# Элементы дискретной математики в задачах

**А. А. Глибичук, А. Б. Дайняк, Д. Г. Ильинский,**

**А. Б. Купавский, А. М. Райгородский,**

**А. Б. Скопенков, А. А. Чернов**

---

Обновляемая версия:
http://www.mccme.ru/circles/oim/discrbook.pdf

Все авторы: Московский физико-технический институт. Личные страницы: www.mccme.ru/~skopenko, http://dm.fizteh.ru/staff. А.Б. Купавский поддержан грантом РФФИ 12-01-00683 и грантом Президента РФ МД-6277.2013.1. А.М. Райгородский поддержан грантом РФФИ 12-01-00683, грантом Президента РФ МД-6277.2013.1 и грантом ведущих научных школ НШ-2519.2012.1. А.Б. Скопенков частично поддержан грантом фонда Саймонса. А.А. Глибичук поддержан грантами Мол-а-вед No12-01-33080 и грантом РФФИ No14-01-00332 А.

# Оглавление

# 1 Введение

*Зачем эта книга?*

Мы приводим подборки задач по комбинаторным разделам математики. Эти задачи подобраны так, что в процессе их решения читатель (точнее, решатель) освоит основы важных теорий — как классических, так и современных. Ср. [S4],[Z],[J]. Книга будет полезна руководителям и участникам кружков для старшеклассников и младшекурсников (в частности, ориентированных на олимпиады). Некоторые приводимые красивые задачи и важные темы малоизвестны в традиции кружков по математике, но полезны как для математического образования, так и для подготовки к олимпиадам.

Решение этих задач (т. е. изучение соответствующих теорий) будет полезно также всем, кто хочет стать математиком, специалистом по computer science или программистом-разработчиком. Именно таких специалистов мы готовим на факультете инноваций и высоких технологий Московского Физико-Технического Института. Приведенные задачи используются при изучении курсов дискретных структур и дискретного анализа на этом факультете. Эти курсы читают А.Б. Дайняк и А.М. Райгородский, а остальные авторы ведут семинары по этим курсам. Некоторые материалы основаны на занятиях, проведенных А.Б. Скопенковым в Кировской ЛМШ, Московской выездной олимпиадной школе, а также на кружках «Математический семинар» и «Олимпиады и математика».

Комбинаторика — один из самых красивых разделов современной математики. Постановки задач этого раздела зачастую доступны школьникам. А результаты, тем не менее, носят фундаментальный характер и важны как для развития других разделов математики, так и для приложений в информатике, биологии, экономике и др. Мы постараемся рассказать о тех мощных современных методах, благодаря которым кристаллизуется серьезная научная дисциплина — комбинаторика. Среди этих методов, помимо более или менее стандартных, вероятностный и линейно-алгебраический методы. Они лежат в основе самых продвинутых комбинаторных результатов, полученных за последние десятилетия.

Параграфы второй половины книги дают экскурс в активно развивающиеся области математики. Хотя здесь изучаются только самые простые результаты и методы, они дают некоторое представление об основных направлениях научных исследований в соответствующих областях. Этому посвящены *замечания*, которые не используются ни в формулировках, ни в решениях задач. Важные факты выделены словом «теорема» или «следствие».

*Используемый материал.*

Формулировки большинства задач доступны старшеклассникам, интересующимся математикой; [1] мы приводим все определения, не так часто изучаемые на кружках. Без определения используются только простейшие определения и результаты теории чисел [O, §8-§9], [Vi, §§1-3], [Z, §§3.1-3.4 и 3.7]. Если в некотором разделе для понимания условий или для решения задач нужны дополнительные сведения (или консультация специалиста), то в начале соответствующего раздела приводятся ссылки.

При этом многие задачи трудны: для их решения нужно предварительно прорешать другие приведенные задачи на данную тему.

*Как устроена книга.*

Эту книгу не обязательно читать (точнее, прорешивать) подряд. Параграфы и разделы книги практически независимы друг от друга (кроме разделов в §4 и §5, которые желательно прорешивать подряд). Если в задаче одного из разделов все-таки используется материал другого раздела, то либо эту задачу можно игнорировать, либо посмотреть конеретно указанный материал другого раздела. Основные обозначения приведены в конце введения. Основные понятия и обозначения теории графов введены в §3.1.

При этом параграфы расположены примерно в порядке возрастания сложности материала.

К важнейшим задачам приводятся подсказки, указания и решения. Подсказки и указания расположены в конце каждого параграфа. Однако к ним стоит обращаться после прорешивания каждой задачи.

---

[1] Часть материала (например, §2.1) на некоторых кружках и летних школах изучается даже 6-классниками. Однако приводимые подсказки, указания и решения рассчитаны на читателей с некоторой математической культурой (необходимой для освоения бо́льшей части книги). Разбирать эти решения с 6-классниками нужно по-другому, см., например, [GIF].

*Общие замечания к формулировкам задач.*

Задачи обозначаются жирными цифрами. Если в условии задачи написано «найдите», то нужно дать ответ без знака суммы и многоточия. Если же условие задачи является формулировкой утверждения, то в задаче требуется это утверждение доказать. Как правило, мы приводим *формулировку* утверждения перед его *доказательством.* [2] В таких случаях для доказательства утверждения могут потребоваться следующие задачи. Это всегда явно оговаривается в подсказках, а иногда и прямо в тексте. (На занятии задача-подсказка выдается только тогда, когда школьник или студент немного подумал над самой задачей.)

Большинство задач не оригинальны, но установить первоисточник не представляется возможным. Многие задачи взяты из [IKRS], [Z], [L] и из неопубликованных материалов кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ.

*О литературе.*

В список литературы не вошли многие хорошие *стандартные учебники* по комбинаторике и теории графов (ввиду необъятности их количества). Мы цитировали те из них, которые по тем или иным причинам чаще используем в преподавании. Мы цитировали всю известную нам *более продвинутую* учебно-научную литературу. Но этот список тоже не претендует на полноту, поскольку мы можем не знать о некоторых публикациях.

*Благодарности.*

Мы благодарим за полезные замечания редакторов книги А.В. Шаповалова и И.А. Шкредова, а также И.А. Григорьева, А.А. Полянского и М.Б. Скопенкова. Мы благодарим студентов за каверзные вопросы и указания на неточности. Мы благодарим А.Ю. Веснина за разрешение использовать рис. 8.

---

[2] В учебниках и курсах часто происходит обратное. Часто студент узнает формулировки красивых результатов и важных проблем, ради которых была придумана теория, только *после* продолжительного изучения этой теории. Иногда — в конце её изучения, иногда — спустя несколько лет, а иногда не узнает совсем. Это способствует появлению представления о математике как науке, изучающей немотивированные понятия и теории. Такое представление принижает ценность математики.

**Основные обозначения**

• $[x]$ — (нижняя) целая часть числа $x$.

• $d \mid n$ — число $n$ делится на число $d$ (для целых $d$ и $n$).

• $\mathcal{R}_n$ — множество $\{1, 2, \ldots, n\}$.

• $\mathbb{N}$ — множество $\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ целых положительных чисел.

• $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ — множества всех действительных, рациональных и целых чисел, соответственно.

• $\mathbb{Z}_2$ — множество $\{0, 1\}$ остатков от деления на 2 с операциями сложения и умножения по модулю 2.

• $\mathbb{Z}_m$ — множество $\{0, 1, \ldots, m-1\}$ остатков от деления на $m$ с операциями сложения и умножения по модулю $m$.

• $\binom{n}{k}$ — количество $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества (другое обозначение: $C_n^k$).

• $\binom{X}{k}$ — множество всех $k$-элементных подмножеств множества $X$.

