Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

МИНИМИЗАЦИЯ ЗАТРАТ ЭНЕРГИИ НА УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ СПУТНИКА

Автореферат
Бакалаврская работа

студента 4 курса 413 группы

направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Исмайылова Гусейна Али оглы

Научный руководитель
Доцент ________ И. А. Панкратов

Зав. кафедрой
зав.каф., д.ф - м.н. ________ Ю. А. Блинков

Саратов 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ВВЕДЕНИЕ

Представленная квалификационная работа посвящена разработке методов решения задач оптимального управления для углового движения спутника. Такие задачи составляют активно исследуемое направление прикладной математики. Особое внимание в работе уделено исследованию достаточных условий оптимальности в принципе максимума Понтрягина. Основные результаты связаны с разработкой алгоритмов построения оптимальных траекторий и оптимальных управлений.

Необходимо рассмотреть случай минимизации энергии на перевод искусственного спутника Земли в нужное угловое положение. Время окончания процесса фиксировано. Также требуется рассмотреть задачу с её различными параметрами и вывести основные закономерности.

1 Общая характеристика работы

1.1 Актуальность работы

Теория управления является в настоящее время быстро развивающимся разделом современной математики, что вызвано потребностями многочисленных приложений в таких разнообразных дисциплинах как аэрокосмические науки, инженерные и технические науки, гибридные системы, вычислительные и компьютерные науки, океанографические, физические и математические науки. Возрастает интерес к теории оптимального управления и ее приложениям у математиков, экономистов и специалистов по проблемам окружающей среды, а также международных научных организаций, что подтверждается увеличением количества работ в российских и зарубежных издательствах.

1.2 Цели и задачи работы

Цель работы заключается в исследовании свойств оптимальных решений в задачах управления угловым движением спутника при разлиных параметрах, изучении достаточных условий оптимальности в принципе максимума Понтрягина, разработке алгоритмов построения оптимальных траекторий и оптимальных управлений. Также необходимо автоматизировать все используемые для решения алгоритмы программным образом.

В данной работе будут представлены основные определения, понятния и теоремы, которые позволят составить и решить поставленную задачу, решение которой состоит из двух частей: аналитической и численной. Аналитическая часть позволяет перевести задачу оптимального управления к краевой задаче, для которой составляется алгоритм в численной части. Для реализации такого алгоритма будет написана программа, которая будет выдавать результаты решения краевой задачи, а также генерировать скрипт для графиков, которые наглядным образом будут отражать суть этих результатов.

1.3 Научная новизна

Научая новизна данной работы состоит в рассмотрении поставленной задачи с применением алгебры кватернионов не только в теоритических выкладках, но и в программной реализации решения, которая является универсальной для любого типа задач управления благодаря использованию интерфейсов в программе, которые могут быть ипользованы для самых различных уравнений состояния.

1.4 Достоверность полученных результатов

Достоверность полученных результатов следует из разбора многочисленных случаев решения задачи для разных параметров и сравнивания их с очевидными свойствами функционала качества управления.

1.5 Практическая значимость работы

Полученные в работе теоритические результаты позволяют понять основные зависимости функционала качества управления и его параметров, а также прогнозировать поведение системы при изменениях параметров самой задачи. Более того, написанные программы позволяют в общем случае рассматривать любую задачу управления.

2 Содержание выпускной квалификационной работы

2.1 Постановка задачи

Пусть угловое движение тела описывается кинематическим уравнением Пуассона

$$2\dot{\Lambda} \; = \; \Lambda \circ \Omega, \tag{2.1}$$

где $\Lambda \; = \; \Lambda(\lambda_0, \; (\lambda_1, \; \lambda_2, \; \lambda_3))$ — кватернион, характеризующий положение твердого тела относительно инерциальной системы координат, $\Omega \; = \; \Omega(\omega_0, \; (\omega_1, \; \omega_2, \; \omega_3))$ — кватернион, векторная часть которого равна абсолютной угловой скорости твердого тела относительно этой системы, а скалярная часть равна нулю.

