Material de trabajo

Especialización : Fundamentos de Matemáticas y Estadísticas para Ciencias de Datos

Módulo : Fundamentos de Matemáticas

Tema : Cálculo diferencial

Docente : Mg. Leonel Heredia Altamirano

Ejercicio 01

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt[3]{68-x^2}-\sqrt{3x^3-8}}{x-2}$

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x^2-(a+1)+a}{x^3-a^3}$

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-x^2-8x+12}{x^3-x^2-12x+20}$

d) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+7}-4}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

g) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{3x-6}{1-\sqrt{4x-7}}$

h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[8]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-x-1}{x-1}$

j) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$

k) $\lim\limits_{x\to 64} \dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$

l) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

Ejercicio 02

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+2x-1}{5x^2-7x+4}$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+x+1}{2x^3-x^2+4}$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{x^2+3x}-x}{x}$

d) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+5x+6}}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2+1}{x^3+2}$

f) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$

g) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{9x^2+1}-3x}{x}$

h) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{5x^3+4}{x^2+1}$

i) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{7x-\sqrt{x^2+1}}{x}$

$j)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$

$k)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$

$l)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

Ejercicio 03

Calcular los siguientes límites:

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}$

$b)$ $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{1}{(x-3)^2}$

$c)$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{x(x-1)}$

$d)$ $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{(x-2)^3}$

$e)$ $\lim\limits_{x\to -4^-} \dfrac{5}{(x+4)^2}$

$f)$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^3}$

$g)$ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x}{(x-1)^2}$

$h)$ $\lim\limits_{x\to 5^-} \dfrac{x^2-25}{x-5}$

$i)$ $\lim\limits_{x\to -2^+} \dfrac{3x}{x+2}$

$j)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

$k)$ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$

$l)$ $\lim\limits_{x\to \pi^-} \tan(x)$

Ejercicio 04

Calcular los siguientes límites:

$a)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} (x)^x$

$b)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$

$c)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} (e^x)^{1/x}$

$d)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{2x}$

$e)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^{1/x}$

$f)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-x)^{1/x}$

$g)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+1}{2x}\right)^x$

$h)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(x^2+3x\right)^{\frac{1}{x}}$

$i)$ $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{1/x^2}$

$j)$ $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{5}{x}\right)^{3x}$

$k)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln(1+x))^{1/x}$

$l)$ $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$

Ejercicio 05

Calcular las siguientes derivadas:

$a)$ $y = \dfrac{1}{(x^2+a)^{m-2}} \cdot \dfrac{x}{(x^3+b)^n}$

$b)$ $y = \left(\dfrac{x^2+x-3}{1+x+\sqrt{1-x^2}}\right)^n$

c) $y = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$

d) $y = \dfrac{\sqrt{x^2 + a}}{\sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{a - x}}$

e) $y = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$

f) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x^3 + 3x^2}}{x}$

g) $y = \left(3x^2 + 4x + 8\right)\sqrt{x - 1}$

h) $y = \dfrac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$

i) $y = \left(\dfrac{x^3 - 1}{2x^3 + 1}\right)^4$

j) $y = \sqrt[3]{\dfrac{1 + x^3}{1 - x^3}}$

k) $y = \dfrac{4x + 6}{\sqrt{x^2 + 3x + 4}}$

l) $y = \left(\dfrac{x^2 + 3x + 5}{2x - 1}\right)^5$

Ejercicio 06

Calcular el polinomio de Taylor para:

a) Aproxima $\ln(x)$ en $x = 1$

b) Aproxima e^x en $x = 2$

c) Aproxima $\dfrac{1}{x}$ en $x = 1$

d) Aproxima $\sqrt{x}$ en $x = 4$

e) Aproxima $\cos(x)$ en $x = \dfrac{\pi}{4}$

f) Aproxima $\sin(x)$ en $x = \dfrac{\pi}{6}$

g) Aproxima $\ln(1 + x^2)$ en $x = 1$

h) Aproxima $\dfrac{1}{x^2 + 1}$ en $x = 1$

i) Aproxima e^{-x^2} en $x = 1$

j) Aproxima $\sqrt[3]{x}$ en $x = 8$

k) Aproxima $\ln(x + 2)$ en $x = 1$

l) Aproxima $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en $x = 4$

Ejercicio 07

Calcular todas las derivadas parciales posibles de:

a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 y^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}}$

b) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$

c) $f(x, y) = e^{xy} \sin(x + y)$

d) $f(x, y, z) = \dfrac{x^3 + y^3 + z^3}{x^2 + y^2 + z^2}$

e) $f(x, y, z) = x^2 \ln(yz) + e^{xz}$

f) $f(x, y, z) = \dfrac{xy}{z^2 + x^2 + y^2}$

g) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{z^2+x^2+y^2}}$

h) $f(x,y,z,w) = \dfrac{x^2+y^2+z^2}{w+x+y+z}$

i) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$

j) $f(x,y,z,w) = \dfrac{x^3+y^3+z^3+w^3}{x+y+z+w}$

k) $f(x,y,z,w) = \ln(x^2+y^2+z^2+w^2)$

l) $f(x,y,z) = \dfrac{x^3+y^2}{\sqrt{z^2+1}}$

m) $f(x,y,z,w) = \sin(xy+zw)$

n) $f(x,y,z,w) = \dfrac{x^2y^2z^2}{w^2+x^2y^2+z^2}$

o) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{z^2+1}}$

p) $f(x,y,z,w) = \ln\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{w^2+1}\right)$