• $|X|$ — число элементов во множестве $X$.

• $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$ — разность множеств $A$ и $B$ (не путайте этот знак с $/$).

• $A \sqcup B$ — дизъюнктное объединение множеств $A$ и $B$. Оно равно $A \cup B$, если $A \cap B = \varnothing$.

• фраза ‘обозначим $x = a$’ сокращается до $x := a$.

# 2 Элементы комбинаторики

## 2.1 Подсчёт и комбинаторные тождества

**2.1.1.** (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (b) Найдите сумму $\binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{n}$.

**2.1.2.** (a) *Правило Паскаля.* $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$, если $0 \leqslant k \leqslant n-1$. (Подсказка приведена после задачи 2.1.4.a.)
(b) $\left\{{n+1 \atop k+1}\right\} = (k+1)\left\{{n \atop k+1}\right\} + \left\{{n \atop k}\right\}$. Здесь $\left\{{n \atop k}\right\}$ — количество разбиений $n$-элементного множества на $k$ частей (т. е. непустых подмножеств); разбиения считаются неупорядоченными, т. е. разбиение множества $\{1, 2, 3\}$ на части $\{1, 2\}$ и $\{3\}$ и разбиение того же множества на части $\{3\}$ и $\{1, 2\}$ считаются одинаковыми. Ср. с задачей 2.4.7.e.

*Замечание.* Числа $\left\{{n \atop k}\right\}$ называются *числами Стирлинга второго рода*; подробнее о них см., например, [GKP, с. 287].

**2.1.3.** (a) Во скольких подмножествах множества $\mathcal{R}_{11}$ не найдётся двух подряд идущих чисел?
(b) То же для *трёх* подряд идущих чисел.

**2.1.4.** (a) $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.
(b) *Бином Ньютона.* $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$.

*Как решать задачи этого раздела?* Мы предлагаем три метода, которые продемонстрируем на примере трех доказательств правила Паскаля 2.1.2.a.

(Большинство задач этого раздела решаются несколькими методами из трех предложенных Но, конечно, не каждый метод применим к каждой задаче. Обычно в указаниях для краткости приводится только один способ решения.)

*Первое доказательство: комбинаторные рассуждения.* Неформально говоря, идея в следующем: чтобы выбрать $k+1$ футболистов, нужно либо выбрать $k+1$ полевых, либо вратаря и $k$ полевых. Приведем строгое изложение этой идеи.

Количество $(k+1)$-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_{n+1}$,

• содержащих число $n+1$, равно $\binom{n}{k}$, так как такие подмножества при выкидывании числа $n+1$ становятся подмножествами в $\mathcal{R}_n$;

• не содержащих число $n+1$, равно $\binom{n}{k+1}$, так как такие подмножества являются также подмножествами в $\mathcal{R}_n$.

*Другая запись этого решения.* Определим отображение

$$f : \binom{\mathcal{R}_{n+1}}{k+1} \to \binom{\mathcal{R}_n}{k+1} \bigsqcup \binom{\mathcal{R}_n}{k} \quad \text{формулой} \quad f(A) := A \setminus \{n+1\}.$$

Остаётся доказать, что это — биекция, т.е. взаимно-однозначное соответствие (например, определив явной формулой обратное отображение).

*Второе доказательство: использование явной формулы 2.1.4.a.* Имеем

$$\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} =$$

$$= \frac{n!}{(n-k-1)!k!}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k}\right) = \frac{n!}{(n-k-1)!k!}\left(\frac{n+1}{(k+1)(n-k)}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

*Третье доказательство: использование бинома Ньютона 2.1.4.b.* Число $\binom{n+1}{k+1}$ является коэффициентом при $x^{k+1}$ в многочлене

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) = x(1+x)^n + (1+x)^n.$$

Поэтому число $\binom{n+1}{k+1}$ равно сумме коэффициентов при степенях $x^k$ и $x^{k+1}$ у многочлена $(1+x)^n$. Отсюда следует требуемое равенство.

**2.1.5.** Найдите суммы:

(a) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$;

(b) $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n}$;

(c) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}$;

(d) $\binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1} + \ldots + \binom{n+m}{k+m}$;

(e) $\binom{n}{0}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2$;

(f) $\binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \ldots + \binom{n}{k}\binom{m}{0}$;

(g) $\binom{2n}{0} - \binom{2n-1}{1} + \binom{2n-2}{2} - \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}$;

(h) $\binom{2n}{n} + 2\binom{2n-1}{n} + 4\binom{2n-2}{n} + \ldots + 2^n\binom{n}{n}$.

**2.1.6.** Найдите «явную» формулу для

(a) $\sum\limits_{k\geqslant 0}\binom{n}{2k}$; (b) $\sum\limits_{k\geqslant 0}\binom{n}{4k}$; (c) $\sum\limits_{k\geqslant 0}\binom{n}{3k}$.

В ответе используйте только целочисленные функции целочисленного аргумента.

## 2.2 Формула включений и исключений

Обозначим через $\varphi(n)$ функцию Эйлера, т. е. количество чисел от 1 до $n$, взаимно простых с числом $n$.

**2.2.1.** (a) Найдите количество чисел, не превосходящих 1001 и не делящихся ни на одно из чисел 7, 11, 13.

(b) Найдите $\varphi(1)$, $\varphi(p)$, $\varphi(p^2)$, $\varphi(p^\alpha)$, где $p$ — простое число, $\alpha > 2$.

(c) $\varphi(n) = n(1-\frac{1}{p_1})\ldots(1-\frac{1}{p_s})$, где $n = p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{\alpha_s}$ — каноническое разложение числа $n$.

**2.2.2.** (a) На полу комнаты площадью 24 м$^2$ расположены три ковра (произвольной формы) площади 12 м$^2$ каждый. Тогда площадь пересечения некоторых двух ковров не меньше 4 м$^2$.

(b) На кафтане расположено пять заплат (произвольной формы). Площадь каждой из них больше половины площади кафтана. Тогда площадь общей части некоторых двух заплат больше одной пятой площади кафтана.

**2.2.3.** *Формула включений и исключений.* Рассмотрим подмножества $A_1, \ldots, A_n$ конечного множества $U$. Положим по определению $|\bigcap\limits_{j\in\varnothing} A_j| := U$.

(a) Пусть число $\alpha_{|S|} := |\bigcap\limits_{j\in S} A_j|$ зависит только от размера $|S|$ набора $S \subset \mathcal{R}_n$ индексов, а не от самого набора. Тогда

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \alpha_k,$$

$$|U \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \binom{n}{k} \alpha_k.$$

(b) Обозначим $M_k := \sum\limits_{S\in\binom{\mathcal{R}_n}{k}} |\bigcap\limits_{j\in S} A_j|$. В частности, $M_0 := |U|$. Тогда

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = M_1 - M_2 + M_3 - \ldots + (-1)^{n+1} M_n,$$
$$|U \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = M_0 - M_1 + M_2 + \ldots + (-1)^{n} M_n.$$

(c) *Неравенства Бонферрони.* Для любого $s$

$$M_1 - M_2 + M_3 - \ldots - M_{2s} \leqslant |A_1 \cup \ldots \cup A_n| \leqslant M_1 - M_2 + M_3 - \ldots + M_{2s+1},$$

$$M_0 - M_1 + M_2 - \ldots + M_{2s} \leqslant |U \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| \leqslant$$
$$\leqslant M_0 - M_1 + M_2 - \ldots - M_{2s+1}.$$

В этом разделе предлагаются задачи следующего типа: дано конечное множество $U$ и набор свойств (подмножеств) $A_k \subset U$, $k = 1, \ldots, n$. Требуется найти количество элементов, для которых выполнено хотя бы одно из свойств $A_k$ (т.е. $|A_1 \cup \ldots \cup A_n|$), либо количество элементов, для которых не выполнено ни одно из свойств $A_k$ (т.е. $|U \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)|$). Для этого используется два варианта формулы включений и исключений (см. задачу 2.2.3.b). При этом если во всех пересечениях множеств набора число элементов зависит только от количества пересекаемых множеств, формулу можно упростить (см. задачу 2.2.3.a).

