Cálculo diferencial

Introducción al cálculo diferencial

Mg. Leonel Heredia Altamirano

Especialización en Matemática y Estadística para Ciencia de Datos
Módulo
Fundamentos de Matemáticas para Ciencia de Datos

13 de mayo de 2025

Contenido

Cálculo diferencial univariado

Introducción

La función $f(x)$ tiene límite L cuando x se acerca al número x_0, si los valores $f(x)$ se aproximan al número L. Es decir:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Por ejemplo, si x se acerca a *2*, ¿A qué número se acerca la función $\frac{x^2-4}{x-2}$,si se conoce que $x \neq 2$?

Realizando algunos cálculos numéricos se tiene:

- Un número a la izquierda de *2*, muy cerca al *2* pero menor que 2 $(x < 2)$, supongamos $x =$1.99. Al sustituir:

  $$\frac{(1{,}99)^2 - 4}{1{,}99 - 2} = 3{,}99 \approx 4$$

  Ese resultado implica que el límite por la izquierda de *2* se acerca al valor de *4*, lo cual se denota por:

  $$\lim_{x \to 2^-} \left[\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right] = 4$$

- Un número a la derecha de *2*, muy cerca al *2* pero mayor que 2 ($x > 2$), supongamos $x =$2.01. Al sustituir:

  $$\frac{(2{,}01)^2 - 4}{2{,}01 - 2} = 4{,}01 \approx 4$$

  Ese resultado implica que el límite por la derecha de *2* se acerca al valor de *4*, lo cual se denota por:

  $$\lim_{x \to 2^+} \left[\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right] = 4$$

Dado que el límite por la izquierda de *2* y por la derecha de *2* existen y son iguales, afirmamos que existe el límite en el entorno de $x = 2$, lo cual expresamos por:

$$\lim_{x \to 2} \left[\frac{x^2 - 4}{x - 2} \right] = 4$$

Ahora planteemos la interrogante: ¿qué pasa con el límite si hacemos el reemplazo directo de $x = 2$ en la función $\frac{x^2-4}{x-2}$?

El resultado es:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\frac{4-4}{2-2}=\frac{0}{0}$$

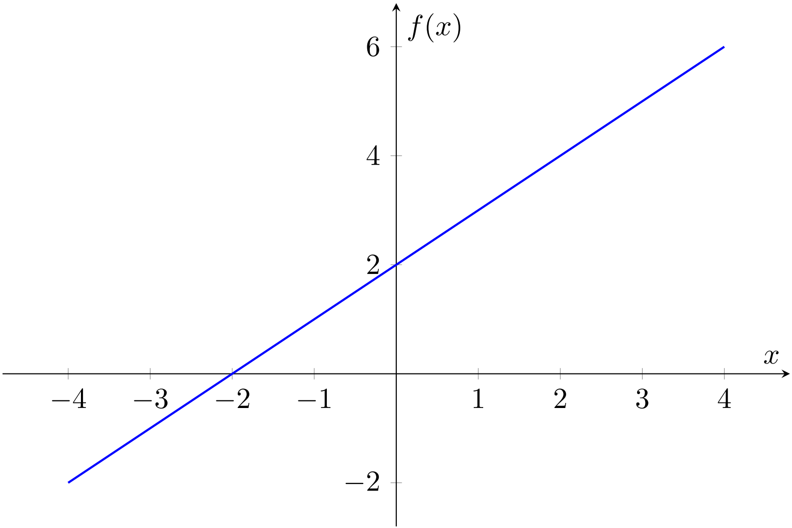
La expresión $\frac{0}{0}$ no tiene sentido; vale decir que la división de cero entre cero no está definido; por lo que, el resultado es de forma indeterminada.

En este caso, bastará con factorizar el numerador:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}, x\neq 2$$

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-4}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

Gráfico de función



Definición de límite

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función con valores reales definidos en $A \subset \mathbb{R}$. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación de A. Diremos que el número L es el límite de $f(x)$ cuando x tiende hacia x_0 y se escribirá $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, si para cada número real $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, si $x \in A$ y $0 < |x - x_0| < \delta$ implica $|f(x) - L| < \epsilon$. Es decir:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 / x \in A \wedge 0 < |x - x_0| < \delta$$
$$\implies |f(x) - L| < \epsilon$$

Algunas aclaraciones para el uso de la definición:

1. Las letras griegas **ÉPSILON** (ϵ) y **DELTA** (δ) representan números reales pequeños positivos que se acercan al cero. Por lo general, se escoge $0 < \delta < 1$ y ϵ se expresa en función de δ.
2. Las desigualdades $|f(x) - L| < \epsilon$ y $|x - x_0| < \delta$ son las vecindades de L y x_0 respectivamente, por tanto, son intervalos abiertos.

