h = 0,50 \text{ m}$ ,  $R = 4,0 \text{ mm}$  et  $D_m = 5,0 \cdot 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . La masse volumique du sang sera prise égale à  $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et la viscosité dynamique à  $\eta = 4,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$ .
  - (a) Calculer  $\Delta P$  dans l'artère.
  - (b) Le rayon de l'artère est divisé par 2 à  $\Delta P$  fixé. Par quel facteur est divisé le débit massique de sang ?
  - (c) Exprimer le nombre de Reynolds  $Re$  de l'écoulement en fonction de  $\rho$ ,  $R$ ,  $\Delta P$ ,  $\eta$  et  $h$ . Le calculer numériquement. L'écoulement est-il plutôt laminaire ou turbulent ?

1. Appliquons la LQM, après avoir fait un bilan de forces au système proposé :

- poids  $\vec{P} = -mge_z = -\rho\pi r^2 hg$  ;
- résultante des forces de pression :

$$\vec{F}_p = -P_1\pi r^2 \vec{e}_z + (P_1 + \rho gh + \Delta P)\pi r^2 \vec{e}_z = \rho gh\pi r^2 \vec{e}_z + \Delta P\pi r^2 \vec{e}_z \quad (3.25)$$

- la résultante des forces de viscosité exercée par le fluide en  $r^+$  sur la paroi extérieure du cylindre :  $\vec{F}_v = \eta 2\pi rh \frac{dv}{dr} \vec{e}_z$

D'où

$$\vec{P} + \vec{F}_p + \vec{F}_v = \vec{0} \implies -\rho\pi r^2 hg + \rho gh\pi r^2 + \Delta P\pi r^2 + \eta 2\pi rh \frac{dv}{dr} = 0 \quad (3.26)$$

conduisant à

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{r\Delta P}{2\eta h} \quad (3.27)$$

L'intégration conduit à  $v(r) = -\frac{r^2 \Delta P}{4\eta h} + \text{cste}$ . En considérant que la vitesse au niveau des parois est nulle, il vient finalement

$$v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta h} (R^2 - r^2) \quad (3.28)$$

2. Calcul classique, on trouve  $D_m = \rho \iint_{(S)} \vec{v} \cdot d\vec{S} = \eta \frac{\pi R^4}{8\eta h} \Delta P$ .

3. (a) L'application numérique conduit à 0,01 bar.
- (b) Par 16 !
- (c)

$$Re \sim \frac{\rho U_2 R}{\eta} = \frac{\rho \frac{D_m}{\rho \pi R^2} 2R}{\eta} = \frac{\rho \frac{R^2 \Delta P}{8\eta h} 2R}{\eta} = \frac{\rho R^3 \Delta P}{4\eta^2 h} = 2000 \quad (3.29)$$

On est donc à la limite de la turbulence.

### 3. 3 Oscillation d'une plaque dans un fluide visqueux

Une plaque horizontale est animée d'un mouvement sinusoïdal de vitesse  $\vec{v} = v_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$ . Elle est surmontée d'un fluide visqueux (viscosité  $\eta$ ) supposé incompressible (masse volumique  $\rho$ ).

En négligeant les effets de bord, le champ des vitesses dans le fluide peut s'écrire  $\vec{v}(M, t) = v_x(z, t) \vec{e}_x$  et le champ de pression  $P(M, t) = P(z, t)$ . On précise que dans cette situation, l'accélération d'une particule de fluide s'écrit  $\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$ .

1. Montrer que  $v_x(z, t)$  doit vérifier l'équation  $\frac{\partial v_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}$  où  $\nu = \eta/\mu$ . Comment appelle-t-on une telle équation ?
2. On cherche en régime sinusoïdal forcé une solution complexe de la forme  $v_x(z, t) = f(z) e^{j\omega t}$ . Déterminer la fonction  $f(z)$  et donner l'expression du champ des vitesses en notation réelle. On posera  $\delta = \sqrt{\frac{2\eta}{\omega\mu}}$ . Commenter.
3. A.N. : calculer  $\delta$  pour une fréquence de 500 Hz pour l'eau (viscosité à connaître) et pour la glycérine ( $\eta = 2,33 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  et  $\rho = 1,26 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ ).
4. En déduire la puissance moyenne par unité de surface que doit fournir un opérateur pour entretenir le mouvement de la plaque.

1. Cf cours MF2, en appliquant la LQM à une particule de fluide qui subit les forces de viscosité sur le dessus  $z + dz$  et sur le dessous  $z$ . Équation de diffusion !

2. Injectons cette forme de solution dans l'équation précédente :

$$f(z) j\omega e^{j\omega t} = \nu \frac{d^2 f}{dz^2} e^{j\omega t} \iff \frac{d^2 f}{dz^2} = j \frac{\omega}{\nu} f(z) = j \frac{2}{\delta^2} f(z) \quad (3.30)$$

On résout en résolvant le polynôme caractéristique associé  $r^2 = \frac{2j}{\delta^2}$  c'est-à-dire  $r = \pm \frac{1+j}{\delta}$  car  $(1+j)^2 = 2j$ . Donc :

$$f(z) = Ae^{\frac{1+j}{\delta} z} + Be^{-\frac{1+j}{\delta} z} \quad (3.31)$$

Comme  $f$  ne peut diverger,  $A = 0$  nécessairement. On peut alors réécrire le champ des vitesses :

$$v_x(z, t) = Be^{-\frac{z}{\delta}} e^{j\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right)} \implies v_x(z, t) = v_0 e^{-\frac{z}{\delta}} \cos\left(\omega t - \frac{z}{\delta}\right) \quad (3.32)$$

$\uparrow$   
 $\mathbb{R}$

en se servant de la CAL en  $z = 0$ . On a donc une onde progressive dirigée dans le sens des  $z$  croissants, mais dont l'amplitude décroît avec une distance caractéristique  $\delta$ .

3. AN :  $\delta_{\text{eau}} = 2,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}$  et  $\delta_{\text{gly}} = 1,1 \text{ mm}$ . La propagation est d'autant plus atténuee que la viscosité est faible.

4. La plaque subit la force de frottements visqueux  $\vec{F} = \eta \frac{dv}{dz} \Big|_{z=0} S \vec{e}_x$ . Donc la puissance associée est :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}(z=0) = \eta v_0 \left( -\frac{1}{\Delta} \cos \omega t + \frac{1}{\delta} \sin(\omega t) \right) S v_0 \cos(\omega t) \quad (3.33)$$

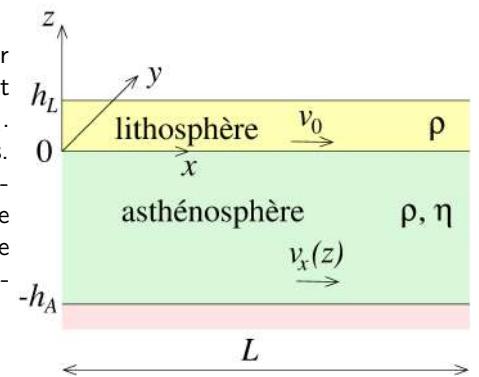
soit pris en moyenne, avec  $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$  et  $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$  :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = -\eta v_0^2 \frac{1}{2\delta} S \iff \frac{\langle \mathcal{P}_{\text{op}} \rangle}{S} = +\frac{\eta v_0^2}{2\delta} \quad (3.34)$$

car la puissance de l'opérateur doit compenser exactement la puissance dissipée par frottements.

### 3. 4 Plaque tectonique

On considère une plaque tectonique aussi appelée lithosphère, de longueur  $L$ , d'épaisseur  $h_L$  qui se déplace suivant l'axe  $Ox$ , à une vitesse constante et uniforme  $v_0$ . Cette plaque repose sur l'asthénosphère qui a une épaisseur  $h_A$ . Les densités de la lithosphère et de l'asthénosphère sont ici supposées égales. On prendra l'origine des ordonnées sous la plaque, à la surface de l'asthénosphère. On considérera que  $L \gg h_L$  et  $h_A$  et on admettra que la vitesse dans l'asthénosphère  $v_x(z)$  est parallèle à l'axe  $Ox$ . Au bas de l'asthénosphère ( $z = -h_A$ ), la vitesse est nulle. On note  $p(x, z)$  la pression dans l'asthénosphère.



1. En admettant que le gradient horizontal de pression est nul, exprimer la pression en fonction de  $z$ . On négligera la pression à la surface de la plaque. Calculer le profil de vitesse dans l'asthénosphère. Quelle est la contrainte tangentielle visqueuse qui s'exerce sous la plaque en mouvement ?
2. Exprimer en fonction de  $v_0$ ,  $h_L$  et  $h_A$  le débit volumique  $D_v$  induit par le déplacement de la lithosphère et de l'asthénosphère par unité d'épaisseur suivant  $Oy$ .
3. Le déplacement global de matière en surface est maintenant compensé par un flux de retour qui assure un débit volumique globalement nul. Montrer que cela impose l'existence d'un gradient de pression horizontal  $\frac{\partial P}{\partial x}$ . Calculer  $\frac{\partial P}{\partial x}$  en fonction de  $h_L$ ,  $h_A$ ,  $v_0$  et  $\eta$  ainsi que le profil de vitesse  $v_x(z)$  résultant. On pourra ensuite poser  $A = 6 \left( \frac{h_L}{h_A} + \frac{1}{2} \right)$  pour simplifier les expressions.
4. À quelle profondeur la vitesse s'annule-t-elle dans l'asthénosphère ? Quelle est la vitesse maximale de retour ? Tracer  $v_x(z)/v_0$  en fonction de  $z/h_A$  en prenant  $A = 4$ .
5. Exprimer la contrainte tangentielle visqueuse qui s'exerce sous la plaque en mouvement en fonction de  $\eta$ ,  $v_0$ ,  $h_L$  et  $h_A$ . Comment se compare-t-elle à celle obtenue en 1) ?
6. Montrer que l'existence d'un gradient de pression horizontal doit conduire à une inclinaison de la litosphère (on admettra que l'inclinaison est suffisamment faible pour que la vitesse de l'écoulement dans l'asthénosphère reste horizontale). Exprimer la différence de hauteur entre les deux extrémités de la plaque.

- 
1. Si le gradient horizontal de pression est constant, l'application de la relation fondamentale de l'hydrostatique conduit à  $P(z) = P(0) - \rho g z$  avec l'axe  $z$  orienté vers le haut. Etant en régime permanent, la LQM appliquée à une particule de fluide de l'asthénosphère conduit à  $\frac{d^2 v_x}{dz^2} = 0$  donc  $v_x(z) = B + Cz$ . Avec les deux CAL  $v_x(-h_A) = 0$  et  $v_x(0) = v_0$ , il vient  $v_x(z) = v_0 \left( 1 + \frac{z}{h_A} \right)$ . La contrainte tangentielle s'écrit alors pour la plaque en mouvement :

$$\vec{\sigma}_t = -\eta \frac{dv_x}{dz} \vec{e}_x = -\eta \frac{v_0}{h_A} \vec{e}_x \quad (3.35)$$

2. Le débit volumique se décompose en deux parties :

- le débit dans la lithosphère, valant simplement  $D_{v,1} = v_0 h_L L_y$  ;

- le débit volumique dans l'asthénosphère, où il faut effectuer le calcul d'intégrale vu que la vitesse n'est pas uniforme :

$$D_{v,a} = L_y \int_{-h_A}^0 v_x(z) dz = L_y v_0 \left[ z + \frac{z^2}{2h_A} \right]_{-h_A}^0 = L_y v_0 \frac{h_A}{2} \quad (3.36)$$

Donc le débit global par unité d'épaisseur suivant ( $Oy$ ) vaut  $D_v = \frac{D_{v,1} + D_{v,a}}{L_y} = v_0 \left( h_L + \frac{h_A}{2} \right)$ .

- Appliquons à nouveau la LQM à une particule de fluide se déplaçant à vitesse constante (débit nul) :

$$-\overrightarrow{\text{grad}} P d\tau + \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2} \vec{e}_x - \rho g d\tau \vec{e}_z = \vec{0} \quad (3.37)$$

conduisant en projection selon  $\vec{e}_z$  à  $\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g$  soit  $P(x, z) = -\rho g z + f(x)$ . Puis en projection selon ( $Oz$ ) :

$$\eta \frac{d^2 v_x}{dz^2} = \frac{\partial P}{\partial x} \neq 0 \quad (3.38)$$

sinon on aboutit au même champ de vitesse que précédemment, dont on a vu qu'il conduisait à un débit non nul. Comme on a une égalité entre deux fonctions, l'une de  $z$ , l'autre de  $x$ , cela implique nécessairement que  $\frac{\partial P}{\partial x} = \text{cste} = \alpha$ . On va alors écrire le profil de vitesse, utiliser les CAL et calculer le débit pour trouver  $\alpha$  :

$$v(z) = \frac{\alpha}{2\eta} z^2 + az + b \quad (3.39)$$

avec  $v(0) = v_0 = b$  et  $0 = \frac{\alpha}{2\eta} h_A^2 - ah_A + v_0$  conduisant au champ de vitesse :

$$v(z) = \frac{\alpha}{2\eta} \left( z^2 + h_A z \right) + v_0 \left( 1 + \frac{z}{h_A} \right) \quad (3.40)$$

On calcule alors le débit volumique par unité d'épaisseur suivant ( $Oy$ ) :

$$D_v = \int_{-h_A}^0 v(z) dz + v_0 h_L = \dots = -\frac{\alpha h_A^3}{12\eta} + v_0 h_A \left( \frac{h_L}{h_A} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.41)$$

En écrivant sa nullité, on peut alors exprimer  $\alpha = \frac{\partial P}{\partial x}$  :

$$\alpha = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{12\eta v_0}{h_A^2} \left( \frac{h_L}{h_A} + \frac{1}{2} \right) = \frac{2A\eta v_0}{h_A^2} \quad (3.42)$$

et on peut réécrire le champ de vitesse :

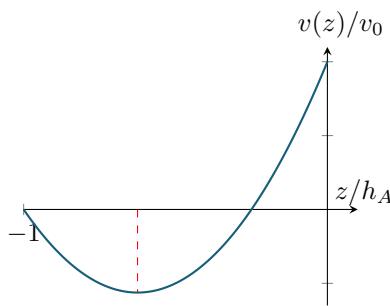
$$v(z) = v_0 \left( A \left( \frac{z}{h_A} \right)^2 + (A+1) \frac{z}{h_A} + 1 \right) \quad (3.43)$$

- La vitesse s'annule lorsque  $A \left( \frac{z}{h_A} \right)^2 + (A+1) \frac{z}{h_A} + 1 = 0$ , admettant pour solution  $z = -h_A$  (nécessairement) et  $z = -\frac{h_A}{A}$ .

La vitesse est maximale pour  $2A \frac{z}{h_A^2} + \frac{A+1}{h_A} = 0$ , c'est-à-dire pour  $z = \frac{-h_A}{2A}(A+1)$ , et la vitesse maximale vaut alors

$$v_{\max} = -\frac{v_0(A-1)^2}{4A} \quad (3.44)$$

Pour  $A = 4$ , on trace donc la fonction  $f(z) = \frac{v(z)}{v_0} = 4 \left( \frac{z}{h_A} \right)^2 + 5 \frac{z}{h_A} + 1$  :



5. On a cette fois  $\vec{\sigma}_t = -\eta \frac{dv}{dz} \vec{e}_x = -\eta(A+1) \frac{v_0}{h_A} \vec{e}_x$ . Elle est plus importante que pour l'écoulement que l'on avait étudié auparavant.
6. La pression s'écrit dans l'asthénosphère  $P(x, z) = -\rho g z + \alpha x + P(0, 0)$ . Si on exprime le fait que la portion de lithosphère comprise entre  $x$  et  $x+dx$ ,  $y$  et  $y+dy$  est en équilibre sous l'action de son poids et de la force pressante exercée par l'asthénosphère, on obtient :

$$-\rho h_L dx dy g + (\alpha x - \rho g z + P(0, 0)) dx dy = 0 \quad (3.45)$$

Cela implique en  $(x=0, z)$  :  $-\rho h_L g - \rho g z + P(0, 0) = 0$  et en  $(x=L, z+\Delta h)$  :  $-\rho h_L g + (\alpha L - \rho g(z+\Delta h) + P(0, 0)) = 0$  conduisant simplement à

$$\Delta h = \frac{\alpha L}{\rho g} \quad (3.46)$$

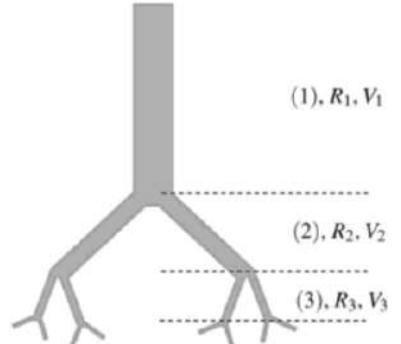
### 3.5 Modélisation des voies respiratoires

Dans un arbre bronchique, les voies respiratoires se divisent par dichotomie avec une réduction systématique de la longueur et du diamètre. Dans le problème on suppose que la trachée se divise en deux bronches. Chacune d'elles se divise à son tour en deux autres, et ainsi de suite. Nous notons « générations » les différentes subdivisions qui seront indiquées par les nombres successifs,  $p$  : la trachée est la génération  $p=1$ , les bronches  $p=2$ , et ainsi de suite.

On se place en régime stationnaire et l'air est assimilé à un fluide de viscosité  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-5}$  Pl. Il y a 23 générations de voies aériennes dont les 16 premières sont conductrices. Une bronchiole de génération  $p$  est assimilée à un cylindre de rayon  $r_p$  et de longueur  $\ell_p$ .

On admet que la loi de Hagen-Poiseuille est valable pour  $p < 16$ .

La figure représente les quatre premières générations d'un arbre bronchique. À chaque génération chaque dimension longueur et rayon est multipliée par  $h$ , constante inférieure à un, identique, pour les deux dimensions.



1. Déterminer le nombre  $N(p)$  de bronchioles à la  $p^{\text{ème}}$  génération en fonction de  $p$  ainsi que le rayon  $r_p$  et la longueur  $\ell_p$  de la bronchiole de génération  $p$  en fonction de  $p$ ,  $h$ ,  $r_1$  et  $\ell_1$ , valeurs pour  $p=1$ .
2. Exprimer le volume  $V_p$  d'une bronchiole de génération  $p$  en fonction de  $V_1$ ,  $h$  et  $p$ . En déduire le volume total  $V_{pt}$  de génération  $p$ . On posera  $X = 2h^3$ . Exprimer le volume  $V_t$  de l'arbre composé de  $n$  générations.
3. Calculer la résistance hydraulique  $R_p$  d'une bronchiole de génération  $p$  en fonction de  $R_1$  (résistance hydraulique pour  $p=1$ ) et  $p$ . En déduire la résistance hydraulique totale de la génération  $p$  puis la résistance hydraulique totale de l'arbre qui contient  $n$  générations.
4. Montrer que le volume total diverge quand  $n \rightarrow \infty$  pour  $h$  supérieur à une valeur critique  $h_c$  dont on précisera la valeur numérique. À quelle condition sur  $h$  la résistance hydraulique diverge-t-elle ?
5. Pour l'homme,  $h$  a été mesuré à  $h = 0,85$ . Estimer la variation de pression entre l'entrée et la sortie des 16 premières générations correspondant à une inspiration normale.
6. La modélisation par la loi de Hagen-Poiseuille est-elle pertinente ici ?

- 
1. Le nombre de bronchioles vaut simplement  $N(p) = 2^{p-1}$ . De même  $r_p = r_1 h^{p-1}$  et  $\ell_p = \ell_1 h^{p-1}$ .
  2. On peut calculer le volume d'une bronchiole pour  $p=2$  :  $V_2 = \pi r_2^2 \ell_2 = \pi r_1^2 h^2 \ell_1 h = V_1 h^3$ . Par récurrence,  $V_p = V_1 (h^3)^{p-1}$ . Le volume de la génération  $p$  vaut alors  $V_{pt} = N(p)V_p = V_1 X^{p-1}$  en posant  $X = 2h^3$ . Le volume total est alors la somme de tous les volumes partiels :  $V_t = \sum_{p=1}^n V_1 X^{p-1} = V_1 \frac{1-X^n}{1-X}$ .
  3. Comme  $R_1 = \frac{8\eta\ell_1}{\pi r_1^4}$ ,  $R_2 = \frac{8\eta\ell_1 h}{\pi r_1^4 h^4} = \frac{R_1}{h^3}$ . Donc on peut généraliser et  $R_p = \frac{R_1}{h^{3(p-1)}}$ . Comme les résistances sont montées en dérivation, c'est la somme des inverses :

$$\frac{1}{R_{pt}} = \sum \frac{1}{R_p} = \frac{N(p)}{R_p} \implies R_{pt} = \frac{R_1}{X^{p-1}} \quad (3.47)$$

puis la résistance hydraulique totale, pour une association en série :

$$R_t = \sum_{p=1}^n R_{pt} = R_1 \frac{1 - \frac{1}{X^n}}{1 - \frac{1}{X}} \quad (3.48)$$

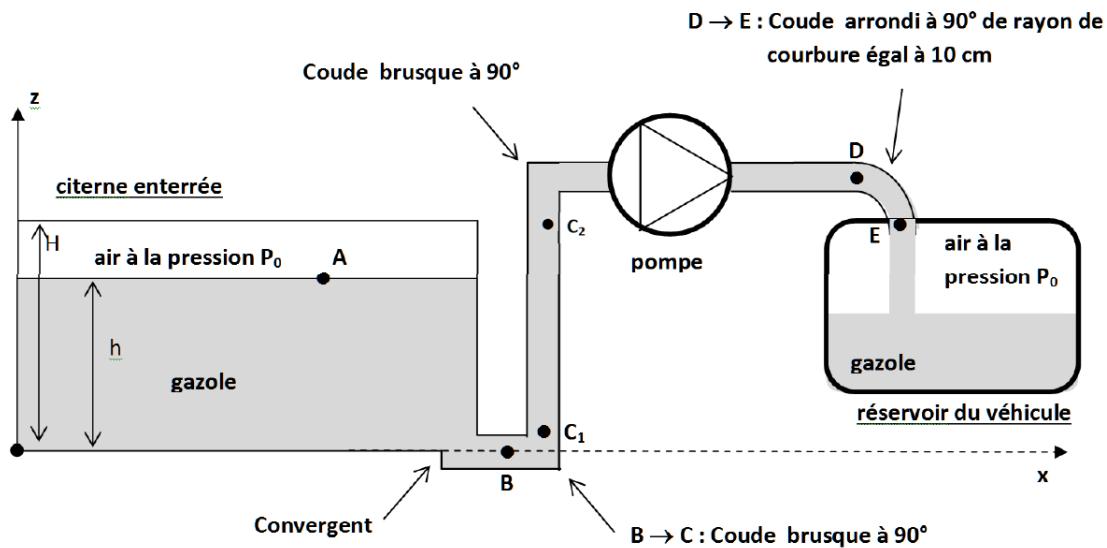
4. Il y a divergence si  $X \geq 1$ , la valeur critique impliquant  $2h^3 = 1 \iff h_c = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = 0,79$ . Il y a donc divergence du volume si  $h > h_c$ . À l'inverse la résistance hydraulique divergence si  $h < h_c$ .

5. On veut utiliser la loi de Hagen-Poiseuille  $\Delta P = D_v R_t$ . Il faut donc calculer  $R_1$ , puis  $R_t$  et enfin  $D_v$ . On prend quelques ordres de grandeur :  $\ell_1 \simeq 30 \text{ cm}$ ,  $r_1 \simeq 1 \text{ cm}$ . Donc  $R_1 \simeq 1,4 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ , puis  $R_{t,n=16} = 7,1 \cdot 10^3 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}$ . Enfin pour estimer  $D_v$ , une respiration apporte environ 1 L d'air et dure environ 2 s, donc  $D_v = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Ainsi  $\Delta P = 3,5 \text{ Pa}$ , ce qui est particulièrement faible (mais compréhensible, l'air peut plus facilement être mis en mouvement).

6. Si on calcule le nombre de Reynolds, on trouve  $Re \sim \frac{\rho_{\text{air}} \frac{D_v}{\pi R^2} 2R}{\eta} \simeq 2300$  pour  $R = r_1$ , et jusqu'à  $30 \cdot 10^3$  pour  $p = 16$ . La loi de Hagen-Poiseuille ne semble pas être très pertinente !

### 3. 6 Calcul de pertes de charges

On étudie l'écoulement de gazole depuis une citerne enterrée en direction du réservoir d'une voiture. Le schéma ci-dessous modélise simplement le circuit du fluide. On admettra que la pompe utilisée ici génère une perte de charge singulière de coefficient  $K_{\text{pompe}} = 6$ , et de même pour le convergent,  $K_{\text{conv}} \simeq 0,55$ .



