Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра Математического и компьютерного моделирования

МИНИМИЗАЦИЯ ЗАТРАТ ЭНЕРГИИ НА УПРАВЛЕНИЕ УГЛОВЫМ ДВИЖЕНИЕМ СПУТНИКА

Бакалаврская работа

студента 4 курса 413 группы

направление 01.03.02 Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Исмайылова Гусейна Али оглы

Научный руководитель
Доцент ______________ И. А. Панкратов

Зав. кафедрой
зав.каф., д.ф - м.н. ______________ Ю. А. Блинков

Саратов 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является ознакомление с методом конечных элементов, решение дифференциального уравнения на отрезке с граничными условиями типа Дирихле и типа Неймана, нахождение значения интеграла разбиением области на треугольники.

1 Задача 1

1.1 Постановка задачи и аналитическое решение

Рассмотрим уравнение

Требуется решить следующее уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}\varphi}{dx} + \beta\varphi = 0, \tag{1.1}$$

где φ – неизвестная функция, методом конечных элементов на отрезке $[0, 1]$, рассмотреть случаи, когда краевые условия, имеющие вид

$$\begin{cases} 1)\ \varphi(0) = 0,\ \varphi(1) = 1, \\ 2)\ \varphi(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=1} = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

где 1) – краевые условия типа Дирихле, 2) – краевые условия типа Неймана.

Для начала найдем аналитическое решение задачи при $\alpha = -6,\ \beta = 9$. Общее решение имеет вид: $\varphi(x) = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}$;

1) Решение в случае с краевыми условиями типа Дирихле выглядит следующим образом: $\varphi(x) = e^{3x-3}x$;

2) Решение в случае с краевыми условиями типа Неймана выглядит следующим образом: $\varphi(x) = \frac{e^{3x-3}x}{4}$.

1.2 Решение уравнения с помощью метода конечных элементов

Рассмотрим общий вид нашей задачи:

$$\begin{cases} L\varphi + p = 0, \varphi \in \Lambda, \\ T\varphi + r = 0, \varphi \in \Gamma, \end{cases}$$

где L — линейный дифференциальный оператор и T — линейный оператор, p, r — не зависят от неизвестной функции.

Решение будем искать в виде $\widetilde{\varphi} = \sum\limits_{k=1}^{M+1} \widetilde{\varphi}_k N_k$, где

$$N_k = \begin{cases} 0, & x \le x_{k-1}, \\ \dfrac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & x_{k-1} < x < x_k, \\ 1, & x = x_k, \\ \dfrac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, & k_k < x < x_{k+1}, \\ 0, & x \ge x_{k+1}. \end{cases}$$

а) Составим невязку: $R_\Lambda = L\widetilde{\varphi} + p$. Для того чтобы выполнялось $R_\Lambda \approx 0$ потребуем $\int\limits_\Lambda R_\Lambda N_s d\Lambda = 0$, то есть $\int\limits_\Lambda [L\widetilde{\varphi} + p] N_s d\Lambda = \int\limits_0^1 \left[\dfrac{d^2\widetilde{\varphi}}{dx^2} \alpha \dfrac{d\widetilde{\varphi}}{dx} + \beta\widetilde{\varphi}\right] N_s dx = \int\limits_0^1 \dfrac{d^2\widetilde{\varphi}}{dx^2} N_s dx + \int\limits_0^1 \left[\alpha \dfrac{d\widetilde{\varphi}}{dx} + \beta\widetilde{\varphi}\right] N_s dx = 0,\ s = \overline{1,\ M+1}$. Проинтегрируем первый интеграл по частям и подставим в полученное выражение:

$$\int\limits_0^1 \frac{d^2\widetilde{\varphi}}{dx^2} N_s dx + \int\limits_0^1 \left[\alpha \frac{d\widetilde{\varphi}}{dx} + \beta\widetilde{\varphi}\right] N_s dx =$$

$$= \left[\frac{d\widetilde{\varphi}}{dx} N_s\right]\Bigg|_0^1 - \int\limits_0^1 \frac{d\widetilde{\varphi}}{dx}\frac{dN_s}{dx} dx + \int\limits_0^1 \left[\alpha \frac{d\widetilde{\varphi}}{dx} + \beta\widetilde{\varphi}\right] N_s dx = 0,$$

$$\int\limits_0^1 \left[-\frac{d\widetilde{\varphi}}{dx}\frac{dN_s}{dx} \alpha \frac{d\widetilde{\varphi}}{dx} N_s + \beta\widetilde{\varphi} N_s\right] dx = -\left[\frac{d\widetilde{\varphi}}{dx} N_s\right]\Bigg|_0^1,\ s = \overline{1,\ M+1}.$$