3. El intervalo $< L-\epsilon, L+\epsilon >$ se llama **VECINDAD** o entorno de L, de centro en L y radio $\epsilon > 0$. El intervalo $< x_0-\delta, x_0+\delta >$ se llama **VECINDAD** o entorno de x_0, de centro x_0 y radio $\delta > 0$.

$$x \in A \wedge 0 < |x - x_0| < \delta \Longleftrightarrow x \in V_\delta = (A - \{x_0\}) \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$

$$x \in V_\delta = \{x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

Por tanto, $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ significa que para todo intervalo abierto $< L-\epsilon, L+\epsilon >$, existe un intervalo abierto $< x_0-\delta, x_0+\delta >$ tal que:

$$V_\delta = \{x \in A, 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

Propiedades sobre límites de funciones

Sean f y g dos funciones tales que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$ y k una constante, entonces se verifica que:

a) $\lim\limits_{x\to a} k = k$

b) $\lim\limits_{x\to a} kf(x) = k \lim\limits_{x\to a} f(x)$

c) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \pm M$

d) $\lim\limits_{x\to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = L \cdot M$

e) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{1}{M}; \quad M \neq 0$

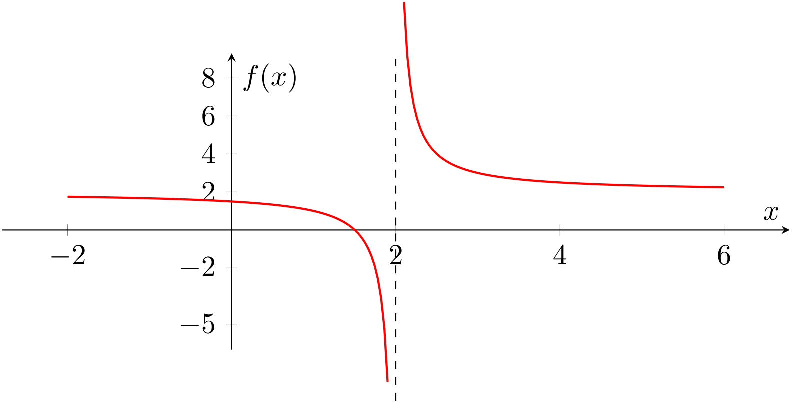
f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}; \quad M \neq 0$

g) $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n$

h) $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}, \forall n > 2$

Límites al infinito

Consideremos la función $f(x) = 2 + \frac{1}{x-2}$, cuya gráfica es:



Para valores de x cada vez más grande, el valor de $f(x)$ se aproxima a 2, es decir $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$. En el caso que x decrece, el valor de $f(x)$ se aproxima a 2, es decir $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$. A estos tipos de límites se les llama *límites al infinito*.

Consideremos $f :]a, +\infty[\to R$, una función definida en el intervalo $]a, +\infty[$, el límite de la función $f(x)$ cuando x crece sin límite es el número L y denotamos $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$, para todo $\epsilon > 0$, $\exists N > 0$, tal que si $x > N$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Consideremos $f :]-\infty, b[\to R$, una función definida en el intervalo $]-\infty, b[$, el límite de la función $f(x)$ cuando x decrece sin límite es el número L y denotamos $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, para todo $\epsilon > 0$, $\exists M < 0$, tal que si $x < M$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

Consideremos la función $f : D_f \to R$, una función definida en su dominio, el límite de la función $f(x)$ cuando $x \to \infty$ es el número real L que se denota por $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$, si para todo $\epsilon > 0$, $\exists M > 0$, tal que si $|x| > M$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$.

