

Material de trabajo

Especialización : Fundamentos de Matemáticas y Estadísticas para Ciencias de Datos

Módulo : Fundamentos de Matemáticas

Tema : Álgebra Linal

Docente : Mg. Leonel Heredia Altamirano

Ejercicio 01

Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 5 & -3 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

- Calcula $2A - 3B$
- Calcula $\log 25A - \frac{1}{7}B + \sqrt{7}(C - A + B)$
- Calcula $A + C$
- Calcula $A \times B$
- Calcula $3(A + B)^T$
- Calcula el determinante de $\det(A \times B \times C)$
- Calcula el determinante $\det(C \times B^2 + A)$
- Calcula $(A - C)^T \times (B + A)$
- Calcula $(D \times D \times D \times D) \times E$
- Calcula $(F \times D)^T$
- Calcula $(2D - 5E)^T$
- Calcula $F \times (D - E)$
- Calcula el rango de la matriz $(D - E) \times (F \times D)^T$

Ejercicio 02

Generar las siguientes matrices:

- $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$
- $B \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$
- $C \in \mathbb{R}^{6 \times 5}$
- $D \in \mathbb{R}^{5 \times 6}$
- $E \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$
- $F \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$

Realiza las siguientes operaciones:

- a) Calcula la traza de $A + B$.
- b) Calcula $2A - 3B + 5I$, donde I es la matriz identidad de orden 6.
- c) Calcula el producto $C \times D$ y luego encuentra su determinante.
- d) Calcula $(A + B)^2$.
- e) Calcula $(C \times D)^T \times (A - B)$.
- f) Calcula $\text{traza}(D^T \times C^T)$.
- g) Calcula $(2C - D^T) \times (D - 3C^T)$ y su determinante.
- h) Calcula $4E - F^2$.
- i) Calcula $(E + F)^3$.
- j) Calcula la inversa de $E + F$, si existe.
- k) Calcula $(C \times D)^{-1}$, si existe.
- l) Calcula el rango de $D \times C$.
- m) Calcula la matriz $(A^T + B) \times (A - B^T)$.
- n) Calcula el determinante de $A \times B$.
- ñ) Si es posible, encuentra una matriz X tal que $AX = B$.

Ejercicio 03

Generar los siguientes vectores:

- $\vec{u} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$
- $\vec{v} \in \mathbb{R}^{6 \times 1}$
- $\vec{w} \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$

- $\vec{p} \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$
- $\vec{q} \in \mathbb{R}^{5 \times 1}$
- $\vec{r} \in \mathbb{R}^{1 \times 5}$

Realiza las siguientes operaciones:

- a) Calcula $2\vec{u} + 3\vec{v}$.
- b) Calcula el producto escalar $\vec{w} \cdot \vec{v}$.
- c) Calcula $5(\vec{p} + \vec{q}) - 2(\vec{p} - \vec{q})$.
- d) Calcula $(\vec{w} + \vec{v}^T) \times (\vec{u} + \vec{v})$.
- e) Encuentra la norma de $\vec{u} - \vec{v}$.
- f) Calcula $\|3\vec{p} - 2\vec{q}\|$ y normaliza el vector resultante.
- g) Verifica si \vec{p} y \vec{q} son ortogonales.
- h) Calcula la matriz $(\vec{w}^T)(\vec{w})$ y discute su forma.
- i) Calcula la matriz $(\vec{p})(\vec{q}^T)$.
- j) Calcula $(\vec{r})(\vec{r}^T)^{-1}$, si es posible.
- k) Resuelve para x en la ecuación vectorial $2\vec{p} + 3x\vec{q} = \vec{u}_{[5:1]}$, donde $\vec{u}_{[5:1]}$ es la submatriz de las primeras 5 componentes de \vec{u} .
- l) Calcula $(\|\vec{p}\|^2 + \|\vec{q}\|^2) \times (\vec{p} - \vec{q})$.

Ejercicio 04

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned}
 1,2x_1 + 3,4x_2 - 2,1x_3 + 0,5x_4 - 1,6x_5 + 0,3x_6 &= 4,5 \\
 2,3x_1 - 0,7x_2 + 1,5x_3 - 3,6x_4 + 2,0x_5 - 0,8x_6 &= -3,2 \\
 0,9x_1 + 2,6x_2 + 1,1x_3 - 1,3x_4 + 2,4x_5 + 1,0x_6 &= 5,3 \\
 3,0x_1 - 1,1x_2 + 2,2x_3 + 1,7x_4 - 0,9x_5 + 0,4x_6 &= 3,0 \\
 -0,8x_1 + 1,2x_2 + 3,3x_3 - 2,1x_4 + 1,8x_5 - 2,0x_6 &= 6,7 \\
 1,5x_1 - 2,4x_2 + 0,7x_3 + 2,3x_4 - 1,5x_5 + 0,9x_6 &= -1,1
 \end{aligned}$$

Ejercicio 05

Tenemos un análisis en el contexto de un conjunto de activos financieros:

- X_1 : Retorno de la acción A.
- X_2 : Retorno de la acción B.

- X_3 : Retorno de la acción C.
- X_4 : Tasa de interés a corto plazo (por ejemplo, bonos a 6 meses).
- X_5 : Tasa de interés a largo plazo (por ejemplo, bonos a 10 años).
- X_6 : Precio de un commodity (por ejemplo, petróleo).
- X_7 : Índice de Precios al Consumidor (IPC).

Estas variables tienen las siguientes relaciones:

- Las acciones (X_1, X_2, X_3) suelen moverse en direcciones similares debido a factores macroeconómicos comunes.
- Las tasas de interés (X_4, X_5) tienen una correlación negativa con los precios de los activos, lo que puede influir en los retornos de las acciones.
- El precio del commodity (X_6) está positivamente correlacionado con las acciones de las empresas relacionadas con la energía.
- El IPC (X_7) está correlacionado con las tasas de interés y con las acciones en periodos de inflación.

Se pide realizar lo siguiente:

- Generar un conjunto de 250 observaciones para cada una de las 7 variables.
- Calcular la matriz de covarianza entre las 7 variables.
- Calcular la matriz de correlación entre las 7 variables.

Ejercicio 06

Se tiene un sistema de ecuaciones que describe la evolución de ciertas variables en el tiempo (por ejemplo, el valor de las acciones de una empresa, las tasas de crecimiento económico, o las concentraciones de sustancias químicas en un proceso industrial). Considera la siguiente matriz de transición A que describe la evolución de un sistema dinámico de orden 6x6:

$$A = \begin{pmatrix} 2,5 & -1,2 & 0,7 & 1,4 & -0,6 & 0,2 \\ -1,2 & 3,1 & 0,9 & -0,5 & 1,6 & 0,3 \\ 0,7 & 0,9 & 2,8 & -1,0 & 0,5 & -0,4 \\ 1,4 & -0,5 & -1,0 & 3,4 & -0,2 & 1,1 \\ -0,6 & 1,6 & 0,5 & -0,2 & 2,9 & 0,8 \\ 0,2 & 0,3 & -0,4 & 1,1 & 0,8 & 3,0 \end{pmatrix}$$

Calcula los **valores** y **vectores** propios de la matriz A