В задачах 2.2.4.a и 2.2.5 предполагается, что ответ записывается в виде суммы (аналогично формуле включений и исключений).

**2.2.4.** На полке стоят 10 различных книг.
(a) Сколькими способами их можно переставить так, чтобы ни одна книга не осталась на своем месте?
(b) Количество таких перестановок книг, при которых на месте остаётся ровно 4 книги, больше 50000.

**2.2.5.** (a) Сколькими способами можно расселить 20 туристов по 5 различным домикам, чтобы ни один домик не оказался пустым?
(b) Сколько существует различных сюръекций $f\colon \mathcal{R}_k \to \mathcal{R}_n$?

**2.2.6.*** Докажите следующую формулу:

$$n! \cdot x_1 x_2 \ldots x_n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^n -$$
$$- \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-1} \leqslant n} (x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-1}})^n +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-2} \leqslant n} (x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_{n-2}})^n - \ldots + (-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^n.$$

## 2.3 Принцип Дирихле

**2.3.1.** (a) Если сумма $n$ действительных чисел равна $S$, то найдется слагаемое, не большее $S/n$, а также слагаемое, не меньшее $S/n$.
(b) Если сумма $n$ целых чисел больше $kn$ для некоторого целого $k$, то найдется слагаемое, не меньшее $k+1$.
(c) Если сумма $n$ целых чисел меньше $kn$ для некоторого целого $k$, то найдется слагаемое, не большее $k-1$.

Утверждение 2.3.1.a применяется при решении задач, см., например, задачу 2.3.9. Его ‘дискретный аналог’ утверждение 2.3.1.b называют *принципом Дирихле* и часто формулируют так: при любом распределении $nk+1$ или более предметов по $n$ ящикам в какой-нибудь ящике окажется не менее $k+1$ предмета. [3]

**2.3.2.** В мешке лежат 32 красных шара, 29 зеленых шаров, 45 синих, 17 желтых и по 30 белых, черных и серых. Какое наименьшее число шаров надо взять, чтобы среди них наверняка нашлись шары

(а) всех 9 цветов? (б) 7 цветов?

**2.3.3.** (a) Среди 7-значных чисел, заканчивающихся на 3 пятерки, существует не менее 1200 чисел, имеющих один и тот же остаток от деления на 7.

(b) Для каждого 4-значного числа посчитали сумму цифр его квадрата. Докажите, что существует не менее 1200 чисел, для которых посчитанные суммы будут давать одинаковый остаток при делении на 7.

**2.3.4.** (a) Среди чисел, записываемых только единицами, есть число, которое делится на 1997.

(b) В строку записаны $n$ целых чисел. Докажите, что из них можно выделить одно или несколько подряд идущих с суммой, кратной $n$.

**2.3.5.** (a) Среди любых $n$ действительных чисел найдутся два, дробные части которых различаются не более, чем на $\frac{1}{n-1}$.

(b) В таблице $10\times 10$ расставлены целые числа, причем любые два числа в соседних по стороне клетках отличаются не более, чем на 5. Докажите, что среди этих чисел найдутся два равных.

**2.3.6.** *Теорема Дирихле.* Дано произвольное иррациональное число $\alpha$.

(a) Для произвольного натурального $N$ найдутся такие взаимно простые $p, q \in \mathbb{Z}$, что $0 < q \leqslant N$ и

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{qN}.$$

---

[3] Методически более грамотно [MS, Словарик, раздел ‘оценка’] было бы назвать этот раздел ‘оценки от противного’. Однако мы выбрали название, по которому большинство читателей смогут наиболее ясно представить себе содержание этого раздела.

(b) Существует бесконечно много пар взаимно простых чисел $p, q \in \mathbb{Z}$, для которых

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

*Замечание.* В формулировке утверждения 2.3.6.b можно избавиться от взаимной простоты, так как для каждой дроби $\frac{p}{q}$, для которой выполнено неравенство $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$, существует лишь конечное количество целых чисел $k > 0$ таких, что $\left|\alpha - \frac{pk}{qk}\right| \leqslant \frac{1}{(qk)^2}$.

**2.3.7.** Натуральные числа от 1 до 101 записаны в некотором порядке. Докажите, что в этой последовательности найдется либо возрастающая, либо убывающая подпоследовательность длины 11.

*Замечание.* В данном случае *подпоследовательность* — это то, что получается из последовательности вычеркиванием некоторых её членов.

**2.3.8.** Имеется 10 яблок, каждое из которых весит не более 100 г, и две одинаковые тарелки. Докажите, что можно положить в тарелки
(a) несколько яблок так, чтобы веса в тарелках отличались меньше, чем на 1 г.
(b) по одинаковому количеству яблок так, чтобы веса в тарелках отличались меньше, чем на 2 г
При этом на тарелках должно лежать хотя бы одно яблоко, но не обязательно должны лежать все яблоки (и в пункте (a) не обязательно, чтобы на *каждой* тарелке лежало хотя бы одно яблоко).

**2.3.9.** Для любых $n$ векторов $v_1, \ldots, v_n$ длины 1 на плоскости существует такой набор $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n = \pm 1$, что

(a) $|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k| \leqslant \sqrt{n}$, (b) $|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k v_k| \geqslant \sqrt{n}$.

## 2.4 Комбинаторика булева куба

**2.4.1.** Расставьте на шахматной доске нескольких коней, чтобы каждый бил четырёх других.

**2.4.2.** 33 буквы русского алфавита кодируются последовательностями из нулей и единиц.

(a) При каком наименьшей длине последовательности кодирование можно сделать однозначным?
(b) Если при получении сообщения возможна ошибка в не более чем одном разряде, т. е. если коды различных букв должны отличаться по крайней мере в трёх разрядах, то 8 разрядов не хватит.
(c) Если возможна ошибка в не более чем двух разрядах, то 10 разрядов не хватит.
(d)* Найдите наименьшее число разрядов, достаточное для кодирования из (b).

**2.4.3.** (a) При фиксированном $n$ число $\binom{n}{k}$ максимально при $k = [n/2]$.
(b) *Best in their own ways.* В математической олимпиаде участвовало $k$ школьников. Выяснилось, что для любых двух школьников $A$ и $B$ нашлась задача, которую решил $A$ и не решил $B$, и задача, которую решил $B$, но не решил $A$. Какое наименьшее возможное количество задач могло быть при этом условии? Иными словами, найдите наименьшее возможное $n$, для которого найдётся такое семейство из $k$ подмножеств $n$-элементного множества, что ни одно из подмножеств семейства не содержится (собственно) в другом.

**2.4.4.** Имеется табло с $n$ горящими лампочками. Каждый переключатель может быть подсоединён к некоторым лампочкам. При нажатии на кнопку переключателя соединённые с ним лампочки меняют свое состояние: горящие тухнут, а не горящие загораются. Какое наименьшее число переключателей необходимо, чтобы можно было зажечь любой набор лампочек (не входящие в этот набор лампочки гореть не должны)?

**2.4.5.** В первый день своего правления король организует партии среди $n$ своих подданных. На второй день советник приносит королю список фамилий некоторых подданных (в первый день этот список неизвестен). На третий день король может выбрать несколько партий и отправить в тюрьму всех подданных, участвующих в каждой из них. Какое наименьшее число партий необходимо организовать в первый день, чтобы в третий день заведомо можно было отправить в тюрьму всех подданных из принесенного списка (и только их)?