Выражение (2.1) в развернутом виде выглядит следующим образом

$$\begin{cases} 2\dot{\lambda}_0 \; = \; -\lambda_1\omega_1 \; - \; \lambda_2\omega_2 \; - \; \lambda_3\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_1 \; = \; \lambda_0\omega_1 \; + \; \lambda_2\omega_3 \; - \; \lambda_3\omega_2, \\ 2\dot{\lambda}_2 \; = \; \lambda_0\omega_2 \; + \; \lambda_3\omega_1 \; - \; \lambda_1\omega_3, \\ 2\dot{\lambda}_3 \; = \; \lambda_0\omega_3 \; + \; \lambda_1\omega_2 \; - \; \lambda_2\omega_1. \end{cases} \tag{2.2}$$

Также дано начальное угловое положение

$$\Lambda(0) \; = \; \Lambda^0. \tag{2.3}$$

И конечное угловое положение

$$\Lambda(T) \; = \; \Lambda^T. \tag{2.4}$$

Требуется найти такое оптимальное управление $\Omega(t)$, чтобы функционал качества

$$I \; = \; \int_0^T (\alpha_1\omega_1 \; + \; \alpha_2\omega_2 \; + \; \alpha_3\omega_3)dt, \tag{2.5}$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \ = \ const \ > \ 0$ — весовые множители функционала (2.5), $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ — компоненты векторной части Ω, принимал минимальные значения при фиксированном T.

Функционал качества (2.5) характеризует общие энергетические затраты на управление. Для начала задача будет решена в общем случае, а затем будут рассмотрены конкретные примеры.

2.2 Аналитическая часть решения

Воспользуемся методом максимума Понтрягина, суть которого заключается в том, что задача оптимального управления сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Таким образом мы приходим к следующей краевой задаче

$$\begin{cases} 2\dot{\Lambda} \ = \ \Lambda \ \circ \ \Omega, \\ 2\dot{\Psi} \ = \ \Psi \ \circ \ \Omega, \\ \Omega \ = \ \left(0\ ,\left(\dfrac{p_1}{4\alpha_1},\ \dfrac{p_2}{4\alpha_3},\ \dfrac{p_3}{4\alpha_3}\right)\right), \\ \Lambda(0) \ = \ \Lambda^0, \\ \Lambda(T) \ = \ \Lambda^T, \end{cases} \tag{2.6}$$

где

$$\begin{cases} p_1 \ = \ -\psi_0\lambda_1 \ + \ \psi_1\lambda_0 \ + \ \psi_2\lambda_3 \ - \ \psi_3\lambda_2, \\ p_2 \ = \ -\psi_0\lambda_2 \ - \ \psi_1\lambda_3 \ + \ \psi_2\lambda_0 \ + \ \psi_3\lambda_1, \\ p_3 \ = \ -\psi_0\lambda_3 \ + \ \psi_1\lambda_2 \ - \ \psi_2\lambda_1 \ + \ \psi_3\lambda_0. \end{cases} \tag{2.7}$$

2.3 Численная часть решения

Воспользуемся методом Ньютона для решения краевой задачи (2.6). Суть данного итерационного метода состоит в том, что краевая задача сводится к решению серии задач Коши при фиксированном начальном условии с помощью некоторого начального приближения параметра, затем проверяется конечное условие, и если оно удовлетворяется с некоторой требуемой точностью, то задача решена, иначе находится новое приближение, построенное на предыдущем.