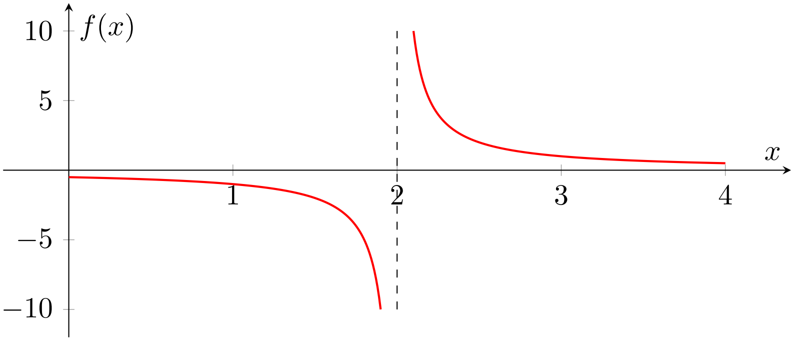
Teorema

Sea n un número entero positivo cualquiera, entonces se cumple:

$$a) \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \qquad\qquad b) \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Límites infinitos

Consideremos la función $f(x) = \frac{1}{x-2}$, cuya gráfica es:



Se observa que cuando x se aproxima a 2 por la derecha, la función $f(x)$ crece sin límite, es decir, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.En el caso que se aproxime a 2 por la izquierda, $f(x)$ decrece sin límite, es decir, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$. A este se le llama *límites infinitos*.

Consideremos una función f definida en algún intervalo I que contiene a c, excepto en c, entonces el $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$, si y solo si, dado un número $N > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que $0 < |x - c| < \delta$, entonces $f(x) > N$.

Consideremos una función f definida en algún intervalo I que contiene a b, excepto en b, entonces el $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$, si y solo si, dado un número $N < 0$, existe un $\delta > 0$, tal que $0 < |x - b| < \delta$, entonces $f(x) < N$.

Teorema

Sea n un número entero positivo cualquiera, entonces se cumple:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} -\infty & \text{si } n = 2k+1 \\ +\infty & \text{si } n = 2k \end{cases}$

Notación

i) $\dfrac{a}{0} = +\infty, a > 0$

ii) $\dfrac{a}{0} = -\infty, a < 0$

iii) $\dfrac{0}{a} = 0, a \neq 0$

Límites de la forma $\lim_{x\to a}\left(f\left(x\right)\right)^{g(x)}$

- **Caso 1:** Si $\lim_{x\to a} f\left(x\right) = A$ con $A > 0$, y $\lim_{x\to a} g\left(x\right) = B$ con B finito, entonces:
$$\lim_{x\to a}\left(f\left(x\right)\right)^{g(x)} = A^{B}.$$
Si $A < 0$ y B no es un número entero, la potencia no está bien definida en los números reales.
- **Caso 2:** Si $\lim_{x\to a} f\left(x\right) = A \neq 1$ y $\lim_{x\to a} g\left(x\right) = \pm\infty$, entonces el límite se evalúa según la naturaleza de A:
  - Si $A > 1$, entonces $\lim_{x\to a}\left(f\left(x\right)\right)^{g(x)} = \infty$ si $g(x) \to \infty$ y 0 si $g(x) \to -\infty$.
  - Si $0 < A < 1$, el comportamiento se invierte.
  - Si $A < 0$, el límite puede no estar bien definido.
- **Caso 3:** Si $\lim_{x\to a} f\left(x\right) = 1$ y $\lim_{x\to a} g\left(x\right) = \pm\infty$, entonces es una forma indeterminada y debe resolverse mediante la transformación:
$$f(x) = 1 + \phi(x), \quad \text{con} \quad \lim_{x\to a}\phi(x) = 0.$$
Sustituyendo en la expresión original:
$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a}\phi(x)g(x)}.$$

Definición de derivada

Consideremos la función real de variable real $y = f(x)$, si $x \in D_f$ entonces la derivada de la función f con respecto a x definiremos por la expresión:

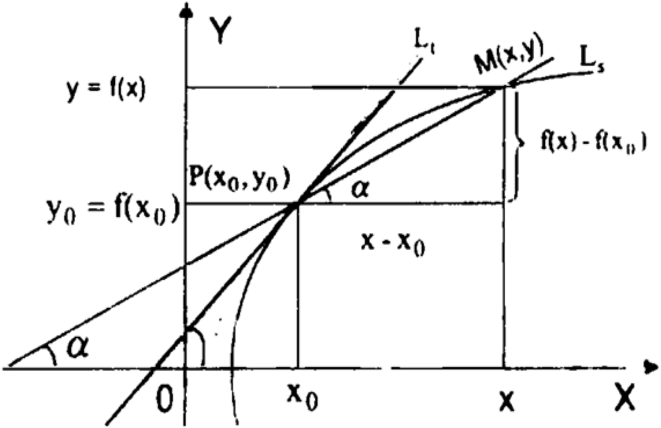
$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Siempre que dicho límite exista. El proceso de encontrar la derivada se llama *diferenciación*.