*Замечание.* Следующая важная конструкция полезна (хотя и не обязательна) для решения вышеприведенных (и многих других) задач. Нарисуем точки, соответствующие всем подмножествам множества $\mathcal{R}_n$. При этом на $k$-й *этаж* поместим точки, соответствующие $k$-элементным множествам. Соединим стрелкой те из них, которые получаются друг из друга добавлением одного элемента. Тогда соединяемые стрелкой точки лежат на соседних этажах. Полученный граф называется *$n$-мерным кубом.* Его вершины соответствуют векторам из $\mathbb{Z}_2^n$.

Определение множества $\mathbb{Z}_2^n$ приведено в начале §8.1. Подмножество $L \subset \mathbb{Z}_2^n$ называется *линейным подпространством*, если $x + y \in L$ для любых $x, y \in L$ (не обязательно различных). Иными словами, *линейное подпространство* — такое семейство подмножеств $n$-элементного множества, которое вместе с любыми двумя подмножествами содержит их симметрическую разность (т. е., сумму по модулю 2).

**2.4.6.** (a) Любое линейное подпространство содержит нулевой набор $(0, \ldots, 0)$.

(b) Число элементов в любом линейном подпространстве является степенью двойки.

Обозначим через $\left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right|$ количество линейных подпространств в $\mathbb{Z}_2^n$, состоящих из $2^k$ элементов (такие линейные подпространства в $\mathbb{Z}_2^n$ называют *$k$-мерными*, ср. §8.1).

**2.4.7.** (a) Найдите $\left|\begin{matrix} 2 \\ k \end{matrix}\right|$ для $k = 0, 1, 2$.

(b) Найдите $\left|\begin{matrix} 3 \\ k \end{matrix}\right|$ для $k = 0, 1, 2, 3$.

(c) $\left|\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} n \\ n \end{matrix}\right| = 1, \quad \left|\begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix}\right| = 2^n - 1.$

(d) $\left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} n \\ n-k \end{matrix}\right|.$

(e) $\left|\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix}\right| + 2^{n-k}\left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right|.$

(f) Найдите $\left|\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix}\right|$.

(g) Найдите $\left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right|$.

Для решения этой задачи нужны некоторые понятия, приведенные в начале §8.1.

## 2.5 Обращение Мёбиуса

Под значком $\sum\limits_{d|n}$ подразумевается сумма по всем натуральным делителям числа $n$.

Определим *функцию Мёбиуса* $\mu(n)$ следующим образом:

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } n = 1; \\ (-1)^k, & \text{если } n \text{ является произведением} \\ & k \text{ различных простых делителей;} \\ 0, & \text{если } n \text{ делится на } p^2 \\ & \text{для некоторого простого числа } p. \end{cases}$$

**2.5.1.** (a) $\sum\limits_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, n = 1; \\ 0, n \neq 1. \end{cases}$

(b) Найдите сумму значений функции Мёбиуса по тем и только тем делителям числа $n$, в каноническое разложение которых входит чётное количество простых множителей.

(c) (*Формула обращения Мёбиуса.*) Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, $g(n) = \sum\limits_{d|n} f(d)$. Тогда выполнена формула

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d).$$

Функция Эйлера $\varphi(n)$ определена в §2.2.

**2.5.2.** (a) Найдите сумму $\sum\limits_{d|n} \varphi(d)$.

(b)

$$\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

*Замечание.* Заметим, что, применяя формулу обращения Мёбиуса к функции $\varphi(n)$, можно немного другим способом доказать формулу для нахождения $\varphi(n)$ (см. утверждение 2.2.1 c).

Действительно, используя утверждения 2.5.2.a и b, получаем:

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) \frac{n}{d} = n \cdot \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

Обозначим через $T_r(n)$ количество способов раскрасить карусель из $n$ вагончиков в $r$ цветов, т. е. число раскрасок вершин правильного $n$-угольника в $r$ цветов, если раскраски, совмещающиеся поворотом, неотличимы. При этом

• в раскраске могут быть использованы не все цвета.

• цвета различны: например, раскраски КККЖ и ЖЖЖК различны.

Приведем более формальное определение. Для любой раскраски карусели можно «разорвать» карусель между любыми двумя вагончиками и записать получившуюся последовательность цветов (раскраску поезда), начиная с места разрыва по часовой стрелке. Например, следующие последовательности соответствуют одной и той же раскраске карусели:

КЖЗС; ЖЗСК; ЗСКЖ; СКЖЗ.

С другой стороны, из каждой последовательности цветов можно получить раскраску карусели, «склеив» её начало и конец правильным образом.

*Циклическим сдвигом* последовательности $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется последовательность $(a_2, a_3, \ldots, a_1)$. Формально, *раскраской карусели* (или, более учено, *циклической последовательностью*) называется класс эквивалентности последовательностей с точностью до циклического сдвига. Итак, $T_r(n)$ — количество циклических последовательностей длины $n$, элементы которых — числа $1, \ldots, r$.

**2.5.3.** (a) Найдите $T_r(n)$ при $n = 3, 4, 5, 6, 9$.
(b) $2^{2^n-n-1} < T_2(2^n) < 2^{2^n-n}$.

Назовем *периодом последовательности* минимальное положительное число $d$, такое, что в результате $d$ циклических сдвигов она перейдет в себя. Аналогично определяется *период карусели*.

**2.5.4.** (a) Период последовательности делит её длину.
(b) Если $d$ делит $n$, то количество последовательностей длины $n$ и периода $d$ равно количеству последовательностей длины $d$ и периода $d$.

**2.5.5.** Обозначим через $M_r(n)$ количество последовательностей длины $n$ и периода $n$, элементы которых — числа $1, \dots, r$.
(a) Найдите $\sum\limits_{d|n} M_r(d)$.
(b) Выразите $T_r(n)$ через все $M_r(d)$, где $d \mid n$.
(c) $T_r(n) = \sum\limits_{l|n} \frac{1}{l} \sum\limits_{d|l} \mu(d) r^{\frac{l}{d}}$.
(d) $T_r(n) = \frac{1}{n} \sum\limits_{d|n} \varphi(d) r^{\frac{n}{d}}$. (Более простой способ доказательства этой формулы приведен в §2.9.)

**2.5.6.** Найдите количество различных раскрасок карусели из $n$ вагончиков в $r$ цветов, в которых
(a) цвет $s$ встречается $n_s$ раз для каждого $s = 1, \dots, r$. (Здесь в качестве ответа принимается формула с суммированием по делителям, аналогичная 2.5.5.c.)
(b) присутствует ровно 4 цвета из $r = 5$ данных.

## 2.6 Подсчёт двумя способами

Мы приводим простейший вариант вероятностного метода в комбинаторике. Ср. §7.2, §7.3. Этот метод также применяется при решении задач 3.4.3, 3.6.5, 3.6.7, 3.7.2, 4.1.11.b, 5.1.5, 5.3.4 и некоторых задач из §2.9.

Комбинаторные решения нижеприведенных задач можно изложить на вероятностном языке. Решения без явного построения вероятностного пространства могут привести к бессмыслице и ошибке. (Подумайте, например, с какой вероятностью случайный треугольник будет остроугольным.) Поэтому строгие решения на вероятностном языке должны начинаться с явного построения вероятностного пространства.