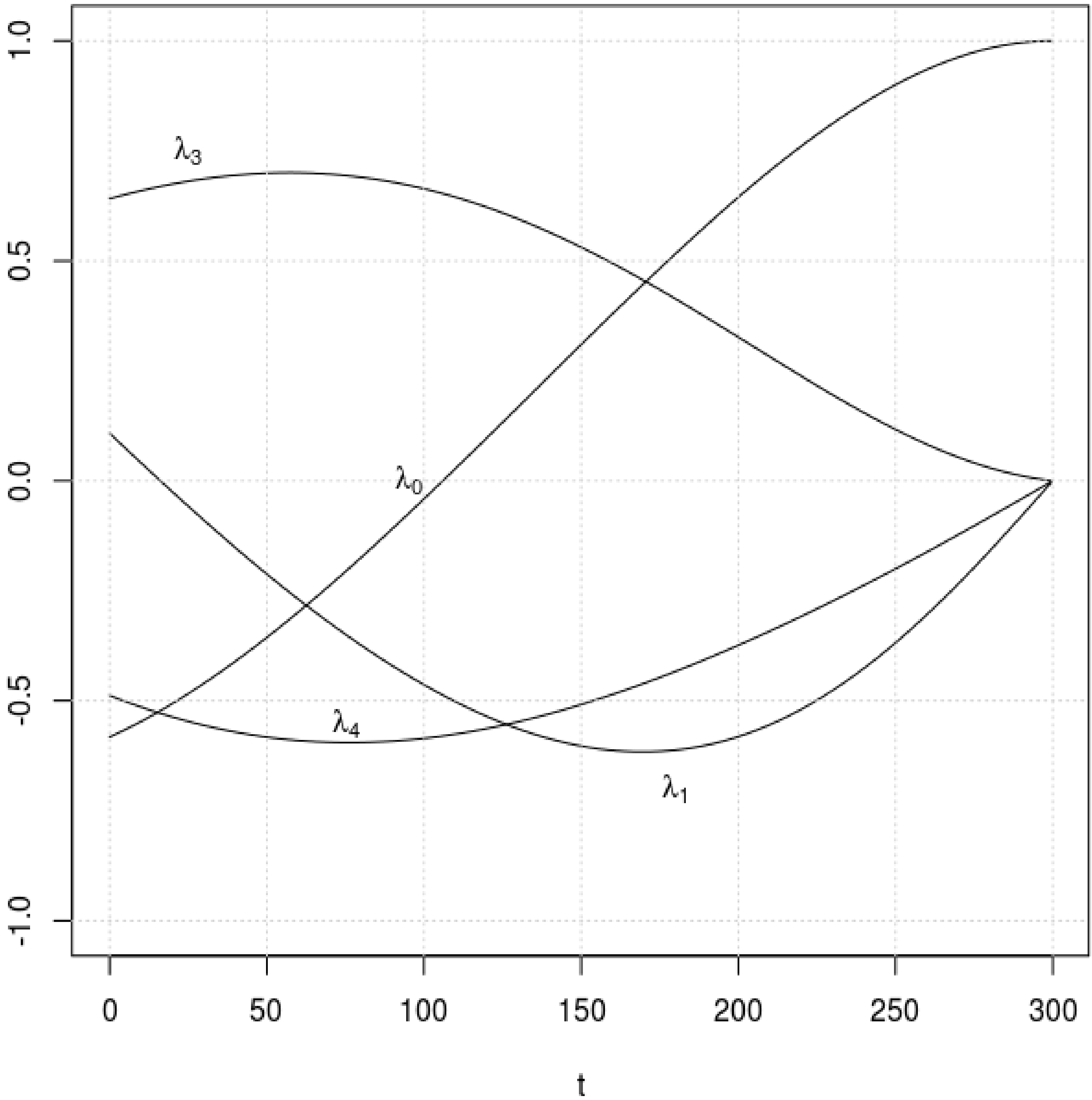
2.4 Исследование результатов

Расмотрим задачу оптимального управления, которой соответствует краевая задача (2.8) для тела, начальное положение которого задано углами Эйлера: $\alpha = -78.4°$, $\beta = -39.9°$, $\gamma = 112.9°$, а конечное — $\widetilde{\alpha} = 0°$, $\widetilde{\beta} = 0°$, $\widetilde{\gamma} = 0°$. Пусть требуется решить задачу с точностью $\varepsilon = 10^{-9}$ при весовых множителях $\alpha_1 = 1000$, $\alpha_2 = 2000$, $\alpha_3 = 3000$ для времени $T = 300c$.