Calculer la valeur totale des pertes de charge à l'aide des données de l'énoncé et du cours.

Données : section de la citerne au point A  $S_A = 1,00 \text{ m}^2$ , section de l'ouverture au point B  $S_B = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ , longueur des sections droites  $L \simeq 10 \text{ m}$  rayon des sections des conduites et des coudes  $a = 1,80 \text{ cm}$ , masse volumique du gazole  $\rho = 840 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , viscosité dynamique du gazole  $\eta = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$ , vitesse moyenne dans les conduites  $v_{\text{moy}} \simeq 4,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , les conduites sont en acier forgé.

---

On peut calculer les coefficients de perte de charge pour les trois coudes :

$$K_{\text{coudes}} = 2 \times (\sin^2(\pi/2) + 2 \sin^4(\pi/4)) + \frac{\pi/2}{\pi} \left( 0,131 + 1,847 \left( 2 \cdot 1,80 \cdot 10^{-2} / 0,1 \right)^{7/2} \right) = 3,09 \quad (3.49)$$

Via le diagramme de Moody, on détermine le coefficient de perte de charge régulière via le Reynolds et le type de conduite (acier forgé) :  $Re \sim \frac{\rho v_{\text{moy}} 2a}{\eta} \sim 2,7 \cdot 10^4$  et  $\frac{\varepsilon}{d} \simeq 7 \cdot 10^{-4}$  :  $\lambda \simeq 2,6 \cdot 10^{-2}$ . Ainsi en regroupant les divers éléments :

$$\Delta P = \frac{\rho U^2}{2} \left( K_{\text{coudes}} + K_{\text{pompe}} + K_{\text{conv}} + \frac{\lambda L}{2a} \right) = 1,43 \cdot 10^5 \text{ Pa} = 1,43 \text{ bar} \quad (3.50)$$

Notons que  $\lambda L / (2a) \simeq 7,2$  : les pertes de charges régulières contribuent presque à la moitié des pertes de charge totales.

# Écoulement externe incompressible et homogène autour d'un obstacle

## Sommaire

---

<b>4.1 Généralités . . . . .</b>	<b>2</b>
4.1.1 Cadre de l'étude . . . . .	2
4.1.2 Actions mécaniques d'un fluide sur un corps solide . . . . .	2
4.1.3 Couche limite . . . . .	3
<b>4.2 Écoulement autour d'une sphère . . . . .</b>	<b>4</b>
4.2.1 Évolution du coefficient de traînée avec le nombre de Reynolds . . . . .	4
4.2.2 Les différents régimes d'écoulement . . . . .	4
4.2.3 Coefficient de traînée pour des objets de forme diverse . . . . .	6
4.2.4 Balle de golf et décollement de la couche limite . . . . .	7
4.2.5 HP : origine du décollement de la couche limite . . . . .	8
<b>4.3 Écoulement autour d'une aile d'avion . . . . .</b>	<b>8</b>
4.3.1 Description d'une aile d'avion . . . . .	9
4.3.2 Traînée et portance d'une aile d'avion . . . . .	9
4.3.3 Complément : finesse et polaire . . . . .	10

---

## Questions de cours :

- Décrire à l'aide de schémas l'écoulement autour d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds. On commenterà l'évolution du coefficient  $C_x$  (que l'on définira) en fonction de  $Re$ .
- Définir la couche limite, obtenir en ordre de grandeur son épaisseur et exprimer le nombre de Reynolds associé à l'écoulement dans la couche limite.
- Présenter les coefficients de traînée et de portance pour une aile d'avion. Définir le nombre de Reynolds. Décrire le comportement d'une aile d'avion à l'aide des représentations des coefficients de traînée et de portance en fonction de l'angle d'inclinaison.

## Capacités exigibles du BO :

- Associer une gamme de nombre de Reynolds à un modèle de traînée linéaire ou un modèle quadratique.
- Pour les écoulements à grand nombre de Reynolds décrire qualitativement la notion de couche limite.
- Définir et orienter les forces de portance et de traînée.
- Exploiter les graphes de  $C_x$  et  $C_z$  en fonction de l'angle d'incidence.

# I. Généralités

## I.1 Cadre de l'étude

Dans le chapitre précédent, on s'était intéressé à l'écoulement à l'intérieur d'une conduite, laissant entrevoir l'importance du nombre de Reynolds quant à la description de l'écoulement du fluide, avec l'apparition de turbulence pour de grands nombres de Reynolds. On va maintenant observer à nouveau l'écoulement incompressible et homogène d'un fluide (de viscosité  $\eta$  et de masse volumique  $\rho$ ), mais autour d'un obstacle : on parle alors d'**écoulement externe**. Dans toute la suite, on pourra adopter deux points de vue équivalents :

- celui où l'objet est en déplacement à la vitesse  $\vec{v}_{\text{sol/fl}}$  dans un fluide immobile ;
- celui où l'objet est fixe et l'écoulement très loin devant l'objet est à la vitesse  $\vec{v}_{\text{fl/sol}} = -\vec{v}_{\text{sol/fl}} = \vec{v}_\infty$ , d'après le principe de relativité galiléenne.



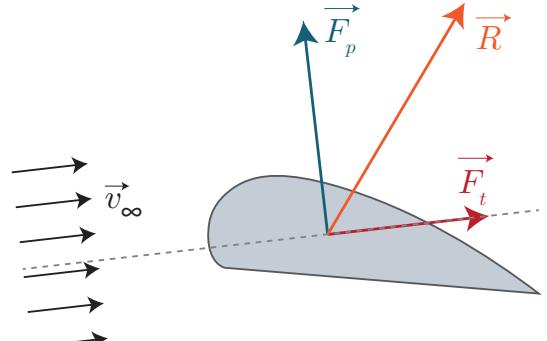
C'est grâce à ce dernier point que les études en soufflerie réalisées sur des véhicules immobiles sont pertinentes (avec une mise à l'échelle éventuelle, par exemple pour des avions, en respectant la conservation de certains nombres adimensionnés, cf. MF3). Dans toute la suite, on utilisera le point de vue d'un objet fixe, et on note la vitesse d'écoulement du fluide à l'infini en amont de l'obstacle  $\vec{v}_\infty$ , de norme  $U$ .

## I.2 Actions mécaniques d'un fluide sur un corps solide

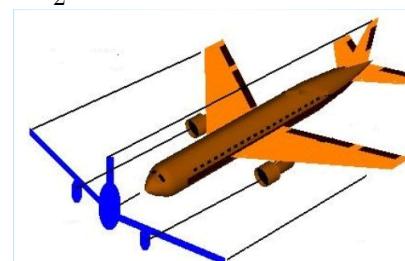
Par exemple si on étudie l'écoulement de l'eau autour d'un obstacle, on ne tient pas compte dans cette force  $\vec{R}$  de la résultante des forces de pression obtenue par la loi fondamentale de l'hydrostatique.

- L'écoulement d'un fluide autour d'un corps crée une force  $\vec{R}$  correspondant à la résultante des forces de pression (en ne considérant que les forces de pression dues à l'écoulement) et de viscosité. On la décompose selon  $\vec{R} = \vec{F}_t + \vec{F}_p$ , où :
- \*
    - $\vec{F}_t$  est la force de traînée, colinéaire à  $\vec{v}_\infty$ , orientée dans le même sens que la vitesse de l'écoulement et responsable de la résistance du fluide ;
    - $\vec{F}_p$  est la force de portance, orthogonale à  $\vec{v}_\infty$ , responsable notamment du vol des avions.
  - \* On définit alors deux coefficients sans dimension  $C_x$  et  $C_z$  associés respectivement à la trainée et à la portance :

$$C_x = \frac{\|\vec{F}_t\|}{\frac{1}{2}\rho SU^2} \quad \text{et} \quad C_z = \frac{\|\vec{F}_p\|}{\frac{1}{2}\rho SU^2} \quad (4.1)$$



\* où  $U$  est la norme de la vitesse à l'infini, et  $S$  la surface droite présentée par l'objet en écoulement, appelée **maître-couple**. Il s'agit de la surface que dessinerait l'ombre projetée de l'objet éclairé par un faisceau lumineux parallèle de direction  $\vec{v}_\infty$  sur un écran perpendiculaire à cette direction.



Nous verrons dans la suite de l'étude qu'ils dépendent du nombre de Reynolds de l'écoulement autour de l'obstacle.

## I.3 Couche limite

### Manipulation

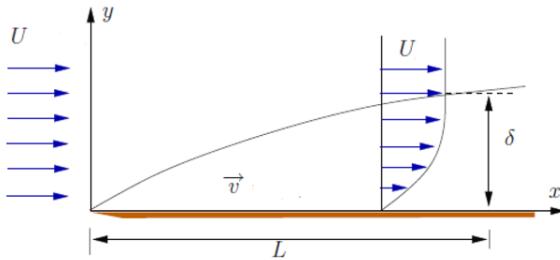
Montrer les vidéos 604, 605, 609, 613, 614 : introduction à la couche limite, et influence du nombre de Reynolds sur son épaisseur.

- \* Ces différentes expériences mettent en évidence des fluctuations spatiales assez rapides du champ de vitesse dans une zone d'extension assez limitée proche de l'obstacle : on parle de **couche limite** (car en général une de ses trois dimensions est beaucoup plus petite que les deux autres). Elle est évidemment due à la non-pénétration du fluide dans le solide (imposant que la composante de la vitesse perpendiculairement à la surface s'annule), mais également à l'influence de la viscosité du fluide (imposant une condition d'adhérence aux parois de l'obstacle). Au-delà de cette couche limite, le fluide s'écoule de manière quasi-parfaite, c'est-à-dire que les effets de la viscosité sont négligeables.

### Manipulation

Vidéo 619, plaque en mouvement avec la croissance de la couche limite.

- \* On peut évaluer son épaisseur, en se basant sur l'expérience de la plaque se déplaçant à la vitesse constante  $U$ , initialement immobile. À un instant  $t$  quelconque, la couche limite observée à l'arrière de la plaque prend une épaisseur  $\delta$  liée aux phénomènes de diffusion de quantité de mouvement par viscosité, durant un temps caractéristique  $\tau \sim \frac{L}{U}$ .



D'où, avec les résultats établis pour la diffusion :

$$* \quad \delta = \sqrt{\nu \tau} = \sqrt{\frac{\eta U}{\rho L}} = \sqrt{\frac{\eta L^2}{\rho U L}} = \frac{L}{\sqrt{Re}} \quad (4.2)$$

On admettra la généralité de ce résultat, avec  $L$  la dimension caractéristique de l'obstacle. Ainsi on distingue deux cas :

- soit  $Re \ll 1$ , dans ce cas l'épaisseur de la couche limite devient importante, peut même dépasser  $L$  : le concept de couche limite est alors assez limité ;
- soit  $Re \gg 1$ , dans ce cas la couche limite correspond à une petite région de l'écoulement où les effets de la viscosité sont importants. En dehors de la couche limite, les effets de la viscosité sont négligeables.

### Manipulation

Vidéo 237 : déplacement par rotation de flagelles hélicoïdaux à bas Reynolds.

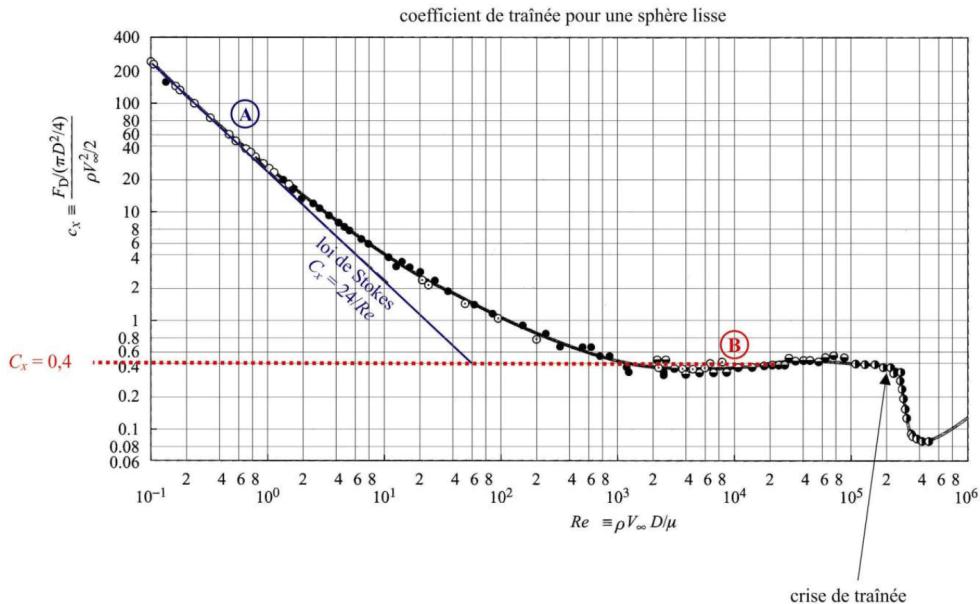
- \* Deux exemples concrets : pour une voiture roulant à  $100 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , l'écoulement admet un nombre de Reynolds important et la couche limite est de l'ordre du millimètre (et l'essentiel de la dissipation d'énergie est liée à cette zone !); pour des micro-organismes se déplaçant à très basses vitesses (paramécie,  $L \sim 100 \mu\text{m}$ ,  $U \sim 30 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) dans l'eau, on trouve  $Re \sim 10^{-3}$  : ils développent des techniques très différentes des nageurs, utilisant les effets de la viscosité.

Notons enfin que l'écoulement à l'intérieur de la couche limite peut être laminaire ou turbulent, comme on le verra un peu plus loin.

## II. Écoulement autour d'une sphère

### II.1 Évolution du coefficient de traînée avec le nombre de Reynolds

On étudie dans un premier temps l'écoulement autour d'une sphère solide de rayon  $R$ , placée dans un écoulement de vitesse  $\vec{v}_\infty$  très loin de la sphère. Si la sphère ne présente aucune rotation par rapport au fluide, la force de portance est nulle. On étudie donc l'évolution du coefficient de traînée  $C_x$  :



#### Manipulation

| Graphique 255 avec les différentes photos.

### II.2 Les différents régimes d'écoulement

#### a) $Re < 1$ : force de traînée linéaire

\* Pour de faibles nombres de Reynolds, le graphique précédent montre une évolution linéaire  $\log(C_x) \simeq 1,38 - \log(Re)$ , ce qui se traduit par  $C_x = \frac{24}{Re}$ . On appelle ce domaine le domaine de Stokes. En effet, l'expression de la force de traînée sur une sphère a été déterminée littéralement par Stokes :

$$\vec{F}_t = 6\pi\eta R \vec{v}_\infty = -6\pi\eta R \vec{v}_{sol/fl} \quad (4.3)$$



#### Exercice

Montrer que dans ce cadre, le coefficient  $C_x$  vérifie bien  $C_x = \frac{24}{Re}$ .

Le maître-couple d'une sphère étant  $\pi R^2$  et le nombre de Reynolds  $Re = \frac{\rho(2R)U}{\eta}$  :

$$C_x = \frac{6\pi\eta RU}{\frac{1}{2}\rho\pi R^2 U^2} = \frac{12 \times 2\eta}{\rho(2R)U} = \frac{24}{Re} \quad (4.4)$$

conforme au graphique expérimental.

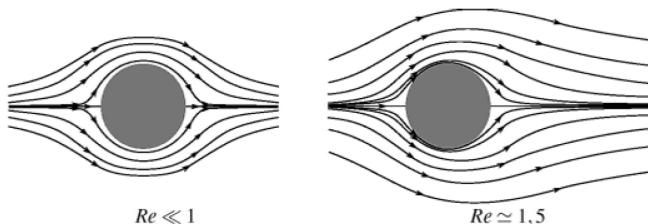
À ces très faibles nombres de Reynolds, l'écoulement est stationnaire et laminaire, le fluide contournant parfaitement l'obstacle. De plus, on observe une parfaite symétrie par rapport aux plans passant par le milieu de la sphère et perpendiculaire ou parallèle à  $\vec{v}_\infty$  : on ne peut pas distinguer le sens de l'écoulement. On parle de **traînée de frottements**, car ce sont uniquement les forces de viscosité qui prédominent dans cette force (la carte des pressions suit les mêmes symétries).



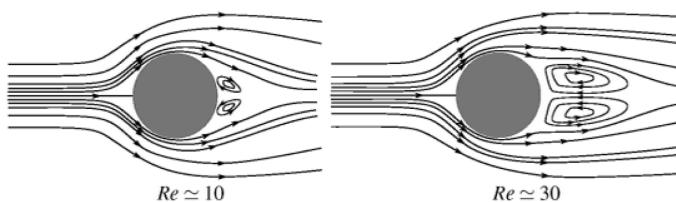
## Manipulation

Réversibilité de l'écoulement pour de faibles nombres de Reynolds : vidéos 230 à 232.

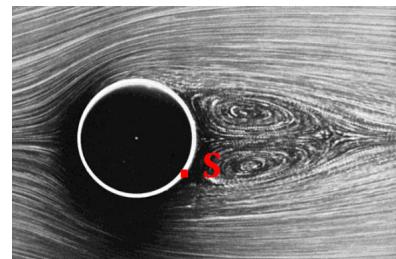
Cette symétrie se brise dès que le nombre de Reynolds commence à croître, comme illustré ci-dessous :



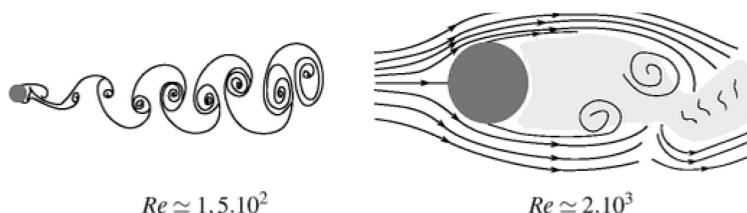
### b) Quelques unités $< Re < 10^3$ : zone intermédiaire



On observe que l'écoulement reste laminaire, mais la symétrie amont-aval a disparu. L'écoulement est toujours stationnaire. L'augmentation du nombre de Reynolds fait progressivement apparaître un sillage en aval, jusqu'à des tourbillons contrarotatifs. Le fluide semble s'écouler autour de la sphère jusqu'au point *S* (illustré ci-dessous) : ce point correspond au **décollement de la couche limite**.

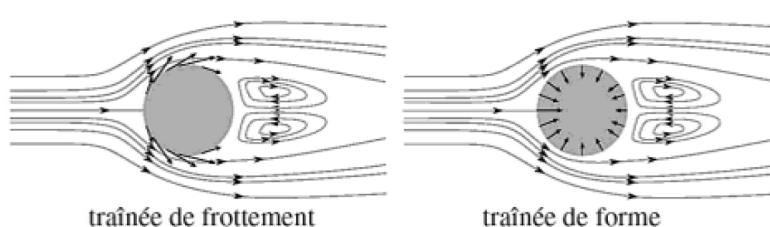


À mesure que le nombre de Reynolds augmente, on peut voir apparaître un phénomène périodique ( $Re \sim 150$ ) : l'allée de tourbillons de Von Karman se détachant de la sphère. On observe couramment ce phénomène à la surface d'une tasse de café mousseux ; ce phénomène persistant est aussi à l'origine du délai entre deux décollages d'avions sur les pistes d'aéroports (pouvant engendrer des perturbations pour les avions suivants).



La figure ci-dessous illustre l'origine physique de la force de traînée :

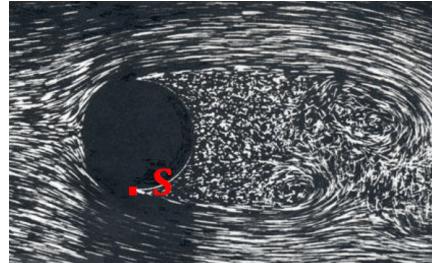
- \* □ les forces de viscosité sont responsables de la traînée de frottement, déjà décrite à faible Reynolds ;
- les forces de pression sont responsables de la **traînée de forme** : en effet, en aval de la sphère la pression est moins importante qu'en amont (là où le fluide vient frapper la sphère). Plus le sillage en aval est large, plus la traînée de forme est importante.



Retenons que dans cette gamme de  $Re$ , le  $C_x$  diminue, mais comme la vitesse est proportionnelle à  $U^2$ , la force de traînée est croissante avec  $Re$ .

c)  $2 \cdot 10^3 < Re < 2 \cdot 10^5$  : trainée de forme quadratique

À partir de  $Re \sim 2000$ , le sillage en aval devient turbulent : on observe des tourbillons de toutes tailles et de sens de rotation aléatoires. On constate également que le point de décollement remonte vers l'avant de la sphère au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente. Enfin, comme le coefficient  $C_x$  devient quasi-constamment constant ( $C_x \sim 0,5$  pour une sphère), la force de trainée est quadratique en vitesse :

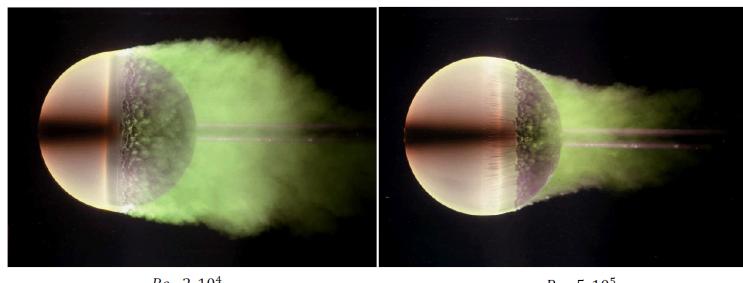


$$\vec{F}_t = -\frac{1}{2} C_x S \rho U^2 \vec{e}_v \quad (4.5)$$

avec  $\vec{e}_v = \frac{\vec{v}_{\text{sol/fl}}}{U}$  un vecteur unitaire.

d)  $Re \geq 2 \cdot 10^5$  : crise de traînée et au-delà

- \* Le graphique met en évidence une chute assez brutale de la valeur de  $C_x$  autour d'une valeur critique du nombre de Reynolds  $Re = Re_c \sim 2 \cdot 10^5$ . Ainsi la force de traînée diminue, ce qui s'explique par un décollement de la couche limite qui se déplace vers l'aval, réduisant alors la largeur du sillage et donc la zone de faible pression. La traînée de forme diminuant plus que la traînée de frottement n'augmente (puisque le fluide recolle en partie sur l'objet).



Ensuite, pour des valeurs supérieures de  $Re$ , le coefficient de traînée reste sensiblement constant.

Ce décollement de la couche limite qui se décale vers l'aval s'explique par le fait que l'écoulement dans la couche limite devient turbulent. On peut en effet évaluer le nombre de Reynolds dans la couche limite :

$$R_{\text{cl}} \sim \frac{\delta U \rho}{\eta} = \frac{\frac{L}{\sqrt{Re}} \rho U}{\eta} = \sqrt{Re} \quad (4.6)$$

donc pour  $Re \sim 2 \cdot 10^5$ ,  $Re_{cl} \sim 500$ , ce qui commence à être l'ordre de grandeur de l'apparition d'un écoulement turbulent.

### II.3 Coefficient de traînée pour des objets de formes diverses



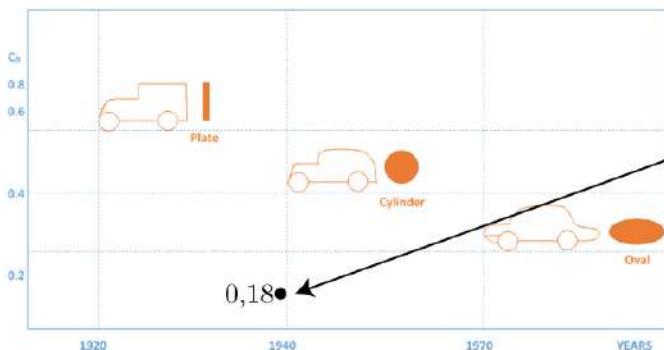
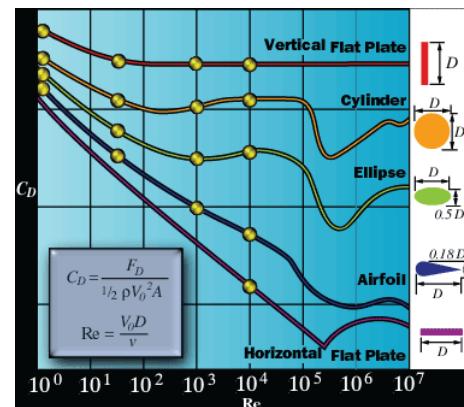
## Manipulation

Vidéos à partir de 255 pour illustrer les écoulements pour diverses formes et différentes valeurs de  $Re$ .