**2.6.1.** (a) Даны 21 девятиэлементных подмножеств 30-элементного множества. Тогда какой-то элемент 30-элементного множества содержится по крайней мере в семи данных подмножествах.
(b) Комиссия собиралась 40 раз. На каждом заседании было ровно 10 человек, любые два не были вместе больше 1 раза. Тогда в комиссии хотя бы 60 человек.
(c) В компании у любых двух знакомых друг с другом человек есть ровно 5 общих знакомых (кроме них самих). Тогда количество пар знакомых между собой людей в компании делится на 3.
(d) Обозначим через $P_n(k)$ число перестановок множества натуральных чисел от 1 до $n$, оставляющих ровно $k$ чисел на своем месте. Тогда $\sum\limits_{k=0}^{n} k \cdot P_n(k) = n!$.

**2.6.2.** Пусть $\mathcal{F}$ — любое семейство $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества.
(a) Если $k \geqslant l$ и каждое $l$-элементное подмножество $n$-элементного множества содержится в некотором подмножестве из $\mathcal{F}$, то $|\mathcal{F}| \geqslant \binom{n}{l} \Big/ \binom{k}{l}$.
(b) Количество $(k-1)$-элементных подмножеств $n$-элементного множества, целиком содержащихся хотя бы в одном из подмножеств семейства $\mathcal{F}$, не меньше $\dfrac{k|\mathcal{F}|}{n-k+1}$.

**2.6.3.** На планете Марс 100 государств объединены в блоки, в каждом из которых не больше 50 государств. Известно, что любые два государства состоят вместе хотя бы в одном блоке. Найдите минимально возможное число блоков. (Ср. с задачей 2.6.2.a.)

**2.6.4.** Ровно 19 вершин правильного 97-угольника покрашено в белый цвет, остальные вершины покрашены в чёрный. Тогда число равнобедренных одноцветных треугольников с вершинами в вершинах 97-угольника не зависит от способа раскраски. (Треугольник одноцветный, если все его вершины или белые, или чёрные.)

**2.6.5.** Даны числа $n \geqslant k$ и множество $S$ из $n$ точек на плоскости. Если любые три точки из множества $S$ не лежат на одной прямой и для любой точки $P \in S$ существуют хотя бы $k$ различных точек из множества $S$, равноудаленных от $P$, то $k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$.

**2.6.6.** В любом множестве из $n$ различных натуральных чисел найдётся подмножество из более, чем $n/3$ чисел, в котором нет трёх чисел, сумма двух из которых равна третьему.

**2.6.7.** По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ на работе был специалист по нему.

*Замечание.* Понятно, что при данном числе $k$ специалистов (в задаче 2.6.7 $k = 8$) для малого числа видов работ так распределить выходные всегда можно. А при большом числе $l$ видов работ это может уже не получиться. В следующей задаче мы находим асимптотическую оценку снизу для такого числа $l$.

Вот более ученая формулировка (обобщения) задачи 2.6.7. Имеется $l = 2^{k-1}$ подмножеств некоторого множества, в каждом из которых ровно $k$ элементов. Тогда элементы этого множества можно раскрасить в два цвета так, чтобы никакое из $l$ подмножеств не было одноцветно. Ср. с задачей 7.2.1.a.

**2.6.8.** (a) Если для некоторого чётного $n$

$$\left(1 - 2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right)^l 2^n < 1,$$

то в $n$-элементном множестве найдется $l$ таких $k$-элементных подмножеств, что при любой раскраске элементов этого множества в два цвета хотя бы одно из этих $l$ подмножеств одноцветно.

(b) Существует такое $c > 0$, что для любого $k$ существует не более, чем $ck^2 2^k$ таких $k$-элементных подмножеств некоторого множества, что при любой раскраске элементов этого множества в два цвета одно из этих подмножеств одноцветно.

## 2.7 Перестановки

Задачи следующих трёх разделов не требуют для решения каких-либо предварительных знаний. (Кое-где в них — см. определение перестановки, задачи 2.9.1, 2.9.4, 2.9.8 используются некоторые понятия теории графов, определения которых даны в §3.1.) Они естественным образом подводят читателя к понятию группы. Миникурс «Рождение понятия группы» можно составить из этих трёх разделов, статей [BKS], [BKKSS], [S5], [Z, глава 6] и [Z, глава 3, разделы «Малая теорема Ферма», «Квадратичные вычеты» и «Первообразные корни»].

**2.7.1.** Пятнадцать школьников сидят на пятнадцати пронумерованных стульях. Каждую минуту добрый преподаватель пересаживает их по следующей схеме:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 3 & 5 & 10 & 8 & 11 & 14 & 15 & 6 & 13 & 1 & 4 & 9 & 7 & 2 & 12 \end{pmatrix}$$

Через сколько минут все школьники впервые окажутся на своих первоначальных местах?

*Перестановкой* множества называется запись элементов этого множества в произвольном порядке. Более строго, *перестановкой* множества называется взаимно однозначное отображение этого множества на себя (т. е. биекция). Перестановку $f$ удобно изображать в виде ориентированного графа, вершины которого — элементы множества, а рёбра идут из вершины $a_k$ в вершину $f(a_k)$. Перестановка множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, переводящая $a_k$ в $f(a_k)$, записывается в виде

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \ldots & f(a_n) \end{pmatrix};$$

обычно $a_k = k$ для всех $k \in \mathcal{R}_n$. *Обратной* к $f$ перестановкой называется перестановка $f^{-1}$, записывающаяся в виде

$$\begin{pmatrix} f(a_1) & f(a_2) & \ldots & f(a_n) \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

*Циклом* (длины $n$) называется перестановка вида

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}.$$

Эта перестановка коротко обозначается через $(a_1 a_2 \dots a_n)$.

*Композицией* перестановок $f$ и $g$ называется перестановка $f \circ g$, определённая формулой $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.

**2.7.2.** Найдите композиции перестановок на множестве цифр
(a) $(12)\circ(13)$; (b) $(12)\circ(23)$; (c) $(23)\circ(12)$; (d) $(123)\circ(132)$;
(e) $(12)\circ(13)\circ(12)$; (f) $(12345)\circ(12)$; (g) $(12345)\circ(56789)$.

Ответ дайте в виде композиции непересекающихся циклов. Например, $(123)\circ(234) = (12)\circ(34)$.

Далее знак композиции опускается.

**2.7.3.** Для любой перестановки $f$ существует $k > 0$, для которого $f^k = \mathrm{id}$ (т. е. для которого после $k$-кратного применения перестановки $f$ каждый элемент перейдет в себя).

*Порядком* перестановки $f$ называется наименьшее $k > 0$, для которого $f^k = \mathrm{id}$.

**2.7.4.** Существуют ли перестановки 9-элементного множества порядков 7; 10; 12; 11?

**2.7.5.** Чему равен порядок композиции непересекающихся циклов из $n_1, \dots, n_k$ элементов, соответственно?

Перестановки $(n_1 + \dots + n_k)$-элементного множества из задачи 2.7.5 называются перестановками *типа* $\langle n_1, \dots, n_k \rangle$. Например, перестановки $(14)(253)$, $(15)(432)$ типа $\langle 2, 3 \rangle$, а перестановка $(1)(3)(245)$ — другого типа $\langle 1, 1, 3 \rangle$.

**2.7.6.** Найдите число перестановок типа
(a) $\langle 2, 3 \rangle$; (b) $\langle 3, 3 \rangle$; (c) $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$.

**2.7.7.** Любая перестановка представляется в виде композиции
(a) непересекающихся циклов;

(b) транспозиций, т. е. перестановок, каждая из которых меняет местами некоторые два элемента, а остальные оставляет на месте (иными словами, циклов длины 2);
(c) транспозиций $(1i)$, $i = 2, 3, \dots, n$.

