Álgebra Lineal

Introducción al Álgebra lineal
Sesión 01

Mg. Leonel Heredia Altamirano

Especialización en Matemática y Estadística para Ciencia de Datos
Módulo
Fundamentos de Matemáticas para Ciencia de Datos

5 de mayo de 2025

Contenido

Álgebra de matrices

Nociones generales del Álgebra Matricial

Definición

Si $m, n \geq 1$ son números naturales, una matriz $m \times n$ de números reales es un arreglo de mn números reales ordenados en m filas y n columnas. Al número que ocupa la fila i y la columna j se representa por a_{ij}, por lo que una matriz A se representa también por $A = (a_{ij})$

Así pues, una matriz $m \times n$ es de la forma:

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se denota las matrices por: $A_{mxn} = [a_{ij}]$ o (a_{ij}), $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$ donde a_{ij} es la $i - j$ ésima entrada, i es la posición de la fila y j la posición de columna.

Orden de una matriz

El orden de una matriz está dado por el producto $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$, donde $\boldsymbol{m}$ indica el número de filas y $\boldsymbol{n}$ el número de columnas. El conjunto de matrices $\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ con elementos $a_{ij} \in \mathbb{K}$ se denota por $\mathbb{K}^{mxn}$.

Es decir : $\mathbb{K}^{m\times n} = \{(a_{ij})/a_{ij} \in \Bbbk\}$
Por ejemplo :

$$\text{Si } \mathbb{K} = \Re, \text{ entonces } \Re^{m\times n} = \{(a_{ij})/a_{ij} \in \Re\}$$
$$\text{Si } \mathbb{K} = \mathbb{C}, \text{ entonces } \mathbb{C}^{m\times n} = \{(a_{ij})/a_{ij} \in \mathbb{C}\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 4+2i \\ 2 & 1-5i \\ 3+2i & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Matrices especiales

Matriz cuadrada

Una **matriz cuadrada** es una matriz que tiene el mismo número de filas y columnas. Es decir, su orden es $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad A \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

Por ejemplo, algunos ejemplos de matrices cuadradas son:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 \\ 7 & 8 & 11 \\ 8 & 9 & 34 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -8+4i & 2-3i \\ \frac{1}{2}-i & i \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -5 & -1 \\ 7 & 8 & 11 & -4 \\ 8 & 9 & 34 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

Una **matriz diagonal** es una matriz cuadrada en la que todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero:

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Suma:** La suma de dos matrices diagonales de la misma dimensión es otra matriz diagonal:

$$D + D' = \begin{bmatrix} d_{11} + d'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} + d'_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} + d'_{nn} \end{bmatrix}.$$

- **Producto:** El producto de dos matrices diagonales D y D' es otra matriz diagonal, con elementos multiplicados elemento a elemento:

$$D \cdot D' = \begin{bmatrix} d_{11}d'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}d'_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}d'_{nn} \end{bmatrix}.$$

- **Multiplicación por un escalar:** Si α es un escalar, la matriz αD también es diagonal:

$$\alpha D = \begin{bmatrix} \alpha d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha d_{nn} \end{bmatrix}.$$

- **Determinante:** El determinante de una matriz diagonal es el producto de los elementos de su diagonal:

$$\det(D) = d_{11}d_{22}\cdots d_{nn}.$$

- **Matriz inversa:** Si todos los elementos de la diagonal son distintos de cero, la matriz diagonal es invertible y su inversa es:

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_{nn}} \end{bmatrix}.$$

- **Valores y vectores propios:** Los autovalores de una matriz diagonal D son simplemente los elementos de la diagonal:

$$\lambda_i = d_{ii}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Sus autovectores son los vectores canónicos de la base estándar de $\mathbb{R}^n$.

Matriz identidad

La **matriz identidad** de tamaño $n \times n$, denotada como I_n, es una matriz cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en todas las demás posiciones:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

La matriz identidad actúa como el elemento neutro del producto matricial, es decir, para cualquier matriz A de tamaño $n \times n$:

$$AI_n = I_nA = A.$$

- Para cualquier matriz A de tamaño $m \times n$, se cumple:

$$AI_n = A \quad \text{y} \quad I_mA = A.$$

- La matriz identidad es su propia inversa:

$$I_n^{-1} = I_n.$$

- El determinante de la matriz identidad es siempre 1:

$$\det(I_n) = 1.$$

- Todos los autovalores de I_n son 1 y sus autovectores son los vectores de la base estándar:

$$\lambda_i = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Matriz nula

La **matriz nula**, denotada como O, es una matriz de tamaño $m \times n$ cuyos elementos son todos ceros:

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

La matriz nula actúa como el elemento neutro de la adición de matrices, es decir, para cualquier matriz A de tamaño $m \times n$:

$$A + O = O + A = A.$$

- Para cualquier matriz A de tamaño $m \times n$, se cumple:
$$AO = O \quad \text{y} \quad OA = O.$$
- Si la matriz nula es cuadrada de tamaño $n \times n$, su determinante es siempre 0:
$$\det(O_n) = 0.$$
- Todos los autovalores de la matriz nula son cero:
$$\lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$
- El rango de la matriz nula es 0:
$$\text{rango}(O) = 0.$$

Matriz triangular superior

Una **matriz triangular superior** es una matriz cuadrada U de tamaño $n \times n$ en la que todos los elementos por debajo de la diagonal principal son cero. Formalmente, una matriz $U = (u_{ij})$ es triangular superior si:
$$u_{ij} = 0 \quad \forall\, i > j.$$

Es decir, tiene la forma:

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

- **Suma:** La suma de dos matrices triangulares superiores de la misma dimensión es otra matriz triangular superior:

$$U + U' = \begin{bmatrix} u_{11} + u'_{11} & u_{12} + u'_{12} & \cdots & u_{1n} + u'_{1n} \\ 0 & u_{22} + u'_{22} & \cdots & u_{2n} + u'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} + u'_{nn} \end{bmatrix}.$$

- **Producto:** El producto de dos matrices triangulares superiores es otra matriz triangular superior:

$$U \cdot U' = \begin{bmatrix} u_{11}u'_{11} & \sum_{k=1}^{1} u_{1k}u'_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^{1} u_{1k}u'_{kn} \\ 0 & u_{22}u'_{22} & \cdots & \sum_{k=2}^{2} u_{2k}u'_{kn} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & u_{nn}u'_{nn} \end{bmatrix}.$$

- **Determinante:** El determinante de una matriz triangular superior es el producto de los elementos de su diagonal:

$$\det(U) = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}.$$

- **Matriz inversa:** Si todos los elementos en la diagonal son distintos de cero, la matriz triangular superior es invertible y su inversa también es triangular superior.

Matriz triangular inferior

Una **matriz triangular inferior** es una matriz cuadrada L de tamaño $n \times n$ en la que todos los elementos por encima de la diagonal principal son cero. Formalmente, una matriz $L = (l_{ij})$ es triangular inferior si:

$$l_{ij} = 0 \quad \forall\, i < j.$$

Es decir, tiene la forma:

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}.$$

- La suma de dos matrices triangulares inferiores de la misma dimensión es otra matriz triangular inferior:

$$L + L' = \begin{bmatrix} l_{11} + l'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} + l'_{21} & l_{22} + l'_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} + l'_{n1} & l_{n2} + l'_{n2} & \cdots & l_{nn} + l'_{nn} \end{bmatrix}.$$

- El producto de dos matrices triangulares inferiores es otra matriz triangular inferior:

$$L \cdot L' = \begin{bmatrix} l_{11}l'_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ \sum_{k=1}^{1} l_{2k}l'_{k1} & l_{22}l'_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}l'_{kn} & \sum_{k=1}^{n-1} l_{nk}l'_{kn} & \cdots & l_{nn}l'_{nn} \end{bmatrix}.$$

- El determinante de una matriz triangular inferior es el producto de los elementos de su diagonal:

$$\det(L) = l_{11}l_{22}\cdots l_{nn}.$$

Matriz transpuesta

Dada una matriz A de tamaño $m \times n$, su **matriz transpuesta**, denotada como A^T, es la matriz obtenida al intercambiar sus filas por sus columnas. Formalmente, si $A = (a_{ij})$, su transpuesta $A^T = (a'_{ji})$ se define como:

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}, \quad \forall i, j.$$

Es decir, si:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

entonces su transpuesta es:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

1. Transposición doble

$$(A^T)^T = A.$$

2. Transposición de la suma

$$(A+B)^T = A^T + B^T.$$

3. Transposición del producto escalar

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

4. Transposición del producto matricial

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

5. Determinante Si A es una matriz cuadrada, se cumple que:

$$\det(A^T) = \det(A).$$

6. Inversa de la transpuesta Si A es una matriz invertible, se cumple que:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Traza de una matriz

Sea A una matriz cuadrada de orden n, es decir, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La **traza** de A, denotada como $\operatorname{tr}(A)$, se define como la suma de los elementos de su diagonal principal:

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Es decir, si:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

entonces su traza es: $\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$

1. Linealidad: Para matrices A, B de orden n y un escalar α, se cumple:

$$\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$$
$$\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr}(A)$$

2. Invariancia bajo transposición: La traza de una matriz es igual a la traza de su transpuesta:

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(A^T).$$

3. Relación con el producto de matrices: Si A y B son matrices de orden n, se cumple que:

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

4. Propiedad cíclica: Para matrices A, B, C tales que el producto está bien definido:

$$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA) = \mathrm{tr}(CAB).$$

5. Determinante y traza en matrices diagonales: Si D es una matriz diagonal con elementos d_{ii}, se cumple que:

$$\mathrm{tr}(D) = \sum_{i=1}^{n} d_{ii}.$$

Espacio vectorial de las matrices

Suma de matrices

La suma de $[a_{ij}]$ y $[b_{ij}]$ es la matriz $[a_{ij}] + [b_{ij}] = [c_{ij}]$, de $m \times n$, tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall\ 1 \leq i \leq m, \forall\ 1 \leq j \leq n$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

Propiedades de la suma de matrices

- $A + B = B + A \implies$ Conmutativa
- $(A + B) + C = A + (B + C) \implies$ Asociativa
- $\exists \theta / A + \theta = \theta + A = A, \forall A \implies$ Existencia de la matriz nula
- $\forall A, \exists! B / A + B = B + A = \theta \implies$ Existencia del opuesto

Producto de un escalar por una matriz

El producto de un escalar α por una matriz $[a_{ij}]$ de orden $m \times n$ es una matriz $[\alpha a_{ij}]$ de orden $m \times n$ cuyos elementos se obtienen multiplicando el escalar α por cada elemento a_{ij} de la matriz $[a_{ij}]$.

$$\alpha A = \alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Propiedades del producto de un escalar por una matriz

Si λ y β son escalares y $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$

- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $(\lambda\beta)A = \lambda(\beta A) = \beta(\lambda A)$
- $(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$

Multiplicación de matrices

Definición

El producto de $A_{m\times n} = [a_{ij}]$ por $B_{n\times p} = [b_{ij}]$ se define como:

$$A_{m\times n}B_{n\times p} = C_{m\times p} = [c_{ij}]\,, \ \text{ talque } \ c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

Propiedades

- $A_{m\times n}(B_{n\times p}C_{p\times q}) = (A_{m\times n}B_{n\times p})C_{p\times q}$
- $A(B+C) = AB + AC$, si $\exists\ B+C, AB, AC$
- $(B+C)A = BA + CA$, si $\exists\ B+C, BA, CA$
- $I_nA_{n\times m} = A_{n\times m}$ o $A_{n\times m}I_m = A_{n\times m}$
- $\theta_{p\times m}A_{m\times n} = \theta_{p\times n}$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B), \forall\lambda \in \mathbb{K}$

Determinante

Sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ de orden n, llamaremos determinante de la matriz A al número real que está relacionado con los elementos a_{ij} de la matriz.

La notación $|A|$, $det(A)$ indican el determinante de una matriz.

El determinante es una función de $\mathbb{R}^{n\times n}$ en $\mathbb{R}$, tal que **det** hace corresponder a cada matriz A un único número real **detA**, que por inducción se define del siguiente modo:

1) Para $n = 1$, $A = [a_{ij}]$; entonces $\mathbf{det(A)=}a_{ij}$

2) Para $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; entonces $\mathbf{det(A)=}a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

3) Para $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; entonces el determinante es:

$$\mathbf{det(A)} = a_{11} \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{13} \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

En general :

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \Longrightarrow \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j})$$

Donde A_{1j} es submatriz de A eliminando la fila 1 y la j - ésima columna.

Rango de una matriz

Definición

Sea la matriz $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, diremos que el rango de la matriz A es ρ si existe una submatriz cuadrada B de A de orden "ρ", tal que, $|B| \neq 0$ y el determinante de cualquier submatriz cuadrada de A de orden mayor que B es cero.

Propiedades del rango de una matriz

Si $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ es una matriz de orden $m \times n$ se cumple que :

1) $\rho(A) \leq min(m, n)$

2) $\rho(A)^T = \rho(A)$

3) Si $A = [a_{ij}]_n$ implica $\rho(A) < n \Longleftrightarrow |A| = 0$

Calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Solución

Como la matriz A es de orden 4×3, entonces por definición se tiene que $\rho(A) \leq min(3,4)$, es decir, $\rho(A) \leq 3$. Ahora formaremos las submatrices cuadradas más grandes de A, de orden 3×3.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 1 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Como las determinantes son cero, entonces $\rho(A) \neq 3$ y como $\rho(A) \leq 3$, entonces $\rho(A) < 3$.