Si la derivada de una función $f(x)$ se desea calcular en un punto $x = x_0$, simplemente se reemplaza x por x_0 en la definición, es decir:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Consideremos una curva $C : y = f(x)$ y un punto fijo $P_0(x_0, y_0)$ de dicha curva, sea L_s la recta secante que pasa por $P_0(x_0, y_0)$ y por el punto $M(x, y) \in C$. La pendiente de la recta secante que pasa por los puntos P_0 y M es:



$$mL_s = \text{tg}\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Si el punto $M(x, y)$ se aproxima al punto $P_0(x_0, y_0)$ resulta que la variable x se aproxima a x_0 de tal manera que $\Delta x = x - x_0$ se aproxima a cero, con lo cual se está haciendo uso del concepto de límite. Por lo tanto, cuando el punto $M(x, y)$ se aproxima al punto $P_0(x_0, y_0)$ la recta secante L_s se ha transformado en la recta tangente L_r, lo cual indica que el ángulo α tiende a coincidir con θ y $\text{tg}\alpha = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{y-y_0}{x-x_0}$ tiende a convertirse en:

$$\text{tg}\theta = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Luego la derivada de la función f en el $P_0(x_0, y_0)$ es $f'(x_0)$ y representa la pendiente de la recta tangente en el punto $P_0(x_0, y_0)$.

Notación de derivada

$$y = f(x) \Longrightarrow y' = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = D_x f$$

Reglas de derivación básicas

- La derivada de una constante es cero

$$y = f(x) = c \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 0$$

- La derivada de la función identidad es 1

$$y = f(x) = x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = 1$$

- La derivada de la función potencia simple

$$y = f(x) = x^n \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$$

- La derivada del producto de una función por el escalar

$$y = kf(x) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = kf'(x)$$

- La derivada de la suma de dos funciones

$$y = f(x) + g(x) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) + g'(x)$$

- La derivada del producto de dos funciones

$$y = f(x) \cdot g(x) \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$$

- La derivada del cociente de dos funciones

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{[g(x)]^2}$$

- La derivada de la función exponencial I:

$$y = f(x) = e^x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = e^x$$

- La derivada de la función logarítmica

$$y = f(x) = \ln x \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

- La derivada de la función exponencial II:

$$y = f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = a^x \ln a$$

Derivadas de una función compuesta

En cálculo diferencial, la derivada de una función compuesta se obtiene mediante la **regla de la cadena**, que nos permite calcular la derivada de una función que depende de otra función.

Formalmente, si tenemos una función compuesta de la forma:

$$y = f(g(x))$$

donde:

- $g(x)$ es una función diferenciable en un intervalo dado.
- $f(u)$ es una función diferenciable en términos de $u = g(x)$.

Entonces, la derivada de y con respecto a x se obtiene aplicando la **regla de la cadena**:

$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

1. **Caso general:** Si $f(x) = (g(x))^n$, donde $g(x)$ es una función diferenciable y n es un exponente real, aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dx}(g(x))^n = n(g(x))^{n-1} \cdot g'(x).$$

2. **Funciones exponenciales y logarítmicas:**
   - Si $f(x) = e^{g(x)}$, entonces:

     $$\frac{d}{dx}e^{g(x)} = e^{g(x)} \cdot g'(x).$$

   - Si $f(x) = \ln(g(x))$, entonces:

     $$\frac{d}{dx}\ln(g(x)) = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x),$$

     siempre que $g(x) > 0$ para garantizar que el logaritmo esté definido.

3. **Funciones trigonométricas:**
   - Si $f(x) = \operatorname{sen}(g(x))$, entonces:

     $$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}(g(x)) = \cos(g(x)) \cdot g'(x).$$

Derivada de orden superior

Si $f : R \to R$ es una función derivable en x, entonces:

$$\exists f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Que es otra función la cual puede derivarse, es decir:

$$f''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

A esta función la llamaremos *la segunda derivada* de $f(x)$ y si la función $f''(x)$ se vuelve a derivar, se obtiene otra función:

$$f'''(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f''(x+h) - f''(x)}{h}$$

Y lo llamaremos *la tercera derivada* de $f(x)$ y así sucesivamente se tiene que la derivada de la función $f^{(n-1)}(x)$ es:

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x+h) - f^{(n-1)}(x)}{h}$$

La notación de derivada de orden superior de una función se denota:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = D_x^n f(x)$$