**2.7.8.** Найдите *две* перестановки, композициями которых можно получить любую перестановку $n$-элементного множества.

Перестановки $a$ и $b$ называются *сопряжёнными*, если $a = xbx^{-1}$ для некоторой перестановки $x$.

**2.7.9.** (a) Перестановки $a$ и $b$ сопряжены тогда и только тогда, когда их типы одинаковы.
(b) Пусть $a$ и $x$ — произвольные перестановки $n$-элементного множества. Тогда

$$xax^{-1} = \begin{pmatrix} x(1) & x(2) & \dots & x(n) \\ x(a(1)) & x(a(2)) & \dots & x(a(n)) \end{pmatrix}.$$

Иными словами, циклическое разложение перестановки $xax^{-1}$ получается из циклического разложения перестановки $a$ заменой каждого элемента на его $x$-образ: если $a = \Pi_{j=1}^{q}(i_{j1}, i_{j2}, \dots, i_{js_j})$, то $xax^{-1} = \Pi_{j=1}^{q}(x(i_{j1}), x(i_{j2}), \dots, x(i_{js_j}))$.
(c) Найдите $gf^{-1}g^{-1}f$ для $f := (1, 2, \dots, N)$ и $g := (N, N+1, \dots, L)$.

## 2.8 Чётность перестановок

**2.8.1.** (a) Любую ли перестановку можно представить в виде композиции нескольких циклов длины 3?
(b) Любую ли перестановку можно представить в виде композиции чётного числа транспозиций?
(c) *Игра в 15.* В квадратной коробочке размера $4 \times 4$ размещены 15 квадратных фишек размера $1 \times 1$ с номерами $1, 2, \dots, 15$, а одно место осталось свободным. Первоначально фишки расставлены так, как на рисунке справа. Можно ли, последовательно сдвигая фишки на свободное место, получить расстановку фишек на рисунке слева?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & * \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 15 & 14 & * \end{bmatrix}$$

Если задача 2.8.1 не получается, то читайте дальше.

Пусть $f$ — перестановка множества $\{1, 2, \ldots, n\}$. Говорят, что пара $(i, j)$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, образует *беспорядок* для перестановки $f$, если $i < j$, но $f(i) > f(j)$. Перестановка называется *чётной*, если общее число её беспорядков чётно. Перестановка называется *нечётной*, если она не является четной.

**2.8.2.** Как зависит четность цикла длины $n$

(a) от порядка следования элементов цикла? (b) от $n$?

**2.8.3.** (a) Композиция чётной (нечётной) перестановки и транспозиции нечётна (чётна).

(b) Как определить чётность композиции перестановок, зная чётность сомножителей?

**2.8.4.** Каждое из следующих условий равносильно чётности перестановки:

(a) Перестановку можно представить в виде композиции чётного числа транспозиций.

(b) Любое представление перестановки в виде композиции транспозиций содержит чётное их число.

(c) Перестановку можно представить в виде композиции нескольких циклов длины 3.

**2.8.5.** (a) Каких перестановок $n$-элементного множества больше: чётных или нечётных?

(b) В какое минимальное количество транспозиций раскладывается перестановка $n$-элементного множества, состоящая из $k$ непересекающихся циклов длины больше 1?

**2.8.6.*** Перестановка $x$ *порождается перестановками* $p_1, p_2, \ldots, p_k$, если $x = x_1 x_2 \ldots x_n$, где для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ найдётся такое $1 \leqslant j \leqslant k$, что $x_i = p_j$.

(a) Множество всех чётных перестановок конечного множества порождается любой парой циклов (длины хотя бы 2 каждый), имеющих ровно один общий элемент и содержащих все элементы множества.

(b) Если $nk$ чётно, $n > 1$, $k > 1$, то циклами $(1 \ldots n)$ и $(n \ldots n + k - 1)$ порождаются все перестановки множества $\mathcal{R}_{n+k-1}$.

(c) Если $nk$ нечётно, $n > 1$, $k > 1$, то циклами $(1 \dots n)$ и $(n \dots n + k - 1)$ порождаются все чётные перестановки множества $\mathcal{R}_{n+k-1}$ и только они.

## 2.9 Комбинаторика классов эквивалентности

Этот раздел посвящен подсчёту числа классов эквивалентости (т. е. раскрасок и т.д.). Такой подсчёт подводит читателя к важным понятиям группы и действия группы на множестве, а также к элементарной формулировке леммы Бернсайда. Чтобы сделать этот и другие результаты менее доступными, их обычно формулируют и доказывают на языке абстрактной теории групп. Ср. [A, стр. 49, комментарий к задаче 5]. Изложение в этом разделе улучшено по сравнению с [S4, Z, глава 10, раздел «Комбинаторика классов эквивалентности»].

Задачи 2.9.1 и 2.9.2 — простые, их можно решить без идей, приводящих к лемме Бернсайда.

Раскраски, совмещающиеся вращением пространства (т. е. движением пространства, сохраняющим ориентацию), считаются одинаковыми (кроме задачи 2.9.1.c).

**2.9.1.** Сколько существует

(a) раскрасок незанумерованных граней куба в красный и серый цвета?

(b) различных (т. е. неизоморфных) неориентированных графов с 4 незанумерованными вершинами?

(c) раскрасок в $r$ цветов незанумерованных вершин правильного тетраэдра? Здесь раскраски, совмещающиеся движением пространства (не обязательно сохраняющим ориентацию), считаются одинаковыми.

(d) раскрасок вершин полного графа на 4 незанумерованных вершинах в $r$ цветов? Здесь раскраски, совмещающиеся перестановкой вершин (т. е. *автоморфизмом*) этого графа, считаются одинаковыми.

**2.9.2.** Для простого $p$ найдите число замкнутых ориентированных связных $p$-звенных ломаных (возможно, самопересекающихся), проходящих через все вершины данного правильного $p$-угольника. Ломаные, совмещающиеся поворотом, неотличимы.

**2.9.3.** Найдите количество раскрасок карусели из $n$ незанумерованных вагончиков в $r$ цветов (т. е. число раскрасок вершин правильного $n$-угольника в $r$ цветов, если раскраски, совмещающиеся поворотом, неотличимы) для

(a) $n = 5$; (b) $n = 4$; (c) $n = 6$.

Задачу 2.9.3 для произвольного $n$ можно решить способом, аналогичным придуманному вами для малых $n$ (§2.5). Однако решение будет громоздким. Приведём более простой (для «очень непростых» $n$) способ на примере решения задачи 2.9.3.c.

Назовем *поездом* карусель из *занумерованных* вагончиков. Количество раскрасок поезда из 6 вагончиков в $r$ цветов равно $r^6$.

Посчитаем двумя способами количество $P$ пар $(\alpha, d)$, в которых $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ и $\alpha$ — раскраска поезда, переходящая в себя при циклическом сдвиге на $d$ вагончиков.

Циклический сдвиг на $d$ переводит в себя ровно $r^{GCD(d,6)}$ раскрасок поезда. Поэтому

$$P = r^6 + r + r^2 + r^3 + r^2 + r.$$

С другой стороны, обозначим через $d(\alpha)$ наименьшую положительную величину циклического сдвига, при котором раскраска $\alpha$ поезда переходит в себя. Тогда количество тех $d \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, для которых циклический сдвиг на $d$ переводит раскраску $\alpha$ поезда в себя, равно $6/d(\alpha)$. Поэтому

$$P = \sum_{\text{по всем раскраскам } \alpha \text{ поездов}} \frac{6}{d(\alpha)} =$$

$$= \sum_{\text{по всем раскраскам } x \text{ каруселей}} d(x) \cdot \frac{6}{d(x)} = 6Z.$$

Здесь $Z$ — искомое количество раскрасок. Второе равенство выполнено, поскольку

• для раскрасок $\alpha$ и $\alpha'$ поезда, переводящихся друг в друга циклическими сдвигами, $d(\alpha) = d(\alpha')$ (эти равные числа обозначаются $d(x)$, где $x$ — соответствующая раскраска карусели);

• количество раскрасок поезда, получающихся циклическими сдвигами из данной раскраски $\alpha$ поезда (т. е. дающих ту же раскраску карусели), равно $d(\alpha)$.

