

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

**«Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ»
(НИЯУ МИФИ)**

Методические...

Оглавление

	Стр.
Глава 1. Введение	4
1.1 Востребованность изотопных смесей (бинарных и многокомпонентных) в различных областях науки и техники (примеры).	5
1.2 Принципы каскадирования одиночных разделительных элементов. Роль теории каскадов для разделения изотопных смесей при изучении физических закономерностей массопереноса компонентов в подобных установках.	5
1.3 Понятие и роль модельных каскадов в общей теории.	5
Глава 2. Общие уравнения симметрично-противоточного каскада	7
2.1 Понятие разделительного элемента, ступени, каскада.	7
2.1.1 Понятие разделительного элемента	7
2.1.2 Понятие разделительной ступени	8
2.1.3 Понятие каскада.	10
2.2 Разделительная способность (мощность). Работа разделения. Разделительный потенциал.	12
2.3 Получение уравнений симметрично-противоточного каскада для случая произвольного числа компонентов и произвольных коэффициентов разделения.	23
Глава 3. Модельные каскады для разделения бинарных смесей.	31
3.1 «Идеальный» каскад	31
3.1.1 «Идеальный» каскад для разделения бинарных смесей как частный случай симметрично-противоточного каскада с постоянными коэффициентами разделения.	31
3.1.2 Идеальный каскад с малым обогащением на ступени (случай слабого обогащения).	33
3.2 Алгоритм расчета параметров «идеального» каскада для различных исходных условий. Примеры расчетов.	36

3.2.1	Идеальный каскад с одинаковым немалым коэффициентом разделения на ступенях.	39
3.3	Задания для самостоятельного выполнения.	45
Глава 4. Модельные каскады для разделения		
	многокомпонентных смесей.	46
4.1	Понятие каскада	49
4.2	Получение уравнений симметрично-противоточного каскада для случая произвольного числа компонентов и произвольных коэффициентов разделения.	49
4.3	Частные случаи симметрично-противоточного каскада для разделения многокомпонентных изотопных смесей.	53
4.4	«Квазиидеальный» каскад и Q-каскад, их физическая взаимосвязь.	53
4.5	R-каскад и его использование при оптимизации параметров каскадов для разделения многокомпонентных изотопных смесей.	55
4.6	Алгоритмы расчета параметров ординарных «квазиидеального» каскада и Q-каскада при различных заданных параметрах. Примеры расчетов.	58
4.7	Задания для самостоятельного выполнения.	58
Список сокращений и условных обозначений		59
Список литературы		61

Глава 1. Введение

1.1 Востребованность изотопных смесей (бинарных и многокомпонентных) в различных областях науки и техники (примеры).

Востребованность изотопных смесей (бинарных и многокомпонентных) в различных областях науки и техники (примеры).

1.2 Принципы каскадирования одиночных разделительных элементов. Роль теории каскадов для разделения изотопных смесей при изучении физических закономерностей массопереноса компонентов в подобных установках.

Принципы каскадирования одиночных разделительных элементов. Роль теории каскадов для разделения изотопных смесей при изучении физических закономерностей массопереноса компонентов в подобных установках.

1.3 Понятие и роль модельных каскадов в общей теории.

....

Под поверочным расчетом каскада подразумевают следующую задачу: Задано: состав исходной разделяемой смеси, число ступеней в каскаде и величины питающих их потоков, величины внешнего потока питания и одного из выходящих потоков каскада (отбора или отвала), параметры ступени (например, относительные коэффициенты разделения ступеней и др.). Подлежат определению: концентрации всех компонентов в потоках отбора и отвала и распределение концентраций компонентов по ступеням каскада. Поверочный расчет каскада необходим при исследовании оптимального управления процессом разделения, при изменении режимов работы и отдельных параметров разделительного каскада [1]. Основные трудности поверочного расчета связаны с тем, что неизвестны концентрации компонентов в потоках отбора и

отвала сами явно входят в основные уравнения переноса (или их граничные условия). Невозможность аналитического решения этих уравнений вызывает необходимость разработки численных методов, малочувствительных к заданию начальных приближений для концентраций компонентов в выходящих потоках. На сегодняшний день предложены различные методы поверочного расчета, которые позволяют численно решить данную задачу [1—6].

Под проектировочным расчетом каскада обычно подразумевают следующую задачу [1]. Задано: состав исходной разделяемой смеси, один из выходящих потоков каскада (отбор или отвал), концентрации одного из компонентов (целевого или ключевого) в потоках отбора и отвала. Подлежат определению: все внутренние параметры каскада (распределение потока и концентраций компонентов по ступеням каскада и др.), концентрации остальных компонентов (всех кроме ключевого) в потоках отбора и отвала. При этом, очевидно, что найденные параметры каскада должны соответствовать оптимальным условиям разделения в каскаде.

Глава 2. Общие уравнения симметрично-противоточного каскада

2.1 Понятие разделительного элемента, ступени, каскада.

2.1.1 Понятие разделительного элемента

В общем случае разделительный элемент может иметь несколько входов и выходов. В практике разделения изотопов однофазными методами, он имеет, как правило, один вход и два выхода и называется *простым разделительным элементом* (рис. 4.1). В этом случае в разделительный элемент подают поток разделяемой смеси L_3 с концентрацией (мольной долей, так как если речь идет о разделении изотопов тяжелых элементов, то в этом случае величины мольной и массовой концентрации практически совпадают) ценного (целевого изотопа) c , а из него отбирают два потока: «обогащенный», с более высокой, чем во входящем потоке, концентрацией c' , и «обедненный», с более низкой концентрацией c'' . В отсутствие потерь рабочего вещества, которые могут быть вызваны, например, его частичным разложением в процессе разделения, обогащенный поток будет равен $L'_3 = \theta L_3$, а обедненный, соответственно, $L''_3 = (1 - \theta)L_3$. Отношение $\theta = \frac{L'_3}{L_3}$ называют *коэффициентом деления потока*, а расход L_3 – *производительностью элемента*.

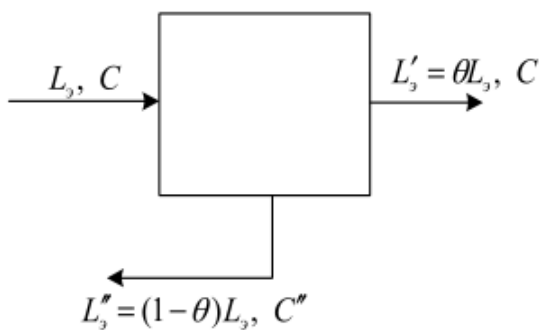


Рисунок 2.1 — Схема разделительной ступени

2.1.2 Понятие разделительной ступени

В разделительную ступень параллельно соединяют элементы с одинаковыми величинами θ , c , c' и c'' (рис. 4.1). Она имеет суммарную производительность L и выходящие потоки $L' = \theta L$ и $L'' = (1 - \theta)L$. Такое представление о работе элементов в ступени предполагает, что все они работают в одинаковых условиях и имеют одинаковые характеристики.

Между приращением $\delta' = c' - c$ и уменьшением $\delta'' = c - c''$ концентрации целевого компонента в выходящих потоках разделительного элемента существует определенная связь. Для стационарного состояния эта связь может быть найдена из следующих уравнений материального баланса:

$$L = L' + L'', \quad (2.1)$$

$$Lc = L'(c + \delta') + L''(c - \delta''). \quad (2.2)$$

Из 2.1 и 2.2 следует, что

$$\delta'' = \frac{L'}{L''} \delta' = \frac{\theta}{1 - \theta} \delta'. \quad (2.3)$$

Одной из основных разделительных характеристик ступени является *полный коэффициент разделения*, который для большинства однофазных методов разделения не зависит от состава изотопной смеси

$$q = \frac{c'}{1 - c'} \bigg/ \frac{c''}{1 - c''} = \frac{R'}{R''}. \quad (2.4)$$

Здесь R' и R'' - значения относительной концентрации ценного (целевого) изотопа ($R = \frac{c}{1-c}$) в потоках обогащенной и обедненной фракции. Коэффициент разделения q характеризует эффект разделения, достигаемый в одном элементе или ступени, и может зависеть от производительности ступени L и коэффициента деления потока θ :

$$q = q(L, \theta), \quad (2.5)$$

где $q(L, \theta)$ - некоторая функция, которую определяют по результатам теоретических или экспериментальных исследований.

В соответствии со сказанным к числу основных параметров ступени относятся восемь величин: L , L' , L'' , c , c' , c'' , q , θ , связанных независимыми соотношениями 2.1 – 2.5. Причём из перечисленных параметров свободными (независимыми) являются только три. Как правило, в качестве свободных параметров рассматривают величины L , c и θ . Однако, в зависимости от рассматриваемой задачи могут быть выбраны их различные комбинации.

Для удобства анализа эффекта разделения в элементе (ступени) могут быть введены дополнительные параметры и характеристики. Например, коэффициенты разделения по обогащённой α и обеднённой β фракциям, рассчитываемые как

$$\alpha = \frac{c'}{1 - c'} \bigg/ \frac{c}{1 - c}, \beta = \frac{c}{1 - c} \bigg/ \frac{c''}{1 - c''}. \quad (2.6)$$

Эти параметры характеризуют величину эффекта разделения в обогащённой и обеднённой фракции по отношению к концентрации в потоке питания. Кроме того, для описания процесса разделения удобно пользоваться коэффициентами обогащения ε , ε' , ε'' , равными

$$\varepsilon = q - 1, \varepsilon' = \alpha - 1, \varepsilon'' = 1 - 1/\beta. \quad (2.7)$$

Набор параметров ε , ε' , ε'' позволяет определить *полное обогащение ступени*

$$\delta = c' - c'' = \delta' + \delta'', \quad (2.8)$$

где $\delta' = c' - c$, $\delta'' = c - c''$. Если выразить c' и c'' из 2.6 и использовать 2.7, то в результате получим

$$\delta' = \frac{\varepsilon' c (1 - c)}{1 + \varepsilon' c}, \delta'' = \frac{\varepsilon'' c (1 - c)}{1 - \varepsilon'' c}. \quad (2.9)$$

Отсюда видно, что при заданных коэффициентах ε' , ε'' зависимости δ' и δ'' от c имеют максимумы, не совпадающие друг с другом. В случае «слабого обогащения» ($\varepsilon = q - 1 \ll 1$) наибольшие значения δ' и δ'' достигаются в одной точке $c = 0,5$, а формулы 2.9 существенно упрощаются:

$$\delta' = \varepsilon' c (1 - c), \delta'' = \varepsilon'' c (1 - c). \quad (2.10)$$

При подстановке 2.10 в 2.8 имеем

$$\delta = \varepsilon c (1 - c), \varepsilon' = \varepsilon (1 - \theta), \varepsilon'' = \theta \varepsilon. \quad (2.11)$$

Согласно 2.3 и 2.8 обогащения δ , δ' , δ'' связаны друг с другом балансовыми соотношениями

$$\delta' = (1 - \theta)\delta, \delta'' = \theta\delta. \quad (2.12)$$

Следовательно, если коэффициенты разделения не зависят от параметров L и θ , можно путем уменьшения θ повысить концентрацию ценного компонента в обогащённом потоке c' , производя таким образом «перераспределение» полного обогащения δ в выходных потоках. При этом концентрация в обеднённом потоке c'' будет приближаться к концентрации во входном потоке A . Очевидно, что возможность такого изменения обогащений δ' и δ'' связана с условиями сохранения материального баланса в разделительном элементе.

2.1.3 Понятие каскада.

Для получения требуемых концентраций ценного (целевого) изотопа ступени соединяют в последовательную цепочку – каскад, умножающий эффект разделения в одиночной разделительной ступени. Простейшей схемой последовательного соединения ступеней является так называемый *простой каскад* (рис. [cas]). Его отличительным признаком является подача обогащенной фракции на питание следующей ступени и выведение потоков обедненной фракции ступеней из процесса дальнейшей переработки. В такой схеме поток питания каскада F (от английского слова Feed) подают в первую ступень, поток отбора P (Product) является потоком обогащенной фракции последней n -ой ступени. Отвальный поток каскада W (Waste) образуют обедненные потоки ступеней (могут не смешиваться друг с другом). Так как эти потоки не участвуют в процессе обогащения, то простой каскад, по существу, является прямоточным. Для разделения изотопов, когда разделяемое вещество, как правило, является дорогим, простой каскад является неэффективным. Это обусловлено существенным сокращением потоков питания ступеней и выведением в отвал потоков с концентрацией ценного (целевого) изотопа, близкой к концентрации в обогащенных фракциях. Поэтому при разделении изотопов применяют более эффективную с точки зрения экономии сырья, а также имеющую ряд других преимуществ, противоточную (рециркуляционную) схему, в которой обедненная ценным компонентом

фракция возвращается в каскад для дальнейшей переработки. Простейшая схема такого каскада приведена на рис. [image2]. В этой схеме обогащенный поток $L'_s = \theta_s L_s$ из произвольной s -ой ступени подается на вход последующей $s + 1$ -ой ступени, а обедненный $L''_s = (1 - \theta_s)L_s$ — на вход $s - 1$ -ой ступени. При таком соединении на входе в s -ую ступень смешиваются потоки из предыдущей $s - 1$ -ой ступени и из последующей $s + 1$ -ой. Такой каскад является *противоточным*, а способ соединения ступеней с помощью внешних коммуникаций, т.е. таких коммуникаций, в которых передаются уже разделенные потоки, называют *внешним каскадированием*.

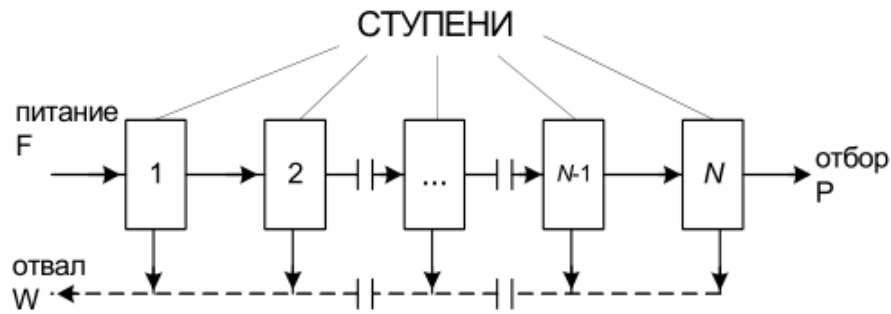


Рисунок 2.2 — Схема простого каскада.

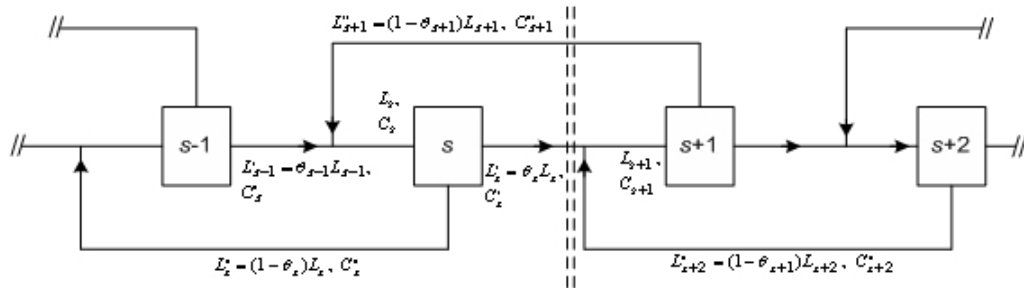


Рисунок 2.3 — Схема соединения ступеней в симметричном противоточном каскаде.

Изображенная на рис. [image2]. схема характерна тем, что между любыми соседними ступенями можно провести поперечное сечение (на рисунке изображено двойной пунктирной линией), пересекающее только две коммуникации. Такой каскад называют *симметричным*.

Если потоки направляют не в соседние предыдущую и последующую ступени, а через одну или через несколько ступеней, то такой противоточный каскад называется *несимметричным* (рис. [unsymmetr]).