Remarquons que pour des objets autres que la sphère lisse, on observe le même type de comportement pour le coefficient de traînée  $C_x$ . En particulier :

- pour des faibles valeurs du nombre de Reynolds  $Re < 1$ , la force de traînée est de type « frottements fluides »  $\vec{F} = -\alpha\eta L\vec{v}$ , avec  $\alpha$  une constante numérique sans dimension dépendant essentiellement de la forme de l'objet ;
- pour  $10^3 \lesssim Re \lesssim 10^6$ , la force de traînée devient quadratique en vitesse  $\vec{F} = -\frac{1}{2}C_x\rho Sv\vec{v}$ , avec un coefficient  $C_x$  sensiblement constant.

Notons que la plupart des écoulements que l'on considère sont turbulents, que ce soit un cycliste, une voiture, un bateau, etc. C'est pour cette raison que l'on donne souvent pour un obstacle donné le coefficient  $C_x$  correspondant à sa valeur dans la zone de frottements quadratique. Il est d'autant plus faible que l'obstacle est profilé : cela explique les améliorations conduites sur les carrosseries de voitures.



Schlörwagen (1939)

À Nantes, au lycée La Joliverie, a été développé différents bolides ayant un coefficient  $C_x$  proche de 0,10, ce qui permet des consommations particulièrement faibles, à des vitesses de l'ordre de ..30 km·h<sup>-1</sup> : environ 3600 km·L<sup>-1</sup> pour des moteurs à essence !!

<http://www.la-joliverie.com/projets-pedagogiques/projets/330-les-leaders-de-l-energie-maitrisee.html>

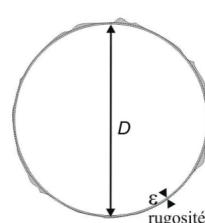
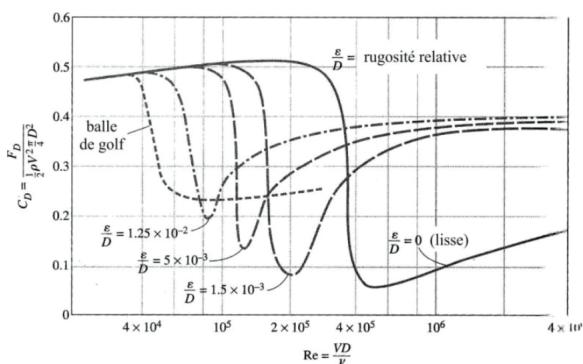


## Manipulation

Vidéo 268 comparant deux voitures aux  $C_x$  très différents et 651 pour montrer l'effet du profilage.

## II.4 Balle de golf et décollement de la couche limite

Au début du golf, les balles étaient lisses, mais il était connu des golfeurs qu'une balle cabossée avait souvent une portée bien plus grande que les balles neuves. La forme actuelle alvéolée fait suite à des essais en souffleries.





## Exercice

Expliquer à l'aide du graphique ci-dessus l'augmentation de la portée de balles cabossées.

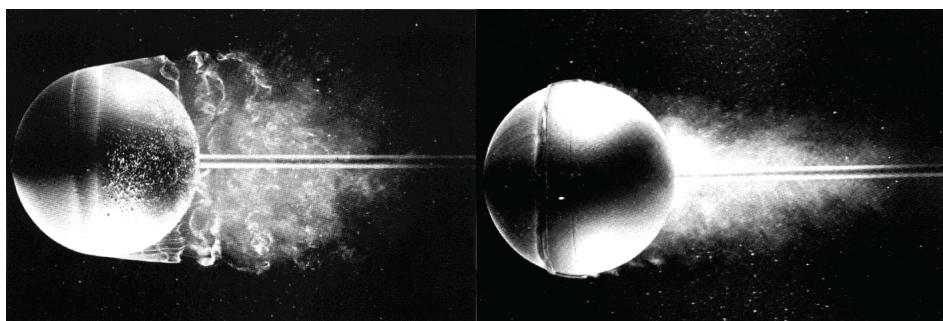
En effet, la balle de golf alvéolée présente une crise de traînée pour une valeur plus faible du nombre de Reynolds. Ainsi, une balle frappée et envoyée à grande vitesse correspond généralement à un nombre de Reynolds supérieur à  $Re_c$ . Lorsque la balle ralentit,  $Re$  diminue et lorsqu'il repasse sous  $Re_c$ , le coefficient de traînée augmente brusquement, limitant la portée. Cette augmentation brusque intervenant plus tardivement pour le mouvement d'une balle alvéolée, sa portée s'en trouve augmentée.



## Manipulation

Vidéo 265 (golf), 266 (baseball) et explication sur une sphère 259 (avec et sans fil fin).

Toute modification, même légère, de la surface, favorise la turbulence de la couche limite et va faire reculer le point de décollement le long de la paroi de l'obstacle. Par exemple pour une sphère pour laquelle on a placé un fil fin en amont, le point de décollement est déplacé vers l'aval.

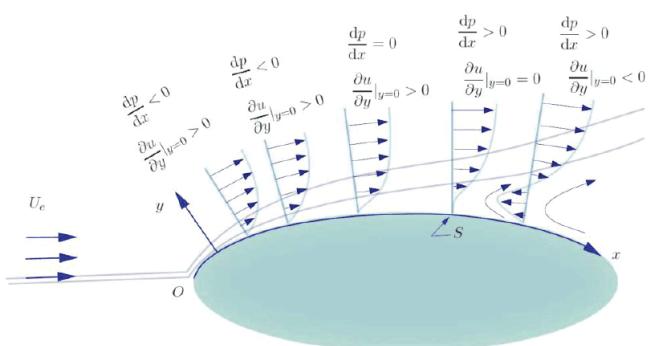


### II.5 HP : origine du décollement de la couche limite

Pour expliquer l'origine du décollement de la couche limite, il faut connaître l'évolution de la pression :

- on peut montrer que la pression est constante verticalement à la paroi : elle est égale à la pression à l'extérieur de la couche limite, pour la même abscisse curviligne  $x$  ;
- selon la direction  $x$ , la pression suit l'équation que l'on admet pour le moment :  $\frac{dp}{dx} = -\rho U \frac{du}{dx}$ . Or, on constate que la vitesse de l'écoulement diminue en aval, donc la pression augmente en aval.

La forme de l'objet a évidemment une influence sur la vitesse en aval : la partie arrière de l'obstacle impose une divergence rapide des lignes de courant, et donc un ralentissement important de l'écoulement moyen en aval (la section des tubes de courant s'élargit).



Ainsi à mesure que l'on se déplace vers l'aval, deux effets s'opposent sur les particules de fluide :

- la force de pression qui vient freiner la particule de fluide ;
- la force de viscosité qui vient accélérer la particule de fluide.

Lorsque les forces de pression sont prépondérantes, on observe un renversement local de l'écoulement : la couche limite se décolle.

Cela explique également pourquoi le fait que la couche limite soit turbulente implique que le décollement soit plus tardif : la convection est plus efficace pour transmettre la quantité de mouvement en aval de l'obstacle, retardant l'apparition de l'inversion du champ de vitesse au voisinage de la paroi.

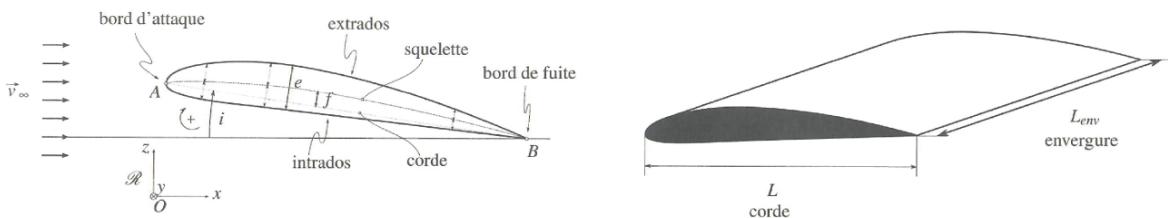
### III. Écoulement autour d'une aile d'avion

On étudie dans toute la suite l'écoulement de l'air autour d'une aile d'avion, pour de grandes valeurs du nombre de Reynolds de façon à pouvoir utiliser pleinement le concept de couche limite. Les phénomènes mis en jeu sont complexes, on va se baser sur une approche qualitative et s'appuyer sur des mesures concrètes pour des profils d'ailes connus.

#### III.1 Description d'une aile d'avion

Une aile d'avion fait intervenir un vocabulaire spécifique. D'un point de vue de la forme globale, l'aile possède une **envergure** de longueur  $L_{\text{env}}$ ; l'**extrados** correspond à la surface supérieure de l'aile; l'**intrados** à la surface inférieure. La ligne anguleuse de raccordement de ces deux surfaces se nomme le **bord de fuite**. Le **bord d'attaque**, non anguleux, est la ligne de l'aile la plus éloignée du bord de fuite. Vu de profil, on distingue des éléments supplémentaires :

- la **corde** est le segment droit reliant le bord de fuite au bord d'attaque, de longueur  $L$ ;
- le **squelette** est la courbe reliant le bord d'attaque au bord de fuite, en restant équidistante de l'intrados et de l'extrados;
- l'**angle d'attaque  $i$**  correspond à l'angle entre la direction de l'écoulement de l'air et la corde.



Dans le domaine aéronautique, la surface de référence utilisée dans les calculs de force de trainée et de portance, appelée **surface alaire**  $S \sim L \times L_{\text{env}}$  correspond à la surface projetée de l'aile dans le plan horizontal de l'avion (vu de dessus).

#### III.2 Traînée et portance d'une aile d'avion

Pour le calcul du nombre de Reynolds associé à une aile d'avion, on prend comme longueur caractéristique la longueur  $L$  de la corde, compte tenu de la faible épaisseur de l'aile :

$$Re \sim \frac{\rho Lv_\infty}{\eta} \quad (4.7)$$

- \* On peut alors exprimer en régime turbulent les deux forces de portance et de traînée :

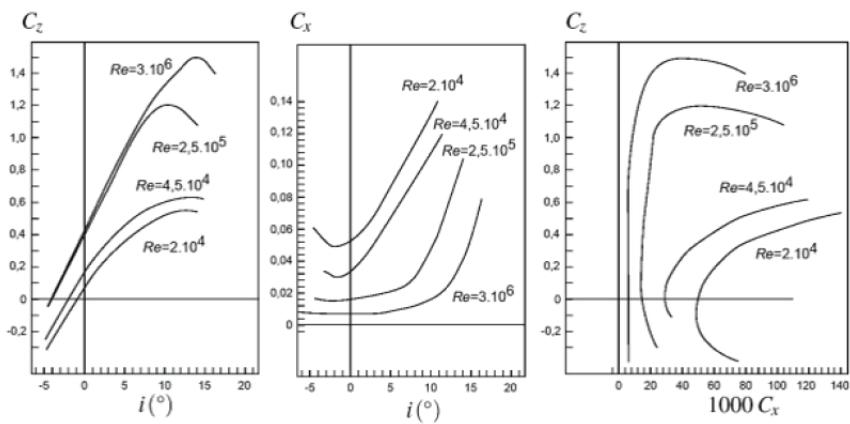
$$\vec{F}_t = -\frac{1}{2} C_x \rho S v_\infty \vec{v}_\infty \quad \text{et} \quad \vec{F}_p = \frac{1}{2} C_z \rho S v_\infty^2 \vec{n} \quad (4.8)$$

avec  $S$  la surface alaire, et  $\vec{n}$  le vecteur normal à  $\vec{v}_\infty$ . Notons que  $C_x > 0$  mais que  $C_z$  peut *a priori* être positif ou négatif, selon l'angle d'incidence.



La portance n'est pas toujours une force verticale ! En particulier pour les phases des décollage ou d'atterrissement d'un avion, au cours desquelles ce dernier se cambre.

Les courbes principales concernant une aile d'avion sont représentées ci-dessous : on représente les valeurs des coefficients de portance et de traînée pour divers angles d'attaque, selon la valeur du nombre de Reynolds, mais également la courbe de  $C_z$  en fonction de  $C_x$  que l'on va étudier un peu plus loin.

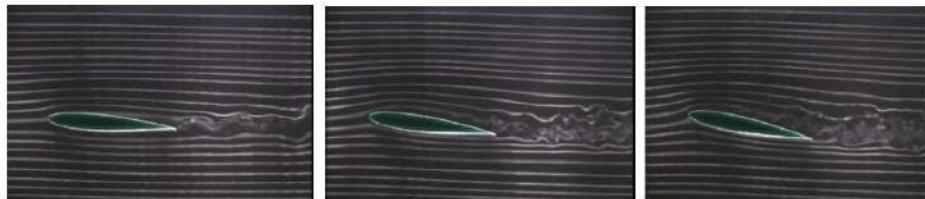


- \* On constate que pour de faibles angles d'attaque, l'écoulement est quasi-laminaire, la portance comme la traînée sont faibles (et la traînée est principalement due à la viscosité). À mesure que l'on augmente l'angle d'attaque, la portance augmente quasi-linéairement : elle est principalement due au fait que la vitesse du fluide est plus importante sur l'extrados, ce qui induit une diminution de la pression au-dessus de l'aile comparativement à la pression au niveau de l'intrados. La traînée augmente également, mais faiblement. Jusqu'à  $i = 15^\circ$  environ, la couche limite décolle sur l'extrados et remonte vers le bord d'attaque au fur et à mesure que l'angle augmente.



### Manipulation

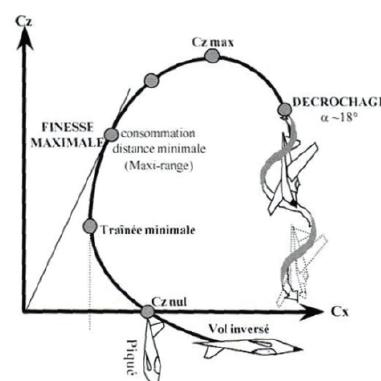
| Vidéo 256 puis 649 puis 608 puis 608 : aile d'avion pour différentes valeurs d'angle d'attaque.



Au-delà, la couche limite se décolle au niveau du bord d'attaque : on parle de **décrochage** : un sillage turbulent apparaît sur la totalité de l'extrados, la pression y est alors quasiment égale à la pression atmosphérique alors qu'elle y était inférieure auparavant : cela explique la chute brutale de portance.

### III.3 Complément : finesse et polaire

La représentation de  $C_z$  en fonction de  $C_x$ , appelée **polaire** (d'Eiffel) permet de visualiser simplement la finesse du profil, à savoir  $f = \frac{C_z}{C_x} = \tan(\alpha)$ , avec  $\alpha$  l'angle entre la force de traînée et la force totale, dont nous verrons en TD une interprétation cinématique. On peut maximiser la finesse en considérant la corde de la courbe, c'est-à-dire la droite tangente à  $C_z = f(C_x)$  passant par l'origine.



# Exercices

## 4. 1 Chute d'un grêlon

Un grêlon sphérique de masse  $m$ , de rayon  $r = 3 \text{ mm}$  et de masse volumique  $\rho_{\text{glace}} = 0,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  tombe verticalement, l'espace étant rapporté à l'axe ( $Oz$ ) vertical ascendant. Le champ de pesanteur est uniforme,  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , dirigé suivant la verticale descendante. L'air a une viscosité  $\eta = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Pl}$ .

1. L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire  $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ , de pression  $P = 1,0 \text{ bar}$  et de température  $T = 273 \text{ K}$ . Calculer sa masse volumique  $\rho_{\text{air}}$ . Que dire alors de la poussée d'Archimède s'exerçant sur le grêlon en comparaison à son propre poids ?
2. On cherche la vitesse atteinte par le grêlon en régime permanent. On se place dans le cadre d'une hypothèse de « vitesses faibles » où l'écoulement est laminaire. La force de traînée vérifie alors la formule de Stokes.
  - (a) Déterminer la vitesse limite dans le cadre de cette modélisation.
  - (b) Calculer le nombre de Reynolds en prenant pour dimension caractéristique de l'écoulement le diamètre du grêlon. Que dire alors de l'hypothèse de l'écoulement laminaire ?
  - (c) Dans le cadre d'une hypothèse de « grandes vitesses » où l'écoulement est turbulent, comment s'exprime la force de traînée ? On donne  $C_x = 0,45$  pour le grêlon. Déterminer la vitesse limite dans le cadre de ce modèle. Calculer le nombre de Reynolds et commenter.
3. Dans le cas de vitesses faibles, exprimer le nombre de Reynolds  $R_e$  en fonction de  $\rho_{\text{air}}$ ,  $\rho_{\text{glace}}$ ,  $\eta$ ,  $g$  et  $r$ . En déduire l'ordre de grandeur du rayon maximal  $r_{\max}$  du grêlon pour que la formule de Stokes soit valable. On pourra prendre pour critère un  $R_e$  inférieur à 1. Commenter.
4. Dans le cas de vitesses grandes, exprimer de même le nombre de Reynolds  $R_e$  en fonction de  $\rho_{\text{air}}$ ,  $\rho_{\text{glace}}$ ,  $\eta$ ,  $K$ ,  $g$  et  $r$ . En déduire l'ordre de grandeur du rayon minimal  $r_{\min}$  du grêlon pour que cette hypothèse soit valable. On pourra prendre pour critère un  $R_e$  supérieur à 2000. Commenter.

- 
1. À l'aide de la loi des gaz parfaits,  $\rho_{\text{air}} = \frac{MP}{RT} = 1,28 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Ainsi il est possible de négliger la poussée d'Archimède devant le poids, vu que  $\rho_{\text{glace}} \gg \rho_{\text{air}}$ .

2. (a) À l'aide de la LQM en régime permanent appliquée au grêlon dans le référentiel terrestre supposé galiléen :

$$\vec{P} + \vec{F}_{\text{stokes}} = \vec{0} \implies -\rho_{\text{glace}} \times \frac{4}{3}\pi r^3 g + 6\pi\eta rv_{\lim} = 0 \iff v_{\lim} = \frac{2\rho_{\text{glace}}r^2 g}{9\eta} = 8,9 \cdot 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.9)$$

(b)  $Re \sim \frac{\rho_{\text{air}}v_{\lim}(2r)}{\eta} \sim 3,4 \cdot 10^5$ , donc l'hypothèse d'un régime laminaire n'est pas possible car  $Re \gg 1$ .

(c) Dans ce cadre,  $F = \frac{1}{2}C_x\rho_{\text{air}}Sv^2$ , avec  $S = \pi r^2$  le maître-couple du grêlon. En réitérant le même calcul qu'en (a), on trouve

$$v_{\lim} = \sqrt{\frac{8\rho_{\text{glace}}rg}{3\rho_{\text{air}}C_x}} = 11 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.10)$$

conduisant à un nombre de Reynolds de  $Re \sim 4,2 \cdot 10^3$ , correspondant bien à un régime turbulent ( $Re > 2000$ ).

3. En remplaçant la vitesse en régime laminaire dans l'expression du Reynolds,  $Re < 1$  conduit à

$$r < \sqrt[3]{\frac{9\eta^2}{4\rho_{\text{air}}\rho_{\text{glace}}g}} = 6,8 \cdot 10^{-5} \text{ m} \quad (4.11)$$

c'est-à-dire pour des particules de l'ordre de la centaine de microns, ce qui est très faible.

4. En faisant de même, on trouve

$$r > \sqrt[3]{\frac{C_x\eta^2}{\rho_{\text{air}}\rho_{\text{glace}}g}} \times \frac{3 \times 2000^2}{32} \simeq 1,8 \text{ mm} \quad (4.12)$$

ce qui signifie concrètement que la plupart des écoulements (grêlons, pluie, etc) seront turbulents.

## 4. 2 Mesure de viscosité

On souhaite mesurer précisément la viscosité  $\eta$  de la glycérine, dont on sait qu'elle est de l'ordre de 1 Pl. La masse volumique de la glycérine est  $\mu_g = 1,260 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

Pour cela, on fait chuter une bille de silice de masse volumique  $\mu_s = 2,5 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et de rayon  $R = 0,75 \pm 0,01 \text{ mm}$  dans un récipient cylindrique rempli de glycérine. On souhaite mesurer la vitesse en régime permanent pour en déduire  $\eta$ .

1. Déterminer un ordre de grandeur de la vitesse limite  $v_{\lim}$  suivant que le régime est laminaire ou turbulent. Conclure.
2. Comment faut-il choisir les dimensions du récipient (rayon et hauteur) ? L'expérience nécessite-t-elle l'utilisation d'une caméra rapide ? D'une caméra ?
3. Une fois la vitesse limite atteinte, on mesure une distance parcourue  $h = 10,0 \pm 0,2 \text{ cm}$  en une durée  $T = 98,0 \pm 0,2 \text{ s}$ . En déduire  $\eta$  avec son incertitude.

1. Si le régime est laminaire, on trouve la vitesse limite via la LMQ projetée selon l'axe vertical :

$$-mg + \mu_g Vg + 6\pi\eta rv_{\lim,l} = 0 \iff v_{\lim,l} = \frac{2(\mu_s - \mu_g)r^2 g}{9\eta} = 1,5 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1} \quad (4.13)$$

et le calcul du Reynold vaut  $Re \sim 2,9 \cdot 10^{-3}$ , l'écoulement est donc bien laminaire. En régime turbulent, on trouverait avec  $C_x = 0,5$   $v_{\lim,t} \simeq 0,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  mais un nombre de Reynolds incompatible ( $Re \sim 0,37$ ).

2. La vitesse limite est d'une part très faible, le temps du régime transitoire également (équation différentielle d'ordre 1 sur  $v$  de temps caractéristique  $\tau \sim \frac{m}{6\pi\eta r} = \frac{2\mu_s r^2}{9\eta} = 0,3 \text{ ms} !$ ). Ainsi, dès qu'on laisse la bille de silice chute, elle atteint quasi-instantanément la vitesse limite, et elle parcourt en 10 secondes une distance de 1,5 cm : on peut donc choisir un récipient d'une vingtaine de centimètres de hauteur et mesurer simplement au chronomètre entre deux repères calibrés, et bien en face pour éviter toute erreur de parallaxe. Concernant le rayon, il est nécessaire que l'écoulement de la bille ne soit pas perturbé par les bords. Or, la couche limite autour de la sphère est de l'ordre de  $\frac{R}{\sqrt{Re}} \simeq 1,4 \text{ cm}$ . Il est préférable que le rayon du récipient soit bien supérieur, soit par exemple  $\sim 10 \text{ cm}$ .

3. Avec  $v_{\lim} = \frac{h}{T}$ , on trouve

$$\eta = \frac{2(\mu_s - \mu_g)g}{9} \times \frac{r^2 T}{h} = 1,49 \text{ PI} \quad (4.14)$$

Concernant l'incertitude, on utilise la formule d'incertitude composée :

$$\frac{u(\eta)}{\eta} = \sqrt{\left(\frac{2u(r)}{r}\right)^2 + \left(\frac{u(h)}{h}\right)^2 + \left(\frac{u(T)}{T}\right)^2} \quad (4.15)$$

que l'on retrouve en écrivant la différentielle logarithmique de  $\eta$  :

$$d \ln(\eta) = \frac{d\eta}{\eta} = d \ln(r^2) + d \ln(T) - d \ln(h) = \frac{2dr}{r} + \frac{dT}{T} - \frac{dh}{h} \quad (4.16)$$

L'application numérique conduit à  $u(\eta)/\eta = 3,3 \cdot 10^{-2}$  (avec une contribution quasi négligeable sur  $T$ , mais où les deux autres grandeurs contribuent bien à cette incertitude relative). D'où  $u(\eta) = 0,05 \text{ PI}$  :

$$\boxed{\eta = 1,49 \pm 0,05 \text{ PI}} \quad (4.17)$$

### 4. 3 Aviron avec un ou plusieurs rameurs

Un skiff est une embarcation de course avec avirons, dans laquelle prend place un unique rameur. Il existe aussi des embarcations regroupant jusqu'à 8 rameurs. Le record du monde de vitesse en skiff est de  $17,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Avec 8 rameurs, il est de  $21,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . L'objet de cet exercice est de comprendre pourquoi la différence n'est pas plus importante, et de dégager des ordres de grandeurs grâce à des facteurs d'échelle. On donne la viscosité dynamique de l'eau  $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ PI}$ . On suppose que les embarcations se déplacent en ligne droite avec vitesse de norme  $v$  constante.

1. Évaluer le nombre de Reynolds pour un skiff. En déduire la façon dont la force de traînée dépend de la norme  $v$  de la vitesse.
2. Si on double la puissance développée par le (ou les) rameur(s), par combien  $v$  est-elle multipliée ?
3. Une personne développant une puissance  $P_0$  fait avancer son skiff à  $14 \text{ km/h}$ . Quelle est en fonction de  $P_0$  la puissance développée par le recordman du monde ?
4. En supposant, pour simplifier, que la partie immergée d'une embarcation pour 8 rameurs est homothétique de celle d'une embarcation pour 1 seul, et en faisant les hypothèses qui vous semblent légitimes, établir un lien entre la vitesse d'un skiff et celle d'une embarcation à 8 rameurs. Commenter, compte tenu des records de vitesse pour les deux types de bateaux.