Итак, $X = (r^6 + 2r + 2r^2 + r^3)/6$.

**2.9.4.** Найдите количество:

(a) раскрасок карусели из $n$ вагончиков в $r$ цветов. (См. формализацию и другое решение в §2.5.)

(b) $r$-цветных ожерелий из $n = 2k+1$ бусин. (Ожерелья считаются одинаковыми, если они совмещаются либо поворотом вокруг центра ожерелья, либо осевой симметрией ожерелья.)

(c) раскрасок незанумерованных граней куба в $r$ цветов.

(d) раскрасок незанумерованных вершин куба в $r$ цветов.

(e) раскрасок незанумерованных вершин графа $K_{3,3}$ (§3.1) в $r$ цветов. Раскраски считаются одинаковыми, если они совмещаются автоморфизмом этого графа.

*Указание к (b)-(e).* Если не получается, читайте дальше.

**2.9.5.** Перечислите все вращения куба (т. е. вращения пространства, переводящие куб в себя).

**2.9.6.** Назовём *замороженной раскраской* раскраску занумерованых граней куба. (Тогда всего имеется $r^6$ замороженных раскрасок.)

(a) Для каждого вращения $s$ куба найдите количество $\mathrm{fix}(s)$ замороженных раскрасок, переходящих в себя при вращении $s$.

(b) Найдите количество $P$ пар $(\alpha, s)$, в которых $s$ — вращение куба и $\alpha$ — замороженная раскраска, переходящая в себя при вращении $s$.

(c) $P = \sum\limits_{\text{по всем замороженным раскраскам } \alpha} \mathrm{st}\alpha$, где $\mathrm{st}\alpha$ — количество вращений куба, переводящих в себя замороженную раскраску $\alpha$.

(d) Если существует вращение, переводящее замороженную раскраску $\alpha$ в замороженную раскраску $\alpha'$, то количество таких вращений равно $\mathrm{st}\alpha$.

(e) Для замороженных раскрасок $\alpha$ и $\alpha'$, переходящих друг в друга при некотором вращении, $\mathrm{st}\alpha = \mathrm{st}\alpha'$.

(Эти равные числа обозначаются $\mathrm{st}x$, где $x$ — соответствующая раскраска незанумерованных граней куба).

(f) $P = \sum\limits_{\text{по всем раскраскам } x \text{ незанумерованных граней}} \mathrm{st}x \cdot N_x$, где $N_x$ — количество замороженных раскрасок, отвечающих раскраске $x$.
(g) $\mathrm{st}x \cdot N_x$ равно количеству вращений куба для любой раскраски $x$.

Как сформулировать общий результат, который можно было применять вместо повторения намеченных решений задач 2.9.4.a,c?

**2.9.7.** *Лемма Бернсайда.* Пусть заданы конечное множество $M$ и семейство $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ преобразований этого множества, замкнутое относительно взятия композиции и взятия обратного элемента. Назовем элементы множества $M$ *эквивалентными*, если один можно перевести в другой одним из данных преобразований. Тогда количество классов эквивалентности равно $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{fix}(g_k)$, где $\mathrm{fix}(g_k)$ — количество элементов множества $M$, которые преобразование $g_k$ переводит в себя.

**2.9.8.** Найдите количество графов с $n$ вершинами с точностью до изоморфизма. (Ответ можно оставить в виде суммы.)

**2.9.9.** (a) Найдите количество $b_n$ отображений $\{0,1\}^n \to \{0,1\}$ с точностью до перестановки переменных.
(b) Докажите, что существует $\lim\limits_{n\to\infty} n!b_n/2^{2^n}$, и найдите этот предел.

## 2.10 Подсказки

*2.1.1.* (a) Постройте биекцию (т.е. взаимно-однозначное соответствие) $\binom{\mathcal{R}_n}{k} \to \binom{\mathcal{R}_n}{n-k}$ между семействами $k$-элементных и $(n-k)$-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$.

*2.1.5.* (a) Ответ: $\begin{cases} 1, n = 0; \\ 0, n \neq 0. \end{cases}$
(b) Докажите, что $\dfrac{1}{k+1}\dbinom{n}{k} = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{n+1}{k+1}$.

(c) Докажите, что $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
(d) Используйте правило Паскаля (задача 2.1.2.a).
(f) Решается аналогично предыдущей задаче.
(g) Ответ:

$$\begin{cases} 1, & \text{если } n = 3k, \\ -1, & \text{если } n = 3k+1, \\ 0, & \text{если } n = 3k-1. \end{cases}$$

*2.1.6.* Будут полезны *тригонометрическая форма комплексного числа*

$$a+bi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad \text{где} \quad r = \sqrt{a^2+b^2} \quad \text{и} \quad \varphi - \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \in \{0, \pi\}$$

и *формула Муавра* $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

*2.3.2.* (a) Ответ: 57.

*2.4.1.* Сначала расставьте нескольких коней, чтобы каждый бил *одного* другого. Затем расставьте нескольких коней, чтобы каждый бил *двух* других.

*2.4.3.* (b) Ответ: наименьшее $n = n(k)$, для которого $\binom{n}{[n/2]} \geqslant k$.

*2.4.4.* Ответ: $n$.

*2.4.7.* (a) Ответ: $1, 3, 1$.
(b) Ответ: $1, 7, 7, 1$.
(c) Ответ: $(2^n-1)(2^{n-1}-1)/3$.
(d) Используйте ортогональное дополнение.
(f) Выбрать в $n$-мерном линейном пространстве над $\mathbb{Z}_2$ упорядоченную пару линейно независимых векторов можно $(2^n-1)(2^n-2)$ способами.

(g) Выбрать в $n$-мерном линейном пространство над $\mathbb{Z}_2$ упорядоченный набор из $k$ линейно независимых векторов можно $(2^n - 2^0) \cdot (2^n - 2^1) \cdot \ldots \cdot (2^n - 2^{k-1})$ способами.

*2.5.2.* (a) Ответ: $\sum\limits_{d|n} \varphi(d) = n$.

*2.5.3.* (a) Для раскраски $\alpha$ карусели рассмотрите все возможные значения периода $d(\alpha)$ (он определен после задачи 2.5.3).

*2.5.6.* (b) Выразите ответ через $T_k(10)$, $k = 1, 2, 3, 4$.

*2.6.3.* Сначала докажите, что каждая страна участвует не менее, чем в трех блоках.

*2.6.6.* Используйте то, что среди чисел $k+1, k+2, \ldots, 2k, 2k+1$ ни одно не равно сумме двух других.

*2.7.1.* Ответ: через 105 минут.

*2.7.2.* Ответы: (a) (132); (b) (123); (c) (132); (d) id; (e) (23); (f) (1345); (g) (123456789).

*2.7.4.* Ответ: нужной перестановки порядка 11 не существует, остальные существуют.

*2.7.5.* Ответ: НОК$(n_1, \ldots, n_k)$.

*2.7.6.* Ответы: (a) 20; (b) $4\binom{6}{3}/2 = 40$; (c) $10!/4!$.

*2.7.8.* Ответ: например, (12) и $(123\ldots n)$.

*2.7.9.* (c) Ответ: $(N-1, N, N+1)$.

*2.8.1.* Ответы: (a) нет; (b) нет; (c) нет.