Отметим, что при внешнем каскадировании разделительная ступень считается заданной ячейкой схемы, для которой коэффициент разделения и

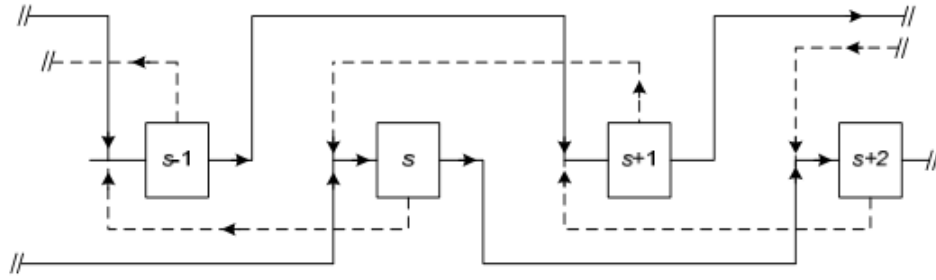


Рисунок 2.4 — Схема соединения ступеней в несимметричный каскад с подачей потока питания через одну ступень в прямом направлении.

его зависимость от коэффициента деления потоков должны быть известны, после чего сам процесс разделения оказывается для построения каскадов несущественным. Тем самым теория построения "внешних" потоков оказывается независимой от конкретного метода разделения.

2.2 Разделительная способность (мощность). Работа разделения. Разделительный потенциал.

В технологии разделения изотопов понятие работы разделения, разделительной мощности и разделительного потенциала имеют весьма важное значение, так как их использование позволяет не прибегая к сложным расчетам оценить необходимое число элементов в каскаде и удельные затраты на производство обогащенного продукта. Количественное определение работы разделения впервые было предложено английскими физиками Пайерлсом и Дираком. Они предположили, что должна существовать функция \tilde{U} , с помощью которой можно охарактеризовать «ценность» изотопной смеси как в качественном, так и в количественном отношении, и которую можно представить в виде произведения экстенсивной величины – количества разделяемой смеси M – на интенсивную величину – функцию $V(c)$, зависящую только от концентрации ценного изотопа и характеризующую качество смеси

$$\tilde{U} = MV(C). \quad (2.13)$$

Функцию $V(C)$, было предложено называть *разделительным потенциалом*. Необходимо иметь в виду, что функция \tilde{U} ничего общего со стоимостным

выражением не имеет и поэтому ее не следует смешивать с реальной ценой изотопной смеси.

Процесс разделения смеси в разделительной установке (Под разделительной установкой здесь будем понимать разделительный каскад, отдельной ячейкой которого является разделительный элемент) для любого метода разделения схематически можно представить следующим образом. До начала процесса имелось некоторое количество исходной смеси F^* (в ед. массы) с концентрацией ценного изотопа C_F . С использованием введенных понятий изотопная ценность этого смеси будет определяться значением функции $\tilde{U}_{F^*} = F^*V(C_F)$. В результате процесса разделения получают обогащенный продукт в количестве P^* (в ед. массы) с концентрацией ценного изотопа C_P и обедненный продукт в количестве W^* (в ед. массы) с концентрацией C_W . Изотопная ценность этих продуктов будет $\tilde{U}_{P^*} = P^*V(C_P)$ и $\tilde{U}_{W^*} = W^*V(C_W)$ соответственно. В результате проведения процесса разделения функция \tilde{U}_{F^*} изменится на величину $\Delta\tilde{U}$:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{U} &= \tilde{U}_{P^*} + \tilde{U}_{W^*} - \tilde{U}_{F^*} = \\ &= P^*V(C_P) + W^*V(C_W) - F^*V(C_F)\end{aligned}\tag{2.14}$$

Следовательно «ценность» смеси будет выражаться соотношением

$$F^*V(C_F) + \Delta\tilde{U} = P^*V(C_P) + W^*V(C_W).\tag{2.15}$$

Из соотношения 2.15 следует, что величина $\Delta\tilde{U}$ характеризует меру усилий, которую необходимо затратить на получение из первоначальной бинарной смеси изотопов два новых продукта – обогащенный и обедненный одним из изотопов этой смеси. Приращение функции \tilde{U} , характеризующее перераспределение первоначальной массы разделяемого вещества между двумя выходными потоками и изменение изотопного состава в них при прохождении смеси через разделительную установку, называется *работой разделения*. Введенное понятие работы разделения не имеет ничего общего с реальными энергетическими затратами на поддержание внешних и внутренних потоков в разделительной установке. Из формулы 2.14 следует, что введенная таким образом работа разделения имеет размерность количества вещества.

Отметим также, что величина работы разделения не дает ответ на вопрос о том, за какое время эта работа может быть выполнена на той или иной разделительной установке. Для получения ответа на это вопрос необходимо знать

разделительную мощность (способность) установки ΔU , то есть работу разделения, выполняемую установкой в единицу времени. Для перехода от $\Delta \tilde{U}$ к ΔU достаточно в соотношении 2.14 вместо F^*, P^*, W^* подставить величины входящего (F) и выходящих (P и W) в установку потоков соответственно.

$$\Delta U = PV(C_P) + WV(C_W) - FV(C_F). \quad (2.16)$$

Для вычисления работы разделения и разделительной способности необходимо знать явный вид функции $V(C)$. Пайерлс и Дирак решили этот вопрос, рассматривая разделительную способность ступени (элемента), которую в соответствии с вышесказанным можно выразить следующим образом:

$$\delta U = \theta LV(C') + (1 - \theta)LV(C'') - LV(C). \quad (2.17)$$

В случае слабого разделения ($q \sim 1$) функции $V(A')$ и $V(A'')$ можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки A , ограничиваясь членами второго порядка малости

$$V(A') \approx V(A) + \frac{dV}{dA}\delta' + \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dA^2}(\delta')^2, \quad (2.18)$$

$$V(A'') \approx V(A) - \frac{dV}{dA}\delta'' + \frac{1}{2}\frac{d^2V}{dA^2}(\delta'')^2. \quad (2.19)$$

Подставив их в 2.17, находим

$$\delta U = [\theta L + (1 - \theta)L - L] V(A) + [\theta L\delta' - (1 - \theta)L\delta''] \frac{dV}{dA} + \frac{1}{2} [\theta L(\delta')^2 + (1 - \theta)L(\delta'')^2] \frac{d^2V}{dA^2}. \quad (2.20)$$

Из условий баланса 2.1, 2.2 и 2.12 коэффициенты при $V(A)$ и dV/dA равны нулю. Поэтому с учётом 2.11 и 2.12 имеем

$$\delta U = \frac{1}{2}\theta(1 - \theta)L\epsilon^2 \frac{d^2V}{dA^2} A^2(1 - A)^2. \quad (2.21)$$

Пайерлс и Дирак ввели условие, согласно которому разделительная способность (мощность) ступени или элемента определяется только его разделительными характеристиками L , θ , ϵ и не должна зависеть от состава питающей его смеси. Это условие обосновывается следующим соображением. Если разделительная способность отдельной ячейки установки – разделительного элемента – не зависит от концентрации и все элементы работают в

идентичных условиях, то есть с одинаковыми L , θ , ε , то суммарная разделительная способность элементов, составляющих эту установку, будет равна произведению $Z \cdot \delta U_{M;}$, где $\delta U_{M;}$ - разделительная способность одного элемента, Z – число элементов в установке. Если процесс разделения организован так, что потери работы разделения (разделительной способности) отсутствуют, то величина $Z \cdot \delta U_{M;}$ будет равна разделительной способности всей установки ΔU , вычисляемой по формуле 2.16, то есть

$$\Delta U = Z \cdot \delta U_{M;}. \quad (2.22)$$

Откуда число разделительных элементов в каскаде будет определяться по формуле

$$Z = \frac{\Delta U}{\delta U_{M;}}. \quad (2.23)$$

Таким образом, если условие независимости разделительной способности от концентрации выполнено, то появляется возможность вычислить важную характеристику процесса разделения – суммарное число элементов, обеспечивающих необходимую разделительную способность установки для решения заданной разделительной задачи.

Условие независимости разделительной способности ступени (элемента) от концентрации приводит к следующему уравнению:

$$\delta U = \frac{1}{2}\theta(1 - \theta)L\varepsilon^2 \frac{d^2 V}{dc^2} c^2(1 - c)^2 = const. \quad (2.24)$$

Если в уравнении 2.24 выбрать постоянную в виде

$$const = \frac{1}{2}\theta(1 - \theta)L\varepsilon^2, \quad (2.25)$$

то для определения потенциала $V(c)$ получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 V}{dc^2} = \frac{1}{c^2(1 - c^2)}, \quad (2.26)$$

общее решение которого имеет вид:

$$V(c) = (2c - 1) \ln \frac{c}{1 - c} + ac + b. \quad (2.27)$$

Произвольные постоянные в выражении 2.27 должны быть определены дополнительными условиями. Однако нетрудно видеть, что эти постоянные не имеют существенного значения, так как при вычислении работы разделения по формуле 2.15 или разделительной способности по формуле 2.16 они не входят в окончательный результат с учетом уравнений материального баланса. Поэтому, следуя Пайерлсу, можно положить $a = b = 0$ и тогда потенциал приобретает вид

$$V(C) = (2A - 1) \ln \frac{A}{1 - A}. \quad (2.28)$$

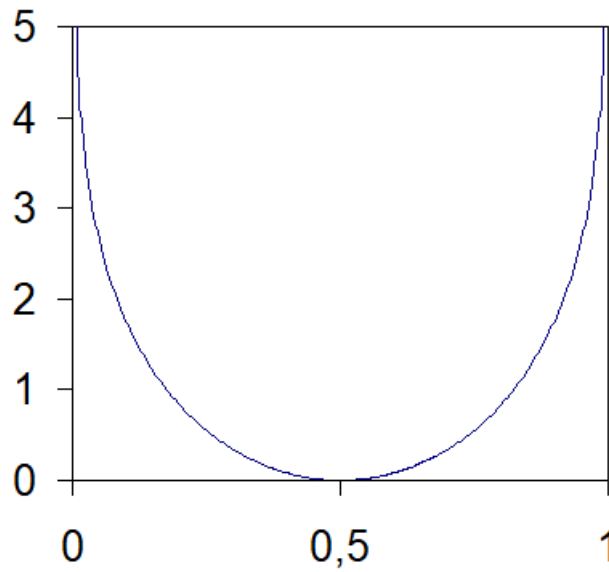


Рисунок 2.5 — Зависимость разделительного потенциала от концентрации.

В этой форме его обычно называют потенциалом Пайерлса-Дирака. Графический вид функции $V(A)$ показан на рис. 2.5.

Разделительный потенциал Пайерлса-Дирака и его производная равны нулю при $c=0,5$. При любых других значениях концентрации потенциал $V(c) > 0$, а при $c \rightarrow 0$ или $c \rightarrow \infty$ потенциал $V(c) \rightarrow \infty$, что означает необходимость бесконечно большой работы разделения для получения чистых изотопных продуктов.

Таким образом, в случае «слабого обогащения» разделительный потенциал определяется формулой 2.28, а разделительная способность – соотношением 2.25.

Какой физический смысл имеет разделительная способность? Пайерлс и Фукс установили прямую связь величины δU с уменьшением энтропии смеси в единицу времени $\Delta S_{\text{разд.}}$, которое имеет место при стационарной работе

разделительной ступени (элемента). Величину $\Delta S_{\text{разд.}}$ можно рассчитать из следующих соображений. Энтропия при образовании одного моля смеси идеальных газов или сильно разбавленного раствора из чистых компонентов равна

$$S = -\tilde{R} [c \ln c + (1 - c) \ln(1 - c)], \quad (2.29)$$

где \tilde{R} - газовая постоянная.

Если из L молей питающей смеси с концентрацией C получается на выходе ступени (элемента) в единицу времени $L' = \theta L$ молей обогащенного до концентрации C' , и $L'' = (1 - \theta)L$ молей, обедненных до концентрации C'' , то изменение энтропии в единицу времени $\Delta S_{\text{разд.}}$ будет равно

$$\Delta S_{\text{разд.}} = -[LS(C) - \theta LS(C') - (1 - \theta)LS(C'')]. \quad (2.30)$$

В случае «слабого разделения» выражение для $\Delta S_{\text{разд.}}$ заметно упрощается, если соотношение 2.30 представить в виде

$$\Delta S_{\text{разд.}} = \theta LS(C + \delta') + (1 - \theta)LS(C - \delta'') - LS(C). \quad (2.31)$$

Разлагая в ряд функции $S(C + \delta')$ и $S(C - \delta'')$ в ряд Тейлора в окрестности точки C и ограничиваясь членами второго порядка малости, после несложных преобразований получаем

$$\Delta S_{\text{разд.}} = \frac{\theta(1 - \theta)}{2} \delta^2 \frac{d^2 S}{dc^2}. \quad (2.32)$$

Учитывая, что $\delta = \varepsilon c(1 - c)$ и $\frac{d^2 S}{dc^2} = -\frac{\tilde{R}}{c(1-c)}$, и подставляя выражение 2.32 в 2.31, получим

$$\Delta S_{\text{разд.}} = -\frac{\theta(1 - \theta)}{2} L \varepsilon^2 \tilde{R} C(1 - C), \quad (2.33)$$

которое с учетом выражения 2.25 может быть переписано в виде

$$\Delta S_{\text{разд.}} = -\delta U \cdot \tilde{R} C(1 - C) \quad (2.34)$$

Из полученного выражения 2.34 следует, что величина разделительной способности δU прямо пропорциональна уменьшению величины безразмерной энтропии смеси $\Delta S_{\text{разд.}}/\tilde{R}$. Изменение концентраций компонентов в смеси газов связано с изменением меры порядка. В общем случае мерой порядка служит энтропия. В соответствии с 2.34 уменьшение энтропии при разделении на ступени

произведению концентраций компонентов изотопной смеси $c(1-c)$. Это произведение определяет вероятность нахождения в смеси пары различных молекул. Вследствие этого разделительная способность ступени равна уменьшению безразмерной энтропии, отнесенной к величине этой вероятности. Таким образом, разделительная ступень увеличивает меру порядка в смеси изотопов. Скорость увеличения этой меры определяет разделительную способность ступени.

Перейдем теперь к случаю, когда коэффициент разделения ступени q заметно отличается от единицы. При произвольных значениях полного коэффициента разделения q функциональное уравнение

$$\delta U = \theta LV(C') + (1 - \theta)LV(C'') - LV(C) = \text{const} \quad (2.35)$$

имеет решение, при котором функция V зависит только от концентрации в случае симметричной работы ступени, то есть когда $\alpha = \beta = \sqrt{q}$ [1].

Если процесс разделения в ступени симметричен, то выполняются условия

$$R' = \alpha R, \quad R'' = \frac{1}{\alpha} R, \quad \theta = \frac{1 + \alpha R}{(\alpha + 1)(1 + R)}, \quad 1 - \theta = \frac{\alpha + R}{(\alpha + 1)(1 + R)}, \quad (2.36)$$

где $R = \frac{C}{1-C}$.

Подставляя 2.36 в 2.35, имеем

$$\frac{\delta U}{L} = \frac{1 + \alpha R}{(\alpha + 1)(1 + R)} V(\alpha R) + \frac{\alpha(1 + \frac{R}{\alpha})}{(\alpha + 1)(1 + R)} V\left(\frac{R}{\alpha}\right) - V(R) = \text{const}. \quad (2.37)$$

Введем новую переменную l следующим образом:

$$R = R_0 \alpha^l, \quad (2.38)$$

где R_0 – константа, и положим, что

$$(1 + R)V(R) \equiv F(l). \quad (2.39)$$

С учетом 2.38 и 2.39 уравнение 2.37 трансформируется в классическое разностное уравнение второго порядка

$$F(l + 1) + \alpha F(l - 1) - (\alpha + 1)F(l) = A(\alpha + 1)(1 + R_0 \alpha^l), \quad (2.40)$$

где A – константа.

Общее решение уравнения 2.40 можно представить в виде

$$F(l) = A \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} l (R_0 \alpha^l - 1) + a \alpha^l + b, \quad (2.41)$$

где a и b также константы.