1.  $Re \sim \frac{\rho_{\text{eau}} L v}{\eta} \sim 5 \cdot 10^6$  en prenant  $L \sim 1 \text{ m}$  la largeur de l'embarcation,  $v \sim 20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ . On est donc en régime turbulent, où la force de traînée dépend de  $v^2$ .
2. La puissance développée par les rameurs permet de compenser la puissance dissipée par les frottements, c'est-à-dire :

$$P_{\text{rameurs}} \sim C_x S v^2 \times v \sim v^3 \quad (4.18)$$

Donc si on double la puissance, la vitesse est multipliée par un facteur  $2^{1/3} \simeq 1,25$ .

3. D'après ce qui précède, on a donc

$$\frac{P_0}{v_0^3} = \frac{P_{\text{record}}}{v_r^3} \iff P_{\text{record}} = P_0 \left( \frac{v_r}{v_0} \right)^3 \simeq 1,9 P_0 \quad (4.19)$$

4. Considérons  $n$  rameurs, de masse totale  $m_{\text{tot}} = m_0 + nm_1$  avec  $m_0 \sim 30 \text{ kg}$  et  $m_1 = 70 + usi 15 \text{ kg}$  (masse du rameur + augmentation de la taille de l'embarcation). La longueur de l'embarcation augmente selon  $L = L_0 + nL_1$ ,  $L_0 \sim 6 \text{ meter}$  et  $L_1 \sim 2 \text{ m}$ . On a besoin de connaître la section immergée :  $V = \alpha S L$  est le volume immergé, en supposant  $\alpha$  constant quel que soit le nombre de rameurs. Ainsi, on peut appliquer la LQM au bateau projeté selon l'axe vertical :

$$-mg + \rho_{\text{eau}} V g = 0 \iff S = \frac{m_{\text{tot}}}{\rho_{\text{eau}} L \alpha} \quad (4.20)$$

Ainsi la force de frottements est en  $Sv^2$ , et la puissance développée en  $nP_0$  avec  $P_0$  la puissance d'un rameur. On trouve donc une loi pour la puissance :

$$nP_0 \propto S v^3 \iff v \propto \left( \frac{n P_0 L}{m_{\text{tot}}} \right)^{1/3} \propto (L_0 + n L_1)^{1/3} \quad (4.21)$$

comme la masse totale varie presque proportionnellement à  $n$ . Par application numérique pour  $n = 1$  et  $n = 8$  :

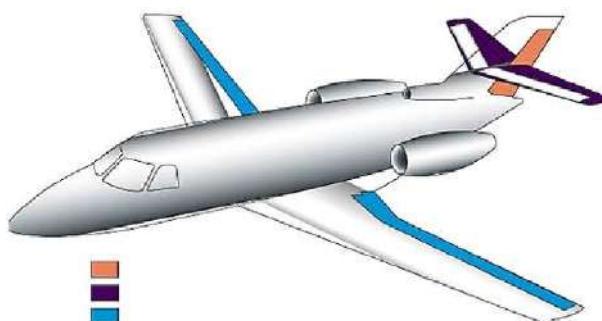
$$v_8 = v_1 \left( \frac{L_0 + 8 L_1}{L_0 + L_1} \right)^{1/3} \sim 1,4 v_1 \quad (4.22)$$

alors que le rapport entre les records vaut 1.2 : le modèle n'est clairement pas parfait, et surtout les valeurs de longueurs sont « à la louche » !! Néanmoins on constate que l'augmentation du nombre de rameurs ne permet pas une augmentation considérable de la vitesse maximale.

#### 4. 4 Décollage d'un A380

1. Calculer la vitesse d'un A380 au décollage au niveau de la mer, à une température de  $20^\circ\text{C}$ , pour une masse de 421 tonnes, une surface portante de  $845 \text{ m}^2$  et un coefficient de portance  $C_z = 1,38$ . Calculer la variation relative de cette vitesse due à une variation d'altitude de 2250 m (altitude de Mexico). Calculer la variation relative de cette vitesse due à une variation de température de  $20^\circ\text{C}$ . Commenter.
2. Vaut-il mieux décoller avec le vent de face, de derrière ou de côté ?
3. On distingue 3 axes de rotation pour l'avion : l'axe de **tangage**, dans la direction des ailes, l'axe de **roulis** dans la direction de l'avion et l'axe de **lacet** perpendiculaire aux deux autres. Représenter ces 3 axes sur un schéma.
4. Différentes parties mobiles (cf. schéma) permettent de jouer sur les rotations autour de ces axes. Par exemple, lorsque la vitesse de décollage est atteinte, le pilote actionne la gouverne de profondeur, ce qui provoque la rotation de l'avion (le nez s'élève). Identifier cette gouverne sur le schéma ci-dessous.

À quoi servent les autres parties mobiles ?



- 6.** La finesse de l'avion est le rapport du coefficient de portance sur celui de traînée. Sa valeur maximale est de 22 pour l'A380. Montrer que c'est le rapport de la distance horizontale parcourue sur la perte d'altitude lors d'un vol « plané » (moteurs coupés). Quelle est sa signification dans le diagramme paramétrique donnant  $C_z(i)$  et fonction de  $C_x(i)$  (polaire d'Eiffel) pour différentes incidences ?
- 

- Il y a décollage lorsque la portance arrive à compenser le poids :

$$\frac{1}{2}\rho_{\text{air}}C_zSv^2 \sim mg \iff v \sim \sqrt{\frac{2mg}{C_zS\rho_{\text{air}}}} \sim 270 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \quad (4.23)$$

en considérant à  $20^\circ\text{C}$   $\rho_{\text{air}} = \frac{MP}{RT} \simeq 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ . La variation de température se répercute sur la densité volumique de l'air. En différenciant logarithmiquement :

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}\frac{d\rho}{\rho} = +\frac{1}{2}\frac{dT}{T} \implies \frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta T}{2T} = 3,4\% \quad (4.24)$$

Concernant la variation de vitesse avec l'altitude, on a a priori deux éléments qui influent : la pression qui diminue avec l'altitude, donc la masse volumique décroît, et également  $g$  qui diminue (mais l'influence est minime, donc on va la négliger). Ainsi en reprenant le calcul :

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{2}\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{1}{2}\frac{dP}{P} \quad (4.25)$$

puis à l'aide de la relation de la statique des fluides pour une atmosphère isotherme :

$$\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT} P \iff \frac{dP}{P} = -\frac{Mgdz}{RT} \implies \frac{dv}{v} = +\frac{Mgdz}{2RT} \quad (4.26)$$

soit  $\Delta v/v = Mg\Delta z/(2RT) = 13\%$ .

- Comme ce qui compte est la vitesse relative de l'avion par rapport au vent, pour le décollage, il est préférable d'avoir un vent de face. En imaginant qu'on décolle à  $270 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  pour la vitesse par rapport au sol, par rapport à l'air ce n'est pas la même chose : s'il souffle à  $50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ , la vitesse de décollage par rapport au sol sera de seulement  $220 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  si le vent est de face, mais  $320 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  si le vent est derrière.
- C'est la gouverne en violet qui règle le tangage. Les parties mobiles bleues permettent de régler le roulis : en effet, en déplaçant la gouverne vers le haut, la portance au niveau de l'aile diminue (car on diminue le décollement de la couche limite), ce qui permet de tourner dans le sens de l'aile actionnée (en réalité on actionne les deux simultanément : on déplace une vers le haut, l'autre vers le bas). L'ailette orangée permet enfin d'effectuer une rotation autour de l'axe de lacet.
- Considérons le cas d'un vol plané. Les forces qui s'exercent sur l'avion sont la force de portance, celle de traînée, et le poids. On cherche un lien entre le déplacement horizontal et le déplacement vertical. On suppose que l'on se déplace à vitesse constante, le vecteur vitesse ayant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. La LQM sur l'avion projetée selon les deux axes (celui du vecteur vitesse et celui normal au vecteur vitesse) conduit à :

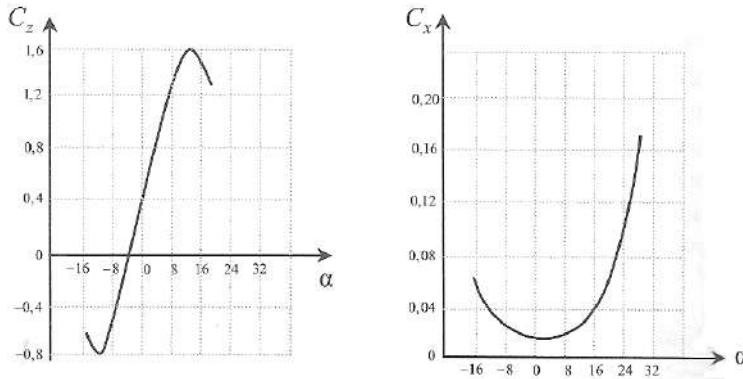
$$\begin{cases} 0 = +mg \sin \alpha - \frac{1}{2}C_x\rho S v^2 \\ 0 = -mg \cos \alpha + \frac{1}{2}C_z\rho S v^2 \end{cases} \quad (4.27)$$

$$f = \frac{C_z}{C_x} = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{v_x}{v_z} = \frac{\Delta x}{\delta z} \quad (4.29)$$

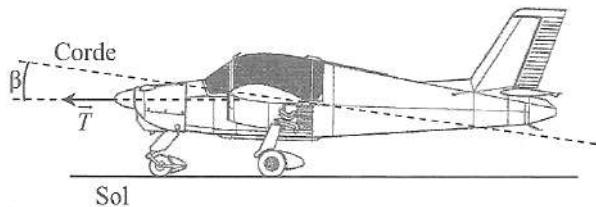
comme on est en régime stationnaire, où la norme de la vitesse est constante. Dans le graphe de la polaire d'Eiffel, la finesse correspond à la pente de la droite passant par l'origine et par un point de la courbe  $M(C_x, C_z)$ . Pour avoir la pente maximale, il faut donc déterminer la courbe qui soit tangente à la polaire.

## 4. 5 Portance et traînée d'un avion de tourisme léger

Les courbes ci-dessous, obtenues par des essais en souffleries à l'aide d'une balance aérodynamique, représentent l'évolution des coefficients de portance  $C_z$  et de traînée  $C_x$  en fonction de l'angle d'incidence  $\alpha$  pour un profil d'aile.



- Commenter l'allure des courbes ainsi que les ordres de grandeur des valeurs respectives de  $C_z$  et  $C_x$  pour une incidence donnée. Discuter l'intérêt de ce profil d'aile.
  - À partir de quelle incidence l'aile est-elle potentiellement en situation de décrochage ? Proposez une interprétation en vous appuyant sur vos connaissances sur le couche limite. Dans la comparaison des courbes de  $C_z$  et de  $C_x$  était-il possible de prévoir l'augmentation de traînée lorsque la portance chute à forte incidence ?
- Dans toute la suite, on assimilera pour simplifier les coefficients de portance et de traînée de l'aile à ceux de l'avion et on supposera que le pilote ne fait pas usage des volets pour décoller. La corde fait avec l'axe longitudinal de l'avion un angle  $\beta$  de  $4^\circ$  (angle de calage). La force de traction  $\vec{T}$  qu'exerce le moteur de l'avion sera prise de même support que son axe longitudinal.



- Dans la phase de roulage précédent l'instant du décollage, le pilote tire momentanément sur le manche de sorte que la queue de l'avion s'enfonce. L'avion étant à charge maximale, à quel angle  $\delta$  le pilote doit-il choisir de placer l'axe longitudinal de l'avion par rapport au sol ? Faire un schéma en représentant les forces s'exerçant sur l'avion et le vent relatif à l'infini. Quelle est la vitesse minimum à l'instant où les roues quittent le sol ? On donne la surface alaire  $S = 12 \text{ m}^2$  et la masse maximale  $m = 750 \text{ kg}$ .
- Juste après le décollage, le pilote remet le manche au neutre et fait ainsi monter l'avion sur une trajectoire confondue avec le support de son axe longitudinal incliné du même angle  $\delta$  par rapport au sol qu'à l'instant du décollage. Comment est modifié le schéma précédent ? Sachant que la puissance maximale du moteur équipant l'appareil est de  $75 \text{ kW}$ , à quelle pourcentage de la puissance maximale faut-il alors se placer pour assurer cette phase ascensionnelle stabilisée ?
- Le rendement d'une aile se caractérise par sa **finesse**, définie par  $f = C_z/C_x$ . Commenter la pertinence de cette définition. On appelle **polaire** de l'aile la courbe représentative de l'évolution de  $C_z$  en fonction de  $C_x$  :  $C_z = f(C_x)$ . Pourquoi ce nom ? Pour plus de lisibilité, il est d'usage de tracer la courbe  $C_z = f(1000 \times C_x)$  en dilatant l'axe des abscisses. Tracer ainsi l'allure de la polaire de l'aile. Sachant que la finesse correspond aussi au rapport entre la distance parcourue horizontalement et la distance parcourue verticalement pour un vol plané sans vent extérieur, quelle distance maximum peut parcourir l'avion en cas de panne moteur à 1000 mètres d'altitude ?

- Concernant la courbe de  $C_x$ , constate qu'elle ne s'annule jamais (on a toujours du frottement quel que soit l'angle de l'aile), mais elle augmente à mesure que la surface de l'aile par rapport au vent augmente (donc pour  $|\alpha|$  qui augmente).

Concernant la courbe de  $C_z$ , maintenant, on constate une évolution quasi-linéaire du  $C_z$ , lié au fait qu'avec le décollement de couche limite, la pression sur l'extrados est plus faible que sur l'intrados, l'effet étant d'autant plus marqué que l'angle est important. Ce profil d'aile est intéressant dans la mesure où le coefficient  $C_z$  est environ dix fois plus grand que  $C_x = \text{portance élevée avec une traînée faible}$ .

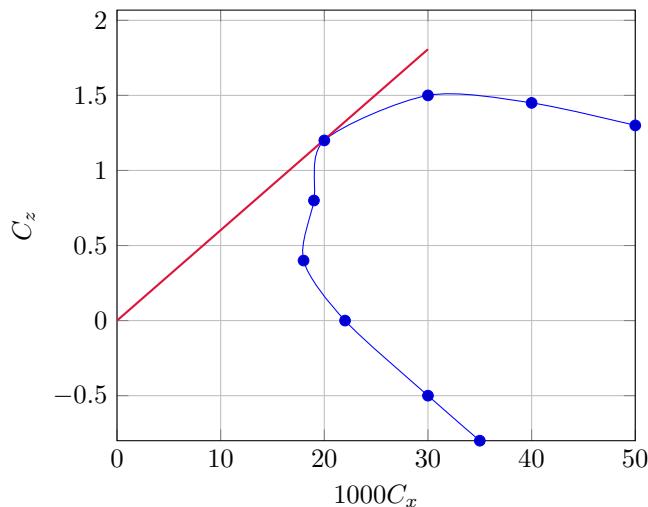
- (b) À partir d'un angle d'environ  $13\text{-}14^\circ$ , le coefficient  $C_z$  se met à baisser fortement : cela s'explique par un décollement de la couche limite et d'une traînée très turbulente. Par conséquent la force de traînée aura également tendance à augmenter (traînée de forme, lorsque le sillage en aval est plus large).
2. (a) En inclinant l'avion vers l'arrière, on permet d'augmenter l'angle relatif entre le vent, supposé parallèle au sol, et la corde de l'aile, c'est-à-dire l'angle d'incidence  $\alpha = \delta + \beta$ . D'après la courbe, on peut se placer avant la limite de décrochage, où le coefficient  $C_z$  est maximal, c'est-à-dire pour  $\alpha \simeq 13^\circ$ , donc pour  $\delta \sim 9^\circ$ . La vitesse minimum, en supposant qu'il n'y a pas de vent de face, est celle pour laquelle la portance compense le poids, on trouve comme dans l'exercice précédent  $v = \sqrt{\frac{2mg}{\rho S C_z}} \simeq 24 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .
- (b) Par rapport à la situation précédente, le vent arrive avec un angle  $\beta$  par rapport à la corde : c'est donc le coefficient  $C_z(\beta)$  qui intervient. La projection de la LQM selon l'axe de la corde conduit à :

$$-mg \cos \delta + \frac{1}{2} \rho C_z(\beta) S v^2 = 0 \iff v = \sqrt{\frac{2mg \cos \delta}{\rho S C_z(\beta)}} = 35 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \quad (4.30)$$

La puissance développée est celle qui compense la composante selon la corde de la résultante des forces, c'est-à-dire :

$$\mathcal{P} = \left( \frac{1}{2} C_x(\beta) \rho S v^2 + mg \sin \delta \right) v = 47 \text{ kW} \quad (4.31)$$

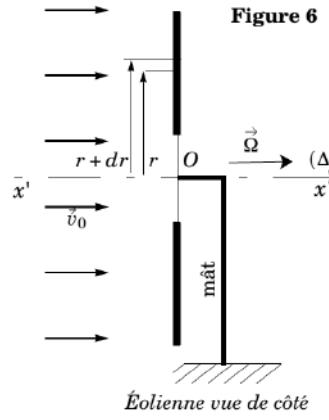
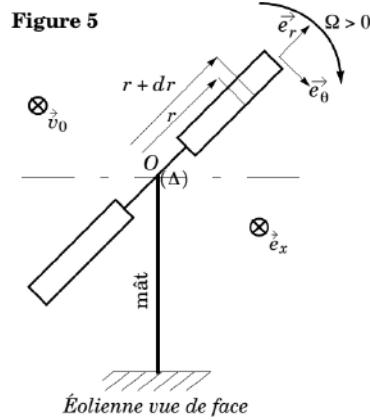
3. On peut représenter la polaire :



On peut alors tracer la tangente à la courbe passant par l'origine, la pente, d'environ 60, correspond à la finesse maximale. La distance parcourue à 1000 mètres d'altitude est donc théoriquement de 60 km !

## 4. 6 Étude d'une pale d'éolienne

On se propose de modéliser de manière volontairement rudimentaire le rotor d'une éolienne. Celui-ci est un solide formé de deux pales diamétralement opposées par rapport à l'axe de rotation ( $O, \vec{e}_x$ ). Ce dernier axe est alimenté avec la vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  uniforme de l'air loin en amont du rotor. On note  $\Omega = \Omega \vec{e}_x$  la vitesse de rotation, supposée constante, du rotor.



On utilise le repère de coordonnées cylindriques ( $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_x$ ). La pale a une longueur  $L$  et est inclinée d'un angle  $\alpha \in [0; \pi/2]$  par rapport au plan de rotation du rotor.

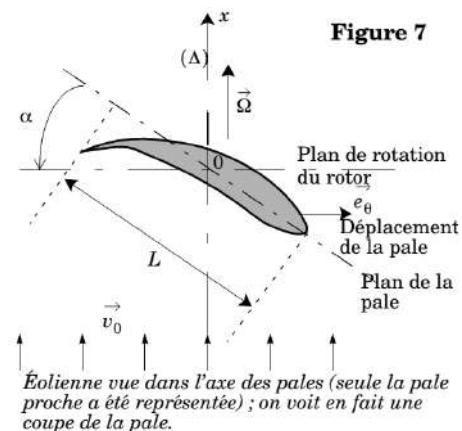
1. Exprimer la vitesse  $\vec{v}_r$  du vent en amont de la pale, dans le référentiel de la pale, en fonction de  $\vec{v}_0$ ,  $r$ ,  $\Omega$  et  $\vec{e}_r$  ( $r$  étant la distance à l'axe de rotation).
2. On note  $i$  l'angle entre le plan de la pale et  $\vec{v}_r$ .  $i \in [0; \pi/2]$  est appelé angle d'incidence du vent sur la pale. Donner la relation qui existe entre  $i$ ,  $\alpha$ ,  $v_0$ ,  $r$  et  $\Omega$ . Compléter la figure 7 en y ajoutant le vecteur  $\vec{v}_r$  et l'angle  $i$ .

Comme la vitesse incidente  $\vec{v}_r$  dépend de la position le long de la pale, on s'intéresse uniquement à une portion d'une des deux pales, portion située entre les distances radiales  $r$  et  $r + dr$  (voir figures 5 et 6).

3. Montrer que, si l'on néglige l'épaisseur de la pale, ce que l'on supposera valable, le maître-couple associé à la portion étudiée sur un plan perpendiculaire à  $\vec{v}_r$  a pour expression  $dA = L dr \sin i$ .
4. En faisant l'approximation que les expressions classiques de la portance et de la traînée sont applicables à la portion de pale étudiée, bien que  $\vec{v}_r$  ne soit pas uniforme dans le référentiel de la pale, exprimer les normes des forces de traînée  $d\bar{T}$  et de portance  $d\bar{R}$  exercées par le vent sur la portion de pale, en fonction de  $\rho$ ,  $v_0$ ,  $r$ ,  $\Omega$ ,  $L$ ,  $dr$ ,  $C_x(i)$ ,  $C_z(i)$  et  $i$ . Compléter la figure 7 reproduite ci-contre en ajoutant ces deux forces.
5. Déduire de ce qui précède l'expression du moment  $d\Gamma$  (par rapport à l'axe  $(O, \vec{e}_z)$ ) de la force exercée par le vent sur la portion de pale.

Le tableau suivant donne les valeurs de  $C_x$  et  $C_z$  en fonction de l'angle d'incidence  $i$ , pour une pale de profil donné.

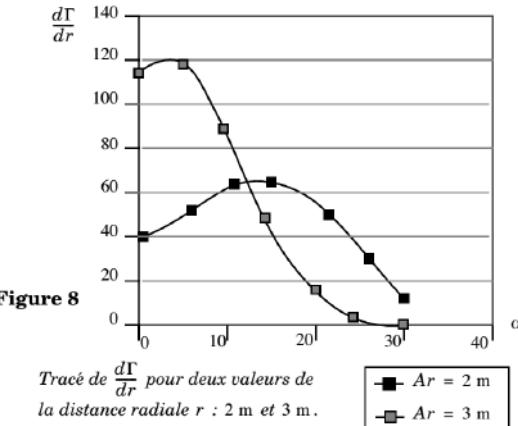
L'angle  $i$  dépendant lui-même de  $r$  et de  $r\alpha$ , on peut alors tracer  $\frac{d\Gamma}{dr}$  en fonction de  $\alpha$ , lorsque toutes les autres grandeurs sont fixées.



$i$ (degrés)	$C_x$	$C_z$	$i$ (degrés)	$C_x$	$C_z$
0	0, 030	0, 100	25	0, 120	1, 000
5	0, 040	0, 320	30	0, 150	0, 800
10	0, 055	0, 500	35	0, 170	0, 650
15	0, 070	0, 800	40	0, 200	0, 500
20	0, 100	0, 950			

La figure 8 donne ce tracé pour  $v_0 = 10 \text{ m.s}^{-1}$ ,  $\Omega = 1 \text{ tour.s}^{-1}$ , pour deux valeurs de la distance radiale  $r$ , à savoir 2 et 3 mètres. Les unités verticales sont arbitraires.

4. Commenter les tracés obtenus. Quelle forme convient-il de donner aux pales en vue d'augmenter le rendement de l'éolienne ?



- On utilise la composition des vitesses  $\vec{v}(\mathcal{R}_{\text{aile}}) = \vec{v}_r = \vec{v}_0 + \vec{v}(\mathcal{R}_{\text{terrestre}}/\mathcal{R}_{\text{aile}}) = v_0 \vec{e}_x - r\Omega \vec{e}_\theta$ .

- En complétant le schéma ci-contre, on peut exprimer l'angle  $i + \alpha$  avec la tangente :

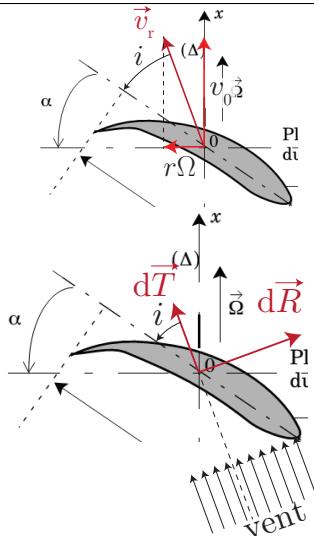
$$\tan(i + \alpha) = \frac{v_0}{r\Omega} \quad (4.32)$$

- Le vecteur surface étant  $d\vec{S} = L dr \vec{e}_x$ , en le projetant selon un plan perpendiculaire à  $\vec{v}_r$ , on fait apparaître en projection  $\cos(\pi/2 - i) = \sin(i)$  et une aire projetée  $dA = L dr \sin(i)$ .