$$\begin{cases} 2\dot{\Lambda} = \Lambda \circ \Omega, \\ \Lambda(0) = \Lambda^0(\lambda_0^0,\ (\lambda_1^0,\ \lambda_2^0,\ \lambda_3^0)), \\ \lambda_0^0 = -0.5821271946729387, \\ \lambda_1^0 = 0.10821947847990215, \\ \lambda_2^0 = 0.641192910029563, \\ \lambda_3^0 = 0.48814764756943485. \\ \Lambda(T) = \Lambda^T(\lambda_0^T,\ (\lambda_1^T,\ \lambda_2^T,\ \lambda_3^T)), \\ \lambda_0^T = 1,\ \lambda_1^T = 0,\ \lambda_2^T = 0,\ \lambda_3^T = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

Тогда график изменения компонент кватерниона $\Lambda = \Lambda(\lambda_0,\ (\lambda_1,\ \lambda_2, \lambda_3))$ с течением времени, найденное в ходе решения, представлен на рисунке 2.1, по которому видно, что оптимальное управление переводит тело из заданного начального углового положения в требуемое конечное.

Найденное решение Λ позволяет получить данные об изменениях углов Эйлера, задающие угловое положение тела. На рисунках 2.2 $-$ 2.4 представлены изменения углов прецессии, нутации, собственного вращения соответственно.



1.0
0.5
0.0
-0.5
-1.0
0
50
100
150
200
250
300
t
λ_3
λ_0
λ_4
λ_1

Рисунок 2.1.

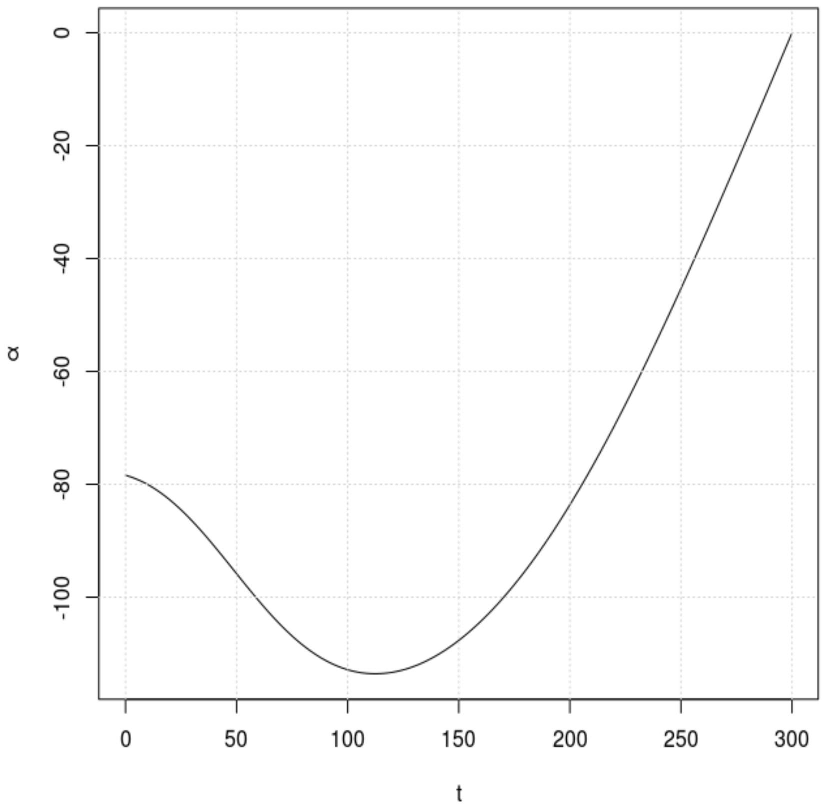


Рисунок 2.2 — изменение угла прецессии.