Используя выражения 2.37 и 2.41, найдем вид функции $V(R)$

$$V(R) = A \frac{\alpha + 1}{(\alpha - 1) \ln \alpha} \left[(2c - 1) \ln \frac{R}{R_0} + a \ln \alpha \frac{c}{R} + b \ln \alpha (1 - c) \right]. \quad (2.42)$$

Выбирая константу A равной $A = \frac{\delta U}{L} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \ln \alpha$ и полагая, что $R_0 = 1$, $a = 0$, $b = 0^*$ (Как и в случае «слабого обогащения», эти константы не входят в окончательные выражения для разделительного потенциала и разделительной способности), получим для разделительного потенциала и разделительной способности следующие выражения:

$$V(c) = (2c - 1) \ln \frac{c}{1 - c}, \quad (2.43)$$

$$\delta U = L \frac{(\alpha - 1) \ln \alpha}{\alpha + 1} \equiv L \frac{(\sqrt{q} - 1) \ln \sqrt{q}}{\sqrt{q} - 1}. \quad (2.44)$$

Очевидно, что в случае «слабого разделения» ($\epsilon = q - 1 \ll 1$) формула 2.44 переходит в формулу 2.25 при $\theta = 1/2$. Отметим, что соотношения 2.25, 2.28 и 2.44, полученные на основе подхода Пайерлса-Дирака, полностью подтверждаются результатами теории идеальных каскадов из симметричных ступеней, разработанной К.Коэном.

В случае несимметричной работы ступени ($\alpha \neq \beta$) при произвольном обогащении на ступени выполнить оба условия Пайерлса-Дирака, а именно

- разделительный потенциал зависит только от изотопного состава смеси;
- разделительная способность ступени определяется только характеристиками самой ступени;

не удастся. Разделительная способность ступени зависит от коэффициентов разделения (α, β) и концентрации смеси. Как будет показано ниже, при больших $(1 - c \ll 1)$ и малых $(c \ll 1)$ концентрациях величина δU от концентрации не зависит. Разделительный потенциал, полученный из решения функционального уравнения 2.35 оказывается зависящим не только от состава смеси, но и коэффициентов разделения ступени, то есть $V(c, \alpha, \beta)$.

На основе разделительного потенциала, записанного в виде 2.28, введены единицы работы разделения изотопов урана. В настоящее время его используют

и в случае произвольных коэффициентов разделения на ступени, работающей в несимметричном режиме [38, 52]. Теоретическое обоснование подобного подхода, проведенного в различных работах, связано, в частности, с изменением условий Пайерлса-Дирака [7] и рассмотрением идеализированного процесса разделения [8].

Исходя из общего соотношения для разделительной способности ступени

$$\delta U = \theta LV(c') + (1 - \theta)LV(c'') - LV(c) \quad (2.45)$$

и разделительного потенциала, определяемого по формуле 2.28, можно найти формулу при всех значениях q и $(\alpha \neq \beta)$ [8, 9]. Поскольку $A = \frac{R}{R+1}$, $2A - 1 = \frac{R-1}{R+1}$, разделительный потенциал 2.28 может быть представлен в виде

$$V^*(R) = \frac{R-1}{R+1} \ln R, \quad (2.46)$$

где индекс «звездочка» означает то, что разделительный потенциал рассматривается как функция новой переменной R .

Соотношение для определения разделительной способности ступени запишется в виде

$$\delta U = L[\theta V^*(R') + (1 - \theta)V^*(R'') - V(R)]. \quad (2.47)$$

Формулу для определения коэффициента деления потока нетрудно получить, комбинируя выражения 2.3, 2.7 и 2.9:

$$\theta = \frac{(\beta - 1)[1 + (\alpha - 1)c]}{\alpha\beta - 1}. \quad (2.48)$$

Замена в 2.48 концентрации c на отношение $R/(1 - R)$ приводит к выражениям

$$\theta = \frac{(\alpha R + 1)(\beta - 1)}{(R + 1)(\alpha\beta - 1)}, \quad (2.49)$$

$$1 - \theta = \frac{(R + \beta)(\alpha - 1)}{(R + 1)(\alpha\beta - 1)}. \quad (2.50)$$

Подставляя 2.46, 2.49 и 2.50 в 2.47 с учетом $R' = \alpha R$, $R'' = \frac{1}{\beta}R$ и $\alpha\beta = q$, получим

$$\delta U = L \frac{1}{q-1} \left\{ [(\alpha - 1)\beta \ln \beta - (\beta - 1) \ln \alpha] \frac{1}{R+1} + [(\beta - 1)\alpha \ln \alpha - (\alpha - 1) \ln \beta] \frac{R}{R+1} \right\}. \quad (2.51)$$

Переходя в 2.51 от относительных концентраций R к абсолютным, окончательно получим

$$\delta U = L[f_1(\alpha, \beta)(1 - A) + f_2(\alpha, \beta)A], \quad (2.52)$$

где

$$f_1(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha - 1)\beta \ln \beta - (\beta - 1) \ln \alpha}{\alpha\beta - 1}, \quad (2.53)$$

$$f_2(\alpha, \beta) = \frac{(\beta - 1)\alpha \ln \alpha - (\alpha - 1) \ln \beta}{\alpha\beta - 1}, \quad (2.54)$$

Из 2.52 следует, что разделительная способность ступени δU в общем случае является функцией концентрации. Зависимость от концентрации исчезает в следующих частных случаях.

1. Случай слабого разделения, $\alpha - 1 \ll 1$, $\beta - 1 \ll 1$. Так как в этом случае α и β близки к единице, то

$$\ln \alpha \approx (\alpha - 1) - \frac{1}{2}(\alpha - 1)^2 + \dots, \quad (2.55)$$

$$\ln \beta \approx (\beta - 1) - \frac{1}{2}(\beta - 1)^2 + \dots, \quad (2.56)$$

Имея в виду 2.7, 2.11 и 2.12, подставляя 2.55 и 2.56 в 2.52 и сохраняя малые величины 2-ого порядка, имеем

$$\delta U = \frac{L}{2}(\alpha - 1)(\beta - 1) \approx \frac{L}{2}\varepsilon'\varepsilon'' = \frac{\theta(1 - \theta)L\varepsilon^2}{2}, \quad (2.57)$$

что соответствует классическому виду для разделительной способности 2.25.

2. Случай симметричной ступени при произвольном на ней обогащении. При $\alpha = \beta$ 2.52 преобразуется к виду

$$\delta U = L \frac{(\alpha - 1)\alpha \ln \alpha - (\alpha - 1) \ln \alpha}{\alpha^2 - 1} = L \frac{(\alpha - 1) \ln \alpha}{\alpha + 1}, \quad (2.58)$$

что также соответствует классической формуле 2.44.

3. Случай малых концентраций, $A \ll 1$. При $A \ll 1$, $1 - A \approx 1$ выражение 2.52 преобразуется к виду

$$\delta U = L f_1(\alpha, \beta) = L \frac{(\alpha - 1)\beta \ln \beta - (\beta - 1) \ln \alpha}{\alpha\beta - 1}. \quad (2.59)$$

В рассматриваемом случае выражение 2.49 упрощается

$$\theta = \frac{\beta - 1}{\alpha\beta - 1}. \quad (2.60)$$

Соответственно, величина β равна

$$\beta = 1 + \theta(\alpha\beta - 1). \quad (2.61)$$

Учёт 2.60 и 2.61 и связи $\alpha\beta = q$ позволяет преобразовать соотношение 2.59 к виду

$$\delta U = L \{ \ln[1 + \theta(q - 1)] - \theta \ln q \}. \quad (2.62)$$

Это выражение для разделительной способности имеет важное значение при расчетах каскадов для получения слабообогатщенного урана.

4. В случае больших концентраций, когда выполняется ($c \approx 1$) выражение 2.42 преобразуется к виду

$$\delta U = L f_2(\alpha, \beta) = L \frac{\beta(\alpha - 1) \ln \beta - (\beta - 1) \ln \alpha}{q - 1}. \quad (2.63)$$

В этом случае коэффициент деления потока запишется как

$$\theta = \frac{q(\beta - 1)}{\beta(q - 1)}, \quad (2.64)$$

а выражение для разделительной способности с учётом соотношения $q = \alpha\beta$ будет иметь вид

$$\delta U = L \{ \ln [q - \theta(q - 1)] - (1 - \theta) \ln q \}. \quad (2.65)$$

Коэффициент разделения по обеднённой фракции β в формуле для разделительной способности 2.52 можно выразить через α . Тогда после дифференцирования удельной разделительной способности $\delta U/L$ по α и приравнивания производной нулю, получим квадратное уравнение относительно α [10, 22]:

$$a\alpha^2 - b\alpha - d = 0, \quad (2.66)$$

в котором $a = c \frac{\ln q}{q-1}$, $b = 2c - 1$, $d = (1 - c) \frac{\ln q}{q-1} q$.

Квадратное уравнение 2.66 имеет только одно физическое решение, обеспечивающее максимум величины $\delta U/L$:

$$\alpha_{\text{опт.}} = \frac{q}{\beta_{\text{опт.}}} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ad}}{2}. \quad (2.67)$$

Нетрудно видеть, что, во-первых, решение 2.67 зависит от величин q и C , а, во-вторых, независимо от величины q при $C = 0,5$ максимальное значение $\alpha_{\text{опт.}}$ будет равно $\alpha_{\text{опт.}} = \sqrt{q}$. Следовательно, максимум удельной разделительной способности ступени при значении концентрации $C = 0,5$ достигается в соответствии 2.67 при симметричном режиме работы ступени, то есть при условии $\alpha = \beta$. При концентрациях, отличных от 0,5, максимум удельной разделительной способности не соответствует симметричному режиму работы разделительной ступени. Для интересного для практики случая $C \ll 1$ (получение слабообогащённого урана) отыскание максимума функции приводит к следующим значениям [11]

$$\theta_{\text{опт.}} = \frac{1}{\ln q} - \frac{1}{q-1}, \quad (2.68)$$

$$\alpha_{\text{опт.}} = \frac{q}{\beta_{\text{опт.}}} = \frac{q \ln q}{q-1}, \quad (2.69)$$

$$\left(\frac{\delta U}{L} \right)_{\text{max}} = \ln \left[\frac{(q-1)}{\ln q} \right] + \frac{\ln q}{q-1} - 1. \quad (2.70)$$

Отметим, что выражение 2.69 для $\alpha_{\text{опт.}}$ может быть получено из 2.67 подстановкой условия $C \ll 1$.

2.3 Получение уравнений симметрично-противоточного каскада для случая произвольного числа компонентов и произвольных коэффициентов разделения.

Рассмотрим симметричный каскад, состоящий из N ступеней.

Пусть на вход ступени с номером $s = f$ подадут поток питания F с концентрацией A_F . Поток, обогащенный ценным (целевым) изотопом, отбирается с правого конца каскада ($s = N$) (сокращенно: отбор), а обедненный поток - с левого конца каскада ($s = 1$) (сокращенно: отвал). Соответственно обозначим концентрации в потоках отбора A_P и отвала A_W . Ступени каскада нумеруются последовательно от 1 на отвале до N на отборе. Часть каскада от точки подачи питания ($s = f, f+1, \dots, N$) называется обогатительной, а часть слева ($s = 1, 2, \dots, f-1$) - обеднительной.

В симметричной противоточной схеме можно использовать частичный или полный возврат обогащённых или обеднённых потоков отбора или отвала на вход соответствующей ступени ($s = N$ или $s = 1$). Такие коммутации потоков называют "закрутками" и обычно их применяют на концевых ступенях каскада [5] (рис. 2.7).

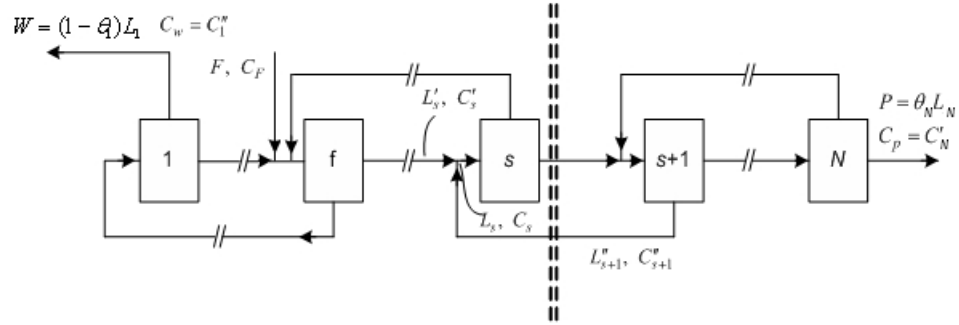


Рисунок 2.6 — Схема симметричного каскада для разделения бинарных смесей.

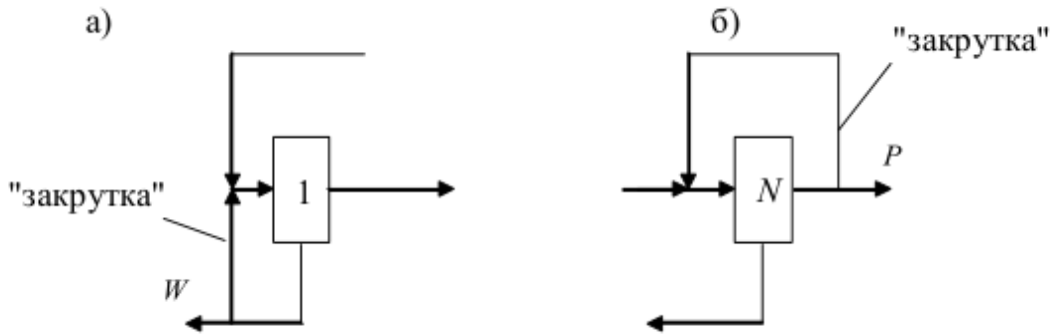


Рисунок 2.7 — Схемы закруток потоков : а) – на отвале; б) – на отборе.

Внешними параметрами каскада являются шесть переменных, определяющих внешние рабочие условия: F , P , W – потоки питания, отбора и отвала каскада; A_F , A_P , A_W – концентрации в соответствующих потоках. К внутренним относятся: N – общее количество ступеней в каскаде, f – номер ступени, на вход которой подают поток питания, параметры ступеней: L_s , L'_s , L''_s – входной и два выходных потока на s -ой ступени каскада, A_s , A'_s , A''_s – концентрации в соответствующих потоках; q_s , α_s , β_s – коэффициенты разделения и θ_s – коэффициенты деления потоков ($s = \overline{1, N}$).

В стационарном состоянии каскада внутренние параметры каскада можно выразить через внешние параметры каскада и уравнения разделения в ступени. Проведем поперечное сечение между некоторой s – ой ступенью и соседней с ней $s+1$ – ой ступенью обогатительной части каскада (обозначено на рис. 2.7

пунктиром) и рассмотрим часть каскада, находящуюся справа от этого мысленного сечения. Потоки разделяемого вещества и потоки ценного (целевого) изотопа входящие в эту часть каскада $L'_S = \theta_S L_S$ и $L'_S A'_S = \theta_S L_S A'_S$ и выходящие из нее $L''_{S+1} = (1 - \theta_{S+1}) L_{S+1}$ и $L''_{S+1} A''_{S+1} = (1 - \theta_{S+1}) L_{S+1} A''_{S+1}$ связаны уравнениями материального баланса:

$$\theta_S L_S - (1 - \theta_{S+1}) L_{S+1} = P, \quad (2.71)$$

$$\theta_S L_S C'_S - (1 - \theta_{S+1}) L_{S+1} C''_{S+1} = P C_P. \quad (2.72)$$

В этих уравнениях через, C'_s и C''_s обозначены концентрации ценного (целевого) изотопа соответственно на выходах из ступени.