- On peut alors écrire les expressions des normes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \|d\vec{T}\| = \frac{1}{2} \rho C_x(i) dA v_r^2 = \frac{1}{2} \rho C_x(i) L \sin(i) (v_0^2 + r^2 \Omega^2) dr \\ \|d\vec{R}\| = \frac{1}{2} \rho C_z(i) L \sin(i) (v_0^2 + r^2 \Omega^2) dr \end{array} \right. \quad (4.33)$$

$$(4.34)$$



- Seules les composantes selon  $\vec{e}_\theta$  des deux forces ont une incidence sur le couple de rotation :

$$d\Gamma = - \|d\vec{T}\| r \cos(i + \alpha) + \|d\vec{R}\| r dr \sin(i + \alpha) = \frac{1}{2} \rho L \sin(i) (v_0^2 + r^2 \Omega^2) (-C_x(i) \cos(i + \alpha) + C_z(i) \sin(i + \alpha)) \quad (4.35)$$

- On constate que selon la distance à l'axe de rotation, l'angle  $\alpha$  doit être différent pour maximiser le couple de rotation : plus grand pour  $r$  petit (autour de 18°), il doit diminuer loin de l'axe (8° à 3 m) : la pale devra être vrillée. On constate également que le couple sera d'autant plus important qu'on est loin de l'axe de rotation : c'est logique car le bras de levier est plus important, et la vitesse  $v_r$  y est plus grande.

# Bilans macroscopiques

## Sommaire

<b>5.1 Bilans thermodynamiques d'énergie et d'entropie . . . . .</b>	<b>2</b>
5.1.1 Choix du système lors d'un écoulement . . . . .	2
5.1.2 Premier principe en écoulement . . . . .	2
5.1.3 Second principe en écoulement . . . . .	4
<b>5.2 Modèle de l'écoulement parfait . . . . .</b>	<b>5</b>
5.2.1 Présentation . . . . .	5
5.2.2 Champ de pression dans un écoulement uniforme et stationnaire . . . . .	5
5.2.3 Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible . . . . .	5
5.2.4 Exemples d'application . . . . .	6
<b>5.3 Pertes de charges . . . . .</b>	<b>9</b>
5.3.1 Notion de charge . . . . .	9
5.3.2 Interprétation . . . . .	9
5.3.3 Pertes de charge dans des dispositifs passifs . . . . .	10
5.3.4 Pertes de charge dans des dispositifs actifs . . . . .	11
<b>5.4 Bilan de quantité de mouvement . . . . .</b>	<b>11</b>
5.4.1 Exemple d'une fusée . . . . .	11
5.4.2 Calcul de la force exercée sur une conduite . . . . .	12
<b>5.5 Bilan de moment cinétique . . . . .</b>	<b>13</b>

## Questions de cours :

- Après avoir explicité la notion de surface de contrôle et de définition d'un système fermé à partir d'un système ouvert, démontrer le premier principe en écoulement. Donner l'équivalent en terme de puissances.
- Présenter la détente de Joule-Kelvin et le fonctionnement d'un compresseur.
- Démontrer le théorème de Bernoulli en présentant rigoureusement l'ensemble des hypothèses.
- Présenter l'effet Venturi et présenter succinctement quelques exemples d'application.
- Présenter la notion de perte de charge, et l'interprétation en terme de baisse d'altitude dans des prises de pression au sein d'une conduite cylindrique. Généraliser le terme de Bernoulli dans des dispositifs actifs avec des pertes de charge.
- Sur un exemple au choix de l'étudiant, présenter un bilan de quantité de mouvement à partir d'un système ouvert.
- Sur un exemple au choix de l'étudiant, présenter un bilan de moment cinétique à partir d'un système ouvert.

## Capacités exigibles du BO :

- À partir d'une surface de contrôle ouverte vis-à-vis des échanges, définir un système fermé approprié pour réaliser un bilan de grandeur extensive.
- Exprimer les principes de la thermodynamique pour un écoulement stationnaire en vue de l'étude d'une machine thermique sous la forme :  $\Delta(h + e_c + e_p) = w_u + q; \Delta s = s_e + s_c$ .
- Utiliser le modèle de l'écoulement parfait pour un écoulement à haut Reynolds en dehors de la couche limite.
- Énoncer et appliquer la relation de Bernoulli à un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homogène.
- Décrire l'effet Venturi. Décrire les applications : tube de Pitot, débitmètre.
- Relier qualitativement la perte de charge à une dissipation d'énergie mécanique.
- Effectuer un bilan d'énergie sur une installation industrielle : pompe ou turbine. Utiliser le fait admis que la puissance des actions intérieures est nulle pour un écoulement parfait et incompressible.
- Pour un système fermé, faire l'inventaire des forces extérieures. Effectuer un bilan de quantité de mouvement.
- Effectuer un bilan de moment cinétique pour une turbine.

L'intérêt de ce chapitre est double : faire le lien entre la mécanique des fluides et la thermodynamique d'une part, et savoir conduire des bilans d'énergie, de quantité de mouvement, de moment cinétique, en définissant des systèmes fermés adéquats.

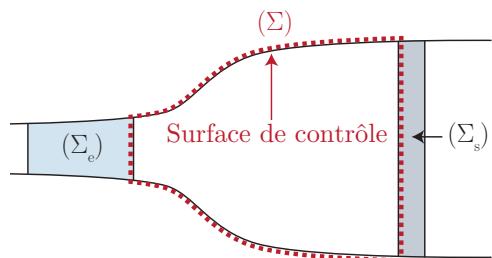
## I. Bilans thermodynamiques d'énergie et d'entropie

### I.1 Choix du système lors d'un écoulement

La problématique majeure pour effectuer n'importe quel type de bilan est de pouvoir étudier des systèmes fermés, par exemple pour l'écriture du premier principe. Or, en mécanique des fluides, même en régime stationnaire, on a constamment des échanges de matière avec l'extérieur. Que ce soit une conduite ou une pièce d'une machine thermique (pour le condenseur, par exemple, on a deux entrées et deux sorties).

- \* L'idée est alors de se donner un **volume de contrôle** indéformable, délimité par une **surface de contrôle** ( $S_c$ ). Cette dernière est constamment traversée de fluides, et l'on identifiera des grandeurs intensives massiques ( $P, T$ , les énergies massiques  $h, u, s, e_c, e_p$ , la masse volumique  $\rho$ , etc.). Le système ainsi formé est appelé ( $\Sigma$ ) : il s'agit d'un système ouvert.  
On se ramène à un système fermé ( $\Sigma^*$ ) à partir du système ouvert en adjoignant ce qui rentre ou sort de la surface de contrôle pendant  $dt$  :

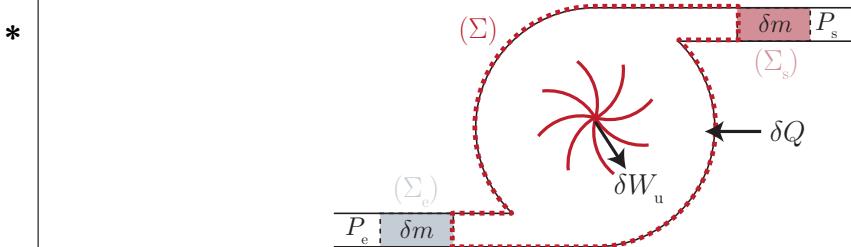
- \* ■  $(\Sigma^*)_t = (\Sigma) \cup (\Sigma_e)$  où ( $\Sigma_e$ ) est le système comprenant la masse  $\delta m_e$  qui va rentrer dans la surface ( $S_c$ ) entre  $t$  et  $t + dt$ ;
- $(\Sigma^*)_{t+dt} = (\Sigma) \cup (\Sigma_s)$  où ( $\Sigma_s$ ) est le système comprenant la masse  $\delta m_s$  qui va sortir de la surface ( $S_c$ ) entre  $t$  et  $t + dt$ .



### I.2 Premier principe en écoulement

#### a) Énoncé

On considère un écoulement à travers une machine quelconque (turbine, compresseur, échangeur thermique, etc.) en **régime permanent**, avec une entrée et une sortie. On note  $D_m$  le débit massique, identique à l'entrée et à la sortie : en effet, étant en régime stationnaire, la masse du système ( $\Sigma$ ) est constante et  $\frac{dm_\Sigma}{dt} = D_{m,e} - D_{m,s} = 0$ . Ainsi  $\delta m_{\Sigma_e} = \delta m_{\Sigma_s} = \delta m = D_m dt$ .



Appliquons alors le premier principe au système ( $\Sigma^*$ ) entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$dE_c + dE_p + dU = \delta W_{ext,n.c.} + \delta Q \quad (5.1)$$

Que ce soit pour  $E_c$ ,  $E_p$  ou  $U$ , on peut écrire la différentielle de  $X$  de la manière suivante :

$$* dX = X_{\Sigma^*}(t + dt) - X_{\Sigma^*}(t) = X_\Sigma(t + dt) + \delta m \cdot x_{\Sigma_s} - X_\Sigma(t) - \delta m \cdot x_{\Sigma_e} = \delta m(x_{\Sigma_s} - x_{\Sigma_e}) \quad (5.2)$$

comme en régime stationnaire chaque grandeur  $X$  est indépendante du temps. On a donc d'une part :

$$d(E_c + E_p + U) = \delta m(e_{c,s} + e_{p,s} + u_s) - \delta m(e_{c,e} + e_{p,e} + u_e) = \delta m [e_c + e_p + u]_e^s \quad (5.3)$$

Pour calculer d'autre part le second membre du premier principe, on distingue :

- le transfert thermique entrant dans le dispositif pendant  $dt$  que l'on exprime à l'aide de la grandeur massique correspondante  $q$  de sorte que  $\delta Q = \delta m \cdot q$ ;

- le travail se décompose en deux parties :

- le travail des forces de pression :

$$\delta W_p = \delta W_{p,e} + \delta W_{p,s} + \delta W_{p,\Sigma} \quad (5.4)$$

sachant que  $\delta W_{p,\Sigma} = -pdV = 0$  comme le système  $\Sigma$  est indéformable. On peut calculer  $\delta W_{p,e} = P_e \delta V_e = P_e v_e \delta m$  en utilisant le volume massique  $v_e$  entrant ; tandis que  $\delta W_{p,s} = -P_s \delta V_s = -P_s v_s \delta m$  (sens de la force de pression opposé) ;

- le **travail utile**, encore appelé **travail indiqué** que l'on exprime également via une grandeur massique  $\delta W_u = \delta m \cdot w_u$  ;

Ainsi  $\delta W_{\text{ext,n.c.}} + \delta Q = \delta m \left( [Pv]_s^e + w_u + q \right)$ . On aboutit finalement à :

$$\delta m \left[ e_c + e_p + u \right]_e^s = \delta m \left( [ - Pv ]_e^s + w_u + q \right) \quad (5.5)$$

soit en notant que  $\delta m \cdot h = \delta m(u + Pv)$ , où  $v$  est le volume massique :

$$\left[ e_c + e_p + h \right]_e^s = w_u + q \quad (5.6)$$

qui est donc l'écriture du premier principe pour un système ouvert en régime permanent. On rencontre aussi régulièrement la notation  $\Delta(e_c + e_p + u) = \left[ e_c + e_p + h \right]_e^s$ .

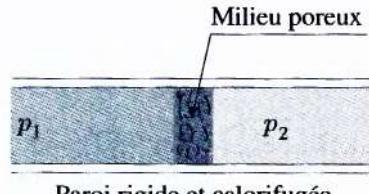
On peut écrire le premier principe en utilisant des puissances plutôt que des énergies massiques, en multipliant l'ensemble par le débit massique :

$$D_m \left[ e_c + e_p + h \right]_e^s = \mathcal{P}_u + \mathcal{P}_{\text{th}} \quad (5.7)$$

## b) Exemples d'application

### i) Détente de Joule-Kelvin

Un premier exemple simple est la détente de Joule-Kelvin, qui modélise bien la transformation d'un fluide qui s'écoule dans un détendeur. On fait circuler, en régime stationnaire, un gaz dans une conduite horizontale, rigide et adiabatique. Le gaz traverse lentement un orifice ou un milieu poreux, provoquant une diminution de pression.



On la nomme également détente de Joule-Thomson.

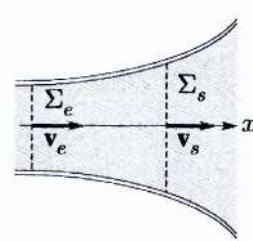
Le débit massique étant conservé, et la section de la paroi étant constante, l'énergie cinétique massique est inchangée, tout comme l'énergie potentielle. Sans travail utile ou échange thermique (adiabatique), le premier principe en écoulement stationnaire s'écrit donc

$$h_s - h_e = 0 \quad (5.8)$$

c'est-à-dire que la transformation est **isenthalpique**. Dans le cas du gaz parfait vérifiant la deuxième loi de Joule ( $h$  ne dépend que de la température), la **température du gaz parfait ne varie pas lors d'une détente de Joule-Kelvin**.

### ii) Détente dans une tuyère

Considérons la détente d'air ( $\gamma = 1,4$ ) dans une tuyère divergente, rigide, adiabatique et d'axe de révolution ( $Oz$ ). On se place en régime stationnaire et on suppose l'écoulement incompressible. La vitesse d'entrée vaut  $v_e = 100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ , et le rapport de section entre l'entrée et la sortie  $\frac{S_s}{S_e} = 3$ .





## Exercice

Déterminer la variation de température du gaz entre l'entrée et la sortie de la tuyère.

On peut déjà calculer la vitesse en sortie en utilisant le fait que l'écoulement est stationnaire et incompressible : le débit volumique est donc constant, conduisant à  $v_s = v_e \frac{S_e}{S_s} = 33 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

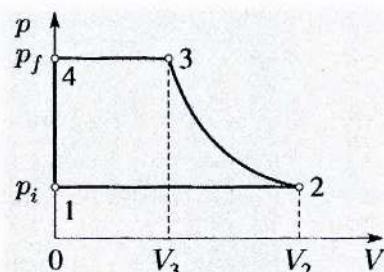
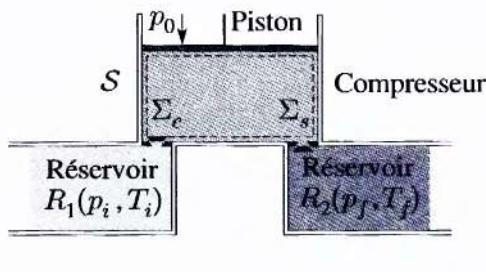
Appliquons ensuite le premier principe : on néglige ici la variation d'énergie potentielle malgré la variation d'altitude de certaines particules de fluide. Comme dans l'exemple précédent,  $w_u = q = 0$ , d'où

$$h_s + e_{c,s} - h_e - e_{c,e} = 0 \quad (5.9)$$

On a de plus  $e_c = \frac{1}{2}v^2$  et  $h = c_p T + \text{cste}$ , avec  $c_p = \frac{C_p}{m} = \frac{n}{m} \frac{R\gamma}{\gamma - 1} = \frac{R\gamma}{M(\gamma - 1)}$ , d'où :

$$c_p(T_s - T_e) = \frac{v_e^2 - v_s^2}{2} \iff \Delta T = \frac{M(\gamma - 1)}{2\gamma R} (v_e^2 - v_s^2) = -8,9 \text{ K} \quad (5.10)$$

### iii) Fonctionnement d'un compresseur



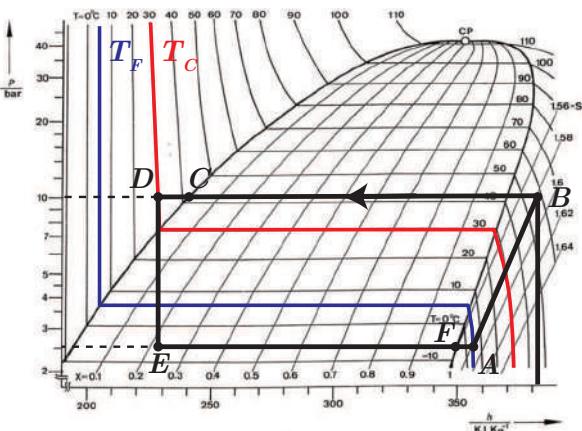
Les machines thermiques font également intervenir un compresseur. Étudions par exemple un compresseur à piston, machine ouverte qui aspire une masse de fluide d'un réservoir à la pression  $P_i$  et température  $T_i$ , et le refoule ensuite dans un autre réservoir à la pression  $P_f$  et température  $T_f$ . On peut étudier le fonctionnement suivant, constitué de trois phases :

- admission d'un fluide sans modification de son état thermodynamique ( $P_i, T_i$ ) ;
- compression adiabatique réversible avec diminution du volume et augmentation de la pression ;
- refoulement à travers la soupape d'échappement sans modification de son état thermodynamique.

En appliquant le premier principe à la surface de contrôle constituée du cylindre du compresseur, entre deux états identiques après un cycle :

$$w_u = h_s - h_e \quad (5.11)$$

en l'absence de variation d'énergie cinétique et potentielle, avec  $q = 0$ . Cela est alors utile lorsqu'on utilise un diagramme ( $h, \log(P)$ ), encore appelé diagramme des frigoristes : par lecture de l'abscisse  $h$  correspondant à l'entrée et à la sortie du compresseur, on a accès au travail utile massique reçu par le fluide.



## 1.3 Second principe en écoulement

### a) Énoncé

On reprend les mêmes notations que lors de l'utilisation du premier principe pour un système ouvert. Pour le système ( $\Sigma^*$ ), le second principe s'écrit :

$$dS^* = \delta S_{\text{ech}} + \delta S_{\text{cr}} \quad (5.12)$$

On se place toujours en régime stationnaire, si bien que  $dS^* = S_\Sigma(t+dt) + \delta m s_{\sigma_s} - S_\Sigma(t) - \delta m s_{\sigma_e} = \delta m(s_s - s_e)$ . En notant  $\delta S_{\text{ech}} = \delta m s_{\text{ech}}$  et  $\delta S_{\text{cr}} = \delta m s_{\text{cr}}$ , on aboutit finalement à :

$$s_s - s_e = \Delta s = s_{\text{ech}} + s_{\text{cr}} \quad (5.13)$$

L'entropie échangée par unité de masse entrant dans le système s'exprime via le transfert thermique massique :  $s_{\text{ech}} = \frac{q}{T_{\text{surf}}}$  avec  $T_{\text{surf}}$  la température au niveau de la surface où a lieu le transfert thermique.

On calcule parfois le taux de création d'entropie  $\frac{\delta S_{\text{cr}}}{dt} = D_m s_{\text{cr}} = D_m (\Delta s - \frac{q}{T_e})$ .

### b) Exemple

Exprimons l'entropie créée par unité de temps dans la détente de Joule-Kelvin d'un gaz parfait en fonction des pressions à l'entrée  $P_e$  et à la sortie  $P_s$ . Comme la transformation est adiabatique, on a :

$$\frac{\delta S_{\text{cr}}}{dt} = D_m \Delta s \quad (5.14)$$

On peut ensuite exprimer la variation d'entropie d'un gaz parfait, en tenant compte du fait que la température ne varie pas lors d'une détente de Joule-Kelvin d'un gaz parfait :

$$dS = nC_{p,m} \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P} \implies S_s - S_e = -nR \ln \frac{P_s}{P_e} \implies \Delta s = \frac{R}{M} \ln \frac{P_e}{P_s} \quad (5.15)$$

D'où :

$$\frac{\delta S_{\text{cr}}}{dt} = D_m \frac{R}{M} \ln \frac{P_e}{P_s} > 0 \quad (5.16)$$

Le signe positif est conforme au fait que la transformation est irréversible.

## II. Modèle de l'écoulement parfait

### II.1 Présentation

\* Un **écoulement parfait** est un écoulement pour lequel on peut négliger tous les phénomènes de transport diffusif (quantité de mouvement, viscosité, thermique, etc.). Un tel écoulement non visqueux évolue de façon **adiabatique et réversible** : il est donc **isentropique**.

Cela permet de dégager quelques conséquences :

- les forces de contact dans le fluide se réduisent aux forces de pression, mais qui diffèrent généralement du cas statique ;
- les conditions aux limites sont changées : on utilise désormais uniquement la tangence du champ de vitesse aux parois, et non une condition d'adhérence. Ainsi le champ des vitesses dans une conduite cylindrique est uniforme dans les sections droites, en écoulement parfait.
- cette modélisation reste relativement bien valide **en dehors de la couche limite**, pour des écoulements à grand nombre de Reynolds (dans ce cas, la couche limite est très fine comparativement aux dimensions caractéristiques de l'écoulement). Concrètement, les écoulements réels peuvent donc être considérés comme parfaits sur une grande zone de l'espace ;
- retenons que ce modèle permet d'obtenir des **ordres de grandeur simples**.

### II.2 Champ de pression dans un écoulement uniforme et stationnaire

Considérons un écoulement de fluide stationnaire, où la vitesse  $\vec{v}(M, t) = \vec{v}_0$  est uniforme dans le référentiel terrestre. Plaçons-nous dans le référentiel en translation par rapport à celui de la Terre, à la vitesse constante  $\vec{v}_0$  : le fluide est immobile dans ce référentiel, galiléen. L'application de la relation fondamentale de la statique des fluides conduit à un champ de pression usuel en présence uniquement des forces volumiques de pesanteur, c'est-à-dire  $P(z) = P_0 - \rho g z$  ( $(Oz)$  vers le haut). Ainsi la quantité  $(P + \rho g z)$  est uniforme au sein d'un écoulement uniforme et stationnaire.

En général, on peut négliger l'influence de la pesanteur, cela implique que la pression est souvent constante sur une section droite d'un écoulement.

### II.3 Théorème de Bernoulli pour un écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible

\* Considérons un écoulement stationnaire d'un fluide. Isolons une ligne de courant à l'intérieur d'un tube de courant, correspondant à la trajectoire des particules de fluide. L'application du premier principe au fluide en écoulement entre deux points  $A$  et  $B$  de la ligne de courant conduit, en supposant l'absence de parties mobiles ( $w_u = 0$ ) et un écoulement parfait, donc adiabatique ( $q = 0$ ) :

$$[h + e_c + e_p]_A^B = w_u + q = 0 \quad (5.17)$$

Si de plus, l'écoulement est incompressible et isentropique,  $du = Tds - Pdv = 0$ . Or,  $h = u + \frac{P}{\rho}$ , donc  $\Delta h = \Delta \left( \frac{P}{\rho} \right)$ . Enfin, si le mouvement est étudié dans un référentiel galiléen où l'énergie potentielle de pesanteur est la seule énergie potentielle du fluide, en notant ( $Oz$ ) l'axe vertical ascendant, on aboutit à la relation :

$$\frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2}v_B^2 + gz_B = \frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2}v_A^2 + gz_A = \text{cste}_{\text{ldc}} \quad (5.18)$$

### Relation de Bernoulli

Lorsque l'écoulement est **parfait, stationnaire, homogène, incompressible, étudié dans un référentiel supposé galiléen et où la seule force volumique agissant sur le fluide est la force de pesanteur supposée uniforme** (♥!), en considérant ( $Oz$ ) l'axe vertical ascendant, la **relation de Bernoulli** est vérifiée :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gz = \text{cste}_{\text{ldc}} \quad (5.19)$$

ou encore  $P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = \text{cste}_{\text{ldc}}$  pour avoir une relation homogène à une pression. Cette relation traduit la **conservation de l'énergie mécanique** volumique.

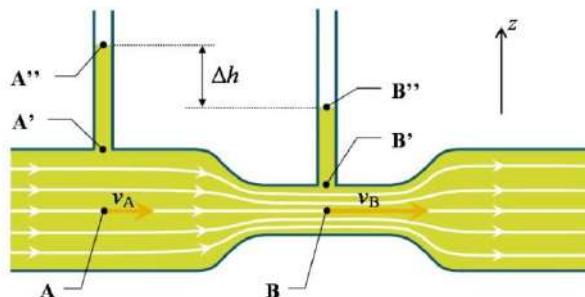
HP : Si l'écoulement est irrotationnel, c'est-à-dire  $\vec{\text{rot}}(\vec{v}) = \vec{0}$ , la relation de Bernoulli est valable partout dans l'écoulement, et non uniquement sur une ligne de courant.

## II.4 Exemples d'application

### a) Effet Venturi

#### i) Présentation

L'effet Venturi consiste en l'apparition d'une diminution de pression dans un rétrécissement d'un tube de courant, pour un écoulement parfait, incompressible et stationnaire. En effet, par effet d'entonnoir, la conservation du débit volumique impose que  $v_B > v_A$ .