Si $D_x^n f(x)$ y $D_x^n g(x)$ existen en un intervalo, entonces:

$$D^n (f(x) \pm g(x)) = D_x^n f(x) \pm D_x^n g(x)$$

$$D_x^n (f(x)\, g(x)) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_x^{n-k} f(x)\, D_x^k g(x)$$

$$D_x^n x^m = \begin{cases} \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} & \text{si } 0 \leq n < m \\ m! & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n > m \end{cases}$$

Funciones reales de variable vectorial

Definición

Una función real de variable vectorial f o de n variables es una correspondencia de un conjunto A de vectores de $\mathbb{R}^n$, a un conjunto B de números reales y denotaremos por :

$$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow B \subseteq \mathbb{R}$$

Tal que, para cada vector $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$, existe uno y solo un elemento $f(\vec{x}) \in B$. El valor real de la función f se denota por $z = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Dominio y rango

Consideremos la función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, el dominio y el rango son los conjuntos definidos por:

$$D_f = \{\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n), /\exists z \in \mathbb{R} \wedge z = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$
$$R_f = \{z \in R, /\exists \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \wedge z = f(\vec{x})\}$$

Ejemplos

1. Determinar el dominio y el rango de $f\left(x,y\right)=\sqrt{25-x^2-y^2}$.
2. Determinar el dominio y el rango de $f\left(x,y\right)=ln\left(36-4x^2-9y^2\right)$.

Operaciones con funciones de varias variables

Consideremos dos funciones de n variables $f,g:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, con dominios D_f y D_g, entonces definimos:

1. $\left(f\pm g\right)\left(\vec{x}\right)=f\left(\vec{x}\right)\pm g\left(\vec{x}\right),\forall\vec{x}\in D_{f\pm g}=D_f\cap D_g$
2. $\left(f\cdot g\right)\left(\vec{x}\right)=f\left(\vec{x}\right)\cdot g\left(\vec{x}\right),\forall\vec{x}\in D_{f\cdot g}=D_f\cap D_g$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)\left(\vec{x}\right)=\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})},\forall\vec{x}\in D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\left\{\vec{x}/g\left(\vec{x}\right)=0\right\}$
4. $\left(g\circ f\right)\left(\vec{x}\right)=g\left(f\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)\right),D_{g\circ f}=$ $\left\{\vec{x}\in D_f/f\left(\vec{x}\right)\in R_f\cap D_g\right\}$

Límite de una función de varias variables

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, una función de n variables definidas en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}$ y A un punto de acumulación de D, entonces el límite de la función $f(\vec{x})$ cuando $\vec{x}$ se aproxima al punto A es:

$$\lim_{x \to A} f(\vec{x}) = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 / \forall \vec{x} \in B(A, \delta) \subset D_f \implies f(\vec{x}) \in B(L, \epsilon)$$

Ejemplos

i) Demostrar que $\lim_{(x,y) \to (2,3)} 3x + 2y = 12$

ii) Demostrar que $\lim_{(x,y) \to (3,-1)} x^2 + 2xy = 3$

Propiedades de límites

Si $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\lim_{\vec{x} \to A} f(\vec{x})$ y $\lim_{\vec{x} \to A} g(\vec{x})$ existen y A es punto de acumulación de $D_f \cap D_g$ entonces:

Propiedades de límites

1. $\lim_{\vec{x}\to A}\left(f\left(\vec{x}\right)\pm g\left(\vec{x}\right)\right)=\lim_{\vec{x}\to A}f\left(\vec{x}\right)\pm\lim_{\vec{x}\to A}g\left(\vec{x}\right)$
2. $\lim_{\vec{x}\to A}f\left(\vec{x}\right)\cdot g\left(\vec{x}\right)=\lim_{\vec{x}\to A}f\left(\vec{x}\right)\cdot\lim_{\vec{x}\to A}g\left(\vec{x}\right)$
3. $\lim_{\vec{x}\to A}\frac{f(\vec{x})}{g(\vec{x})}=\frac{\lim_{\vec{x}\to A}f(\vec{x})}{\lim_{\vec{x}\to A}g(\vec{x})}$, si $\lim_{\vec{x}\to A}g\left(\vec{x}\right)\neq 0$

Teorema

Si la función $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ tiene límites diferentes cuando (x,y) se aproxima a (x_0,y_0) a través de dos conjuntos diferentes que tienen a (x_0,y_0) como punto de acumulación. Entonces $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f\left(x,y\right)$ no existe.