Аналогичные соотношения можно записать для обеднительной части каскада

$$\theta_s L_s - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} = -W, \quad (2.73)$$

$$\theta_s L_s c'_s - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} c''_{s+1} = -W C_w. \quad (2.74)$$

Для ступени с номером $s=f$, на вход которой подают поток питания F , уравнения материального баланса имеют вид

$$L_f = \theta_{f-1} L_{f-1} + (1 - \theta_{f+1}) L_{f+1} + F, \quad (2.75)$$

$$L_f c_f = \theta_{f-1} L_{f-1} c'_{f-1} + (1 - \theta_{f+1}) L_{f+1} c''_{f+1} + F c_F. \quad (2.76)$$

При использовании формул 2.71 – 2.74 следует иметь в виду, что $L_0 = 0$ и $L_{N+1} = 0$. Концентрации c_S , c'_S и c''_S на каждой ступени связаны соотношениями 2.4, 2.6, 2.7, а внешние параметры при отсутствии потерь вещества в ступенях каскада должны удовлетворять уравнениям материального баланса:

$$F = P + W, \quad (2.77)$$

$$F c_F = P c_P + W c_W. \quad (2.78)$$

Вводя для разности концентраций на входах двух произвольных соседних ступеней обозначение

$$\Delta_S = c_{S+1} - c_S, (s = 1, N - 1) \quad (2.79)$$

и, вычитая соотношение 2.71, умноженное на c_S , из 2.72, получим

$$\Delta_S = \frac{\theta_S L_S}{(1 - \theta_{S+1}) L_{S+1}} \delta'_S + \delta''_{S+1} - \frac{P(c_P - c_S)}{(1 - \theta_{S+1}) L_{S+1}}, \quad (2.80)$$

где величины $\delta'_S = c'_S - c_S$ и $\delta''_S = c_S - c''_S$ определяются соотношениями 2.9, 2.7. Для обеднительной части каскада справедливы точно такие же уравнения, только в правой части вместо P и P_{cP} следует подставлять $-W$ и $-W_{cW}$, т.е.

$$\Delta_S = \frac{\theta_S L_S}{(1 - \theta_{S+1}) L_{S+1}} \delta'_S + \delta''_{S+1} - \frac{W(c_S - c_W)}{(1 - \theta_{S+1}) L_{S+1}} \quad (2.81)$$

С помощью уравнений 2.71 – 2.78 можно рассчитать распределения концентраций и коэффициентов деления потоков по ступеням каскада, если известны коэффициенты разделения q_S , α_S , β_S и полное число ступеней в каскаде N , номер ступени f , в которую вводится поток питания, и зависимость потока L_S от номера ступени. Подобного рода задачи обычно решают численными методами с применением ЭВМ.

В случае «слабого обогащения», когда величина обогащения мала по сравнению с концентрацией во входящем в ступень потоке, т.е. $\delta_S/c_S \ll 1$ система уравнений, определяющих каскад 2.73 – 2.76 или 2.80 – 2.81 может быть подвергнута значительным упрощениям.

Если обогащение на ступени мало, то для получения на каскаде требуемых изменений концентраций, как правило, нужно большое число ступеней ($N \gg 1$), т.е. каскад должен быть "длинным". В этом случае можно считать, что все параметры каскада от ступени к ступени изменяются незначительно, а величина потока изотопной смеси, проходящего через произвольную ступень, намного превосходит величину потока отбора, т.е. $L_S \approx L_{S+1}$, $\delta'_S \approx \delta'_{S+1}$, $\delta''_S \approx \delta''_{S+1}$, $\vartheta_S \approx \vartheta_{S+1}$ и $P/L_S \ll 1$. Так как число ступеней в каскаде велико, а изменение параметров при переходе от ступени к ступени мало, то можно представить s как непрерывно меняющуюся переменную, а параметры каскада L , θ , и N непрерывными функциями от этой переменной.

С учетом сказанного из уравнения баланса 2.71 следует $\theta_S \approx 1 - \theta_S$, т.е.

$$\theta_S \cong \frac{1}{2} \quad (2.82)$$

Условие 2.82 выражает основное свойство симметричного каскада с малым обогащением на отдельной ступени. Потоки в ступенях этого каскада делятся

почти пополам. Полагая в 2.80 $\theta_S \approx \frac{1}{2}$, $L_S \approx L_{S+1}$, $\delta'_S \approx \delta'_{S+1}$, $\delta''_S \approx \delta''_{S+1}$ и учитывая, что согласно 2.8, 2.10 – 2.12

$$\delta'_S = \delta''_S = \frac{1}{2} \varepsilon c_S (1 - c_S), \quad (2.83)$$

получим

$$\Delta_S = \varepsilon c_S (1 - c_S) - \frac{P(c_P - c_S)}{\frac{1}{2} L_{S+1}} \quad (2.84)$$

Считая параметры каскада непрерывными функциями от переменной s и заменяя Δ_S на $\frac{dc}{ds}$, перепишем предыдущее соотношение в виде

$$\frac{dc}{ds} = \varepsilon c (1 - c) - \frac{2P(c_P - c)}{L}, \quad (2.85)$$

в которых $c = c(s)$ и $L = L(s)$ - соответственно распределение концентраций и потоков вдоль каскада.

Соответствующее уравнение для обеднительной части каскада будет иметь вид

$$\frac{dc}{ds} = \varepsilon c (1 - c) - \frac{2W(c - c_W)}{L}. \quad (2.86)$$

При этом потоки отбора, отвала и питания и концентрации в этих потоках по-прежнему связаны двумя уравнениями баланса 2.77 и 2.78. Минимальный поток питания для каждой ступени, соответствующий данному отбору P и концентрации c_P , можно найти из условия равенства нулю градиента концентрации 2.85, т.е.

$$\left(\frac{\varepsilon L}{2P} \right)_{\min} = \frac{c_P - c}{c(1 - c)}. \quad (2.87)$$

Уравнение 2.85 можно рассматривать как частный случай общего уравнения 2.80 для приращения концентраций в применении к случаю слабого обогащения. Решение задачи в этом случае гораздо проще, потому что вместо уравнения 2.80 в конечных разностях мы имеем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и еще потому, что для нахождения распределения концентраций в каскаде с заданным распределением потоков L_S достаточно проинтегрировать только одно уравнение.

Наибольшие изменения концентраций при переходе от одной ступени к другой имеют место в безотборном режиме, когда $P = W = F = 0$. Такой

режим можно организовать в заполненном разделяемой смесью каскаде при наличии "закруток" на концевых ступенях. Поскольку в этом случае $c''_S = c'_{S-1}$, то

$$R'_1 = q_1 R''_1, \quad (2.88)$$

$$R'_S = q_S R''_S, \quad (2.89)$$

и степень разделения в каскаде $Q = R'_N/R''_1$ достигает максимальной величины

$$Q = \prod_{S=1}^N q_S, \quad (2.90)$$

где R'_N и R''_1 - относительные концентрации ценного (целевого) изотопа на концах каскада. Если все ступени в каскаде имеют одинаковые полные коэффициенты разделения, т.е. $q_S \equiv q$, то соотношение 2.90 может быть преобразовано к виду

$$N = \ln Q / \ln q, \quad (2.91)$$

известному как формула Фенске [12]. Она определяет минимально возможное число ступеней, необходимое для достижения заданного значения степени разделения каскада. Характерно, что число ступеней в каскаде N не зависит от формы каскада, т.е. конкретного распределения L_S .

В случае слабых одинаковых обогащений на ступенях из 2.85 и 2.86 для безотборного режима каскада имеем

$$\frac{dc}{ds} = \varepsilon c(1 - c), \quad (2.92)$$

откуда после интегрирования получаем экспоненциальный закон изменения концентраций по ступеням

$$R_2 = R_1 \exp(\varepsilon s_{12}), \quad (2.93)$$

здесь R_1 , R_2 - относительные концентрации ступеней, работающих на участке каскада, определяемых концентрациями c_1 и c_2 ; s_{12} - соответствующее количество ступеней. В режимах работы каскада с непрерывным отбором и отвалом ($P \neq 0$, $W \neq 0$) изменения концентраций на ступенях, а, следовательно, и степень разделения каскада будут меньше.

Критерии эффективности работы каскада

В задачах проектирования каскадов целесообразно определять их параметры, исходя из принятого критерия эффективности. Возможны два принципиальных подхода к выбору критериев.

Первый подход предполагает, что параметры ступеней могут быть выбраны из физических соображений, не связанных непосредственно с поставленной целью разделения. Физический критерий эффективности выражается требованием, чтобы энтропия при соединении потоков на входе каждой ступени не возрастала, т.е. чтобы термодинамическая работа, связанная с изменением концентрации при разделении смеси, не терялась. Для этого необходимо, чтобы концентрации различных потоков на входе в каждую ступень были одинаковыми. Для каскада с тремя внешними потоками, это соответствует выполнению условий

$$\begin{aligned} c'_{S-1} &= c_S = c''_{S+1}, \\ c_f &= c_F, \end{aligned} \quad (2.94)$$

или

$$\begin{aligned} R'_{S-1} &= R_S = R''_{S+1}, \\ R_f &= R_F. \end{aligned} \quad (2.95)$$

Соотношения 2.94, 2.95 называются условиями несмешивания, а каскад, удовлетворяющий этим требованиям – *идеальным*.

В другом подходе определяют практические потребности изотопного производства. Создание крупного разделительного предприятия (завода) связано с минимизацией удельных материальных затрат на производство обогащенного продукта. Эта задача весьма сложная в силу того, что необходимо определить большое число параметров, влияющих на затраты производства. Задачу оптимизации каскада можно упростить, учитывая специфику метода разделения. В общем случае задача оптимизации может быть записана в виде

$$\psi = \psi(u_1, u_2, \dots, u_k) \rightarrow \min(\max), \quad (2.96)$$

где Ψ - целевая функция (показатель эффективности); u_1, u_2, \dots, u_k - независимые параметры каскада; $\min(\max)$ - значение целевой функции (минимум или максимум) при оптимальных значениях независимых параметров. При использовании молекулярно-кинетических методов разделения удельные затраты

на производство обогащённого продукта, как правило, пропорциональны суммарному количеству элементов в каскаде. В соответствии с этим при заданных внешних параметрах в качестве критерия оптимизации можно принять минимум суммарного количества разделительных элементов:

$$\Psi = \sum_{s=1}^N Z_S \rightarrow \min, \quad (2.97)$$

где Z_S – число разделительных элементов в s – ой ступени каскада. Величина $\sum_{s=1}^N Z_S$ при работе элементов с заданными одинаковыми потоками L_{Σ} может быть представлена в виде

$$\sum_{s=1}^n Z_S = \frac{\sum_{s=1}^N L_S}{L_-}. \quad (2.98)$$

и, следовательно, в этом случае целью оптимизации является минимизация суммарного потока питания ступеней

$$\psi = \sum_{s=1}^N L_S \rightarrow \min. \quad (2.99)$$

Данный критерий предусматривает, что все внешние параметры каскада варьируются в допустимой области их изменения до получения минимального суммарного потока. Каскад, отвечающий требованию 2.99 будем называть *оптимальным*.

Глава 3. Модельные каскады для разделения бинарных смесей.

Трудности решения (2.24)–(2.27), (2.35)–(2.38) и (2.39)–(2.40) в общем случае, стимулировали развитие упрощенных подходов, которые позволяют получить аналитическое решение для данных систем при введении определенных предположений. Полученные в результате таких упрощений физико-математические модели симметрично-противоточного каскада сохраняют закономерности молекулярно-селективного массопереноса, но позволяют заметно упростить соответствующие расчетные процедуры для определения оптимальных параметров каскада. Такие каскады получили название модельных [8–20].

Модельные каскады действуют как физически эквивалентные представления и, как показано в [21], могут быть выведены из «обобщенного модельного каскада», которым является симметрично-противоточный каскад с постоянными по его длине относительными коэффициентами разделения).

Целесообразной областью применения теории модельных каскадов является ее использование при предварительном рассмотрении актуальных проблем современной теории разделения многокомпонентных изотопных смесей в каскадах и смежных с разделительной наукой областей, таких, например, как ядерная энергетика.

Далее рассмотрим подробнее математические модели, нашедшие свое применение в расчетных исследованиях.

3.1 «Идеальный» каскад

3.1.1 «Идеальный» каскад для разделения бинарных смесей как частный случай симметрично-противоточного каскада с постоянными коэффициентами разделения.

Условие 2.94 позволяет однозначно определить распределение потоков в идеальном каскаде. Перепишем условие 2.94 в виде двух равенств:

$$\delta'_{S-1} = \Delta_{S-1}, \quad \Delta_S = \delta''_{S+1}. \quad (3.1)$$

или, в первом из них, смещая индексы и используя в виде единого соотношения, получим

$$\delta'_S = \Delta_S = \delta''_{S+1}. \quad (3.2)$$

Подставляя 3.2 в 2.80 и обозначая поток в идеальном каскаде через L_S^* , получим

$$L_S^* = \frac{P(c_P - c_S)}{\theta_S \delta'_S}, \quad (3.3)$$

$$s = f, f + 1, \dots, N - 1,$$

$$L_N^* = \frac{P}{\theta_N}. \quad (3.4)$$

Аналогично распределение потоков в обеднительной части идеального каскада можно представить в виде

$$L_S^* = \frac{W(c_S - c_W)}{\theta_S \delta'_S}, \quad (3.5)$$

$$L_1^* = \frac{W}{1 - \theta_1}. \quad (3.6)$$

Величина обогащения на ступени δ'_S определяется соотношением 2.9, а коэффициент деления потоков формулой 2.48. Таким образом, систему уравнений, позволяющую рассчитывать распределения концентраций, коэффициентов деления потоков и расходов в идеальном каскаде можно представить в виде:

$$\Delta_S = c_{S+1} - c_S = \frac{(\alpha_S - 1)c_S(1 - c_S)}{1 + (\alpha_S - 1)c_S} = \frac{\varepsilon'_S c_S(1 - c_S)}{1 + \varepsilon'_S c_S}, \quad (3.7)$$

$$\theta_S = \frac{(\beta_S - 1)[1 + (\alpha_S - 1)c_S]}{q_S - 1} = \frac{\varepsilon''_S(1 + \varepsilon'_S c_S)}{(1 - \varepsilon''_S)\varepsilon_S}, \quad (3.8)$$

$L_S^* = \frac{P(c_P - c_S)}{\theta_S \delta'_S}$ - для обогатительной части каскада,
 $L_S^* = \frac{W(c_S - c_W)}{\theta_S \delta'_S}$ - для обеднительной части каскада,
с граничными условиями

$$\theta_N L_N^* = P, \quad c'_N = c_P, \quad (3.9)$$

$$(1 - \theta_1)L_1^* = W, \quad c''_1 = c_W. \quad (3.10)$$

Кроме того, к условиям 3.9, 3.10 необходимо добавить условие несмещения концентраций на входе в ступень питания $c_F = c_f$.

Обратим внимание на тот факт, что система 3.7 – 3.8 записана в конечных разностях и её следует решать "шаг за шагом".

Наиболее изученными и имеющими практическое значение являются свойства идеального каскада при малых обогащениях на отдельных ступенях (случай слабого обогащения).

3.1.2 Идеальный каскад с малым обогащением на ступени (случай слабого обогащения).

В случае слабых одинаковых обогащений на ступенях формулы 3.7-3.8 упрощаются. Тогда с учетом 2.82, 2.10 - 2.12 и факта, что параметры каскада от ступени к ступени изменяются непрерывно, система 3.7 - 3.8 приводится к виду:

$$\frac{dc}{ds} = \frac{1}{2}\varepsilon c(1 - c), \quad (3.11)$$

$$\theta \approx \frac{1}{2}, \quad (3.12)$$

$$L^* = \frac{4P(c_P - c)}{\varepsilon c(1 - c)} \quad (3.13)$$

для обогатительной части каскада и

$$L^* = \frac{4W(c - c_W)}{\varepsilon c(1 - c)}, \quad (3.14)$$

для обеднительной части каскада.

Из уравнения 3.11 следует, что градиент концентрации в идеальном каскаде вдвое меньше, чем при безотборном режиме работы каскада.

Уравнение 3.11 легко интегрируется и дает распределение $c(s)$, а уравнения 3.13 и 3.14 дают распределения $L^*(s)$, выраженные через параметр $c(s)$. Уравнения 3.11 - 3.14 называют уравнениями *идеального симметричного каскада*. Как видно из 3.11 и 3.14 потоки L^* обратно пропорциональны ε . Этот факт существенен для практики. Так, для газодиффузионного метода разделения $\varepsilon \sim 10^{-3}$ [3, 7] и, следовательно, потоки (производительности) ступеней должны в тысячи раз превышать потоки отбора P и отвала W . Интегрирование уравнения 3.11 для любого интервала концентраций $c_1 \leq c \leq c_2$ дает

соответствующее число ступеней

$$s_{12} = \frac{2}{\varepsilon} \ln \frac{c_2/1 - c_2}{c_1/1 - c_1}. \quad (3.15)$$

Полагая c_1 равным c_W или c_F и c_2 равным c_F или c_P можно получить формулы для расчета числа ступеней в обеднительной и обогащительной части каскада соответственно.