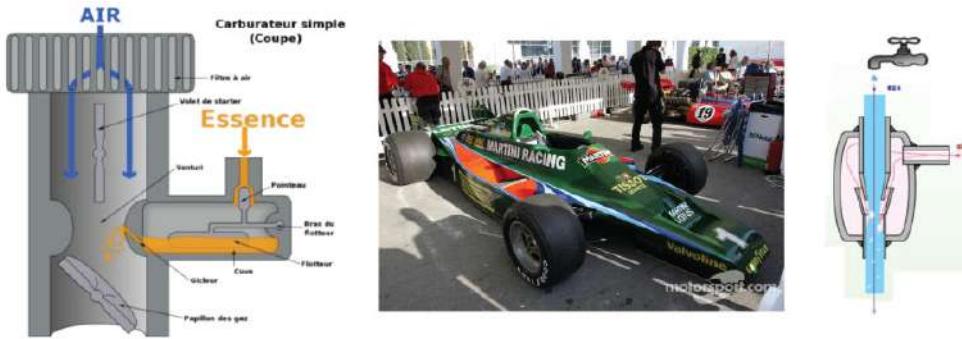
Entre deux points d'une même ligne de courant, l'application du théorème de Bernoulli conduit à :

$$P_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = P_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2 \iff P_B = P_A + \frac{1}{2}\rho(v_A^2 - v_B^2) < P_A \quad (5.20)$$

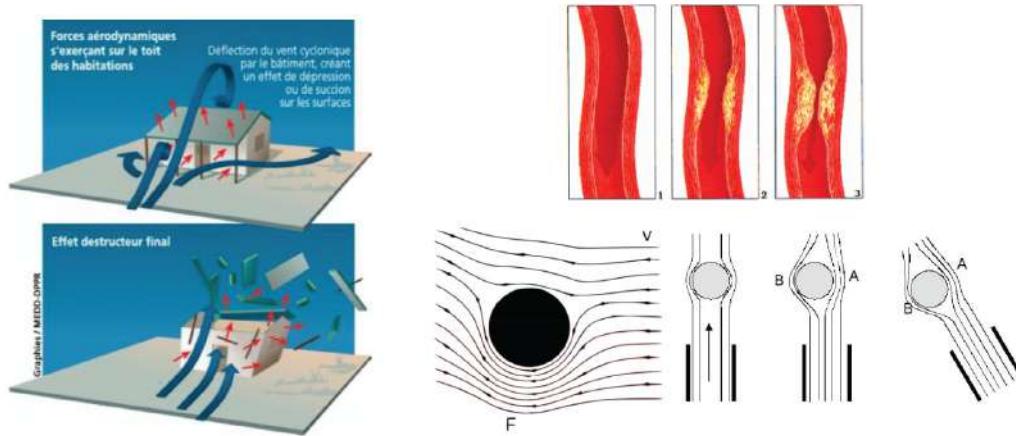
#### ii) Exemples

De nombreux exemples peuvent être cités :

- dans le domaine technologique : l'injection d'essence dans le carburateur des voitures, la diminution de la portance des Formule 1, l'aspiration grâce à la trompe à eau en chimie, le fonctionnement de certains débitmètres, la portance des avions ;



- manifestations « naturelles » : arrachement des toitures par grand vent, arthrosclérose (diminution du diamètre des artères localement par accumulation de lipides et tissus fibreux pouvant conduire à une sténose artérielle, voire une thrombose = obstruction totale du flux sanguin), l'effet Magnus des ballons ou l'effet Coanda lié à la déviation d'un jet de fluide par une surface convexe ;



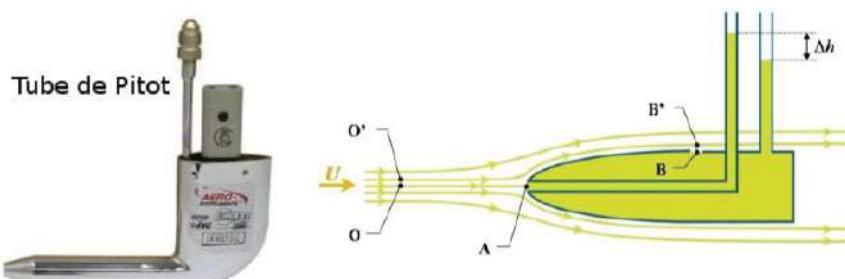
## Exercice

Dans quel sens tourne cette sphère ? Expliquer l'apparition de la force de portance. <https://www.youtube.com/watch?v=2WoF0283ESg>

Les lignes de courant étant plus resserrées en dessous, la vitesse est plus élevée. Cela s'explique car la balle tourne en sens horaire : au-dessus, la balle tourne en sens opposé au déplacement d'air (qui est donc freiné par viscosité), en dessous elle est accélérée. La pression est donc plus faible en dessous qu'au-dessus, la portance est orientée vers le bas.

### b) Mesure de vitesse : tube de Pitot / Prandtl

Un tube de Pitot est un système simple permettant la mesure de la vitesse d'un véhicule à l'aide d'une mesure de pression différentielle : une mesure de pression latéralement à l'écoulement (en *B*) correspondant à la pression statique et une mesure de pression frontalement à l'écoulement mesure la pression totale en *A*.



En appliquant le théorème de Bernoulli dans le référentiel de l'avion :

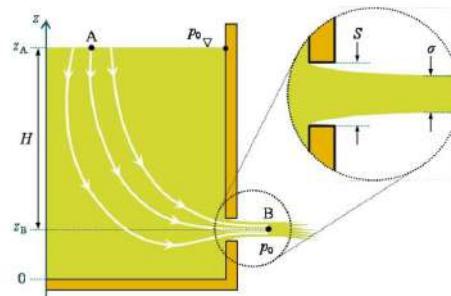
- \* ■ sur la ligne de courant  $OA$ , avec  $v_A = 0$  et pas de changement d'altitude :  $P_A = P_O + \frac{1}{2}\rho v^2$  (mesure dynamique) ;
- sur la ligne de courant  $O'B'$  : on néglige la différence d'altitude (pièce de petite dimension) et de vitesse d'écoulement, de sorte que  $P_{O'} = P_{B'}$ , soit comme les couples  $(B, B')$  et  $(O, O')$  sont proches,  $P_B = P_O$  (mesure statique).

Ainsi  $P_A - P_B \simeq \frac{1}{2}\rho v^2$ , soit en considérant que les tubes sont remplis d'un fluide de masse volumique  $\rho'$  éventuellement différente de celle du fluide environnant, on peut montrer :

$$v = \sqrt{\frac{2\rho'g\Delta h}{\rho}} \quad (5.21)$$

### c) Vidange de réservoir quasi-statique

Étudions la vidange d'un réservoir dont la surface libre est de section  $S$  très grande devant la section  $s$  de l'orifice de sortie.



On considère un écoulement parfait et incompressible, mais instationnaire. Néanmoins, à partir du moment où la vitesse  $v_\ell$  au niveau de la surface libre est très petite devant la vitesse  $v_s$  de sortie ( $v_\ell s = v_s s$  dans le cas d'un écoulement stationnaire conduisant, avec  $s \ll S$ , à  $v_\ell \ll v_s$ ), on pourra considérer l'écoulement comme **quasi-stationnaire**.

On va donc pouvoir appliquer la relation de Bernoulli à une ligne de courant. La pression au niveau de la surface libre est  $P_0$ , donc  $P(A) = P_0$ . On suppose également que la pression en  $B$  est égale à  $P_0$  (jet libre, dont la pression est supposée constante sur une section, et donc égale à la pression à l'extérieur du jet libre). Ainsi

$$* \quad P_0 + \frac{1}{2}\rho v_\ell^2 + \rho g H(t) = P_0 + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + 0 \quad (5.22)$$

conduit à la formule de Torricelli lorsqu'on néglige  $v_\ell$  devant  $v_s$  :

$$v_s = \sqrt{2gH(t)} \quad (5.23)$$

Dans les faits, la vitesse mesurée est parfois inférieure du fait de la contraction du jet en sortie du récipient (dépendant du profil)

On peut alors conduire un calcul classique de temps de vidange du réservoir.



### Exercice

Après avoir déterminé le lien entre  $\frac{dH}{dt}$  et la vitesse  $v_s$ , intégrer l'équation différentielle obtenue pour en déduire le temps de vidange en fonction de la hauteur initiale du récipient  $H_0$ .

On peut exprimer le lien entre  $v_\ell$  et la dérivée de  $H$  :  $v_\ell = -\frac{dH}{dt}$  (on définit une vitesse positive). Soit avec la conservation du débit :

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{s}{S}v_s = -\frac{s}{S}\sqrt{2gH(t)} \quad (5.24)$$

puis par séparation des variables :

$$\frac{dH}{\sqrt{H}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}dt \implies 2\left[\sqrt{H}\right]_{H_0}^0 = -\frac{s}{S\sqrt{2g}}\Delta t \quad (5.25)$$

c'est-à-dire :

$$\Delta t = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2H_0}{g}} \quad (5.26)$$

## III. Pertes de charges

### III.1 Notion de charge

La relation de Bernoulli traduit la conservation de l'énergie mécanique. Dès que l'on prend en compte la viscosité du fluide, une dissipation d'énergie a lieu. Pour un écoulement homogène et incompressible, on définit de deux manières la **charge** :

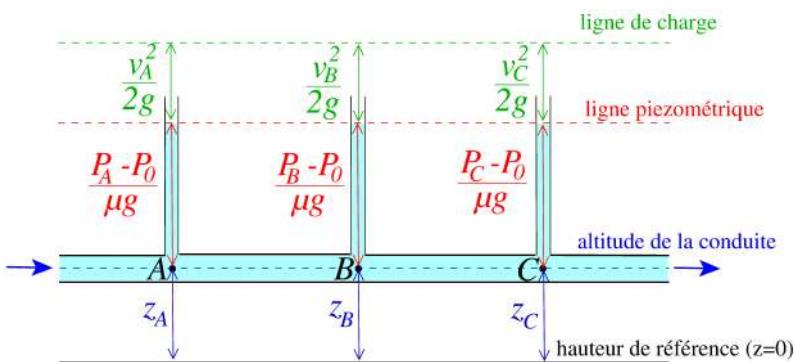
- soit en termes de hauteur  $H = \frac{P}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} + z$  ;
- soit en termes de pression  $P_{\text{tot}} = P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z$ .

À cause des dissipations dans l'écoulement (énergie thermique dissipée via les frottements internes et les frottements sur les conduites), l'égalité de Bernoulli n'est plus satisfaite, on observe alors une inégalité entre l'amont et l'aval :

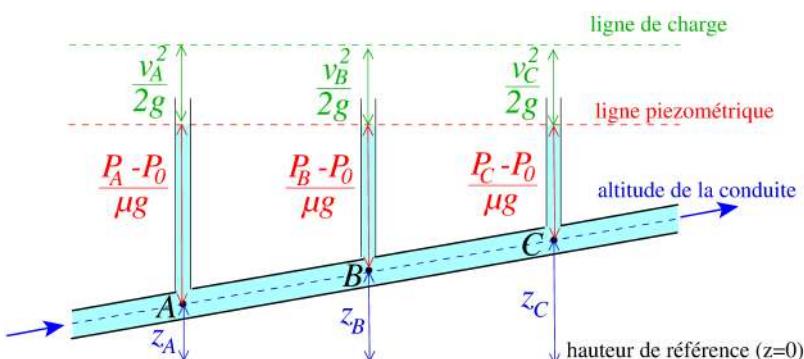
$$P_e + \frac{1}{2}\rho v_e^2 + \rho g z_e > P_s + \frac{1}{2}\rho v_s^2 + \rho g z_s \quad (5.27)$$

### III.2 Interprétation

\* Étudions une conduite de section constante, en régime stationnaire. En l'absence de perte de charge, l'observation à divers points de pression via des tubes verticaux contenant le même fluide, immobile, devrait permettre d'observer des niveaux identiques, impliquant que la pression est constante aux points  $A$ ,  $B$  et  $C$ . La droite passant par les différents niveaux s'appelle la **ligne piézométrique**. On peut également représenter la ligne de charge, correspondant à la somme, en terme de hauteur, de  $\frac{v^2}{2g} + z + \frac{P}{\rho g}$  (en l'occurrence on choisit ici de retrancher à la pression la pression atmosphérique  $P_0$ ) :



Conformément au théorème de Bernoulli, la ligne de charge est donc horizontale. Si on incline la conduite, la ligne de charge est toujours horizontale, tout comme la ligne piézométrique, conduisant à une diminution de la pression dans la conduite ( $P_C < P_A$ ) :



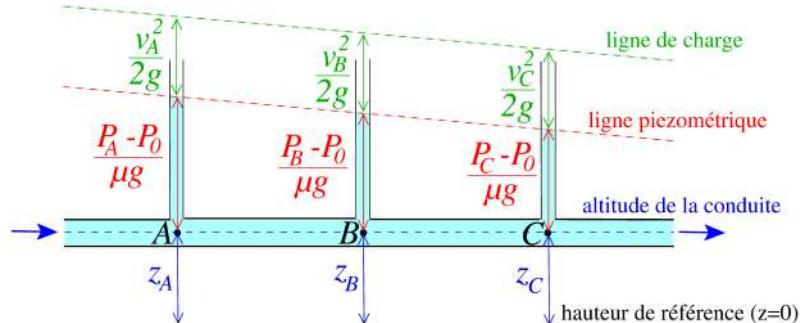
Prenons maintenant en compte la viscosité, et notons  $\Delta H > 0$  la perte de charge. La différence de charge entre les points extrêmes du tronçon où a lieu la perte de charge s'écrit :

$$\Delta H = \left( \frac{P_A}{\rho g} + \frac{v_A^2}{2g} + z_A \right) - \left( \frac{P_B}{\rho g} + \frac{v_B^2}{2g} + z_B \right) \quad (5.28)$$

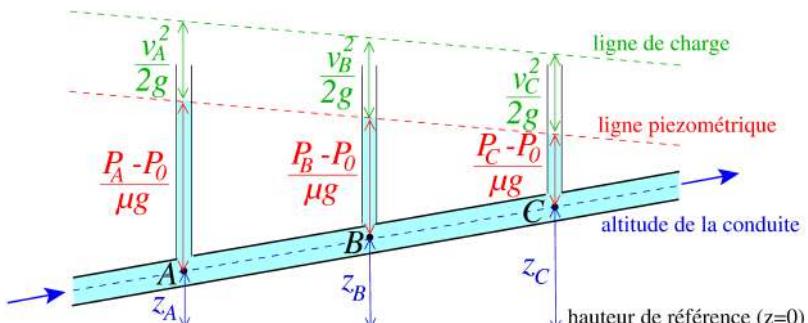
- \* Or, si la section est constante, l'incompressibilité impose  $v_A = v_B$ . Et en utilisant la relation de l'hydrostatique,  $P_A = P_{A'} + \rho g(z_{A'} - z_A)$  et  $P_B = P_{B'} + \rho g(z_{B'} - z_B)$ , avec  $P_{A'} = P_{B'} = P_0$ . Il vient finalement :

$$\Delta H = z_{A'} - z_{B'} \quad (5.29)$$

La perte de charge représente dans le cas d'une conduite d'altitude et de section constantes, la variation de hauteur entre  $A$  et  $B$  :



Le même raisonnement peut être fait lorsque la conduite est inclinée : la ligne piézométrique comme la ligne de charge restent identiques, et la pression diminue alors davantage dans la conduite inclinée qu'en l'absence de viscosité :



### III.3 Pertes de charge dans des dispositifs passifs

Les **pertes de charges régulières**, qui se manifestent dans des conduites cylindriques de section constante, sont calculables *via* la relation de Darcy couplée au diagramme de Moody (MF3) :

$$\Delta H_{\text{reg}} = \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (5.30)$$

On peut comprendre qualitativement la formule de Darcy : on souhaite introduire un paramètre homogène à une longueur : on compare l'énergie cinétique massique à l'énergie potentielle massique et linéique  $\frac{1}{2}\rho U^2/(\rho g) = \frac{U^2}{2g}$ , en notant  $U$  la vitesse débitante. Cependant, on constate expérimentalement que la perte de charge est proportionnelle à la longueur  $L$  de conduite : une solution consiste alors à multiplier par  $L/D$  pour rendre compte de cette observation :

$$\Delta H_{\text{reg}} \propto \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \quad (5.31)$$

Les **pertes de charges singulières**, qui sont dues à des singularités (coudes, changements de section), peuvent se mettre sous la forme :

$$\Delta H_{\text{sing}} = \zeta \frac{U^2}{2g} \quad (5.32)$$

avec  $\zeta$  un coefficient sans dimension dépendant de la singularité. Ici il n'est pas besoin de multiplier par  $L/D$ , comme la singularité est « ponctuelle ».

On peut ainsi généraliser le théorème de Bernoulli :

$$\Delta H = H_e - H_s = H_{\text{reg}} + H_{\text{sing}} = \lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2g} \zeta \frac{U^2}{2g} \quad (5.33)$$

$$* \qquad \Rightarrow P_s + \frac{1}{2} \rho v_s^2 + \rho g z_s - P_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e = -\rho g \Delta H = -\underbrace{\lambda \frac{L}{D} \frac{U^2}{2}}_{\text{régulière}} - \underbrace{\zeta \frac{\rho U^2}{2}}_{\text{singulière}} \quad (5.34)$$

en tenant compte des pertes de charges régulières et singulières.



Ne pas faire d'erreur de signe : il faut se rappeler que, toutes choses égales par ailleurs, la pression en aval est toujours inférieure ou égale à la pression en amont.

### III.4 Pertes de charge dans des dispositifs actifs

Dans le cas où il y a des éléments actifs (pièces mobiles), pour un écoulement parfait, incompressible, homogène et stationnaire, le premier principe en écoulement se traduit par :

$$\left[ \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right]_A^B = w_u \quad (5.35)$$

soit encore en termes de puissance :

$$* \qquad D_m \left[ \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right]_A^B = P_u \quad (5.36)$$

où  $P_u = D_m w_u$  est la puissance utile, encore appelée **puissance indiquée**.

Si l'écoulement n'est pas parfait, on peut alors inclure les pertes de charges dans le bilan précédent :

$$\left[ \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right]_A^B = w_u - g \Delta H \iff D_m \left[ \frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz \right]_A^B = P_u - D_m g \Delta H \quad (5.37)$$

#### Exercice

Considérons une pompe (altitude  $z = 0$ ) qui puise de l'eau au fond d'un puits de profondeur  $z = -h = 5$  m. La section du tuyau avant la pompe est de  $S = 100 \text{ cm}^2$ , et se réduit en sortie de la pompe à  $s = 10 \text{ cm}^2$ . En considérant un débit volumique de  $D_v = 10 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$ , déterminer la puissance de la pompe en régime stationnaire, sachant que la pression en sortie est de 2,5 bar. On négligera les pertes de charge.

Connaissant le débit volumique, on peut exprimer la vitesse du fluide en amont et en aval de la pompe :  $v_A = \frac{D_v}{S}$  et  $v_B = \frac{D_v}{s}$ . La pression en amont est de  $P_A = P_0 - \rho gh$  (vitesse constante le long du tuyau, en régime stationnaire), et celle en aval est  $P_B = 2,5 \text{ bar}$ . Ainsi un bilan de puissance entre l'entrée et la sortie de la pompe, supposées à une altitude constante, conduit à :

$$P_u = D_m \left( \frac{P_B - P_0}{\rho} + gh + \frac{1}{2} v_B^2 - \frac{1}{2} v_A^2 \right) = D_v \left( P_B - P_0 + \rho gh + \frac{1}{2} \rho D_v^2 \left[ \frac{1}{s^2} - \frac{1}{S^2} \right] \right) \quad (5.38)$$

soit numériquement  $P_u \sim 2,5 \text{ kW}$ , correspondant à un ordre de grandeur cohérent pour une puissance mécanique à fournir (en tenant compte du rendement de conversion, il y a des chances que l'on atteigne une puissance électrique de 3 kW).

## IV. Bilan de quantité de mouvement

Pour un système ouvert, il est impossible d'appliquer directement la loi de la quantité de mouvement. On se ramène alors à un système fermé pour lequel on évalue la quantité de mouvement à l'instant  $t$  et à l'instant  $t + dt$ . Les écoulements ne seront pas nécessairement stationnaires.

### IV.1 Exemple d'une fusée

Considérons ici un système de masse variable  $m(t)$  : une fusée qui éjecte des gaz brûlés de sorte à se propulser par « réaction ». On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre, supposé galiléen. On

suppose que les gaz brûlés sont éjectés avec un débit massique constant  $D_m$  avec une vitesse d'éjection  $\vec{u} = -ue_z$  constante, par rapport au référentiel de la fusée.

instant  $t$

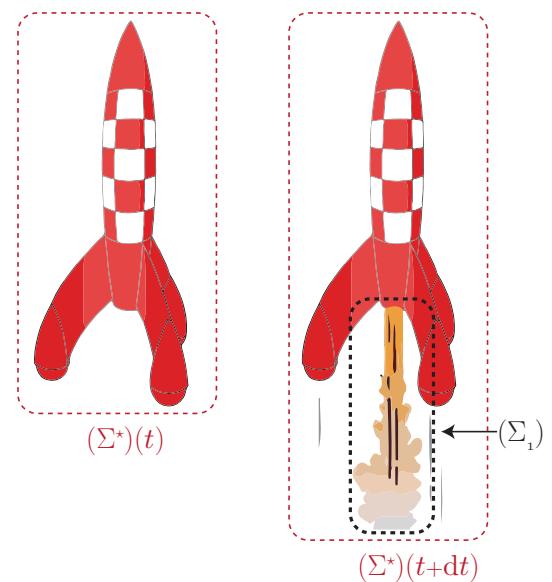
instant  $t+dt$

On note  $\vec{v}$  la vitesse de la fusée et de son contenu à l'instant  $t$ . À  $t = 0$ , on note  $m(0) = m_0$  et  $\vec{v}(0) = \vec{0}$ .

On définit alors un système fermé  $(\Sigma)^*$  :

- \* ▪ à l'instant  $t$ , constitué de la fusée et de son contenu de masse  $m(t)$  ;
- à l'instant  $t+dt$ , constitué de la fusée et de son contenu de masse  $m(t+dt) = m(t) - D_m dt$  ainsi que des gaz éjectés pendant  $dt$  de masse  $D_m dt$   $(\Sigma_1)$ .

S'agissant d'un système fermé, on peut lui appliquer la loi de la quantité de mouvement, à la limite où  $dt$  tend vers 0 :



$$\frac{\vec{p}^*(t+dt) - \vec{p}^*(t)}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \quad (5.39)$$

Exprimons la quantité de mouvement du système fermé à  $t$  et à  $t+dt$  :

- $\vec{p}^*(t) = m(t)\vec{v}(t)$  ;
- $\vec{p}^*(t+dt) = m(t+dt)\vec{v}(t+dt) + D_m dt(\vec{v}(t) + \vec{u})$

\* La différence entre ces deux quantités vaut :

$$\vec{p}^*(t+dt) - \vec{p}^*(t) = (m(t) - D_m dt)\vec{v}(t+dt) + D_m dt(\vec{v}(t) + \vec{u}) - m(t)\vec{v}(t) \quad (5.40)$$

$$= m(t)[\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t)] + D_m dt[\vec{v}(t+dt) - \vec{v}(t) + \vec{u}] \quad (5.41)$$

$$= m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} dt + D_m \vec{u} + \mathcal{O}(dt^2) \quad (5.42)$$

en effectuant le calcul à l'ordre 1 en  $dt$ . D'où en injectant dans la LQM et pour  $dt \rightarrow 0$  :

$$* m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} + D_m \vec{u} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \iff m(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}} - D_m \vec{u} \quad (5.43)$$

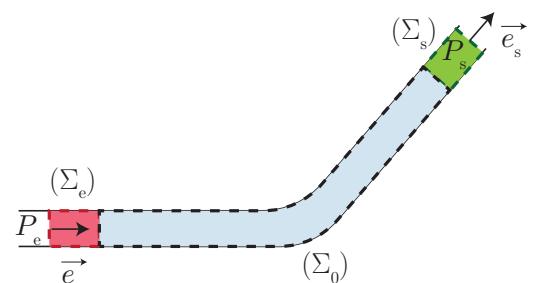
On peut alors identifier une force supplémentaire de poussée  $\vec{\Pi} = -D_m \vec{u} = +D_m u e_z$ , qui permet de faire décoller la fusée.

## IV.2 Calcul de la force exercée sur une conduite

Étudions une canalisation coudée, avec un écoulement parfait et incompressible en régime stationnaire. On cherche la résultante des forces qui s'exerce sur une portion de canalisation de section constante  $(\Sigma_0)$ . On construit donc un système fermé  $(\Sigma^*)$  tel que :

- à l'instant  $t$  il soit constitué de  $(\Sigma_0)$  et de  $(\Sigma_e)$  la quantité de fluide  $\delta m_e = D_m dt$  entrant avec une vitesse  $\vec{v}_e$  ;
- à l'instant  $t + dt$  il soit constitué de  $(\Sigma_0)$  et de  $(\Sigma_s)$  la quantité de fluide  $\delta m_s = \delta m_e = D_m dt$  sortant avec une vitesse  $\vec{v}_s$  ;

Les pressions sont notées  $P_e$  à l'entrée et  $P_s$  à la sortie. Elles sont uniformes sur les sections d'aire  $S$ . On note  $\vec{e}_e = \frac{\vec{v}_e}{\|\vec{v}_e\|}$  et  $\vec{e}_s = \frac{\vec{v}_s}{\|\vec{v}_s\|}$  les vecteurs unitaires orthogonaux aux sections à l'entrée et à la sortie.