Ahora formaremos submatrices de orden 2×2 y es suficiente que alguna de estas submatrices su determinante sea no nulo. Formamos la siguiente submatriz : $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Su determinante es -2, por lo tanto, $\rho(A) = 2$

Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada $A = [a_{ij}]$ tiene inversa $\Longleftrightarrow \rho(A) = n$ y $|A| \neq 0$.

Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz cuadrada $n \times n$. Se dice que A es **invertible** o **no singular** si existe una matriz B de n $\times$ n tal que $AB = BA = I_n$. La matriz B se conoce como la **inversa** de A y se denota con A^{-1}.

Propiedades de la inversa de una matriz

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$
- $I^{-1} = I$
- $(A^n)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

Adjunta de una matriz

Sea la matriz cuadrada $A = [a_{ij}]_n$ y sea $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} |A\,(i/j)|$. Llamaremos **ADJUNTA** de A a la matriz $[\alpha_{ij}]^T$, donde $[\alpha_{ij}]$ es la matriz de cofactores de A. $\left[A^{-1} = \frac{1}{|A|} adj\,(A)\right]$

Sistema de ecuaciones lineales

Ecuación lineal

Sea $k = \mathbb{R}$. Si $a \in k^n$, entonces $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. De manera similar, si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Consideremos el siguiente producto escalar:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = b,$$

donde $b \in k$. Al efectuar el producto escalar, obtenemos la ecuación lineal:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b.$$

En esta ecuación, los $a_i \in k$, para $i = 1, \dots, n$, son llamados *coeficientes*, mientras que los $x_i \in \mathbb{R}$ son conocidos como *incógnitas*. La ecuación resultante es una ecuación lineal en n variables.

Vector solución

Un vector $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ se dice que es una *solución* o que satisface la ecuación lineal si y solo si:

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n = b$$

es verdadero para un valor dado de b. En particular, si $b = 0$, entonces u es una solución homogénea de la ecuación lineal. La ecuación $a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n = 0$ es entonces una ecuación lineal homogénea, y el vector u es un *vector solución* de la ecuación homogénea.

Solución de una ecuación lineal

Se presentan tres casos posibles para la solución de la ecuación lineal $a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = b$:

Primer Caso: Si $a_1 \neq 0$, la ecuación lineal puede resolverse despejando x_1 en términos de las demás incógnitas $x_2, x_3, \dots, x_n$. De este modo, se obtiene:

$$x_1 = -\frac{a_2}{a_1} x_2 - \frac{a_3}{a_1} x_3 - \cdots - \frac{a_n}{a_1} x_n + \frac{b}{a_1}.$$

Al asignar valores arbitrarios a las incógnitas $x_2, x_3, \ldots, x_n$, se obtiene un valor único para x_1. Esto implica que una ecuación con dos o más incógnitas tiene infinitas soluciones, ya que las variables libres pueden tomar cualquier valor dentro del dominio.

Segundo Caso: Si $a_i = 0$ para todo i y $b \neq 0$, la ecuación:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

no tiene solución. Esto se debe a que, en este caso, la suma de todos los términos del lado izquierdo es cero, lo que no puede igualar a un valor distinto de cero, como es el caso de b.

Tercer Caso: Si $a_i = 0$ para todo i y $b = 0$, entonces la ecuación:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

tiene infinitas soluciones. En este caso, cualquier vector $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ satisface la ecuación, ya que la igualdad se reduce a $0 = 0$, lo cual es siempre verdadero.

Cuando se consideran sistemas de ecuaciones de la forma: $AX = B$ donde A es una matriz de coeficientes, X es el vector de incógnitas y B es el vector de términos independientes, la existencia y unicidad de soluciones depende de las propiedades de A.

Un sistema de m-ecuaciones lineales con n - incógnitas, es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \vdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$ es la matriz de coeficientes.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$ es la matriz de n - incógnitas.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{m\times 1}$$ es la matriz de términos independientes.

- Si $\det(A) \neq 0$, el sistema tiene una única solución.
- Si $\det(A) = 0$ y B pertenece al espacio columna de A, hay infinitas soluciones.
- Si $\det(A) = 0$ y B no pertenece al espacio columna de A, el sistema no tiene solución.