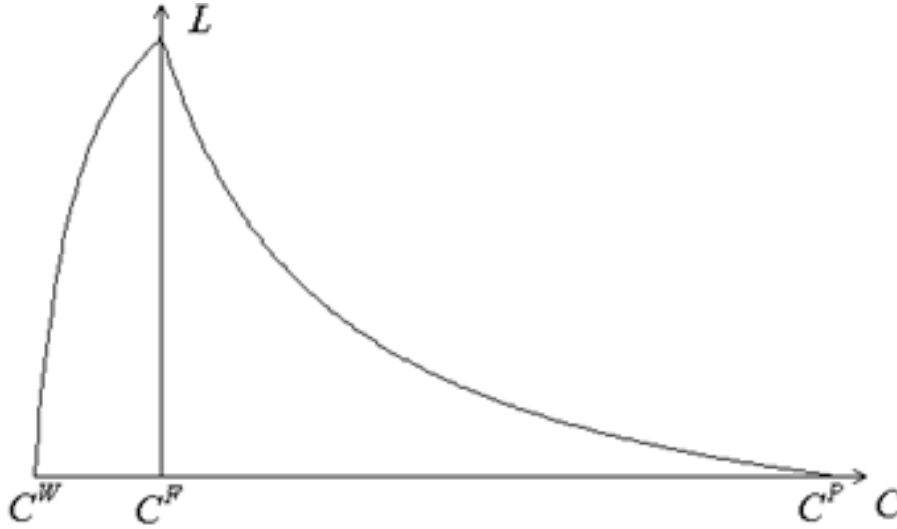


Рисунок 3.1 — Зависимость потока каскада от концентрации.

На рис. 3.1 показана зависимость потока питания ступеней от концентрации. Выбранный случай характерен для разделения изотопов урана и других элементов с низким содержанием ценного компонента $c_F \ll 1$. В секции обогащения изменение потоков (формула 1.114) имеет гиперболический характер. Потоки уменьшаются от ступени питания в сторону отбора с постоянно снижающейся скоростью. В отличие от этого в секции обеднения небольшое уменьшение вблизи ступени питания сменяется резким спадом у отвала каскада.

Закономерен вопрос: соответствует ли идеальному каскаду наименьший суммарный поток? Для ответа на него вычислим сумму $\sum L$ в обогащительной части каскада (в обеднительной части каскада, как нетрудно убедиться, результат будет аналогичен).

$$\sum L = \int_{c_F}^{c_P} \frac{Ldc}{dc/ds} = \int_{c_F}^{c_P} \frac{\frac{L(c)dc}{\varepsilon c(1-c) - \frac{2P(c_P-c)}{L(c)}}}{\frac{2L^2(c)dc}{\varepsilon c(1-c)[2L(c) - L^*(c)]}} = \quad (3.16)$$

В этой формуле внешние параметры каскада P , c_P , c_F (в обеднительной части также c_W) следует считать заданными. Интеграл 3.16 будет иметь

минимальное значение, если при любом возможном значении концентрации c подынтегральная функция минимальна. Отсюда следует, что для нахождения оптимального потока в отборной части каскада следует воспользоваться следующим уравнением:

$$\frac{d}{dL} \left(\frac{L^2}{2L - L^*} \right) = 0. \quad (3.17)$$

Из 3.17 следует, что

$$L_{\text{опт.}} = L^*. \quad (3.18)$$

Таким образом, в соответствии с равенством 3.18 в случае слабого обогащения идеальный каскад обладает свойством оптимальности. Его суммарный поток и распределение потоков по ступеням соответствует каскаду, оптимальному по критерию минимума суммарного потока. Полученные результаты позволяют без особых трудностей выразить $\sum L^*$ в идеальном каскаде через внешние параметры каскада. Для нахождения суммарного потока $\sum L^*$ следует вычислить интеграл, подобный 3.16, для всего идеального каскада, включая объединительную часть:

$$\begin{aligned} I_P &= \int_{C_F}^{C_P} \frac{L^*}{\left(\frac{dc}{ds}\right)_{84}} dc = \int_{C_F}^{C_P} \frac{8P(c_P - c)}{\varepsilon^2 c^2 (1 - c)^2} dc = \\ &= \frac{8P}{\varepsilon^2} \left[(2c_P - 1) \ln \frac{c_P(1 - c_F)}{c_F(1 - c_P)} + \frac{(1 - 2c_F)(c_P - c_F)}{c_F(1 - c_F)} \right], \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\begin{aligned} I_W &= \int_{C_F}^{C_P} \frac{L^*}{\left(\frac{dc}{ds}\right)_{84}} dc = \int_{C_F}^{C_P} \frac{8W(c - c_W)}{\varepsilon^2 c^2 (1 - c)^2} dc = \\ &= \frac{8W}{\varepsilon^2} \left[(2c_W - 1) \ln \frac{c_W(1 - c_F)}{c_F(1 - c_W)} + \frac{(1 - 2c_F)(c_W - c_F)}{c_F(1 - c_F)} \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.2 Алгоритм расчета параметров «идеального» каскада для различных исходных условий. Примеры расчетов.

Складывая 3.19 и 3.20 и учитывая общие соотношения 2.77 и 2.78, получим после алгебраических упрощений

$$\sum L^* = \frac{8}{\varepsilon^2} \left[\begin{array}{l} P(2c_p - 1) \ln \frac{c_p}{1-c_p} + W(2c_w - 1) \ln \frac{c_w}{1-c_w} \\ - F(2c_f - 1) \ln \frac{c_f}{1-c_f} \end{array} \right]. \quad (3.21)$$

Используя формулу 2.28 для разделительного потенциала, 3.21 можно переписать в виде

$$\sum \frac{L^* \varepsilon^2}{8} = PV(c_p) + WV(c_f) - FV(c_w). \quad (3.22)$$

Соотношение 3.22 имеет фундаментальное значение в теории каскадов. Его левая часть представляет собой сумму разделительных способностей ступеней, образующих идеальный каскад, и определяется их разделительными характеристиками. Правая часть $\Delta U = P(2c_p - 1) \ln \frac{c_p}{1-c_p} + W(2c_w - 1) \times \ln \frac{c_w}{1-c_w} - F(2c_f - 1) \ln \frac{c_f}{1-c_f}$ определяется внешними параметрами. Разделительные характеристики в это выражение не входят. Поэтому правая часть может рассматриваться как внешняя нагрузка, на которую работает каскад. Согласно 3.22 сумма разделительных способностей ступеней идеального каскада должна равняться внешней нагрузке, которую можно интерпретировать как полезную разделительную работу в единицу времени (разделительную способность), которую совершает каскад. Выражение 3.22 легко получить исходя непосредственно из понятия разделительной способности ступени и связанного с ним соотношения 2.17. Это соотношение для произвольной s – ой ступени каскада можно переписать в виде

$$\delta U_s = \theta_s L_s V(c_s + \delta'_s) + (1 - \theta_s) L_s V(c_s - \delta''_s) - L_s V(c_s). \quad (3.23)$$

Просуммируем 3.23 по всем ступеням каскада. Поскольку в каскаде отсутствуют потери на смешение, то левая часть соотношения 3.23 будет представлять собой суммарную разделительную способность всех ступеней каскада, т.е. $\sum \delta U_s$. При суммировании выражения в правой части следует учитывать, что при соединении потоков в идеальном каскаде концентрации в них должны быть одинаковыми и что, следовательно, каждому потоку, исходящему из одной

ступени, будет соответствовать поток, входящий в другую ступень (но с обратным знаком). При суммировании все внутренние потоки пропадут и останутся три внешних – W , F и P , каждый со своей концентрацией. Таким образом, снова получается соотношение аналогичное 3.22:

$$\sum \delta U_S = PV(c_P) + WV(c_W) - FV(c_F), \quad (3.24)$$

Такой подход к выводу 3.24 имеет целью подчеркнуть обстоятельство, непосредственно не вытекающее из предыдущего вывода: в рассматриваемом соотношении коэффициенты разделения отдельных ступеней могут быть различными. Кроме того, из проведенного рассуждения следует, что формально в качестве потенциала разделения $V(c)$ может быть выбрана произвольная непрерывная функция переменной c . Однако, для расчета суммарного числа элементов в каскаде соотношение 3.24 может быть использовано только в том случае, когда элементы, составляющие каскад, идентичны и разделительная способность δU_- от концентрации не зависит. Тогда разделительную способность s -ой ступени можно записать в виде

$$\delta U_S = Z_S \delta U_-, \quad (3.25)$$

где Z_S - число элементов, соединенных в s - ой ступени в параллель, а суммарное число элементов в идеальном каскаде составит

$$Z_{84} = \sum Z_S = \frac{\Delta U}{\delta U_-}, \quad (3.26)$$

где $\Delta U = PV(c_P) + WV(c_W) - FV(c_F)$.

В случае идеального каскада с малыми одинаковыми коэффициентами обогащения на ступенях, как было установлено ранее, эта величина минимальна, т.е. $Z_{84} \equiv Z_{<8=}$.

Если в соотношении 3.22 W и F выразить через P с помощью уравнений баланса 2.77 и 2.78 и P вынести за скобку, то его можно переписать в виде

$$\sum_s \frac{L^* \varepsilon^2}{8} = P \Phi(c_P, c_F, c_W) \quad (3.27)$$

где $\Phi(c_P, c_F, c_W) = (2c_P - 1) \ln \frac{c_P}{1 - c_P} + \frac{c_P - c_F}{c_F - c_W} \times$

$$\times (2c_W - 1) \ln \frac{c_W}{1 - c_W} - \frac{c_P - c_W}{c_F - c_W} (2c_F - 1) \ln \frac{c_F}{1 - c_F}. \quad (3.28)$$

Функция $\Phi(c_P, c_F, c_W)$ зависит от трех внешних концентраций и может быть протабулирована. Соотношение 3.27 представляет разделительную работу, которую совершает идеальный каскад в единицу времени. Тогда для наработки изотопного продукта в количестве P^* величина разделительной работы составит

$$\Delta \tilde{U} = P^* \Phi(c_P, A_F, A_W) \quad (3.29)$$

Из 3.29 следует, что функцию Φ можно рассматривать как выраженную в условных единицах *удельную работу разделения*, то есть разделительную работу, необходимую для получения единицы продукта (1 кмоля, 1 кг и т.д.). Функцию Φ называют *функцией ценности*.

Работа разделения $\Delta \tilde{U}$, произведенная разделительным каскадом за фиксированное время, может быть найдена как произведение ΔU , рассчитываемого по формуле 3.2, на рассматриваемый период времени. В практических расчетах и на рынке обогащенного урана пользуются условными единицами работы разделения (ЕРР), связанными с количеством произведенного обогащенного металлического урана. За 1 ЕРР принят 1 кг работы разделения (1 ЕРР=1 кгРР). Эта величина количественно соответствует работе разделения, необходимой для получения 1 кг обогащенного урана с концентрацией 1,5% из 2,75 кг природного сырья при заданной отвальной концентрации 0,26% (рис. 3.2).

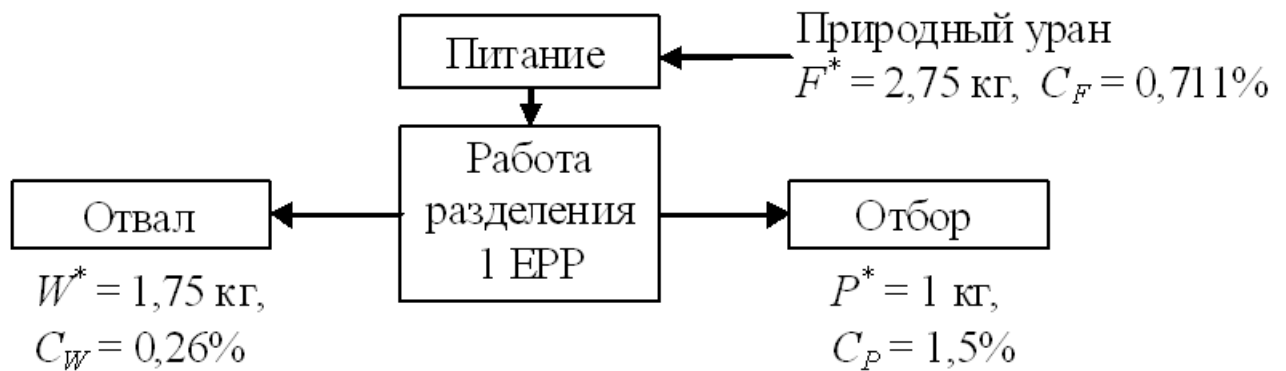


Рисунок 3.2 — Величины параметров разделения, соответствующие 1 ЕРР.

Разделительная способность каскада обычно измеряется в ЕРР/год. При пересчете в размерность массового потока обычно используют соотношение 1 ЕРР/год = 4,69 г/с, получающееся с учетом различий в массах металлического урана и газообразного гексафторида урана.

Таким образом, в случае «слабого обогащения» на ступенях каскада могут быть сделаны общие выводы:

- понятия «идеальный каскад» и «оптимальный каскад» идентичны;
- результаты, следующие из теории идеального каскада и подхода Дирака и Пайерлса приводят к полезным для практики понятиям «разделительная способность (мощность) ступени», «разделительный потенциал», «функция ценности».

3.2.1 Идеальный каскад с одинаковым немалым коэффициентом разделения на ступенях.

Если принять, что полные коэффициенты разделения ступеней q_s каскада одинаковы и не зависят от L_s и θ_s , то из общего условия идеальности каскада $\alpha_s = \beta_{s+1}$, получающегося из 2.94, 2.95 и 2.6, следует, что идеальный каскад в этом случае характеризуется двумя значениями коэффициентов разделения α_s , β_s , повторяющимися через ступень:

$$\alpha_1 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_4 = \dots, \quad (3.30)$$

$$\beta_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \alpha_4 = \dots \quad (3.31)$$

Из условия идеальности $\alpha_s = \beta_{s+1}$ также следует, что

$$R_s = \alpha_{s-1} R_{s-1} = \frac{R_{s+1}}{\beta_{s+1}}, \quad (3.32)$$

где $R_s = \frac{c_s}{1-c_s}$.

Если расчет ведется, начиная от первой ступени каскада, то, учитывая условие 3.32, можно записать

$$R_1 = R_1'' \beta_1, \quad (3.33)$$

где $R_1'' = R_w$ - относительная концентрация ценного изотопа в потоке отвала. Далее

$$R_2 = R_1' = \alpha_1 R_1 = \alpha_1 \beta_1 R_w = R_w q, \quad (3.34)$$

$$R_3 = R_2' = \alpha_2 R_2 = \alpha_2 q R_w = R_w q \beta_1, \quad (3.35)$$

$$R_4 = R_3' = \alpha_3 R_3 = \alpha_1 \beta_1 R_w q = R_w q^2, \quad (3.36)$$

Обобщение выражений 3.33-3.36 приводит к следующим формулам для относительных концентраций на входах в ступени идеального каскада:

нечетные ступени:

$$R_s = R_w q^{\frac{s-1}{2}} \beta_1; \quad (3.37)$$

четные ступени:

$$R_s = R_w q^{\frac{s}{2}}; \quad (3.38)$$

Анализ соотношений 3.37, 3.38 показывает, что существует четыре типа идеального каскада, отличающихся друг от друга числом разделительных ступеней в обоганительной и обеднительной частях и, соответственно, формулами для расчета относительных концентраций R_p и R_w :

mun I: при четном $f-1$ и четном $N - f + 1$

$$R_p = R_F q^{\frac{N-f+1}{2}}, \quad R_w = R_F q^{-\frac{f-1}{2}} \beta_1^{-1}; \quad (3.39)$$

mun II: при четном $f-1$ и нечетном $N - f + 1$

$$R_p = R_F q^{\frac{N-f+2}{2}} \beta_1^{-1}, \quad R_w = R_F q^{-\frac{f-1}{2}} \beta_1^{-1}; \quad (3.40)$$

mun III: при нечетном $f-1$ и четном $N - f + 1$

$$R_p = R_F q^{\frac{N-f+1}{2}}, \quad R_w = R_F q^{-\frac{f}{2}}; \quad (3.41)$$

mun IV: при нечетном $f-1$ и нечетном $N - f + 1$

$$R_p = R_F q^{\frac{N-f}{2}} \beta_1, \quad R_w = R_F q^{-\frac{f}{2}}. \quad (3.42)$$

где R_F , R_p , R_w - относительные концентрации ценного изотопа соответственно в потоке питания, отбора и отвала.