## Exercice

Exprimer la quantité de mouvement pour ce système fermé aux instants  $t$  et  $t + dt$  et en exprimer la différence en régime stationnaire.

- à l'instant  $t$ ,  $\vec{p}^*(t) = \vec{p}_{\Sigma_0}(t) + D_m dt \vec{v}_e$  ;
- à l'instant  $t + dt$ ,  $\vec{p}^*(t + dt) = \vec{p}_{\Sigma_0}(t + dt) + D_m dt \vec{v}_s$  ;

En régime stationnaire,  $\vec{p}_{\Sigma_0}(t + dt) = \vec{p}_{\Sigma_0}(t)$ , d'où :

$$\vec{p}^*(t + dt) - \vec{p}^*(t) = D_m(\vec{v}_s - \vec{v}_e)dt = D_m v(\vec{e}_s - \vec{e}_e)dt \quad (5.44)$$

comme l'écoulement est incompressible, et la section est constante.

## Exercice

Appliquer alors la loi de la quantité de mouvement au système fermé, après avoir effectué un bilan des forces. En déduire l'expression de la force exercée par le fluide sur la canalisation coudée.

Sur le système fermé s'exercent le poids  $m\vec{g}$ , les forces de pressions  $P_e S \vec{e}_e - P_s S \vec{e}_s$  et la résultante des forces de la canalisation sur le fluide  $\vec{F}_{can \rightarrow fl} = -\vec{F}_{fl \rightarrow can}$ . Ainsi la LQM conduit à :

$$\frac{\vec{p}^*(t + dt) - \vec{p}^*(t)}{dt} = D_m v(\vec{e}_s - \vec{e}_e) = m\vec{g} + P_e S \vec{e}_e - P_s S \vec{e}_s - \vec{F}_{fl \rightarrow can} \quad (5.45)$$

d'où la force recherchée :

$$\vec{F}_{fl \rightarrow can} = m\vec{g} + P_e S \vec{e}_e - P_s S \vec{e}_s + D_m v(\vec{e}_e - \vec{e}_s) \quad (5.46)$$

Dans le cas où on néglige les effets de la pesanteur, l'application du théorème de Bernoulli à une ligne de courant entre l'entrée et la sortie implique  $P_e = P_s = P$ , et on peut simplifier l'expression de la force :

$$\vec{F}_{fl \rightarrow can} = (P + \rho v^2)S(\vec{e}_e - \vec{e}_s) \quad (5.47)$$

comme  $D_m = \rho v S$ .

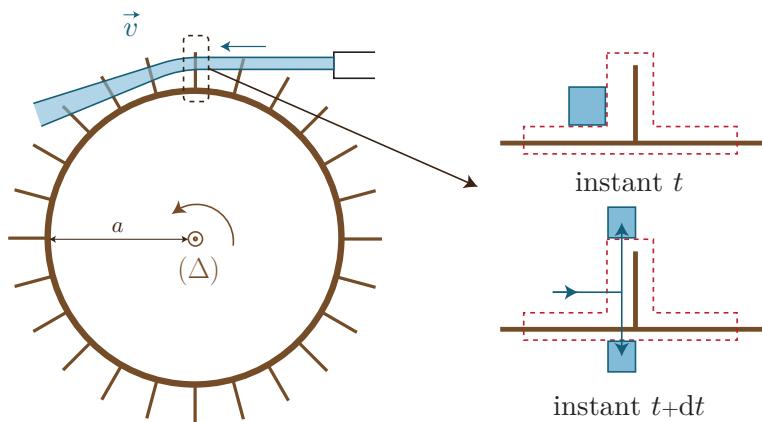
## V. Bilan de moment cinétique

À l'instar du bilan de quantité de mouvement, on peut appliquer le théorème du moment cinétique par rapport à un point  $O$  ou par rapport à un axe ( $\Delta$ ) à condition de définir un système fermé et de conduire un calcul de moment cinétique à l'instant  $t$  et à l'instant  $t + dt$ . Par exemple pour une rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ) pour un système fermé ( $\Sigma^*$ ) dans un référentiel galiléen :

$$\frac{L_{\Delta}^*(t + dt) - L_{\Delta}^*(t)}{dt} = \sum \mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_{ext}) \quad (5.48)$$

où on note  $L_{\Delta}^*$  le moment cinétique scalaire du système fermé par rapport à l'axe  $\Delta$ .

Une roue à aubes d'un moulin, consistant en une roue de rayon  $a$  surmontée d'aubes planes d'épaisseur  $e$ , est mise en rotation par un jet d'eau horizontal. Ce dernier possède un débit massique  $D_m$ , une vitesse  $v$  et est de diamètre faible devant l'épaisseur  $e$  de l'aube. On note  $\omega(t)$  la vitesse angulaire de la roue par rapport à l'axe ( $\Delta$ ), et  $J$  le moment d'inertie de la roue par rapport à cet axe.



En réalité, les turbines Pelton utilisées par exemple pour entraîner un alternateur de centrale hydroélectrique dans un barrage, ont une forme recourbée en demi-lune, de sorte à renvoyer l'eau vers l'arrière et augmenter son efficacité.

On va ici effectuer une simplification très grossière en considérant que l'eau arrive perpendiculairement à l'aube, et repart parallèlement à l'aube de chaque côté.

On peut alors définir un système fermé ( $\Sigma^*$ ) :

- \* ■ à l'instant  $t$ , la matière contenue dans la surface de contrôle (en pointillés), ainsi que la masse  $D_m dt$  qui va pénétrer dans la surface de contrôle pendant  $dt$  ( $D_m$  est le débit moyen reçu par l'aube) ;
- à l'instant  $t + dt$  la matière contenue dans la surface de contrôle ainsi que la masse  $D_m dt$  qui est sortie de la surface de contrôle pendant  $dt$

On évalue alors le moment cinétique scalaire du système fermé dans le référentiel terrestre :

- \* ■  $L_\Delta^*(t) = J\omega(t) + D_m dt av$  avec  $a + e/2 \approx a$  le bras de levier associé au jet d'eau ;
- $L_\Delta^*(t+dt) = J\omega(t+dt) + D_m dt a(\omega)$  comme la vitesse de la masse sortant de la surface de contrôle possède une vitesse  $a\omega \vec{e}_\theta \pm \vec{v}_\parallel$  dans le référentiel terrestre. La composante  $\vec{v}_\parallel$  ne contribue pas au moment cinétique car son prolongement passe par l'axe de rotation, donc le bras de levier est nul.

Ainsi en appliquant le théorème du moment cinétique scalaire au système fermé dans le référentiel galiléen, en considérant que l'aube est soumise à un couple résistant  $-\Gamma$  :

$$\frac{J\omega(t+dt) + D_m dt a(\omega) - J\omega(t) - D_m dt av}{dt} = -\Gamma \iff J \frac{d\omega}{dt} = -\Gamma + D_m a(v - a\omega) \quad (5.49)$$

où l'on peut introduire un moment scalaire de « poussée »  $\Gamma_p = D_m a(v - a\omega)$ .  
On peut alors la réécrire sous forme canonique :

$$\frac{J}{D_m a^2} \frac{d\omega}{dt} + \omega = \frac{v}{a} - \frac{\Gamma}{D_m a^2} \quad (5.50)$$

La rotation ne peut avoir lieu que si  $\frac{v}{a} - \frac{\Gamma}{D_m a^2} > 0$ , c'est-à-dire pour un couple résistant de norme inférieure à  $\Gamma_{\lim} = D_m a v$ . On aboutit alors à une équation différentielle classique d'ordre 1.

# Exercices

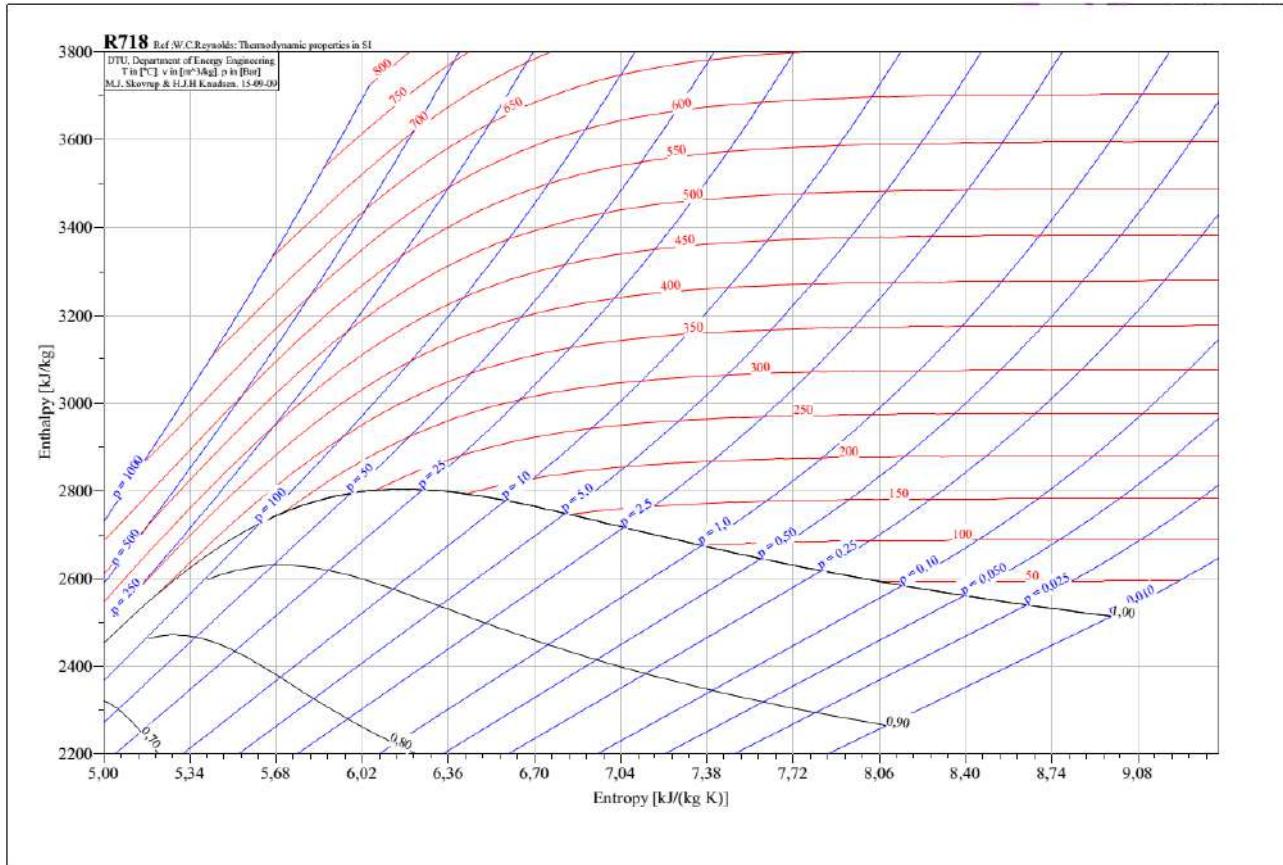
## Application des deux principes aux machines en écoulement

\*\*

### 5. 1 Compresseur avec un gaz réel

De la vapeur d'eau à  $T_1 = 150^\circ\text{C}$ , circulant dans un compresseur calorifugé, est comprimé de  $P_1 = 1 \text{ bar}$  à  $P_2 = 10 \text{ bar}$ . On néglige toute variation d'énergie mécanique du fluide.

- On suppose dans un premier temps que la vapeur d'eau est un gaz parfait de coefficient  $\gamma = 1,3$ , et que la compression est réversible. Déterminer la température finale et le travail indiqué massique reçu lors de la compression.
- On suppose toujours la compression réversible mais on tient compte du comportement réel de la vapeur d'eau, donné par le diagramme de Mollier ci-après. Déterminer graphiquement la température finale et le travail indiqué massique. Commenter.
- En pratique, on mesure une température de sortie  $T'_2 = 550^\circ\text{C}$  pour le compresseur réel. En déduire graphiquement la variation d'enthalpie massique et le travail indiqué massique. Commenter.



### 5. 2 Compresseur

Un compresseur amène de l'air de l'état 1 atmosphérique ( $P_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $T_1 = 300 \text{ K}$ ) jusqu'à l'état 2 ( $P_2 = 6 \text{ bar}$ ,  $T_2$ ) de manière adiabatique.

On note  $\mathcal{P} = 1,5 \text{ kW}$  la puissance du moteur qui l'entraîne et  $D_m = 6,5 \text{ g.s}^{-1}$  le débit massique. On donne la capacité thermique massique à pression constante  $c_p = 1,0 \text{ kJ.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ , la masse molaire  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$  et  $\gamma = 1,4$  pour l'air, assimilé à un gaz parfait.

- Calculer la température  $T_2$ .

2. Calculer la variation d'entropie massique  $\Delta s$  entre les états 1 et 2.
  3. Calculer l'entropie créée par unité de temps  $\frac{\delta S_c}{dt}$ .
  4. Quelle serait la température et le débit si l'évolution de l'air était isentropique ?
- 

1. On applique le premier principe en écoulement :

$$D_m \Delta h = \mathcal{P} \iff D_m c_p (T_2 - T_1) = \mathcal{P} \iff T_2 = T_1 + \frac{\mathcal{P}}{D_m c_p} = 531 \text{ K} \quad (5.51)$$

2. Utilisons l'identité thermodynamique pour obtenir la variation d'entropie massique :

$$dS = mc_p \frac{dT}{T} - nR \frac{dP}{P} \implies S_2 - S_1 = nc_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - nR \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) \quad (5.52)$$

soit la variation d'entropie massique :

$$\Delta s = c_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) - \frac{R}{M} \ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = 57,3 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1} \quad (5.53)$$

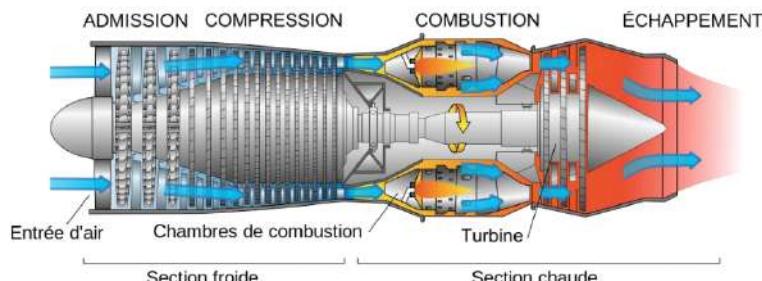
3. On obtient alors l'entropie créée par unité de temps en utilisant le second principe pour une transformation adiabatique, où :

$$dS = \delta S_c \implies \frac{\delta S_c}{dt} = D_m \Delta s = 0,37 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{s}^{-1} \quad (5.54)$$

4. Si l'évolution était isentropique, la température en sortie vérifierait la loi de Laplace :

$$T'_2 = T_1 \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{1-\frac{1}{\gamma}} = 501 \text{ K} \implies D_m = \frac{\mathcal{P}}{c_p(T'_2 - T_1)} = 7,5 \text{ g}\cdot\text{s}^{-1} \quad (5.55)$$

### 5. 3 Rendement d'une turbine à gaz idéale

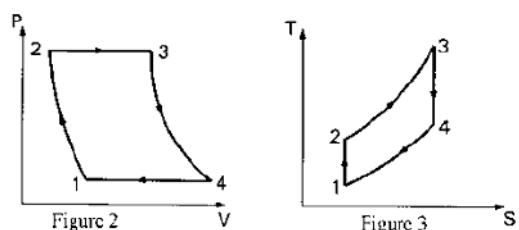
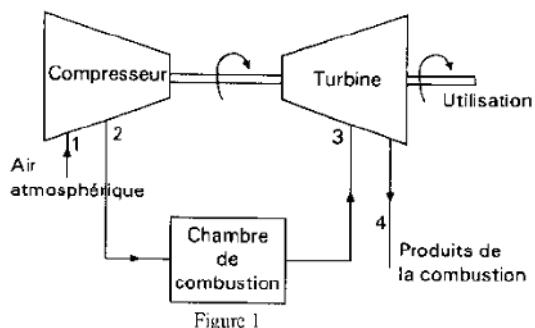


Le schéma de fonctionnement ci-contre schématisé le principe de fonctionnement d'une turbine à gaz. L'air à l'entrée du compresseur est à la température  $T_1 = 18^\circ\text{C}$  et sa pression est  $P_1 = 1 \text{ bar}$ .

À la sortie du compresseur, la température est  $T_2$  et la pression est  $P_2 = 9 \text{ bars}$ . L'allure du cycle est représenté par les figures 2 et 3.

La température maximale atteinte par le gaz au cours du cycle est  $T_3 = 1000^\circ\text{C}$ .

Le gaz est assimilable à de l'air de masse molaire  $29 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ , supposé parfait,  $\gamma = 1,4$  et  $c_p = 1,0 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ . On néglige toutes variations d'énergies potentielles et cinétiques du gaz.



1. Déterminer la pression et la température du gaz aux points 2, 3 et 4.
2. Dans le cas d'un fonctionnement idéal déterminer pour un cycle le travail massique  $w_c$  reçu par le gaz de la part du compresseur et le travail massique  $w_{Tu}$  fourni par la turbine par unité de masse de gaz.

3. Exprimer le rendement de l'installation en fonction des températures puis en fonction de  $P_1$ ,  $P_2$ , et  $\gamma$ .

1.  $P_3 = P_2$  et  $P_1 = P_4$ . Pour les températures, on utilise la loi de Laplace, ce qui permet d'obtenir  $T_2 = T_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1-1/\gamma} = 545 \text{ K}$  et  $T_4 = 679 \text{ K}$ .

2. Par application du premier principe en écoulement,  $w_c = c_p(T_2 - T_1) = 254 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  et  $w_{Tu} = c_p(T_4 - T_3) = -594 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

3. Le rendement vaut, avec le coût de combustion  $q_{\text{comb}} = c_p(T_3 - T_2)$  :

$$\eta = \frac{-(w_c + w_{Tu})}{q_{\text{comb}}} = \frac{c_p(T_1 - T_2 - T_4 + T_3)}{c_p(T_2 - T_3)} = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2} \quad (5.56)$$

$$= 1 + \frac{T_1 - T_3 \left( \frac{P_1}{P_2} \right)^{1-1/\gamma}}{T_3 - T_1 \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1-1/\gamma}} = 1 - \left( \frac{P_2}{P_1} \right)^{1/\gamma-1} = 0,47 \quad (5.57)$$

## 5. 4 Tuyère

Dans une tuyère, le gaz subit une détente spontanée dans une conduite de forme bien choisie. Au cours de cette évolution, l'énergie cinétique du fluide s'accroît fortement, on néglige donc l'énergie cinétique d'entrée. La variation d'énergie potentielle de pesanteur est négligeable. Les parois de la tuyère sont fixes et l'évolution est suffisamment rapide pour être adiabatique.



1. Déterminer l'expression de la vitesse de sortie de la tuyère en fonction des enthalpies massiques d'entrée et de sortie.
2. La forme de la tuyère est adaptée pour minimiser les frottements et se rapprocher d'une transformation réversible. Déterminer dans ce cas la température et la vitesse de sortie d'un gaz parfait diatomique de capacité thermique massique à pression constante  $c_p = 10^3 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  sachant qu'à l'entrée, on a  $P_e = 1,5 \text{ bar}$  et  $T_e = 900 \text{ K}$ , et en sortie :  $P_s = 1 \text{ bar}$ .

## 5. 5 Turbo-réacteurs

On étudie le fonctionnement de réacteurs en régime permanent. La fonction d'un turboréacteur est de transformer l'énergie thermique fournie à l'air lors d'une combustion en énergie cinétique. On suppose lors de tout le problème que :

- l'air est un gaz parfait de capacité thermique massique à pression constante  $c_p = 1 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  constante et de coefficient  $\gamma = 1,4$ ;
- la variation d'énergie potentielle est négligeable ; l'énergie cinétique est négligeable sauf à la sortie de la tuyère ;
- le débit massique d'air vaut  $D_m = 1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$  ;
- le compresseur aspire l'air ambiant de pression  $P_1 = 1 \text{ bar}$  et de température  $T_1 = 288 \text{ K}$  ;
- les évolutions à l'intérieur du compresseur, de la turbine et de la tuyère sont adiabatiques réversibles ;
- les évolutions dans les chambres de combustion sont isobares.

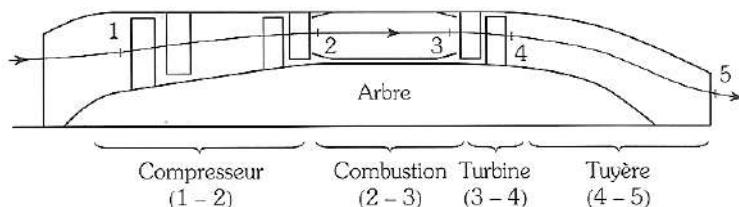
Le schéma de principe d'un turboréacteur mono-flux, mono-corps est donné ci-dessous.

Le compresseur aspire l'air ambiant. Après compression, l'air est chauffé dans la chambre de combustion jusqu'à la température  $T_3 = 1250 \text{ K}$ .

Après détente partielle dans la turbine, l'air est envoyé dans la tuyère (qui ne comporte aucune partie mobile) où la détente s'effectue jusqu'à la pression ambiante  $P_5 = 1 \text{ bar}$ .

Le compresseur est uniquement entraîné par la turbine, qui lui transmet intégralement la puissance mécanique que lui fournit l'écoulement.

On donne le taux de compression du compresseur  $P_2/P_1 = 6,15$ .



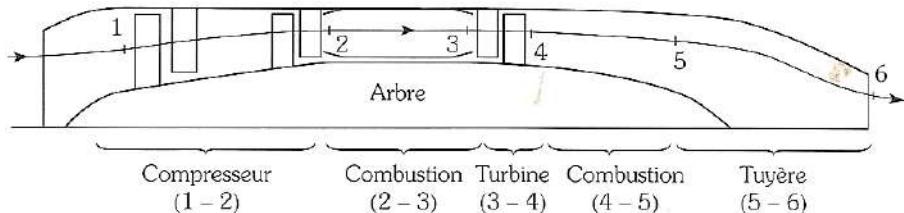
**1.** Déterminer :

- la température  $T_2$  (sortie du compresseur) et le travail indiqué massique de compression  $w_{ic}$  ;
- la température  $T_4$  et la pression  $P_4$  à la sortie de la turbine ;
- la température  $T_5$  et la vitesse de l'air  $c_5$  à la sortie de la tuyère.

**2.** Déterminer la quantité de chaleur massique  $q_{23}$  fournie à l'air lors de la combustion.

**3.** Définir le rendement  $\eta$  de ce turboréacteur (quelle est son utilité ?), et en calculer la valeur numérique.

Le schéma de principe d'un turboréacteur monoflux, mono-corps à post-combustion est donné ci-dessous. La situation est identique à la précédente, mais on insère une seconde chambre de combustion entre la turbine et la tuyère. Lors de cette combustion, l'air est à nouveau chauffé, jusqu'à la température  $T_5 = 1930$  K. La détente s'effectue ensuite dans la tuyère jusqu'à la pression ambiante  $P_6 = 1$  bar. Comme précédemment, la turbine entraîne le compresseur, le taux de compression est identique  $P_2/P_1 = 6,15$  et la température de fin de combustion aussi  $T_3 = 1250$  K.



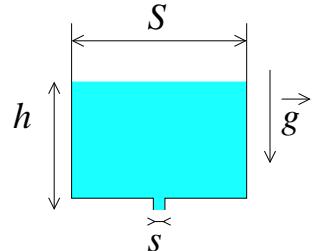
**4.** Déterminer le nouveau rendement de ce turboréacteur et conclure.

### Théorème de Bernoulli

## 5. 6 Durée de vidange d'un réservoir

Un réservoir a une surface libre d'aire  $S = 1 \text{ m}^2$ . Il est initialement rempli d'une hauteur  $h_0 = 0,8 \text{ m}$  de liquide. À l'instant  $t = 0$ , on ouvre au fond du réservoir un orifice de section  $s = 2 \text{ cm}^2$ .

On admet que l'on peut considérer le régime comme quasi-stationnaire.



1. Déterminer la vitesse de vidange initiale  $v_0$  en supposant que la vitesse est nulle à la surface.
2. Quelle correction faut-il apporter à  $v_0$  pour tenir compte du mouvement de la surface libre ? Conclure.
3. Quel est le débit volumique initial  $D_0$  ? Quel serait la durée  $\tau$  de la vidange si celle-ci se faisait à débit constant ?
4. Établir une équation différentielle décrivant l'évolution de  $h(t)$ . Résoudre cette équation et en déduire la durée  $T$  de la vidange. Dans les faits, le temps trouvé est plus long. Expliquer l'origine de la différence.