Получили СЛАУ $\sum\limits_{k=1}^{M+1} K_{sk}\widetilde{\varphi}_k = f_s,\ s = \overline{1,\ M+1}$, где

$$K_{sk} = \int\limits_0^1 \left[-\frac{dN_k}{dx}\frac{dN_s}{dx}\alpha\frac{dN_k}{dx}N_s + \beta N_k N_s\right]dx,$$

$$f_s = \begin{cases} -\left[\dfrac{d\widetilde{\varphi}}{dx}N_S\right]\Bigg|_0^1 = -1, & s = 1, \\ 0, & s = \overline{2,\ M}, \\ -\left[\dfrac{d\widetilde{\varphi}}{dx}N_S\right]\Bigg|_0^1 = -1, & s = M+1. \end{cases}$$

Представляем K_{sk} в виде суммы $K_{sk} = \sum\limits_{e=1}^{M+1} K_{sk}^e$, тогда, учитывая, что $N_e = \dfrac{x_{e+1}-x}{x_{e+1}-x_e}, N_{e+1} = \dfrac{x-x_{e-1}}{x_e-x_{e-1}}, \dfrac{dN_e}{dx} = -\dfrac{1}{x_{e+1}-x_e}, \dfrac{dN_{e+1}}{dx} = \dfrac{1}{x_{e+1}-x_e}, x_{e+1} - x_e = h$

$$K_{ee} = \int\limits_{x_e}^{x_{e+1}} \left[-\frac{dN_e}{dx}\frac{dN_e}{dx}\alpha\frac{dN_e}{dx}N_e + \beta N_e N_e\right]dx = -1/h - \alpha/2 + \beta h/3,$$

$$K_{ee+1} = \int\limits_{x_e}^{x_{e+1}} \left[-\frac{dN_{e+1}}{dx}\frac{dN_e}{dx}\alpha\frac{dN_{e+1}}{dx}N_e + \beta N_{e+1} N_e\right]dx = 1/h + \alpha/2 + \beta h/6,$$

$$K_{e+1e} = \int\limits_{x_e}^{x_{e+1}} \left[-\frac{dN_e}{dx}\frac{dN_{e+1}}{dx}\alpha\frac{dN_e}{dx}N_{e+1} + \beta N_e N_{e+1}\right]dx = 1/h - \alpha/2 + \beta h/6,$$

$$K_{e+1e+1} = \int\limits_{x_e}^{x_{e+1}} \left[-\frac{dN_{e+1}}{dx}\frac{dN_{e+1}}{dx}\alpha\frac{dN_{e+1}}{dx}N_{e+1} + \beta N_{e+1} N_{e+1}\right]dx = -1/h+\alpha/2+\beta h/3.$$

Тогда матрица элемента выглядит следующим образом:

$$k^e = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{h} + 12h + 6 & \dfrac{1}{h} + 6h - 6 \\ \dfrac{1}{h} + 12h + 6 & -\dfrac{1}{h} + 12h - 6 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

После процесса ассамблирования с учётом граничных условий получаем следующую СЛАУ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \alpha+\delta & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \alpha+\delta & \beta & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma & \alpha+\delta & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\varphi}_1 \\ \widetilde{\varphi}_2 \\ \widetilde{\varphi}_3 \\ \dots \\ \widetilde{\varphi}_M \\ \widetilde{\varphi}_{M+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Решение и погрешность показаны соответсвенно на рисунках 1,2.

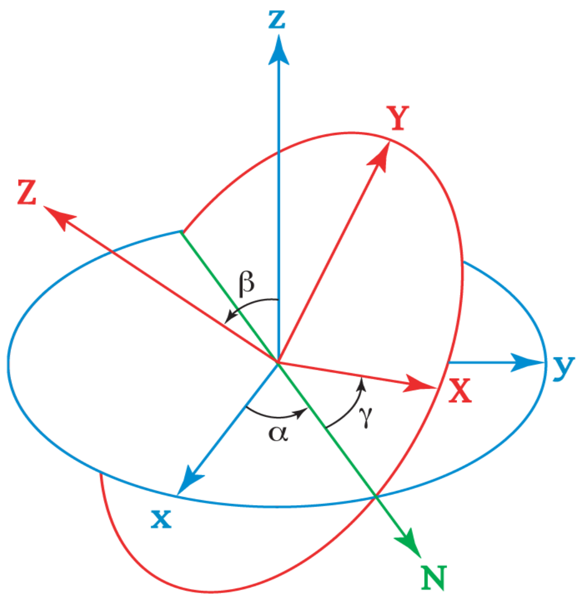

Рисунок 2.1 — углы Эйлера

Получаем СЛАУ размерности $M+1 : M+1$, которую можно решить с помощью пакета Scilab.