Отметим, что при симметричном режиме работы первой ступени каскада, то есть при одинаковых коэффициентах разделения по обогащённой и обеднённой фракциям ($\alpha_1 = \beta_1$), все ступени каскада будут работать в симметричном режиме, Другими словами α и β будут одинаковы для всех ступеней каскада и равны

$$\alpha = \beta = \sqrt{q}. \quad (3.43)$$

Идеальный каскад со ступенями, работающими в симметричном режиме, впервые был рассмотрен К.Коэном [1]. В этом случае относительные концентрации не зависят от соотношения числа ступеней в отборной и отвальном частях каскада и формулы 3.37 - 3.42 приводятся к одинаковому виду

$$R_s = R_w q^{\frac{s}{2}}, \quad (3.44)$$

$$R_p = R_F q^{\frac{N-f+1}{2}}, \quad R_w = R_F q^{-\frac{f}{2}}. \quad (3.45)$$

Отметим, что в соответствии с соотношением 2.96 величина параметра β_1 и коэффициента деления потока на первой ступени θ_1 однозначно связаны. Наиболее простой вид эта связь имеет место при $c \ll 1$.

$$\theta_1 = \frac{\beta_1 - 1}{q - 1}, \quad (3.46)$$

и соответственно

$$\beta_1 = 1 + \theta_1(q - 1). \quad (3.47)$$

Как следует из 3.30 и 3.46, величина θ_s в этом случае принимает два значения, повторяющиеся через ступень.

В общем случае анализ полученных соотношений 3.39 – 3.42, 3.45 позволяет сделать следующий вывод. При заданных величинах q , N , f и c_F (III тип идеального каскада) или q , N , f , c_F и β_1 (θ_1) (I, II и IV типы идеального каскада) расчет каскада (нахождение распределений $L(s)$, $\theta(s)$ и $c(s)$, включая концентрации c_P и c_W), труда не представляет. Причем для III-го типа величины c_P и c_W не зависят от β_1 , то есть в отношении выбора коэффициента деления потока θ_1 существует произвол. При этом при варьировании β_1 (или θ_1) будут меняться распределения $\beta(s)$ и $\theta(s)$, а вместе с ними и эффективность работы каждой разделительной ступени. Поэтому логично выбирать значение $\beta_1(\theta_1)$ из условия оптимальности работы ступеней идеального каскада, которое выполняется при условии минимальности относительного суммарного потока в каскаде $\sum L^*/P = \min$.

Как видно из приведенной зависимости на рис.1.11 для случая $c \ll 1$ минимальный суммарный поток в идеальном каскаде III-го типа, рассчитанном для следующих значений параметров: $N = 9$, $f = 2$, $c_F = 0,711\%$, $c_P = 4,4\%$, $c_W = 0,45\%$, $q = 1,6$, соответствует случаю, когда он построен из симметричных ступеней, то есть $\theta_1 = 1/(\sqrt{q} + 1)$.

Рис. 1.11. Зависимость относительного суммарного потока в идеальном каскаде от величины θ

При расчете каскадов I, II и IV типов с изменением коэффициента деления потока на первой ступени θ_1 будет меняться не только величина суммарного потока в каскаде, но и величины концевых концентраций (c_W - в каскаде I-го, c_P и c_W - в каскаде II-го и c_P - в каскаде IV-го типа). Для этих типов идеального каскада каждому значению $\beta_1(\theta_1)$ соответствует свой идеальный каскад. Расчеты показывают, что и в этом случае из семейства всех возможных идеальных каскадов наименьший суммарный поток будет в каскаде, в котором выполняется условие $\beta_1 = \sqrt{q}$, то есть в каскаде из симметричных элементов.

Задача расчета идеального каскада заметно усложняется в том случае, когда заданы величины q , c_P , c_W и c_F , а требуется найти кроме распределений $L(s)$, $\theta(s)$ и $c(s)$ по ступеням каскада также общее количество ступеней N и номер ступени f , в которую подают поток питания. В этом случае решение задачи следует начать с поиска типа идеального каскада, способного обеспечить в выходных потоках значения заданных концентраций c_P и c_W . Решая систему 3.45 из 2-х алгебраических уравнений при заданных значениях концентраций и величине коэффициента разделения q , находим величины N и f . При целочисленных значениях N и f дальнейший расчет идеального каскада из симметричных ступеней труда не представляет. При дробных значениях N и f необходимо подобрать тот тип идеального каскада, который при соответствующем подборе целочисленных величин N и f , а также коэффициента деления потока θ_1 обеспечит величины концентраций в выходных потоках, которые будут ближе всего к заданным.

Например, для идеального каскада типа IV при $q=1,59$ и $c_F = 0,71\%$, $c_P = 4,4\%$, а также $N=9$, $f=3$ получены следующие значения параметров [19]. Величина концентрации ценного компонента в отвале при этом получается равной $0,44\%$ (см. таблицу 1.2).

В рассмотренном примере в идеальном каскаде из несимметричных разделительных элементов коэффициент деления потока и удельная разделительная способность пилообразно меняются от ступени к ступени. Нечетные ступени в каскаде имеют значения $\theta_s = 0,118$ и $\delta U_s/L_s^* = 1,48 \cdot 10^{-2}$, а четные - $\theta_s = 0,981 - 0,982$ и $\delta U_s/L_s^* = 1,71 \cdot 10^{-2}$.

Относительный суммарный поток в таком каскаде равен $\sum_s L_s^*/P=299,99$, а сумма относительных разделительных способностей (мощностей) всех сту-

пений каскада, то есть разделительная способность каскада в целом равна $\sum_s \delta U_s / P = 4,793$. Среднее значение разделительной способности $\overline{\delta U_s} / L_s^*$ ступени составляет $1,58 \cdot 10^{-2}$.

В идеальном каскаде из симметричных ступеней суммарный поток может быть рассчитан с помощью простого аналитического выражения. С учетом равенства $\alpha = \beta = \sqrt{q}$, а также формул 2.7, 2.9 соотношения 3.8 могут быть переписаны в виде:

$$\theta_s = \frac{1 + (\alpha - 1)c_s}{\alpha + 1}, \quad (3.48)$$

$$L_s^* = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} P \frac{(c_P - c_s)}{c_s(1 - c_s)} \quad (3.49)$$

- для обогатительной части каскада;

$$L_s^* = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} W \frac{(c_s - c_w)}{c_s(1 - c_s)} \quad (3.50)$$

- для обеднительной части каскада.

Формулы 3.49 и 3.50 описывают дискретные распределения потоков по ступеням идеального каскада из симметричных ступеней. Величина потока на ступени с номером ($s=f$) имеет максимальное значение. В обогатительной части поток питания ступеней уменьшается в направлении отбора каскада, а в обеднительной части - в сторону отвала.

В соответствии с формулами 3.39-3.40 относительные концентрации ценного изотопа в отборе и в отвале связаны с числом ступеней в обогатительной и обеднительной частях каскада соотношениями 3.45. Следовательно, степень разделения каскада при заданных величинах N и f равна:

$$\frac{R_p}{R_w} = \alpha^{N+1} = q^{\frac{N+1}{2}}. \quad (3.51)$$

В соответствии с 3.51 число ступеней в идеальном каскаде при выполнении условия $\alpha = \beta$ будет равно

$$N = \frac{2}{\ln q} \ln \frac{R_p}{R_w} - 1. \quad (3.52)$$

Очевидно, что для достижения такой же степени разделения, как в безотборном режиме, в данном случае потребуется примерно вдвое больше ступеней.

Для нахождения суммарного потока все концентрации, входящие в 3.49 и 3.50, выразим через R_F , N и f , имея в виду 3.44 и 3.45, а также очевидное соотношение $R_s = \frac{c_s}{1-c_s}$. В результате формулы 3.49 и 3.50 приобретут вид:

для обогатительной части каскада

$$L_s^* = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \frac{1}{R_F} P c_p [\alpha^{f-s} - \alpha^{f-N-1} + R_F(1 - \alpha^{s-N-1})]; \quad (3.53)$$

для обеднительной части каскада

$$L_s^* = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \frac{1}{R_F} W c_w [\alpha^f - \alpha^{f-s} + R_F(\alpha^s - 1)]. \quad (3.54)$$

При суммировании L_s^* по ступеням каскада учтем, что для любого $m \geq 0$ $\sum_{s=0}^m \alpha^s = \frac{\alpha^{m+1}-1}{\alpha-1}$, а параметры $N - f + 1$ и f связаны с относительными концентрациями R_p , R_F , и R_w соотношениями 3.45. Принимая это во внимание, получим:

для обогатительной части каскада

$$\sum_{s=f}^N L_s^* = P \left\{ \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \frac{1}{\ln \alpha} (2c_p - 1) \ln \frac{R_p}{R_F} + \frac{(c_p - c_F) [\alpha(1 - c_F) - c_F]}{(\alpha - 1)c_F(1 - C_F)} \right\}, \quad (3.55)$$

для обеднительной части каскада

$$\sum_{s=1}^{f-1} L_s^* = W \left\{ \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} \frac{1}{\ln \alpha} (2c_w - 1) \ln \frac{R_w}{R_F} + \frac{(c_w - c_F) [\alpha(1 - c_F) - c_F]}{(\alpha - 1)c_F(1 - C_F)} \right\}, \quad (3.56)$$

Суммируя 3.55 и 3.56 с учетом 2.77 и 2.78, получим

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N L_s^* = \frac{\alpha + 1}{(\alpha - 1) \ln \alpha} & \left[P(2c_p - 1) \ln \frac{c_p}{1 - c_p} + W(2c_w - 1) \ln \frac{c_w}{1 - c_w} - \right. \\ & \left. - F(2c_F - 1) \ln \frac{c_F}{1 - c_F} \right]. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Если разделить левую и правую часть 3.57 на первый множитель в правой части, то получим

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N L_s^* \frac{(\alpha - 1) \ln \alpha}{\alpha + 1} = P(2c_p - 1) \ln \frac{c_p}{1 - c_p} + W(2c_w - 1) \ln \frac{c_w}{1 - c_w} - \\ - F(2c_F - 1) \ln \frac{c_F}{1 - c_F}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Правая часть выражения 3.58 по форме записи соответствует полезной разделительной способности каскада, введенной в п. 1.5. В левой части 3.58 под

знаком суммы стоит величина, которую можно интерпретировать как разделительную способность симметричной разделительной ступени

$$\delta U_s = L_s^* \frac{(\alpha + 1) \ln \alpha}{\alpha - 1}. \quad (3.59)$$

Если все ступени каскада состоят из идентичных элементов, то суммарное число таких элементов Z_{84} будет равно

$$Z_{84} = \frac{\Delta U}{L_M \frac{(\alpha+1) \ln \alpha}{\alpha-1}}, \quad (3.60)$$

где $\Delta U = PV(c_p) + WV(c_w) - FV(c_F)$, L_M - поток на входе в разделительный элемент.

Характерно, что для всех ступеней каскада в случае, когда $\alpha = \beta$, величина удельной разделительной способности $\delta U_s/L_s$ одинакова и равна

$$\frac{\delta U_s}{L_s^*} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \ln \alpha. \quad (3.61)$$

Остается ответить на вопрос: является ли Z_{84} в соотношении 3.60 минимальной величиной при заданных значениях P , c_P , c_W ? Другими словами, является ли в данном случае «идеальный каскад» «оптимальным каскадом»? Используя аналитические подходы, ответить на этот вопрос невозможно.

3.3 Задания для самостоятельного выполнения.

Задания

Глава 4. Модельные каскады для разделения многокомпонентных смесей.

Ниже рассмотрены общие характеристики разделительных ступеней, предназначенных для разделения многокомпонентных изотопных смесей в газовой фазе. В качестве разделяемой изотопной смеси рассмотрена изотопная смесь, содержащая m химически не реагирующих между собой компонентов, содержание которых будем определять их мольными долями (концентрациями) C_i ($i = 1, 2, \dots, m$) [1]. Компоненты пронумерованы в порядке возрастания массовых чисел. Для концентраций компонентов разделяемой смеси справедливо очевидное тождество:

$$\sum_{j=1}^m C_j = 1 \quad (4.1)$$

Как правило, вместо концентраций C_i , используют относительные концентрации, определяемые по отношению к концентрации так называемого «опорного» компонента с фиксированным номером, например, k , то есть

$$R_{ik} = \frac{C_i}{C_k}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.2)$$

В качестве «опорного» может быть выбран любой из компонентов смеси, всего имеется таких наборов. Простая разделительная ступень имеет один входной поток и два выходных (рис. 4.1). На вход ступени поступает поток питания (производительность ступени) L (в моль/с) с концентрациями C_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Из ступени выходят два потока: легкая фракция (поток, обогащенный легкими компонентами) или отбор ступени L' и тяжелая фракция (поток, обедненный легкими компонентами) или отвал ступени L'' . Концентрации компонентов в этих потоках C'_i и C''_i соответственно.

Коэффициент деления потоков смеси (срез) θ , парциальные потоки компонентов G_i , G'_i , G''_i и срезы парциальных потоков φ_i можно определить по формулам:

$$\theta = \frac{L'}{L}, G_i = LC_i, G'_i = L'C'_i, G''_i = L''C''_i, \quad (4.3)$$

$$\varphi_i = \frac{G'_i}{G_i}, 1 - \varphi_i = \frac{G''_i}{G_i}, i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.4)$$

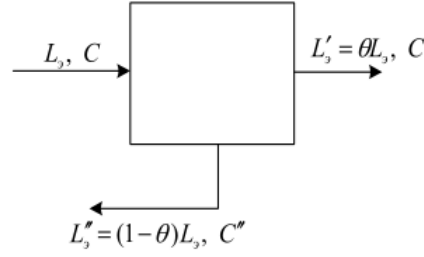


Рисунок 4.1 — Схема разделительной ступени.

Уравнения баланса ступени в стационарном режиме работы и в отсутствие потерь рабочего вещества имеют вид:

$$L = L' + L'', \quad (4.5)$$

$$G_i = G'_i + G''_i, i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.6)$$

Введенное в 4.3 определение среза потоков ступени дает возможность представить уравнения 4.6 в следующем виде:

$$C_i = \theta C'_i + (1 - \theta) C''_i. \quad (4.7)$$

Из 4.5 и 4.6 непосредственно следует:

$$L = \sum_{j=1}^m G_j, \quad L' = \sum_{j=1}^m G'_j, \quad L'' = \sum_{j=1}^m G''_j, \quad (4.8)$$

$$C_i = \frac{G_i}{\sum_{j=1}^m G_j}, \quad C'_i = \frac{G'_i}{\sum_{j=1}^m G'_j}, \quad C''_i = \frac{G''_i}{\sum_{j=1}^m G''_j}, i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.9)$$

$$\theta = \frac{\sum_{j=1}^m G'_j}{\sum_{j=1}^m G_j}. \quad (4.10)$$

Для каждого компонента i с относительной концентрацией R_{ik} вводят относительные коэффициенты разделения: полный q_{ik} , в отборе α_{ik} и в отвале β_{ik} и соответствующие коэффициенты обогащения $\varepsilon_{ik}, \varepsilon'_{ik}, \varepsilon''_{ik}$

$$q_{ik} = \frac{R'_{ik}}{R''_{ik}}, \quad \alpha_{ik} = \frac{R'_{ik}}{R_{ik}}, \quad \beta_{ik} = \frac{R_{ik}}{R''_{ik}},$$

$$q_{ik} = \frac{R'_{ik}}{R''_{ik}}, \quad \alpha_{ik} = \frac{R'_{ik}}{R_{ik}}, \quad \beta_{ik} = \frac{R_{ik}}{R''_{ik}}, \quad (4.11)$$

$$\varepsilon_{ik} = q_{ik} - 1, \quad \varepsilon'_{ik} = \alpha_{ik} - 1, \quad \varepsilon''_{ik} = 1 - \frac{1}{\beta_{ik}}$$

При разделении изотопов молекулярно-кинетическими методами величины относительных коэффициентов разделения можно аппроксимировать

соотношениями $q_{ij} = q_0^{M_j - M_i}$, где q_0 – коэффициент разделения, приходящийся на единицу разности массовых чисел; M_i, M_j – массовые числа i -го и j -го компонентов, соответственно [1].