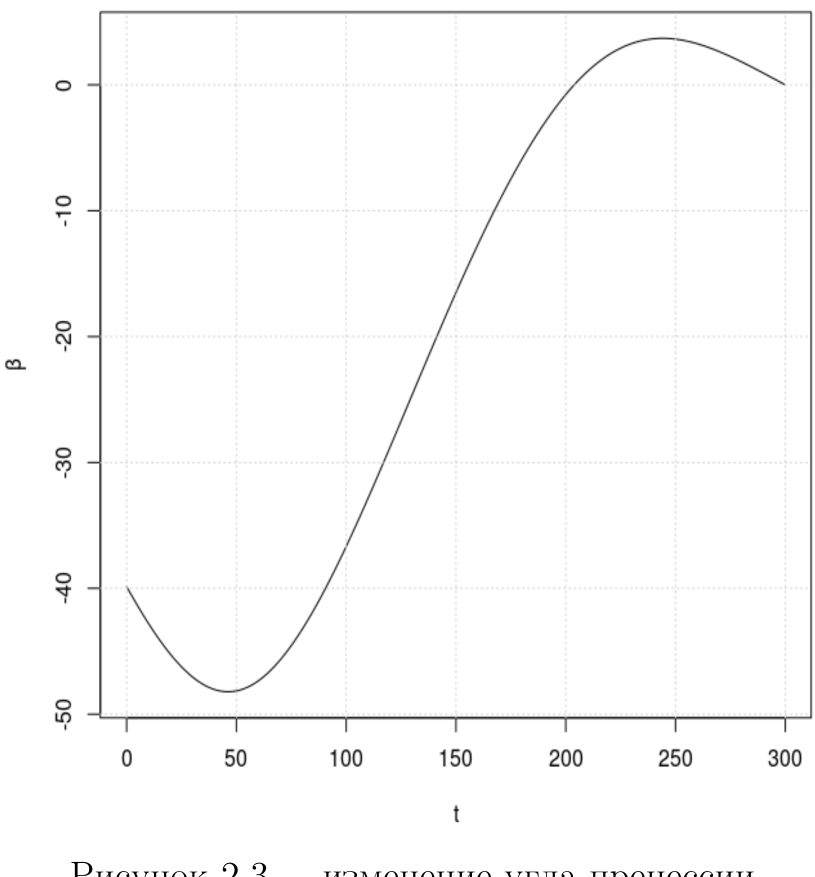


Рисунок 2.3 — изменение угла прецессии.

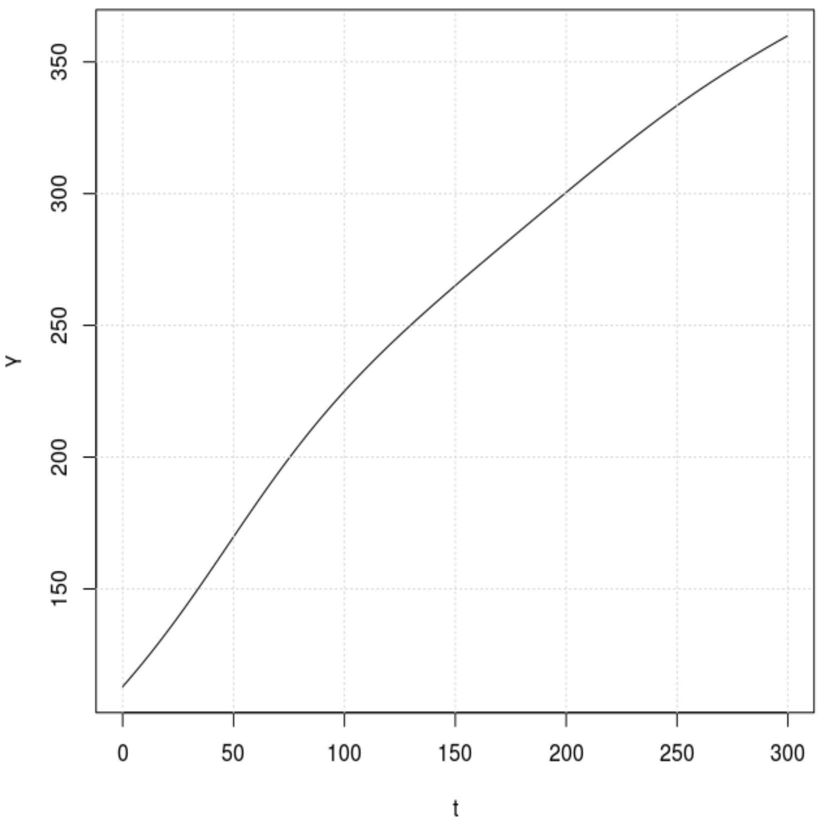


Рисунок 2.4 — изменение угла собственного вращения.