q) $f(x,y,z,w) = \dfrac{x^2y^2z^2}{w+x+y+z}$

r) $f(x,y,z) = \dfrac{x+y+z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

s) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2-z^2}$

t) $f(x,y,z) = \dfrac{x^3+y^3+z^3}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

u) $f(x,y,z) = \ln(x^2+y^2+z^2+1)$

v) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2y+y^2z+z^2x}{x+y+z}$

w) $f(x,y,z) = \sin(xy)+\cos(yz)+e^{xz}$

Ejercicio 08

1. **Análisis de producción:** La función de beneficio está dada por:

$$f(x,y) = 4x^2+y^2-4xy+2x-3y$$

Encuentre los puntos críticos y clasifique su naturaleza con la matriz hessiana.

2. **Economía de escala:** La función de costos totales es:

$$C(x,y) = x^3+y^3-3xy+6x-9y$$

Determine si los puntos críticos corresponden a máximos, mínimos o puntos de silla.

3. **Optimización energética:** Sea la función:

$$E(x, y) = e^{x+y} + x^2y - y^3$$

Identifique los puntos críticos y clasifíquelos.

4. **Sistema físico tridimensional:** Sea el potencial:

$$V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz + xz$$

Determine y clasifique los puntos críticos mediante la matriz hessiana.

5. **Modelado económico:** Utilidad marginal en función de insumos:

$$U(x, y) = \ln(x) + \ln(y) - x^2 - xy - y^2$$

Determine la naturaleza de los puntos críticos.

6. **Estabilidad estructural:** Energía almacenada en una lámina:

$$E(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2 - 4y^2 + 16$$

Encuentre los puntos críticos y clasifíquelos.

7. **Topografía y geografía:** Superficie del terreno dada por:

$$f(x, y) = \sin(x) \cdot \cos(y) + x^2 - y^2$$

Encuentre los puntos críticos y determine su tipo.

8. **Dinámica poblacional:** Suponga que la función de presión poblacional es:

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - \ln(xy)$$

Halle los puntos críticos en el dominio válido y clasifíquelos.

9. **Interacción química:** Potencial de reacción entre tres componentes:

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz - 3x - 3y - 3z$$

Encuentre y clasifique los puntos críticos.

10. **Estudio térmico:** Temperatura en una placa metálica:

$$T(x, y) = e^{-x^2-y^2}(x^2 - y^2)$$

Determine los puntos críticos y su naturaleza aplicando el criterio de la matriz hessiana.

Ejercicio 09

1. **Economía – Asignación óptima de consumo:**
Sean x y y los niveles de consumo de dos bienes. La utilidad total se modela como:

$$f(x, y) = \ln(x^2 + 1) + \sqrt{y}$$

Sujeto al presupuesto total disponible:

$$3x + 2y = 120$$

2. **Ingeniería – Resistencia estructural:**
   Sean x y y los espesores de dos componentes en mm. La función de resistencia estructural se define como:
   $$f(x,y) = x^2y - \ln(y+1)$$
   Bajo la restricción lineal de material disponible:
   $$x + 2y = 50$$

3. **Biología – Dosis combinada de medicamentos:**
   x y y son dosis (mg) de dos fármacos. La eficacia combinada se modela por:
   $$f(x,y) = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}$$
   Sujetos a una restricción total de dosis:
   $$x + y = 80$$

4. **Producción – Rentabilidad de insumos:**
   x es la cantidad de mano de obra (horas) y y la cantidad de capital (unidades monetarias). La rentabilidad esperada es:
   $$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x + y + 5}}$$
   Sujeto a una restricción de inversión total:
   $$5x + 10y = 1000$$

5. **Física – Energía potencial combinada:**
   x y y representan posiciones relativas de dos partículas. La energía potencial del sistema es:
   $$f(x,y) = \frac{x^2 + y^2}{x + y + 2}$$
   Sujeta a una relación de posición impuesta:
   $$2x - y = 4$$

6. **Química – Mezcla óptima de reactivos:**
   x y y son cantidades de dos reactivos. La eficiencia de la reacción es:
   $$f(x,y) = \sin(x)\cos(y)$$
   Bajo la restricción de cantidad total de mezcla:
   $$x + y = \pi$$

7. **Logística – Distribución eficiente:**
   x y y son unidades distribuidas a dos centros logísticos. El costo total es:
   $$f(x,y) = \ln(x+1) + \frac{y^2}{x+2}$$

Sujeto a capacidad total de envío:

$$x + y = 40$$

8. **Marketing – Impacto publicitario:**
   x y y son montos invertidos en medios tradicionales y digitales, respectivamente. El impacto estimado es:

   $$f(x, y) = \sqrt{2x + y} + \ln(y + 1)$$

   Sujeto al presupuesto total:

   $$x + y = 200$$

9. **Agronomía – Fertilización óptima:**
   x y y representan dosis de nitrógeno y fósforo. La productividad es:

   $$f(x, y) = \frac{xy}{x + 3y + 1}$$

   Bajo una restricción de cantidad total de fertilizante:

   $$x + y = 60$$

10. **Inteligencia Artificial – Costo de entrenamiento:**
    x y y son horas de entrenamiento en dos tipos de datos. El error esperado del modelo es:

    $$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$$

    Sujeto a una restricción de horas de cómputo disponibles:

    $$x + y = 10$$