- 
1. Appliquons le théorème de Bernoulli à une ligne de courant, entre un point de la surface libre et un point de l'orifice de sortie :

$$P_e + 0 + \rho g z_e = P_s + \frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho g z_s \quad (5.58)$$

soit avec  $P_e = P_0 = 1 \text{ bar} = P_s$  en supposant que l'orifice de sortie débouche directement sur l'air ambiant, et en notant  $z_e - z_s = h_0$  :

$$\frac{1}{2} \rho v_0^2 = \rho g h \implies v_0 = \sqrt{2gh_0} = 4,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \quad (5.59)$$

2. Si on veut tenir compte du mouvement de la surface libre, on exprime la vitesse de sortie en fonction de la vitesse d'entrée, via la conservation du débit volumique (écoulement incompressible) :

$$v_e S = v'_0 s \implies \frac{1}{2} \rho v_e^2 + \rho g z_e = \frac{1}{2} \rho v'_0^2 + \rho g z_s \iff v'_0^2 \left( 1 - \frac{s^2}{S^2} \right) = \rho g h \iff v'_0 = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{s^2}{S^2}}} \quad (5.60)$$

Or le terme  $\sqrt{1 - \frac{s^2}{S^2}} \simeq 1 - 2 \cdot 10^{-8}$  est très proche de 1, donc la correction est peu significative ici, on néglige donc dans toute la suite la vitesse de la surface libre (d'où l'hypothèse de quasi-stationnarité).

3. Le débit volumique initial vaut  $D_0 = v_0 s = 8,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Si la vidange se faisait à débit constant, le temps de vidange vaudrait :

$$\tau = \frac{V}{D_v} = \frac{h_0 S}{D_v} = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{h_0}{2g}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ second} \quad (5.61)$$

soit environ 17 min.

4. En réalité, la hauteur d'eau diminuant, le débit volumique décroît. En écrivant l'évolution de la hauteur :

$$S \frac{dh}{dt} = -D_v \iff \frac{dh}{dt} = -\frac{s}{S} \sqrt{2gh(t)} \iff \frac{dh}{\sqrt{h(t)}} = -\frac{s}{S} \sqrt{2g} dt \quad (5.62)$$

conduisant, après intégration entre l'instant initial et l'instant final, à :

$$2\sqrt{h_0} = \frac{s}{S} \sqrt{2g} T \iff T = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = 2\tau \quad (5.63)$$

tandis que la hauteur au cours du temps s'obtient par intégration entre  $t = 0$  et  $t$  :

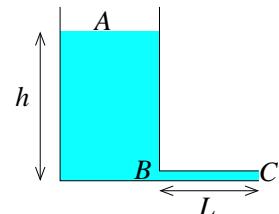
$$\sqrt{h(t)} = \sqrt{h_0} - \frac{s}{S} \sqrt{g/2} t \quad (5.64)$$

Dans les faits, la section réelle de l'écoulement au niveau de l'embouchure est plus faible, donc le temps plus élevé.

## 5. 7 Théorème de Torricelli et approximation de l'écoulement parfait

Un réservoir a une section  $S$ , la hauteur d'eau est  $h$ . Le tuyau de vidange a une longueur  $L$  et un rayon  $r$ . On suppose l'écoulement quasi-stationnaire.

L'écoulement est supposé parfait dans le réservoir, notamment le long de la ligne de courant  $AB$  où  $B$  est le centre de la section d'entrée du tuyau.



En revanche, on tient compte de la viscosité  $\eta$  de l'eau pour l'écoulement dans le tuyau de rayon  $r$ .

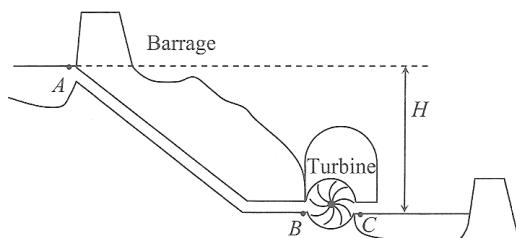
1. Montrer que la vitesse maximale dans le tuyau vaut  $v = \frac{(P_B - P_C)r^2}{4\eta L}$ .
  2. À quelle condition sur  $r$  le théorème de Torricelli est-il valable ?
- A.N. :  $\eta = 10^{-3}$  Pl,  $\mu = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $L = 1 \text{ cm}$ ;  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  et  $h = 10 \text{ cm}$ .

## 5. 8 Étude simplifiée d'un barrage

Lors de la phase de vidange du barrage de Grand'Maison, l'eau s'écoule dans une conduite forcée reliant le lac de retenue en amont de Grand'Maison à la retenue du Verney en aval. La conduite a une longueur de 1450 m. Elle se termine par un coude ramenant à l'horizontal pour alimenter une turbine Pelton qui assure la conversion d'une partie de l'énergie potentielle de l'eau en énergie cinétique de rotation de la turbine. La conduite a un diamètre constant de 3 mètres et se caractérise par une perte de charge  $\Delta h$  exprimée en hauteur d'eau. La vitesse dans la conduite est  $v = 3,6 \text{ m.s}^{-1}$ .

La viscosité cinématique de l'eau dans la conduite est prise égale à  $\eta = 1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Pa.s}$ , sa masse volumique est  $\rho = 1,010^3 \text{ kg.m}^{-3}$ . La hauteur de chute est prise égale à  $H = 922 \text{ mètres}$ .

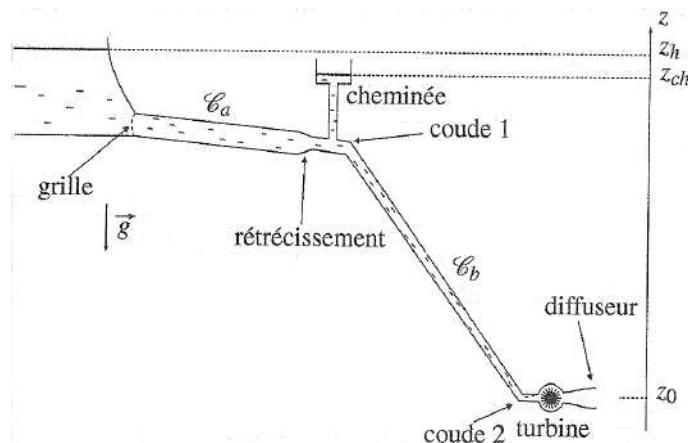
1. Estimer les pertes de charge régulières par unité de longueur de la conduite sachant que sa rugosité absolue  $\varepsilon$  est de l'ordre de 1 mm.
2. Calculer la perte de charge en hauteur d'eau  $\Delta h_{\text{coude}}$  provoquée par le passage du coude terminal avant l'entrée dans la turbine Pelton. Le coefficient de perte de charge singulière sera pris égal à  $K \simeq 1,5$ . Commenter.
3. En un point  $A$  à la surface de la retenue amont, la vitesse est supposée nulle. Exprimer la pression en hauteur d'eau équivalente  $\frac{P_B}{\rho g}$  à l'entrée de la turbine. Application numérique.



4. On suppose pour simplifier qu'en sortie de la Pelton au point  $C$ , la pression est égale à la pression atmosphérique et la vitesse est négligeable. En considérant que la Pelton a un rendement de 75 %, quelle est la puissance disponible sur l'arbre de la turbine ?

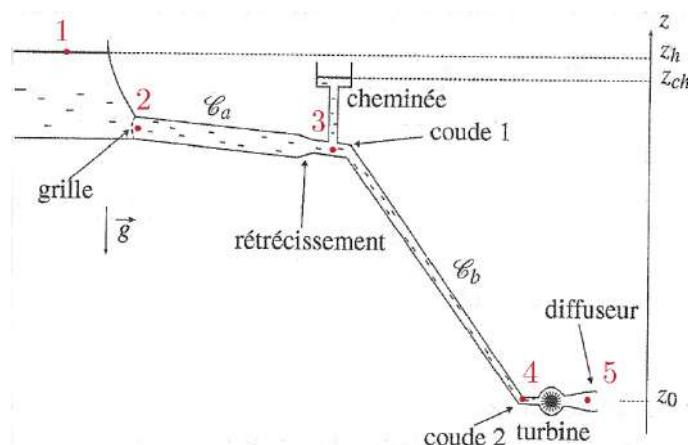
## 5. 9 Micro-centrale hydraulique

On considère une microcentrale constituée d'une retenue d'eau, d'une première conduit  $\mathcal{C}_a$  peu inclinée, d'une cheminée d'équilibre, d'une seconde conduite  $\mathcal{C}_b$ , très inclinée, puis d'une turbine.



On note  $P_0$  la pression atmosphérique, aussi bien au niveau de la retenue d'eau qu'au niveau de la sortie de la turbine. La conduite  $\mathcal{C}_a$  est de longueur  $L_a = 60\text{ m}$ , de diamètre intérieur  $D_a = 0,30\text{ m}$ , et l'eau y a une vitesse débitante  $U_a = 1,2\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . La conduite  $\mathcal{C}_b$  est de longueur  $L_b = 87\text{ m}$ , de diamètre intérieur  $D_b = 0,20\text{ m}$ , et l'eau y a une vitesse débitante  $U_b = 2,7\text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . Pour la grille, on a un coefficient de perte de charge singulière  $\zeta_g = 1,75$ . Pour le rétrécissement,  $\zeta_r = 0,079$  (ramené à la vitesse débitante de la conduite  $\mathcal{C}_b$ ). Pour les deux coudes,  $\zeta_1 = 0,47$  et  $\zeta_2 = 0,55$ . À la sortie de la turbine, avant le diffuseur, la section est la même que dans la conduite  $\mathcal{C}_b$ . Son diamètre d'entrée est  $D_d$  et son diamètre de sortie  $D_d = 0,3\text{ m}$ . Son coefficient de perte de charge singulière ramené à la petite section est  $\zeta_d = 0,18$ . On donne la différence d'altitude entre la retenue d'eau et la turbine :  $z_h - z_0 = 89\text{ m}$ . On prend pour l'eau  $\mu = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  et  $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Pl}$ . On donne  $g = 9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ .

1. Déterminer le débit volumique  $D_v$  dans les conduites. Peut-on utiliser la loi de Hagen-Poiseuille ? On prendra pour la suite pour les conduites les coefficients de pertes de charge régulière  $\lambda_a = 15 \cdot 10^{-3}$  et  $\lambda_b = 16 \cdot 10^{-3}$ .
2. Compte tenu des différentes données, déterminer  $z_h - z_{ch}$ .
3. La turbine a un rendement  $\eta_t = 0,82$ . Déterminer la puissance mécanique récupérable sur son arbre.
4. Quel est le rôle du diffuseur ?



1. En régime stationnaire (ou au moins quasi-stationnaire), le débit volumique d'eau est constant, et se calcule indifféremment dans chaque conduite :

$$D_v = U_a \frac{\pi D_a^2}{4} = U_b \frac{\pi D_b^2}{4} = 85 \text{ L}\cdot\text{s}^{-1} \quad (5.65)$$

En calculant le nombre de Reynolds dans ces deux conduites, on trouve  $Re \sim 3,6 \cdot 10^5$  pour  $\mathcal{C}_a$  et  $Re \sim 5,4 \cdot 10^5$  pour  $\mathcal{C}_b$ . Avec un écoulement turbulent, la loi de Hagen-Poiseuille n'est pas utilisable.

2. Au niveau de la cheminée, on peut utiliser la loi de l'hydrostatique entre la surface de la cheminée et le coude 1 (continuité de la pression verticale entre la zone statique et dynamique) :

$$P_0 + \rho g z_{ch} = P_3 + \rho g z_3 \quad (5.66)$$

Il faut donc déterminer l'expression de  $P_3$ , en utilisant la connaissance des vitesses débitantes, pertes de charges. En écrivant le terme de Bernoulli entre 1 et 3 (vitesse quasi-nulle en 1) :

$$P_3 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 + \rho g z_3 - P_0 - \rho g z_h = -\frac{\rho U_a^2}{2} \left( \zeta_g + \lambda_a \frac{L_a}{D_a} \right) - \frac{\rho U_b^2}{2} \zeta_r \quad (5.67)$$

d'où en injectant la relation contenant  $z_{ch}$  :

$$P_0 + \rho g (z_{ch} - z_h) + \frac{1}{2} \rho v_3^2 - P_0 = -\frac{\rho U_a^2}{2} \left( \zeta_g + \lambda_a \frac{L_a}{D_a} \right) - \frac{\rho U_b^2}{2} \zeta_r \quad (5.68)$$

$$\Rightarrow z_h - z_{ch} = \frac{U_a^2}{2g} \left( \zeta_g + \lambda_a \frac{L_a}{D_a} \right) + \frac{U_b^2}{2g} (\zeta_r + 1) = 75 \text{ cm} \quad (5.69)$$

3. On réitère le bilan d'énergie jusqu'au point 5 repéré sur le schéma :

$$P_5 + \frac{\rho v_5^2}{2} + \rho g z_0 - P_1 - \rho g z_h = -\frac{\rho U_a^2}{2} \left( \zeta_g + \lambda_a \frac{L_a}{D_a} \right) - \frac{\rho U_b^2}{2} \left( \zeta_r + \lambda_b \frac{L_b}{D_b} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_d \right) - \frac{\mathcal{P}_m}{\eta_t D_v} \quad (5.70)$$

en notant  $\mathcal{P}_m$  la puissance mécanique reçue par la turbine (d'où le moins). Par conservation du débit,  $v_5 = U_b \frac{D_b}{D_d}$ , et  $P_5 = P_0$  d'où finalement :

$$\mathcal{P}_m = \eta_t D_v \rho \left( g(z_h - z_0) - \frac{\rho U_a^2}{2} \left( \zeta_g + \lambda_a \frac{L_a}{D_a} \right) - \frac{\rho U_b^2}{2} \left( \zeta_r + \lambda_b \frac{L_b}{D_b} + \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_d + \frac{D_b^4}{D_d^4} \right) \right) = 58 \text{ kW} \quad (5.71)$$

4. Le diffuseur permet de ralentir l'eau à la sortie de la turbine, ce qui a pour conséquence d'augmenter la puissance mécanique reçue par la turbine. L'effet est amoindri par une perte de charge due à l'élargissement, mais qui reste modeste comparativement au gain sur la vitesse ( $\frac{D_b^4}{D_d^4} + \zeta_d = 0,38 < 1$ ).

## 5. 10 Vase percé

On considère un vase cylindrique de hauteur  $H$  rempli à ras-bord d'un liquide. La partie supérieure du vase est ouverte à l'air libre, l'épaisseur du fond est négligeable et il est posé sur une table de sorte que son axe de révolution soit vertical. Trois petits orifices ont été effectués dans le vase, l'un à la distance  $h_1 = H/4$  du fond du vase, le deuxième à la distance  $h_2 = H/2$ , le troisième à la distance  $h_3 = 3H/4$  et on les ouvre simultanément à  $t = 0$ . On néglige tout effet de frottement ou de viscosité.



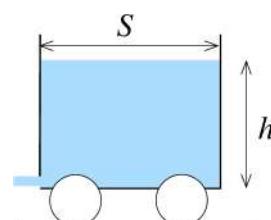
Que peut-on dire des portées  $d_1$ ,  $d_2$ , et  $d_3$  des jets au niveau de la table, observés peu après l'ouverture des orifices ?

## Bilan de quantité de mouvement et de moment cinétique

## 5. 11 Chariot fuyant

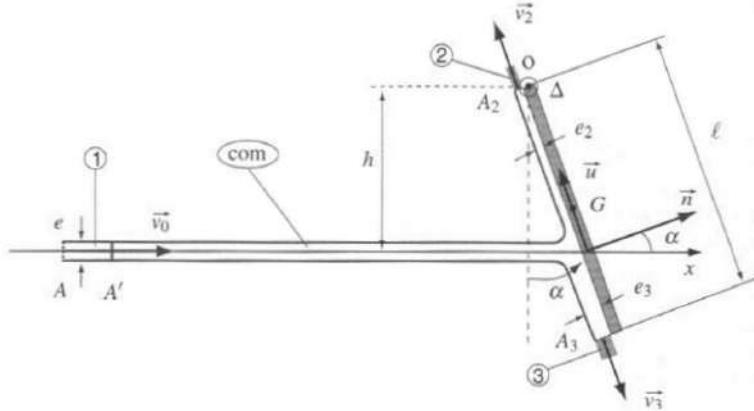
Un récipient rempli d'eau est posé sur un chariot libre de rouler sur un support horizontal. La hauteur initiale de l'eau est  $h_0$ . En bas du récipient est percé un petit trou de section  $s$  très petite devant la section  $S$  du récipient.

Établir l'équation du mouvement du chariot. On précisera les approximations effectuées.



## 5.12 Clapet à eau

Soit une plaque de masse  $M$ , de largeur  $\ell$  et de longueur  $L$ , mobile autour de l'axe horizontal  $\Delta$ , la liaison étant parfaite. Sous l'action d'un jet d'eau parallélépipédique d'épaisseur  $e$  et de largeur  $L$ , elle s'incline d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale. On néglige le poids du fluide et on se place en régime stationnaire. L'eau est considérée comme un fluide parfait, incompressible, de masse volumique  $\mu$ . En arrivant sur la plaque, le jet d'eau se sépare en deux parties, l'une vers le haut d'épaisseur  $e_2$ , l'autre vers le bas d'épaisseur  $e_3$ . Le jet d'eau est à la distance  $h$  de l'axe de rotation  $\Delta$  de la plaque.

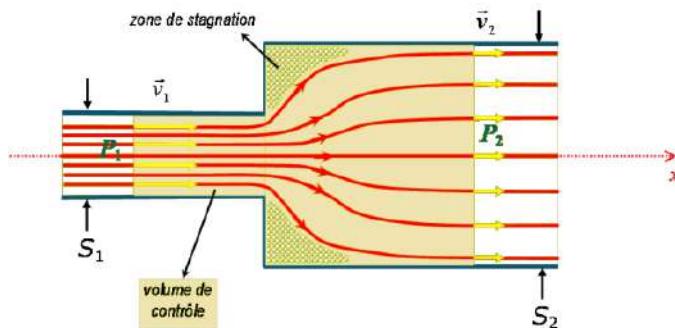


1. Déterminer l'angle d'équilibre  $\alpha$ .
2. Exprimer les épaisseurs des jets  $e_2$  et  $e_3$ . Interpréter.

## 5.13 Perte de charge singulière dans un évasement

Le but de cet exercice est d'évaluer le coefficient de pertes de charge singulière lorsqu'une canalisation change brutalement de section. On ne considérera pas les pertes de charge régulières et on néglige la pesanteur.

L'écoulement est permanent et incompressible. La masse volumique du fluide est  $\mu = \text{cte}$ .



On note  $P_1, S_1, v_1$  les pressions, sections, vitesse à l'entrée,  $P_2, S_2, v_2$  à la sortie.

L'écoulement fait apparaître des zones de stagnation dans lesquelles on considérera que la vitesse est nulle.

1. On admet que la pression dans les zones de stagnation est proche de la pression d'entrée  $P_1$ . Montrer que la résultante des forces de pression s'exerçant sur le volume de contrôle peut s'écrire  $\vec{F}_p = (P_1 - P_2)S_2 \vec{e}_x$ .
2. En faisant un bilan de quantité de mouvement, déterminer une autre expression de cette force en fonction des vitesses et sections d'entrée et de sortie et de la masse volumique  $\mu$ .
3. Déterminer la perte de charge en fonction de la vitesse d'entrée  $v_1$  et des sections d'entrée et de sortie  $S_1$  et  $S_2$ .

- 
1. Le volume de contrôle est soumis à une résultante des forces de pression uniquement horizontale, les forces de pression verticales s'annulant deux à deux. Il reste alors

$$\vec{F}_p = P_1 S_1 \vec{e}_x + P_1 (S_2 - S_1) \vec{e}_x - P_2 S_2 \vec{e}_x = (P_1 - P_2) S_2 \vec{e}_x \quad (5.72)$$

2. En considérant un système fermé usuel (à  $t$  volume de contrôle + entrant pendant  $dt$ , à  $t + dt$  volume de contrôle + ce qui sort pendant  $dt$ ), on peut écrire un bilan de quantité de mouvement en régime permanent :

$$\vec{p}(t + dt) - \vec{p}(t) = \delta m_2 \vec{v}_2 - \delta m_1 \vec{v}_1 = \mu (v_2^2 S_2 - v_1^2 S_1) dt \vec{e}_x \quad (5.73)$$

3. En appliquant la loi de la quantité de mouvement, il vient :

$$\frac{\vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t)}{dt} = \vec{F}_p \implies \mu(v_2^2 S_2 - v_1^2 S_1) = (P_1 - P_2)S_2 \quad (5.74)$$

puis en utilisant la conservation du débit volumique en régime permanent,  $v_2 S_2 = v_1 S_1$ , conduisant à :

$$P_1 - P_2 = \mu v_1^2 \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} - \frac{S_1}{S_2} \right) \quad (5.75)$$

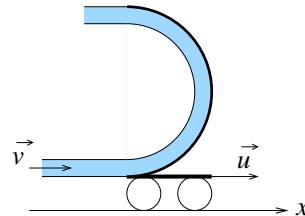
En écrivant enfin la différence entre la pression totale à l'entrée et à la sortie :

$$\Delta P_c = P_1 + \frac{1}{2}\mu v_1^2 - P_2 - \frac{1}{2}\mu v_2^2 = \frac{1}{2}\mu v_1^2 \left( \frac{S_1^2}{S_2^2} + 1 - 2\frac{S_1}{S_2} \right) = \frac{\mu v_1^2}{2} \left( 1 - \frac{S_1}{S_2} \right)^2 \quad (5.76)$$

## 5. 14 Propulsion d'un chariot à auget

Un chariot de masse  $m$  possède une rampe demi-circulaire de rayon  $R$  sur laquelle on envoie un jet d'eau de section  $S$  et de vitesse  $\vec{v} = v \vec{e}_x$  par rapport au sol.

L'écoulement de l'eau est parfait, incompressible et homogène, de masse volumique  $\mu$ .



1. On suppose dans un premier temps que la vitesse  $\vec{u} = u \vec{e}_x$  du chariot est constante. Calculer la force exercée par l'eau sur le chariot.
2. Le chariot a maintenant une vitesse initiale nulle, susceptible de varier. Déterminer l'expression de  $u(t)$ .

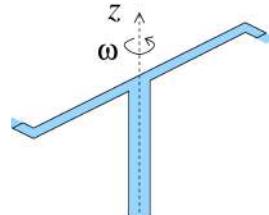
## 5. 15 Tourniquet hydraulique

Un tourniquet, destiné à l'arrosage d'un jardin, est constitué d'un tube métallique rigide, horizontal et de faible section  $s$ , en rotation autour d'un axe vertical passant par son centre  $O$ . De l'eau y arrive le long de l'axe de rotation avec un débit massique  $D_m$  supposé constant.

Elle est éjectée par deux orifices percés symétriquement par rapport au milieu du tube, distants de  $2a$ , avec une vitesse relative  $u$  par rapport au tube, horizontale et perpendiculaire au tube.

Le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation de l'ensemble formé par le tuyau et l'eau qu'il contient à tout instant est  $J$ . À l'instant initial, le tourniquet est immobile.

Déterminer la vitesse angulaire de rotation  $\omega(t)$  en négligeant tout frottement.



Il convient à nouveau d'effectuer un bilan de moment cinétique à un système fermé ( $\Sigma^*$ ) :

- à l'instant  $t$  constitué du tourniquet et de l'eau qui entre dans la base du tourniquet ;
- à l'instant  $t + dt$  constitué du tourniquet et des deux masses d'eau qui sortent par les orifices pendant  $dt$ .

La vitesse d'éjection de l'eau par rapport au référentiel terrestre dans lequel on étudie le mouvement vaut  $(a\omega - u)\vec{e}_\theta$ . On écrit alors la variation de moment cinétique scalaire entre les deux instants :

$$L_\Delta(t+dt) - L_\Delta(t) = \left( J\omega(t+dt) + 2\frac{D_m}{2}dt(a\omega(t+dt) - u)a \right) - J\omega(t) \simeq dt \left( J\frac{d\omega}{dt} + D_m a(a\omega - u) \right) \quad (5.77)$$

soit en appliquant le théorème du moment cinétique scalaire à ( $\Sigma^*$ ) :

$$\frac{L_\Delta(t+dt) - L_\Delta(t)}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_i) = 0 \iff J\frac{d\omega}{dt} + a^2 D_m \omega = a D_m u \quad (5.78)$$

En posant  $\tau = \frac{J}{a^2 D_m}$ , il vient :

$$\omega(t) = \frac{u}{a} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \quad (5.79)$$