Ejemplos

1. Calcular el límite de $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$, $\forall\left(x,y\right)\neq(0,0)$
2. Calcular el límite de $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

Teorema

Si $\phi(\theta)$ es una función acotada (en una bola de centro en el origen) y $\psi(r)$ es una función que tiende a cero cuando r tiende a cero, entonces:

$$\text{lím}_{r\to 0}\, g(r,\theta) = \text{lím}_{r\to 0}\left[\phi(\theta)\,\psi(r)\right] = 0$$

Ejemplos

1. Calcular el límite de $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$
2. Calcular el límite de $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{ln(x^2+y^2)}$

Continuidad de una función de varias variables

1. $f(x,y)$ está definido en (x_0, y_0)
2. Existe $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$
3. $\text{lím}_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

Ejemplos

1. Evaluar si f es continua en $(0,0)$ donde

$$f(x,y)\begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

2. Evaluar si f es continua en $(0,0)$ donde

$$f(x,y)\begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3. Evaluar si f es continua en $(0,0)$ donde

$$f(x,y)\begin{cases} \frac{4xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Derivadas parciales

Definición

Consideramos la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de dos variables definidas en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^2$, entonces las primeras derivadas parciales de f se define:

$$D_1 f\,(x,y) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x, y) - f(x,y)}{\triangle x}$$
$$D_2 f\,(x,y) = \lim_{\triangle\, y \to 0} \frac{f(x, y+\triangle y) - f(x,y)}{\triangle y}$$

Ejemplos

Calcular las derivadas parciales de:

$$z = ln\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$
$$f\,(x,y) = x^4 - 4x^3y + 8xy^3 - y^4$$
$$f\,(x,y) = x^2 cosy + y^2 senx$$

$$f\,(x,y) = xe^{x^2y}$$
$$z = ln\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x}{\sqrt{x^2+y^2}+x}\right)$$
$$\omega = e^{xyz} + arctg\left(\frac{3xy}{z^2}\right)$$

Derivada de orden superior

A las derivadas parciales de orden superior se la denota por el orden de las derivadas. Sea la función $z = f(x, y)$ se obtiene:

1. Derivar dos veces con respecto a x : $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$
2. Derivar dos veces con respecto a y : $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$
3. Derivar primero respecto a x y luego a y: $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}$
4. Derivar primero respecto a y y luego a x: $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}$

Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función definida en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^n$, entonces la derivada parcial de f con respecto a la i-ésima componente $(i = 1, 2, \ldots, n)$ es:

$$D_i f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_1,x_2,\ldots,x_i+\triangle x_1,\ldots,x_n)-f(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\triangle x_1}$$

Regla de la cadena

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada por $z = f(x, y)$ donde f es una función diferenciable de x e y. Si $x = g(t)$ e $y = h(t)$ siendo g y h funciones derivables de t. Entonces, z es una función derivable de t por lo que:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Regla de la cadena (dos variables independientes)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dada por $z = f(x, y)$ donde f es una función diferenciable de x e y y $x = g(s, t)$ e $y = h(s, t)$ donde $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial y}{\partial t}$ existen, entonces:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

Ejemplos

1. Hallar $\frac{dz}{dx}$ si $z = x^2 + y^2, x = e^t, y = e^{-t}$
2. Si $z = f\,(x, y)$, donde $x = rcos\theta$ y $x = rsen\theta$ probar que:
$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2$$
3. Si f es una función diferenciable de x e y y además $u = f\,(x, y)\,, x = rcos\theta, y = rsen\theta$, muestre que :
$$\frac{\partial u}{\partial x} = cos\theta\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{sen\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = sen\theta\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{cos\theta}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Derivación implícita

Supongamos que x e y están relacionados mediante la ecuación $F(x, y) = 0$, donde se supone que $y = f(x)$ es una función derivable en x. Entonces se obtiene:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Fórmula de Euler (Teorema de Euler)

Si la función $z = f(x, y)$ tiene la propiedad de que para una constante λ se tiene:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$

Entonces se dice que $z = f(x, y)$ es homogénea de grado n.

- Si $n > 0$, se dice que la función es positivamente homogénea.
- Si $n = 1$, la función se llama linealmente homogénea.
- Si $z = f(x, y)$ es positivamente homogénea de grado n y sus derivadas parciales de primer orden existen, entonces se puede demostrar que :

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = nf(x, y)$$

A esta relación se conoce como el ***Teorema de Euler*** o ***Teorema de la Suma***.