Рисунки 2.2 − 2.4 полностью соответствуют рисунку 2.1, и следовательно требованиям для оптимального управления.

В поставленной задаче в качестве оптимального управления, как было сказано ранее, выступает угловая скорость $\Omega = \Omega(\omega_0,\ (\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3))$, которая также находится в ходе решения краевой задачи (2.6). График изменения компонент угловой скорости $\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3$ представлен на рисунке 2.5.

Основная трудность, с которой можно столкнуться при решении задачи оптмального управления для больших углов отклонения между начальным и конечным положениимями тела — это нахождение начального приближения Ψ, поэтому желательно знать, где приблизительно его можно находить.

Для данной задачи график изменения компонент кватерниона $\Psi = \Psi(\psi_0,\ (\psi_1,\ \psi_2, \psi_3))$, который получается на последней итерации метода Ньютона решения краевой задачи (2.6), представлен на рисунке 2.5.

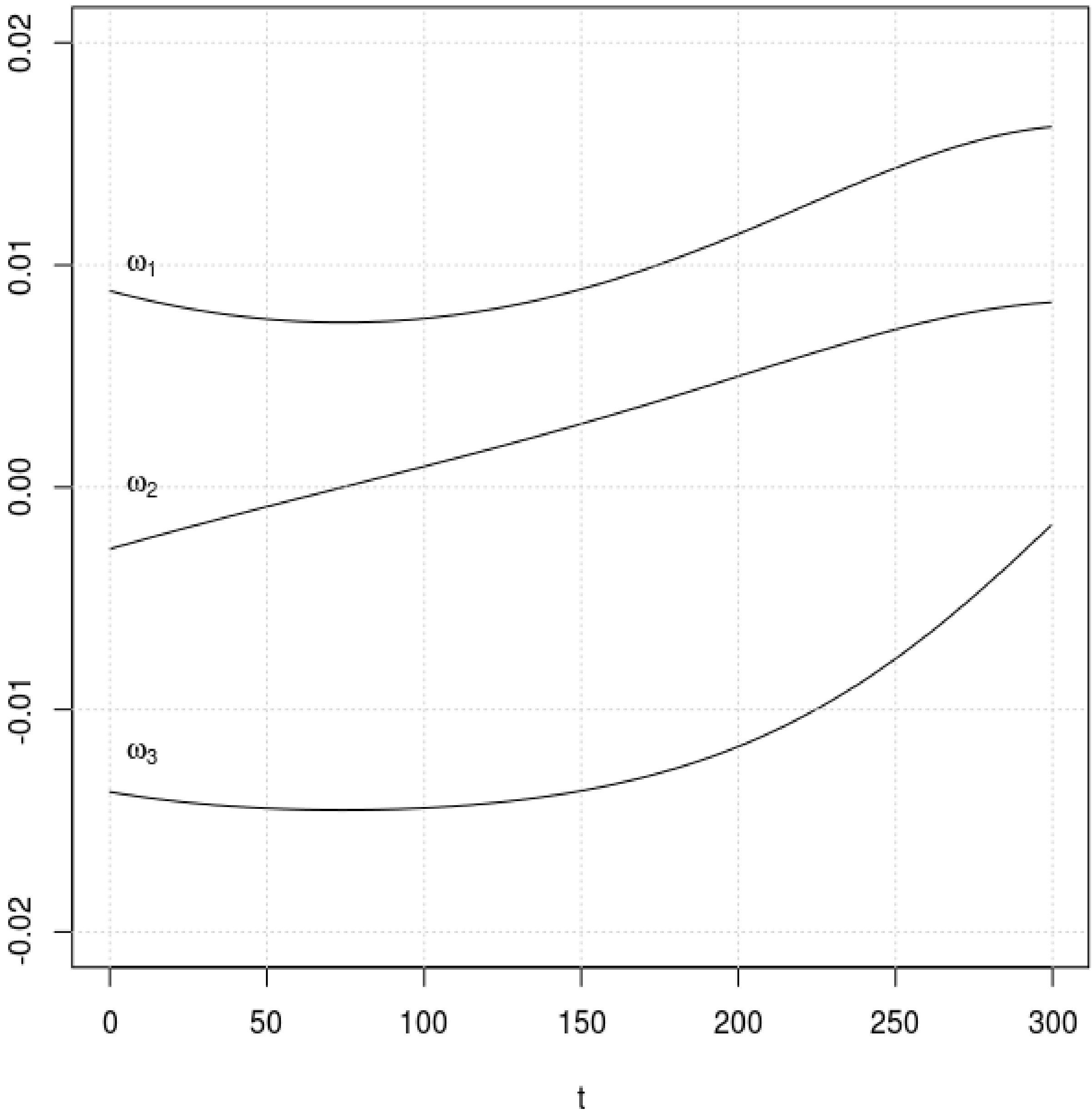


Рисунок 2.5.