Regla de Cramer

Sea $AX = B$ un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$, donde A es una matriz $n \times n$ y $|A| \neq 0$. En este caso, el sistema tiene una solución única X dada por:

$$x_j = \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} b_k \cdot C_{ak} \cdot a_{kj},$$

donde C_{ak} es el cofactor de a_{kj} en la matriz A, y b_k es el componente correspondiente de la matriz columna B.

El sistema es **incompatible** si $|A_1| \neq 0$, $|A_2| \neq 0$, ..., $|A_n| \neq 0$. Esto indica que no existe ninguna solución que satisfaga todas las ecuaciones simultáneamente.

El sistema es **indeterminado** si $|A_1| = 0$, $|A_2| = 0$, ..., $|A_n| = 0$. Esto implica que el sistema tiene infinitas soluciones debido a la dependencia lineal entre las ecuaciones.

Método de la Matriz Inversa

El método de la matriz inversa se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones lineales de la forma:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

donde A es una matriz $n \times n$, $\mathbf{x}$ es un vector columna de incógnitas y $\mathbf{b}$ es un vector columna de términos independientes.

Si A es invertible, podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por la inversa de A:

$$A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Dado que $A^{-1}A$ es la matriz identidad I, esto simplifica a:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14/5 \\ -1/5 \end{pmatrix}$$

Valores y vectores propios

Introducción a los vectores propios

Sea $T : V \longrightarrow W$ una **t.l.** donde $\mathbf{V}$ y $\mathbf{W}$ son e.v sobre $\mathbb{K}$. En algunas aplicaciones es conveniente encontrar que el vector $T(v)$ sea paralelo a v es decir que exista algún $\lambda \in \mathbb{K}$ tal que :

$$T(v) = \lambda v$$

Si $v \neq \theta$ satisface la ecuación anterior al escalar λ se le llama ***valor propio*** o ***autovalor*** y al vector $\mathbf{v}$ se le llama ***vector propio*** o ***autovector*** asociado al valor propio λ. Por tal motivo consideraremos que $T : V \longrightarrow V$ donde $\mathbf{V}$ es de dimensión finita.

Por otro lado sabemos que todo $T : V \longrightarrow V$ tiene asociada una matriz cuadrada A. Debido a ello estudiaremos los valores y vectores propios de matrices cuadradas.

Definición

Sea A una matriz de orden n $\times$ n de entradas reales. Un número $\lambda \in \mathbb{K}$ se llama valor propio de A si existe un vector no nulo $\mathbf{v}$ tal que:

$$Av = \lambda v \tag{1}$$

El vector $v \neq \theta$ se llama vector propio de A correspondiente al valor propio λ. El conjunto $V_\lambda = \{v \in V; Av = \lambda v\}$ es un subespacio de $\mathbf{V}$ y se llama autoespacio asociado a λ.

Observación

De la ecuación (1) se puede escribir $Av - \lambda Iv = \theta$, es decir $(A - \lambda I)v = \theta$. Por tanto se tiene un sistema homogéneo el cual tiene solución única si $det(A - \lambda I) \neq 0$, siendo la única solución $v = \theta$ que no puede ser vector propio. Pero si $det(A - \lambda I) = 0$ el sistema tiene solución no nula y así existe $v \neq \theta$ que cumple $Av = \lambda v$.

Polinomio característico

Ejemplo

Halle, en caso exista, los valores propios y vectores propios de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Polinomio característico

Sea A una matriz cuadrada. El polinomio $p(x) = det(xI - A)$ se llama el ***polinomio característico*** de A. En caso $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ se prueba:

$$det(xI - A) = x^2 - Tr(A)x + det(A)$$

Teorema

$\lambda \in \mathbb{K}$ es autovalor de A si y solo si λ es raíz de $p(x)$

Del teorema anterior vemos que el polinomio característico depende del determinante de una matriz de orden $n \times n$, luego el polinomio es de grado n, lo cual quiere decir que $p(x)$ tiene n raíces.

Teorema

Si A es matriz de orden $n \times n$ y tiene autovalores distintos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$, esto es, $\lambda_i \neq \lambda_j$ para $i \neq j$. Si sus vectores propios correspondientes son $v_1, v_2, \ldots, v_m$, entonces estos vectores son linealmente independientes.

Para una matriz A de orden $n \times n$ su polinomio característico tiene n raíces y alguno de ellos podrían ser repetidos. Es decir podemos suponer que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sean sus raíces distintas entonces se puede escribir:

$$p_A(x) = (x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2} \cdots (x - \alpha_k)^{r_k}$$

Donde r_j indican las veces que se repite las raíces α_j y se cumple que: $r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$. En tal caso se dice que la raíz α_j es de ***multiplicidad algebraica*** r_j.