Ejemplos

Comprobar el Teorema de Euler en las siguientes funciones:

1. $z = f(x, y) = 3x^4 + 2x^2y^2 + 7y^4$
2. $f(x, y, z) = 3x + 2y - 4z$
3. $f(x, y) = x^3 + 2x^2y + y^3$

Observación: Con el teorema de Euler se comprueba que el volumen de producción será máximo cuando los factores productivos sean pagados con arreglos a la teoría de la productividad marginal, es decir:

$$q = af_a + bf_b$$

Donde $q = f(a, b)$, siendo q el volumen de producción, a y b los factores productivos y f_a y f_b las productividades marginales.

Ejemplo

Comprobar el Teorema de Euler en una función de producción Cobb - Douglas.

Fórmula de Euler (Criterio de la segunda derivada)

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en el conjunto abierto D de tal manera que las derivadas parciales primeras y segundas sean continuas en la región D que contiene a un punto (a, b) tal que $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = 0$.

Para determinar si hay un extremo relativo se tiene:

$$\triangle = \frac{\partial^2 f\,(a,b)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f\,(a,b)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f\,(a,b)}{\partial y \partial x}\right)^2$$

- Si $\triangle > 0$ y $\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} > 0$, entonces $f(a, b)$ es un valor mínimo relativo.
- Si $\triangle > 0$ y $\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} < 0$, entonces $f(a, b)$ es un valor máximo relativo.
- Si $\triangle < 0$, entonces $(a, b, f(a, b))$ es un punto de silla.
- Si $\triangle = 0$, este criterio no da información.

En forma práctica se puede recordar el valor de $\triangle$ como el valor de una determinante:

$$\triangle = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} \\ \\ \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

Ejemplo

Determinar los extremos relativos de la función $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$

DEFINICIÓN: Sea $f : D \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida en un conjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^3$, y si las derivadas parciales de segundo orden: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ existen en el punto $P_o(x_o, y_o)$, a la matriz cuadrada definida por:

$$H(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{vmatrix}$$

Se llama **matriz hessiana** de la función f en el punto P_o.
Supongamos que las derivadas $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ existen para todo $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$
D, siendo la matriz hessiana:

$$H\left(f\left(P\right)\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Criterios de la matriz hessiana para máximos y mínimos

Sea $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función donde sus derivadas parciales de segundo orden son continuas y sea $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$ un punto crítico, denotaremos la matriz hessiana como:

$$\triangle_n = \begin{pmatrix} D_{11}f\left(\vec{x_0}\right) & D_{12}f\left(\vec{x_0}\right) & D_{13}f\left(\vec{x_0}\right) & \dots & D_{1n}f\left(\vec{x_0}\right) \\ D_{21}f\left(\vec{x_0}\right) & D_{22}f\left(\vec{x_0}\right) & D_{23}f\left(\vec{x_0}\right) & \dots & D_{2n}f\left(\vec{x_0}\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}f\left(\vec{x_0}\right) & D_{n2}f\left(\vec{x_0}\right) & D_{n3}f\left(\vec{x_0}\right) & \dots & D_{nn}f\left(\vec{x_0}\right) \end{pmatrix}$$

- $\vec{x_0}$ es un mínimo relativo si: $\triangle_1 > 0, \triangle_2 > 0, \dots, \triangle_n > 0$ y cuyo valor mínimo es $f\left(\vec{x_0}\right)$.
- $\vec{x_0}$ es un máximo relativo si: $\triangle_1 < 0, \triangle_2 > 0, \triangle_3 < 0, \triangle_4 > 0, \dots,$ y cuyo valor máximo es $f\left(\vec{x_0}\right)$.

Ejemplos

1.- Determinar los extremos relativos de la función:

$$f\left(x,y,z\right)=x^2+2y^2+z^2-6x+3y-2z+5$$

2.- Determinar los extremos relativos de la función:

$$f\left(x,y,z\right)=4x+xy-x^2-y^2-z^2-yz$$

MÁXIMO Y MÍNIMO SUJETO A RESTRICCIONES

En los problemas prácticos de maximizar y de minimizar una función f donde $f(x,y)$ está sujeta a condiciones específicas o restricciones en las variables, tales restricciones pueden expresarse como igualdades o como desigualdades.

Para maximizar o minimizar una función $f(x,y)$ sujeta a una restricción de igualdad se empleará el método de **Multiplicadores de Lagrange**.

Para maximizar o minimizar una función $f(x,y)$ sujeta a una restricción de desigualdad se empleará las **Condiciones de Kuhn - Tucker**.