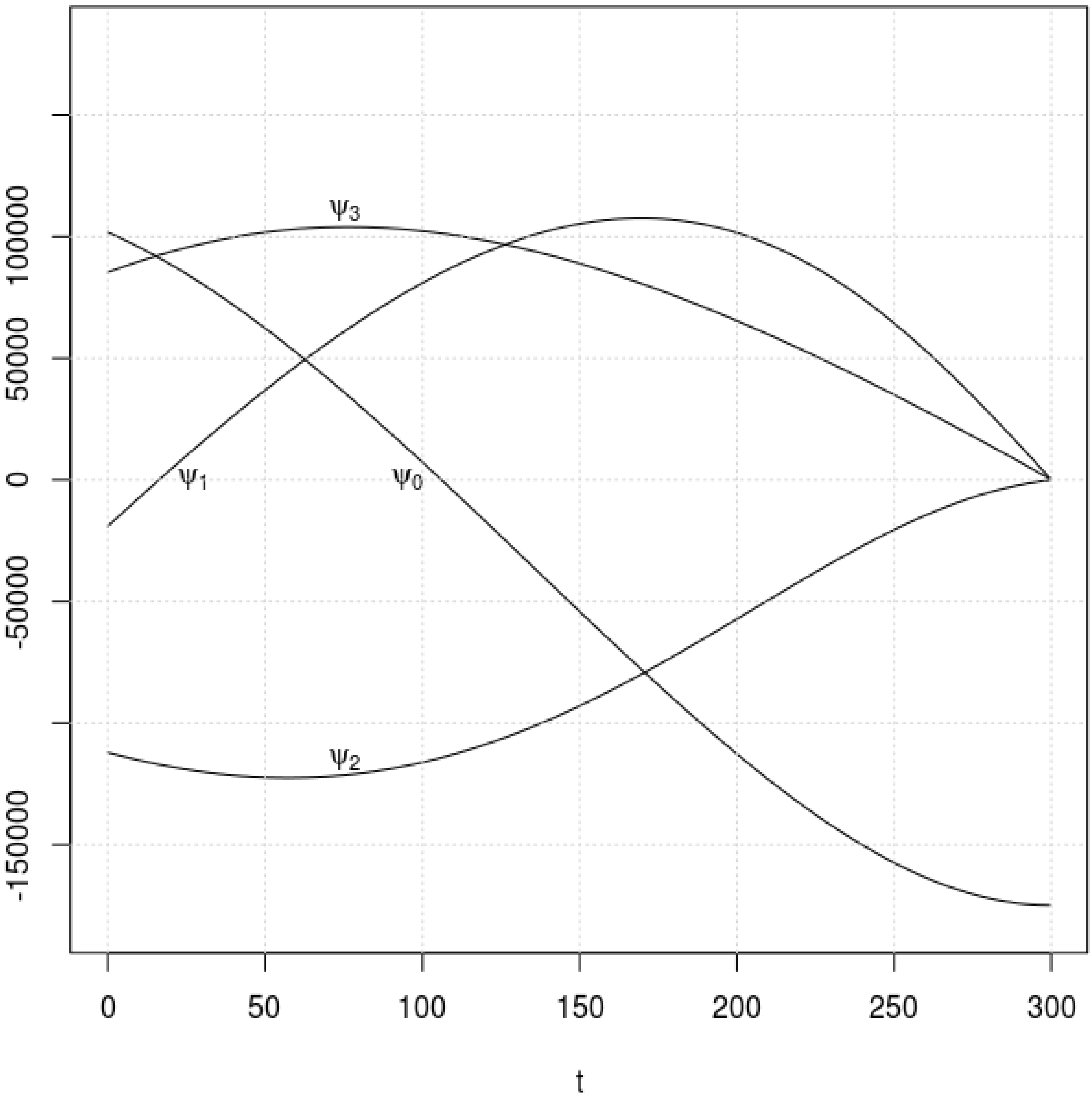

ψ3
ψ1
ψ0
ψ2
100000
50000
0
-50000
-150000
0
50
100
150
200
250
300
t

Рисунок 2.6.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предоставленной дипломной работе удалось решить задачу оптимального управления углового движения искусственного спутника Земли, для которой требовалось составить и решить краевую задачу с помошью принципа максимума Л.С. Понтрягина.

Были рассмотрены различные поведения системы при различных параметрах. Также удалось программно реализовать алгоритм численного решения задачи с применением алгебры кватернионов.

Полученные в работе теоритические результаты позволяют понять основные зависимости функционала качества управления и его параметров, а также прогнозировать поведение системы при изменениях параметров самой задачи.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Челноков, Ю. Н. *Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твёрдого тела и их приложения.* М.: Физматлит, 2006. – 512с.

2. Бранец, В. Н., and Шмыглевский, И. П. *Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела.* М.: Наука, 1973. – 320с.

3. Понтрягин, Л. С., and Болтянский, В. Г. and Гамкрелидзе, Р. В. and Мищенко, Е. Ф. *Математическая теория оптимальных процессов.* М.: Наука, 1983 – 393с.

4. Сапунков, Я. Г. *Численное исследование систем автоматического управления.* М.: Наука, 2001. – 24с.

5. Ю.Н. Горелов *ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ (МЕТОД РУНГЕ – КУТТА).* Изд-во «Самарский университет», 2006. – 48 с.

6. А.С. Антипова, Б.Г. Бирюков *Аналитическое и численное исследование кинематической задачи оптимальной переориентации твердого тела.* УДК – 48 с.