При фиксированном номере «опорного» компонента (в качестве «опорного» выбран компонент с номером k) существует набор из $(m - 1)$ независимых q_{ik} (или α_{ik}, β_{ik}). По определению R_{ik} имеется m таких наборов. Однако, каждый из них, например q_{ik} , может быть преобразован в другой набор, например, q_{ij} по формулам

$$q_{ij} = q_{ik} \cdot q_{kj}. \quad (4.12)$$

Если $k \neq m$, то при всех $i < k$ значения всех коэффициентов разделения $q_{ik}, \alpha_{ik}, \beta_{ik}$, будут больше единицы, а при всех $i > k$ – меньше единицы.

Полные коэффициенты разделения q_{ik} , как правило, не зависят от состава смеси. В некоторых случаях, что характерно для газовой центрифуги, коэффициенты q_{ik} могут зависеть от коэффициента деления потоков смеси (срез) θ . Так, в общем случае, для газовой центрифуги, полный коэффициент разделения зависит также от коэффициента деления потоков смеси (срез) θ и от потока питания на один разделительный элемент ступени g_s (4.13) [22]:

$$q_{ij} = f(\theta, g_s), \quad (4.13)$$

Далее будем рассматривать случай усредненной величины коэффициента разделения. Введем обозначения:

$$g_i = \frac{\varphi_i}{1 - \varphi_i} = \frac{G'_i}{G''_i}, i \neq k, \quad (4.14)$$

$$g_k = \frac{\varphi_k}{1 - \varphi_k} = \frac{G'_k}{G''_k}. \quad (4.15)$$

Нетрудно показать, используя 4.9 и 4.11, что величины g_i и g_k связаны с величинами относительных коэффициентов разделения следующими соотношениями:

$$g_i = \frac{\alpha_{ik}(\beta_{ik} - 1)}{\alpha_{ik} - 1}, i \neq k, \quad (4.16)$$

$$g_k = \frac{\beta_{ik} - 1}{(\alpha_{ik} - 1)\beta_{ik}} = \frac{\varepsilon''_{ik}}{\varepsilon'_{ik}}. \quad (4.17)$$

При этом

$$\frac{g_i}{g_k} = q_{ik}. \quad (4.18)$$

4.1 Понятие каскада

С использованием выражений 4.1–4.18 получим следующие соотношения, связывающие параметры отдельной ступени каскада

$$L = \sum_{j=1}^m L_j = \sum_{j=1}^m \frac{g_j + 1}{g_j} L'_j, \quad (4.19)$$

$$C_i = \frac{g_i + 1}{g_i} \frac{L'_i}{L}, \quad (4.20)$$

$$\theta = \frac{L'}{L} = \sum_{j=1}^m L'_j \bigg/ \sum_{j=1}^m L_j. \quad (4.21)$$

4.2 Получение уравнений симметрично-противоточного каскада для случая произвольного числа компонентов и произвольных коэффициентов разделения.

Среди различных способов коммутации ступеней в разделительных каскадах наиболее распространенным является так называемый способ симметричного соединения ступеней в противоточной схеме (рис. 4.2). Рассмотрим схему такого каскада, имеющего один входящий поток питания F и два выходящих: отбор P , обогащенный самым легким компонентом и отвал W , обогащенный самым тяжелым компонентом. Потoki F , P , W и концентрации компонентов в них C_i^F , C_i^P , C_i^W ($i = 1, 2, \dots, m$) являются внешними параметрами каскада. Следует заметить, что в случае разделения многокомпонентных смесей понятия «отбор» и «отвал» условны, поскольку ценный компонент может обогащаться как вместе с самым легким компонентом смеси, так и вместе с самым тяжелым.

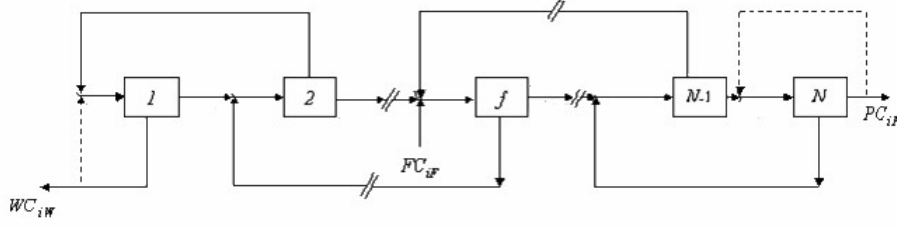


Рисунок 4.2 — Схема соединения ступеней в симметрично-противоточном каскаде.

В отсутствие потерь рабочего вещества на ступенях каскада, внешние параметры каскада должны удовлетворять уравнениям материального баланса

$$\begin{aligned} F &= P + W, \\ FC_i^F &= PC_i^P + WC_i^W, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ступени каскада пронумерованы последовательно от $s = 1$ на отвальной ступени каскада до $s = N$ на отборной ступени. Считаем, что внешнее питание каскада (F) подают на вход ступени с номером f . Внутренние параметры произвольной ступени с номером s ($L_s, L'_s, L''_s, G_{i,s}, G'_{i,s}, G''_{i,s}$), где L – потоки вещества, а G – парциальные потоки (изотопов с индексами i) в стационарном режиме работы каскада, в отсутствие потерь рабочего вещества на ступенях каскада, согласно 4.5, 4.6 связаны уравнениями баланса вещества и каждого компонента

$$L_s = L'_s + L''_s, \quad s = 1, \dots, N, \quad (4.23)$$

$$G_{i,s} = G'_{i,s} + G''_{i,s}, \quad s = 1, \dots, N \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.24)$$

где индекс i означает номер компонента.

Уравнения баланса в «узлах» (точках соединения межступенных потоков) при симметричном соединении ступеней имеют вид:

$$L_s = \theta_{s-1} L_{s-1} + (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1}, \quad s = 1, 2, \dots, f-1, f+1, \dots, N, \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} L_s C_{i,s} &= \theta_{s-1} L_{s-1} C'_{i,s-1} + (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} C''_{i,s+1}, \quad s = 1, 2, \dots, f-1, f+1, \dots, N, \\ &\quad i = 1, \end{aligned} \quad (4.26)$$

Для ступени подачи питания f аналогичные уравнения выглядят так:

$$L_f = \theta_{f-1} L_{f-1} + (1 - \theta_{f+1}) L_{f+1} + F, \quad (4.27)$$

$$L_f C_{i,f} = \theta_{f-1} L_{f-1} C'_{i,f-1} + (1 - \theta_{f+1}) L_{f+1} C''_{i,f+1} + F C_i^F, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.28)$$

Внешние и внутренние параметры каскада связаны граничными условиями

$$L_0 = L'_0 = L''_0 = L_{N+1} = L'_{N+1} = L''_{N+1} = 0, \quad (4.29)$$

$$L'_N = \theta_N L_N = P, \quad (4.30)$$

$$L''_1 = (1 - \theta_1) L_1 = W, \quad (4.31)$$

$$C'_N = C_i^P, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.32)$$

$$C''_1 = C_i^W, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.33)$$

$$G'_{i,N} = P C_i^P, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.34)$$

$$G''_{i,1} = W C_i^W, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.35)$$

Соотношения (4.22)–(4.35) описывают простейшую физико-математическую модель противоточного симметричного каскада, предназначенного для разделения многокомпонентной смеси. При решении некоторых разделительных задач вместо уравнений (4.25)–(4.28) удобнее пользоваться разностными уравнениями, отражающими баланс потоков в сечениях между ступенями:

для обогатительной части каскада:

$$\theta_s L_s - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} = P, \quad (4.36)$$

$$\theta_s L_s C'_{i,s} - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} C''_{i,s+1} = P C_i^P \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (4.37)$$

для обеднительной части каскада:

$$\theta_s L_s - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} = -W, \quad (4.38)$$

$$\theta_s L_s C'_{i,s} - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} C''_{i,s+1} = -W C_i^W \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (4.39)$$

Величины, стоящие в левых частях уравнений (4.36)–(4.39), как правило, называют «транзитными» потоками смеси в целом (уравнения (4.36) и (4.38)) и ее отдельных компонентов (уравнения (4.37) и (4.39)) [1]. С физической точки зрения указанные уравнения определяют величину количества переносимого вещества в направлении от отвала к отбору. Отметим, что, в случае необходимости, аналогичные уравнения могут быть получены и для переноса вещества

в направлении от отбора к отвалу. В свою очередь система (4.36)–(4.39) может быть легко преобразована к виду:

$$C_{i,s+1} - C_{i,s} = \frac{\theta_s L_s}{(1 - \theta_{s+1}) L_{s+1}} \delta'_{i,s} + \delta''_{i,s+1} - \frac{P (C_i^P - C_{i,s})}{(1 - \theta_{s+1}) L_{s+1}}, \quad (4.40)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad s = f, \dots, N,$$

, где $\delta'_{i,s} = C'_{i,s} - C_{i,s}$ – функция, представляющая собой изменение концентрации i -го компонента в потоке обогащенной фракции s -й ступени; $\delta''_{i,s} = C_{i,s} - C''_{i,s}$ – функция, представляющая собой изменение концентрации i -го компонента в потоке обедненной фракции s -й ступени.

Соответственно, система (4.36)–(4.39) может быть представлена в виде

$$C_{i,s+1} - C_{i,s} = \frac{\theta_s L_s}{(1 - \theta_{s+1}) L_{s+1}} \delta'_{i,s} + \delta''_{i,s+1} - \frac{W (C_{i,s} - C_i^W)}{(1 - \theta_{s+1}) L_{s+1}}, \quad (4.41)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, f - 1.$$

Отметим, что системы (4.25)–(4.28), (4.36)–(4.39) и (4.40)–(4.41) эквивалентны. Анализ данных систем показывает, что они обе представляют собой системы нелинейных разностных уравнений относительно функций $C_{i,s}$. Существенной проблемой при решении подобных систем является то, что в эти уравнения (либо в их граничные условия) входят значения концентраций, которые неизвестны заранее и должны быть определены из решения этих же уравнений. Аналитическое решение подобных систем удастся найти лишь для некоторых частных случаев (данные случаи рассмотрены ниже) [1]. В общем случае, системы (4.25)–(4.28), (4.36)–(4.39) или (4.40)–(4.41) требуют использования численных методов. При этом, как правило, выделяют 2 типа задач расчета параметров каскада: поверочный расчет и проектировочный расчет.

4.3 Частные случаи симметрично-противоточного каскада для разделения многокомпонентных изотопных смесей.

4.4 «Квазиидеальный» каскад и Q-каскад, их физическая взаимосвязь.

Наиболее общая из таких моделей называется «квазиидеальным» каскадом, где предполагается постоянство по всей его длине относительных коэффициентов разделения, а также срезов парциальных потоков компонентов по каскадным ступеням [8]. В настоящее время он используется в двух приближениях: со слабым обогащением, когда $q-1 \approx 0$ (Q-каскад [12; 23; 24]) и произвольным обогащением, когда $q-1$ не много меньше единицы (квазиидеальный каскад [25]). Применение модельных каскадов значительно упрощает расчет закономерностей массообмена в каскаде для многокомпонентного разделения.

Ниже кратко рассмотрены модельные каскады, для интересующего нас случая произвольного немалого коэффициента разделения на ступенях, когда $q-1$ не много меньше единицы – «квазиидеальный» каскад и его частный случай R-каскад [19].

Рассмотрим случай симметричного противоточного каскада с постоянными по его длине относительными коэффициентами разделения q_{ik} , α_{ik} , β_{ik} ($i = 1, 2, \dots, m$; k – номер «опорного» компонента). Условие постоянства относительных коэффициентов разделения обеспечивает выполнение условия постоянства величин g_i и φ_i . Следовательно, соотношения (4.25)–(4.28) приводятся к виду [1]:

$$G'_i(s-1) + \frac{1}{g_i} G'_i(s+1) - \frac{g_i+1}{g_i} G'_i(s) + \delta_{sf} F c_{iF} = 0, \quad i \neq k, \quad (4.42)$$

$$G'_k(s-1) + \frac{1}{g_k} G'_k(s+1) - \frac{g_k+1}{g_k} G'_k(s) + \delta_{sf} F c_{kF} = 0, \quad (4.43)$$

где s – текущий номер ступени, отсчитываемый от «тяжелого» конца каскада к его «легкому» концу $\delta_{sf} = \begin{cases} 0, & s \neq f \\ 1, & s = f \end{cases}$

Уравнения (4.42)–(4.43) представляют собой линейные разностные уравнения второго порядка относительно неизвестных функций $G'_i(s)$. Граничные условия для них имеют вид:

$$\begin{cases} G'_i(0) = G'_i(N+1) = 0, & i = 1, 2, \dots, m \\ G'_i(N) = PC_i^P, & i = 1, 2, \dots, m \\ G'_i(1) = g_i WC_i^W, & i \neq k \\ G''_k(1) = g_k WC_k^W. \end{cases} \quad (4.44)$$

Ступени с номерами $s = 1$ и $s = N$ являются крайними ступенями каскада, что делает возможным формально записать $G'_i(0) = G'_i(N+1) = 0$.

Решив (4.42) и (4.43), а также используя уравнения баланса (4.22) и граничные условия (4.44), можно получить уравнения связи внешних параметров такого каскада с длинами его секций и параметрами ступени. В итоге:

$$\frac{P}{F} = \sum_{j=1}^m C_j^F \frac{1 - g_j^{-f}}{1 - g_j^{-N-1}}, \quad s = f, \dots, N, \quad (4.45)$$

$$\frac{W}{F} = \sum_{j=1}^m C_j^F \frac{g_j^{N+1-f} - 1}{g_j^{N+1} - 1}, \quad s = 1, \dots, f-1, \quad (4.46)$$

$$C_i^P = C_i^F \frac{1 - g_i^{-f}}{1 - g_i^{-N-1}} / \sum_{j=1}^m C_j^F \frac{1 - g_j^{-f}}{1 - g_j^{-N-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.47)$$

$$C_i^W = C_i^F \frac{g_i^{N+1-f} - 1}{g_i^{N+1} - 1} / \sum_{j=1}^m C_j^F \frac{g_j^{N+1-f} - 1}{g_j^{N+1} - 1}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.48)$$

Далее, распределение потока $L(s)$, концентраций компонентов и коэффициента деления потоков по ступеням каскада можно определить по формулам [1]:

$$L(s) = \sum_{j=1}^m G'_j(s) \frac{1 + g_j}{g_j} = \begin{cases} P \sum_{j=1}^m \frac{g_j+1}{g_j-1} C_j^P (1 - g_j^{s-N-1}), & s = f, \dots, N \\ W \sum_{j=1}^m \frac{g_j+1}{g_j-1} C_j^W (g_j^s - 1), & s = 1, \dots, f-1 \end{cases} \quad (4.49)$$

$$C_i(s) = \frac{1 + g_j}{g_j} \cdot \frac{G''_i(s)}{G_i(s)} = \begin{cases} \frac{C_i^P \frac{g_j}{g_j-1} (1 - g_j^{s-N-1})}{\sum_{j=1}^m \frac{g_j+1}{g_j-1} C_j^P (1 - g_j^{s-N-1})}, & s = f, \dots, N, \\ \frac{C_i^W \frac{g_j}{g_j-1} (g_j^s - 1)}{\sum_{j=1}^m \frac{g_j+1}{g_j-1} C_j^W (g_j^s - 1)}, & s = 1, \dots, f-1, \end{cases} \quad (4.50)$$

$$\theta(s) = \frac{\sum_{j=1}^m G'_j(s)}{\sum_{j=1}^m G_j(s)} = \begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^m \frac{g_j}{g_j-1} C_j^P (1-g_j^{s-N-1})}{\sum_{j=1}^m \frac{g_j+1}{g_j-1} C_j^P (1-g_j^{s-N-1})}, & s = f, \dots, N, \\ \frac{\sum_{j=1}^m \frac{g_j}{g_j-1} C_j^W (g_j^s - 1)}{\sum_{j=1}^m \frac{g_j+1}{g_j-1} C_j^W (g_j^s - 1)}, & s = 1, \dots, f-1. \end{cases} \quad (4.51)$$

Формулу для расчета относительного суммарного потока в каскаде легко получить, суммируя (4.49) по всем ступеням каскада

$$\sum_{s=1}^N \frac{L(s)}{P} = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{g_i + 1}{g_i - 1} \left[\frac{W}{P} C_i^W(f) + C_i^P(N + 1 - f) \right] \right\}. \quad (4.52)$$

Рассмотренный выше каскад отличается тем, что относительные коэффициенты разделения q_{ik} , α_{ik} , β_{ik} (и, соответственно, срезы парциальных компонентов φ_i , φ_k и параметры g_i , g_k) остаются постоянными по длине каскада. Для таких каскадов в работе [19] был введен термин «квазиидеальный» каскад.