Multiplicadores de Lagrange

Supongamos que se desea maximizar o minimizar la función $f(x,y)$ sujeto a la restricción $g(x,y)=0$, para esto formamos la función objetivo:

$$F\left(x,y,\lambda\right)=f\left(x,y\right)-\lambda\left(g,y\right)$$

Luego se calcula las derivadas parciales:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-\lambda\frac{\partial g(x,y)}{\partial x}=0 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\lambda\frac{\partial g(x,y)}{\partial y}=0 \\ \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=-g\left(x,y\right)=0 \end{cases}$$

La resolución de las tres ecuaciones nos da los puntos críticos restringidos, los cuales satisfacen la restricción.

Los máximos y mínimos se obtiene en forma similar que los máximos y mínimos no restringidos. Es decir:

- Si $x = a, y = b$ es un punto crítico si:

$$\triangle^* = \frac{\partial^2 f\left(a, b\right)}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f\left(a, b\right)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f\left(a, b\right)}{\partial y \partial x}\right)^2$$

- Si

$$\triangle^* \begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} < 0 & \text{(a, b) es máximo} \\ \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} > 0 & \text{(a, b) es mínimo} \end{cases}$$

Ejemplos

1.- Obtener los máximos y mínimos de la función $f\left(x, y\right) = 3x^2 + 4y^2 - xy$, sujeta a la restricción $2x + y = 21$.
2.- Maximizar $f\left(x, y\right) = e^{xy}$ sujeta a $x^2 + y^2 - 8 = 0$

Demanda de bienes de consumo

Supongamos que:

- $U = U(x, y)$ sea la función de utilidad (el gusto,preferencia) de un consumidor, donde x e y son, respectivamente,la cantidad de bienes de X e Y.
- $M = xP_x + yP_y$ es la recta de presupuesto (ingreso) del consumidor, donde P_y y P_x son los precios de mercado de Y y X respectivamente.
- El punto (x_0, y_0) maximiza la utilidad $U = U(x, y)$ sujeta a la restricción presupuestaria del individuo.

Ejemplos

La función utilidad de un ama de casa A es $U(x, y) = 20x + 40y - 2x^2 - 3y^2$, donde x e y son respectivamente las cantidades que se compran los bienes X (papa) y Y (camote). Supóngase que el ingreso monetario de A es \$28 y que los precios de X e Y son respectivamente \$4, \$5.

Demanda de factores de producción

Supongamos que:

- $X = f(K, L)$ sea la función de producción.
- $C = rK + wL$ sea la función costo, en donde K, L son las cantidades de insumo de los factores de producción K y L , y r, w son los costos respectivos de los factores (ya sean salarios o rentas).
- El punto (K_0, L_0) maximiza la función de producción.

Ejemplos

La función de producción de la empresa A es $X = 26K + 15L + 2KL - 2K^2 - 2L^2$ donde K, L son las cantidades de insumos de los factores de producción K y L. Supóngase que los salarios para K y L son respectivamente \$2 y \$3, y que la empresa puede gastar únicamente \$50 en estos insumos. Encuentre la producción máxima.

Condiciones de Kuhn-Tucker

Las condiciones de Kuhn-Tucker establece que un punto (x, y) es un máximo local de $f(x, y)$ cuando $g(x, y) \leq 0$, solamente si existe un valor no negativo de λ tal que λ y (x, y) satisfacen las condiciones de Kuhn-Tucker.

$$\begin{cases} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0 \\ \\ \lambda g\left(x, y\right) = 0 \\ \\ g\left(x, y\right) \leq 0 \end{cases}$$

Estos últimos es suficiente si $f(x,y)$ es cóncava hacia arriba y $g(x,y)$ es cóncava hacia arriba, debido a que un punto máximo de $f(x,y)$ es un punto mínimo de $-f(x,y)$, este resultado también se puede aplicar para minimizar una función cóncava hacia rriba según una restricción también cóncava hacia arriba, para el caso en el que la restricción sea de la forma $g(x,y) \geq 0$, entonces $g(x,y)$ debe ser cóncava hacia abajo.

Ejemplos

1) Obtenga el máximo $f(x,y) = 10xy - 5x^2 - 7y^2 + 40x$, si $x + y \leq 13$.

2) El costo de producción es una función de las cantidades producidas x e y, siendo su función $C = 6x^2 + 3y^2$. ¿Qué cantidad de cada uno de los artículos debe producirse para minimizar $C = C(x,y)$, si $x + y \geq 18$.