7. В. С. Асланов. *Динамика твёрдого тела и систем тел.* Самарский государственный аэрокосмический университет, 2011 – 216с.

8. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. *Численные методы. Теория, алгоритмы, программы..* Оренбург: ИПК ОГУ, 2008. – 264 с.

9. Ермолин В. С., Королев В. С., Потоцкая Е. Ю. *Теоретическая механика. Часть I. Кинематика. Учебное пособие..* СПб: СПбГУ, ВВМ, 2013.— 225 с.

10. С. А. Теляковский *Курс лекций по математическому анализу.* М.: МИАН, 2009. – 212 с.

11. Пантелеев А.В., Бортаковский А.С., Летова Т.А. *Оптимальное управление в примерах и задачах..* М: Издательство МАИ, 1996. — 583 с.

12. Knuth: Computers and Typesetting,
http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/abcde.html

13. Прямые методы решения линейных систем
http://www.math.spbu.ru/user/pan/Page11-gauss.pdf

14. Метод Гаусса
http://pedsovet.info/info/pages/referats/info_00036.htm

15. Углы Эйлера
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A3%D0%B3%D0%BB%D1%8B_%D0%AD%D0%B9%D0%BB%D0%B5%D1%80%D0%B0

16. Conversion between quaternions and Euler angles
http://en.wikipedia.org/wiki/Conversion_between_quaternions_and_Euler_angles

17. Newton's method
https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method

18. Java Platform, Standard Edition (Java SE) 8
https://docs.oracle.com/javase/8/

19. Java: What Is an Interface?
https://docs.oracle.com/javase/tutorial/java/concepts/interface.html

20. R: Documentation
https://www.r-project.org/other-docs.html

21. Исходный код программы
https://bitbucket.org/guseyn/diploma/src

22. Block diagram
https://en.wikipedia.org/wiki/Block_diagram