4.5 R-каскад и его использование при оптимизации параметров каскадов для разделения многокомпонентных изотопных смесей.

В исследованиях, как правило, когда обогащенный переработанный уран обогащается многопоточными схемами, часто используется модель R-каскада (Matched Abundance Ratio Cascade-MARC [10; 26; 27]). Это частный случай ‘квазиидеального’ каскада. Здесь условие отсутствия смешивания относительных концентраций при подаче в каждую ступень выполняется для выбранной пары компонентов (например, это могут быть изотопы ^{235}U и ^{238}U).

Рассмотрим R-каскад, в котором выполняется несмешивание относительных концентраций n -го и k -го компонентов смеси. Данная каскадная модель является аналогом используемого в теории разделения бинарных смесей «идеального» каскада, в «узлы» которого входят потоки с одинаковой концентрацией компонентов. R-каскады могут быть построены как в случае «слабого обогащения», так и для немалых обогащений на ступени. Рассмотрим R-каскад в случае немалых обогащений на ступени. Условие несмешения по относительным концентрациям n -го и k -го компонентов можно записать в виде:

$$R'_{nk}(s-1) = R_{nk}(s) = R''_{nk}(s+1). \quad (4.53)$$

Вследствие (4.53) коэффициенты α_{nk} и β_{nk} совпадают для двух соседних ступеней. При постоянных полных коэффициентах разделения равенство:

$$\alpha_{nk} = \beta_{nk} = \sqrt{q_{nk}} \quad (4.54)$$

приводит к каскаду со ступенями симметричными относительно пары компонентов с номерами n и k . При этом на всех ступенях каскада $\alpha_{ik} \neq \beta_{ik}$ ($i \neq n$). Учитывая, сказанное выше, (4.45)–(4.48) могут быть переписаны в виде:

$$\frac{P}{F} = \sum_{j=1}^m C_j^F \frac{(R_{nk}^W)^{-d_j} - (R_{nk}^F)^{-d_j}}{(R_{nk}^W)^{-d_j} - (R_{nk}^P)^{-d_j}}, \quad (4.55)$$

$$\frac{W}{F} = \sum_{j=1}^m C_j^F \frac{(R_{nk}^F)^{-d_j} - (R_{nk}^P)^{-d_j}}{(R_{nk}^W)^{-d_j} - (R_{nk}^P)^{-d_j}}, \quad (4.56)$$

$$C_i^P = C_i^F \frac{(R_{nk}^W)^{-d_i} - (R_{nk}^F)^{-d_i}}{(R_{nk}^W)^{-d_i} - (R_{nk}^P)^{-d_i}} / \sum_{j=1}^m C_j^F \frac{(R_{nk}^W)^{-d_j} - (R_{nk}^F)^{-d_j}}{(R_{nk}^W)^{-d_j} - (R_{nk}^P)^{-d_j}} \quad (4.57)$$

$$C_i^W = C_i^F \frac{(R_{nk}^F)^{-d_i} - (R_{nk}^P)^{-d_i}}{(R_{nk}^W)^{-d_i} - (R_{nk}^P)^{-d_i}} / \sum_{j=1}^m C_j^F \frac{(R_{nk}^F)^{-d_j} - (R_{nk}^P)^{-d_j}}{(R_{nk}^W)^{-d_j} - (R_{nk}^P)^{-d_j}} \quad (4.58)$$

$$d_i = \frac{\ln q_{ik}}{\ln g_n} - 1, \quad (4.59)$$

, где R_{nk}^F , R_{nk}^W и R_{nk}^P – относительные концентрации целевого компонента в потоках F , W , и P , соответственно.

Для молекулярно-кинетических методов разделения соотношения (4.16)–(4.17) можно записать в следующем виде:

$$g_k = q_0^{-\frac{M_k - M_n}{2}}, \quad (4.60)$$

$$g_i = q_0^{M^* - M_i}, \quad (4.61)$$

, где $M^* = \frac{M_n + M_k}{2}$.

Из (4.60)–(4.61) непосредственно следует, что для всех компонентов с $M_i < M^*$ величины $g_i > 1$, если же $M_i > M^*$, то $g_i < 1$. Из соотношений (4.57) и (4.58) при выполнении условий $N - f + 1 \gg 1$, $f - 1 \gg 1$ («длинный каскад»)

следует, что в таком R-каскаде компоненты с $g_i > 1$ ($M_i < M^*$ обогащаются к «легкому» выходящему потоку каскада, а компоненты с $g_i < 1$ ($M_i > M^*$ обогащаются к «тяжелому» выходящему потоку каскада. Следовательно, величина параметра M^* полностью определяет направление обогащения компонентов смеси в R-каскаде.

Суммарный поток R-каскада равен [1]:

$$\sum_{s=1}^N L(s) = \sum_{j=1}^m \frac{PC_j^P \ln R_{nk}^P + WC_j^W \ln R_{nk}^W - FC_j^F \ln R_{nk}^F}{\frac{g_j-1}{g_j+1} \ln g_n}. \quad (4.62)$$

Среди свойств, присущих модели R-каскада особо следует выделить следующие:

1. В случае $m = 2$ условие несмещения (4.53) сводится к известному условию несмещения абсолютных концентраций, которое справедливо для «идеального» каскада;
2. Как показано в работе [28], суммарный поток R-каскада при заданных величинах концентраций целевого компонента в потоках отбора C_n^P и отвала C_n^W минимален, при условии соответствующего выбора номера опорного компонента. Остановимся подробнее на этом свойстве. Фактически выбор опорного компонента определяет величину M^* . При этом, строго говоря, величина M^* для любой m -компонентной смеси является дискретной функцией номера опорного компонента и, соответственно, имеет ограниченный набор допустимых значений, определяемых возможным количеством «опорных» компонентов смеси. В [20] предложено формально ввести в рассмотрение «виртуальные» компоненты с исчезающе малой концентрацией (на несколько порядков меньше наименьшей концентрации «реальных» компонентов смеси) и с массовыми числами, лежащими в пределах от M_1 до M_m . В этом случае значение M^* может принимать любые значения в интервале от M_1 до M_m . Это позволяет построить кривую зависимости суммарного потока в каскаде от величины M^* и найти ее минимум.

Тем самым, данный подход позволяет из бесконечного множества набора параметров R-каскадов, обеспечивающих получение заданных концентраций целевого компонента в выходящих потоках, выбрать параметры такого R-каскада, который отвечает минимуму величины суммарного потока [20]. При этом полученные параметры такого R-каскада будет незначительно (менее, чем на

1%) отличаться от параметров оптимального по величине суммарного потока каскада (при заданных концентрациях целевого компонента в потоках отбора и отвала) [28]. Такой R-каскад можно рассматривать как наилучший или «эталонный».

Приведенные выше свойства каскада с несмешиванием по относительным концентрациям выбранной пары компонентов (R-каскада) делают его очень удобным для численного моделирования процессов молекулярно-селективного массопереноса в каскаде казовых центрифуг для разделения многокомпонентных смесей, таких как регенерированный уран. К тому же основной целью проведения вычислительных экспериментов в диссертационной работе являлся расчет изотопных составов получаемого в схеме конечного продукта (товарного низкообогащенного урана) и оценка ключевых интегральных параметров каскадных схем (массовые расходы регенерата и обедненного урана, потоки между каскадами, затраты работы разделения и другие), выбор был сделан именно в пользу модели R-каскада.

Следует отметить, что как таковые понятия «работа разделения» и «единица работы разделения» (ЕРР) первоначально введены только для двухкомпонентных смесей. Для многокомпонентной смеси и, в том числе, смеси регенерированного урана, понятие работы разделения является условным. Поэтому в приведенных ниже результатах под работой разделения подразумевали условную величину прямо пропорциональную числу газовых центрифуг в каскаде (или суммарному потоку каскада при условии работы центрифуг в идентичных режимах).

4.6 Алгоритмы расчета параметров ординарных «квазиидеального» каскада и Q-каскада при различных заданных параметрах. Примеры расчетов.

4.7 Задания для самостоятельного выполнения.

Список сокращений и условных обозначений

	q_0	коэффициент разделения
	N	длина каскада (число ступеней)
f	$\left. \begin{array}{c} f \\ N + 1 - f \end{array} \right\}$	число ступеней в обеднительной и обогатительной частях.
	$\left. \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\}$	индексы целевого (^{235}U) и опорного компонент.
	$\left. \begin{array}{c} F_i \\ P_i \\ W_i \end{array} \right\}$	потoki питания, отбора и отвала, где i – индекс каскада.
	ЛВР	легководный реактор
	ВВЭР	водо-водяной энергетический реактор
	ЯТЦ	ядерный топливный цикл
	ЗЯТЦ	замкнутый ядерный топливный цикл
	ТВС	тепловыделяющая сборка
МОХ-топливо		ядерное топливо, состоящее из смеси диоксидов урана и плутония
	ОЯТ	Облученное ядерное топливо, извлеченное из ядерного реактора после использования и для этой цели в имеющейся форме более непригодное
	РАО	Радиоактивные отходы. Существуют подклассы радиоактивных отходов: высокоактивные (ВАО), среднеактивные (САО), низкоактивные (НАО)
	НОУ	низкообогащенный уран
	ВОУ	высокообогащенный уран
	ОГФУ	обедненный гексафторид урана
	РР	работа разделения
	ЕРР	1 кг работы разделения, единица работы по разделению изотопов. Мера усилий, затрачиваемых на разделение материала определённого изотопного состава на две фракции с отличными изотопными составами; не зависит от применяемого процесса разделения.
	UF_6	гексафторид урана

$C_8H_3F_{13}$ фреон-346

ASTM международное общество по испытаниям и материалам

ASTM международное общество по испытаниям и материалам

CHAU система нелинейных алгебраических уравнений

Список литературы

1. *Сулаберидзе, Г. А.* Теория каскадов для разделения бинарных и многокомпонентных изотопных смесей; под ред. В. Д. Бормана / Г. А. Сулаберидзе, В. А. Палкин, В. Д. Борисевич. — 2011.
2. *Сазыкин, А.* Усовершенствованный Метод Расчета Разделения Многокомпонентных Смесей На Центробежных Каскадах / А. Сазыкин, А. Руднев // Сб. Докладов 2-Ой Всерос. Научн. Конф. «Физ.-Хим. Процессы При Селекции Атомов и Молекул». — ЦНИИАтоминформ, 1997. — с. 159—161.
3. *Wu, H.* Calculation Methods for Determining the Distribution of Components in a Separation Cascade for Multicomponent Mixture / H. Wu, C. Ying, G. Liu // Sep. Sci. and Techn. 33(6). — 1988. — с. 887—898.
4. Эффективный Метод Расчета Каскадов Для Разделения Многокомпонентных Изотопных Смесей / Л. Холпанов [и др.] // Хим. Пром. — 1998. — № 3. — с. 44—50.
5. On Calculation of Squared-off Cascades for Multicomponent Isotope Separation / D. Potapov [и др.] // Proc. 5th. Workshop of Separation Phenomena in Liquids and Gases. Iguazu Falls, Brazil. — 1996. — с. 13—23.
6. *Zeng, S.* A Robust and Efficient Calculation Procedure for Determining Concentration Distribution of Multicomponent Mixture / S. Zeng, C. Ying // Sep. Sci. and Techn. — 2000. — т. 35, № 4. — с. 613—622.
7. *Баранов, В.* Изотопы. Свойства, Получение, Применение / В. Баранов.
8. *YAMAMOTO, I.* Multicomponent Isotope Separating Cascade Composed of Elements with Large Separation Factors / I. YAMAMOTO, A. KANAGAWA // Journal of Nuclear Science and Technology. — 1978. — 1 авг. — т. 15, № 8. — с. 580—584.
9. *Миненко, В.* К Теории Каскадов Для Разделения Многокомпонентных Изотопных Смесей / В. Миненко, Р. Кучеров // Атомная энергия. — 1965. — т. 19, № 4. — с. 360—367.
10. *De la Garza, A.* Multicomponent Isotope Separation in Cascades / A. de la Garza, G. A. Garrett, J. E. Murphy // Chemical Engineering Science. — 1961. — Sept. 1. — Vol. 15, no. 3. — P. 188—209.

11. *Жигаловский, Б.* Лекционные Материалы По Многокомпонентным Смесям. Новоуральск, УЭХК / Б. Жигаловский. — 1999.
12. Design of Cascades for Separating Isotope Mixtures / N. A. Kolokol'tsov [et al.] // Soviet Atomic Energy. — 1970. — Dec. 1. — Vol. 29, no. 6. — P. 1193—1198.
13. К вопросу о построении каскадов для разделения многокомпонентных изотопных смесей / Н. А. Колокольцов [и др.]. — 1970.
14. *Миненко, В. П.* Предельное обогащение промежуточных изотопов в отборе с концов каскада / В. П. Миненко. — 1972.
15. *Wu, J.* The Study of Multicomponent Isotope Separation of Uranium in Cascades by Centrifugal Method / J. Wu, Z. Fu // Proc. of 6th Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases 1998. Nagoya, Japan. October. — с. 18—21.
16. *Борисевич, В. Д.* О Расчете Каскадов с Дополнительным Отбором Для Разделения Многокомпонентных Изотопных Смесей / В. Д. Борисевич, Д. Потапов, Г. А. Сулаберидзе. — 1993.
17. *Wood, H. G.* On a Criterion Efficiency for Multi-Isotope Mixtures Separation / H. G. Wood, V. D. Borisevich, G. A. Sulaberidze // Sep. Sci. and Technol. — 1999. — т. 34, № 3. — с. 343—357.
18. Особенности обогащения компонентов с промежуточной массой в квазиидеальном каскаде / Г. А. Сулаберидзе [и др.] // Атомная энергия. — 2006. — т. 100, № 1. — с. 51—56.
19. *Сазыкин, А.* Квазиидеальные Каскады Для Разделения Многокомпонентных Смесей Изотопов / А. Сазыкин. — 2000.
20. *Сулаберидзе, Г. А.* О Сравнение Оптимальных и Модельных Каскадов Для Разделения Многокомпонентных Смесей При Произвольном Обогащении На Ступени / Г. А. Сулаберидзе, В. Д. Борисевич, Ц. Се // Теорет. основы хим. технологии. — 2008. — т. 42, № 4. — с. 1—7.
21. Classification of Model Cascades for Separation of Multicomponent Isotope Mixtures / G. A. Sulaberidze [и др.] // Separation Science and Technology. — 2020. — 21 апр. — т. 0, № 0. — с. 1—11.

22. Objective Function at Optimization of Separation Cascades / A. Mustafin [и др.] // AIP Conference Proceedings. — 2019. — апр. — т. 2101, № 1. — с. 020008.
23. *Borisevich, V.* New Approach to Optimize Q-Cascades / V. Borisevich, G. Sulaberidze, S. Zeng // Chemical Engineering Science. — 2011. — Vol. 66, no. 3. — P. 393—396.
24. The Q-Cascade Explanation / S. Zeng [et al.] // Separation Science and Technology. — 2012. — Vol. 47, no. 11. — P. 1591—1595.
25. Special Features of the Enrichment of Components with Intermediate Mass in a Quasi-Ideal Cascade / G. A. Sulaberidze [et al.] // Atomic Energy. — 2006. — Jan. 1. — Vol. 100, no. 1. — P. 53—59.
26. *Kazuki Hida.* Simultaneous Evaluation of the Effects of ^{232}U and ^{236}U on Uranium Recycling in Boiling Water Reactors / Kazuki Hida, S. Kusuno, S. Takeshi // Nuclear Technology. — 1986. — т. 75, № 2. — с. 148—159.
27. *Wood, H.* Effects of Separation Processes on Minor Uranium Isotopes in Enrichment Cascades / H. Wood // Science and Global Security. — 2008. — т. 16, № 1/2. — с. 26—36.
28. Comparative Study of the Model and Optimum Cascades for Multicomponent Isotope Separation / T. Song [и др.] // Separation Science and Technology. — 2010. — сент. — т. 45, № 14. — с. 2113—2118.