*2.8.2.* Ответ: цикл длины чётен при $n$ нечётном и нечётен при $n$ чётном.

*2.8.3.* (b) Просуммируйте чётности сомножителей по модулю 2.

*2.8.5.* Ответы: (a) поровну; (b) $n-k$.

*2.9.1.* Ответы: (a) 10; (b) 11; (c,d) $r(r+1)(r+2)(r+3)/24$.

*2.9.2.* Ответ: $p-2+((p-1)!+1)/p$.

*2.9.3.* Ответы: (a) $(r^5+4r)/5$; (b) $(r^4+r^2+2r)/4$;
(c) $(r^6+r^3+2r^2+2r)/6$.

*2.9.4.* (a) Ответ: $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{d|n}\varphi\left(\dfrac{n}{d}\right)r^d$. Функция Эйлера $\varphi(n)$ определена в §2.2.

## 2.11 Указания

***2.1.1.*** (a) Каждому $k$-элементному множеству поставим в соответствие его дополнение до всего множества $\mathcal{R}_n$. Построенное таким образом отображение является биекцией (т.е. взаимно-однозначным соответствием). Следовательно, количества $k$-элементных и $(n-k)$-элементных подмножеств равны.

(b) Количество всех подмножеств множества $\mathcal{R}_n$ равно $2^n$. Количество подмножеств, состоящих ровно из $k$ элементов, равно $\dbinom{n}{k}$. Отсюда $\dbinom{n}{0}+\ldots+\dbinom{n}{n}=2^n$.

***2.1.2.*** (b) Количество разбиений множества $\mathcal{R}_{n+1}$ на $k+1$ частей,

- в которых $\{n+1\}$ — отдельная часть, равно $\left\{ {n \atop k} \right\}$;
- в которых нет отдельной части $\{n+1\}$, равно $(k+1)\left\{ {n \atop k+1} \right\}$.

***2.1.3.*** (a) Ответ: 233.
Обозначим через $A_n$ количество подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, не содержащих двух подряд идущих чисел. Количество таких подмножеств,
• не содержащих число $n$, равно $A_{n-1}$, так как такие подмножества являются также подмножествами в $\mathcal{R}_{n-1}$.
• содержащих число $n$, равно $A_{n-2}$, так как такие подмножества при выкидывании числа $n$ становятся подмножествами в $\mathcal{R}_{n-1}$.
Поэтому $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$. Очевидно, $A_1 = 2$ и $A_2 = 3$. Вычисляя последовательно $A_3, A_4, \ldots, A_{11}$, получаем $A_{11} = 233$.
(b) Ответ: 927. Указание: $A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + A_{n-3}$.

***2.1.5.*** (a) Используя бином Ньютона, получаем, что при $n > 0$ сумма равна $(1-1)^n = 0^n = 0$.
(b) Преобразуем по отдельности каждое слагаемое:

$$\frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{k+1}\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}.$$

Итого имеем:

$$\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} =$$

$$= \frac{\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+1}{n+1}}{n+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

(c) Действительно,

$$k\binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Итого имеем:

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n\left(\binom{n-1}{0} + \ldots + \binom{n-1}{n-1}\right) =$$

$$= n \cdot 2^{n-1}.$$

(d) Применяя правило Паскаля, получаем:

$$\binom{n}{k}+\binom{n+1}{k+1}+\ldots+\binom{n+m}{k+m}=$$

$$=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}+\binom{n+1}{k+1}+\ldots+\binom{n+m}{k+m}-\binom{n}{k-1}=$$

$$=\binom{n+1}{k}+\binom{n+1}{k+1}+\ldots+\binom{n+m}{k+m}-\binom{n}{k-1}=$$

$$=\binom{n+2}{k+1}+\binom{n+2}{k+2}+\ldots+\binom{n+m}{k+m}-\binom{n}{k-1}=$$

$$=\ldots=\binom{n+m}{k+m-1}+\binom{n+m}{k+m}-\binom{n}{k-1}=\binom{n+m+1}{k+m}-\binom{n}{k-1}.$$

(e) *Построение биекции.* Для каждого $k=0,\ldots,n$ обозначим через $A_k$ семейство множеств из $\binom{\mathcal{R}_{2n}}{n}$, содержащих ровно $k$ элементов из подмножества $\mathcal{R}_n\subset\mathcal{R}_{2n}$:

$$A_k:=\{A\in\binom{2n}{n}\ :\ |A\cap\mathcal{R}_n|=k\}.$$

Количество элементов в $A_k$ равно произведению количеств $k$-элементных подмножеств в $\mathcal{R}_n$ и $(n-k)$-элементных подмножеств в $\{n+1,\ldots,2n\}$, т. е.

$$|A_k|=\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k}^2.$$

Так как

$$\binom{\mathcal{R}_{2n}}{n}=\bigsqcup_{k=0}^{n}A_k,\quad\text{то}\quad\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^{n}|A_k|=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

*Другая запись этого решения.* Определим отображение

$$f:\binom{\mathcal{R}_{2n}}{n}\to\bigsqcup_{j=0}^{n}\binom{\mathcal{R}_n}{j}\times\binom{\mathcal{R}_n}{n-j}$$

формулой $f(A) := (A \cap \mathcal{R}_n, (-n + A) \cap \mathcal{R}_n)$ и отображение $g$ в противоположную сторону — формулой $g(X, Y) := X \cup Y$. Остаётся проверить, что $f$ и $g$ взаимно обратны.

*Решение с использованием бинома Ньютона.* Рассмотрим тождество $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$. Коэффициент при $x^n$ у многочлена в левой части в силу бинома Ньютона равен $\binom{2n}{n}$. В правой части коэффициент при $x^n$ равен

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Действительно, чтобы «получить» $x^n$, надо выбрать $x^k$ из левой скобки и $x^{n-k}$ из правой скобки.

(g) Напомним, что два многочлена называются *сравнимыми по модулю многочлена* $P$, если их разность делится на $P$. Обозначение: $f \equiv g \pmod{P}$.

Данная сумма является коэффициентом при $x^{2n}$ у многочлена

$$x^{2n}(1-x)^{2n} + x^{2n-1}(1-x)^{2n-1} + \ldots + x(1-x) + 1 =$$

$$= \frac{1 - x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}}{x^2 - x + 1} = (1 - x^{2n+1}(1-x)^{2n+1}) \frac{1+x}{1+x^3} =$$

$$= (1 - x^{2n+1}(1-x)^{2n+1})(1+x) \cdot (1 - x^3 + x^6 - x^9 + \ldots) \equiv$$

$$\equiv (1+x) \cdot (1 - x^3 + x^6 - x^9 + \ldots) \pmod{x^{2n}}.$$

Здесь первое равенство получено применением формулы для суммы геометрической прогрессии.

(h) Данная сумма $S$ является коэффициентом при $x^n$ у многочлена

$$(1+x)^{2n} + 2(1+x)^{2n-1} + \ldots + 2^n(1+x)^n =$$

$$= (1+x)^{2n} \left(1 + \frac{2}{1+x} + \frac{2^2}{(1+x)^2} + \ldots + \frac{2^n}{(1+x)^n}\right) =$$

$$= (1+x)^{2n} \frac{\frac{2^{n+1}}{(1+x)^{n+1}} - 1}{\frac{2}{1+x} - 1} = (1+x)^{2n} \frac{\frac{2^{n+1}}{(1+x)^n} - (1+x)}{2 - (1+x)} =$$

$$= \left(2^{n+1}(1+x)^n - (1+x)^{2n+1}\right)\frac{1}{1-x} =$$
$$= \left(2^{n+1}(1+x)^n - (1+x)^{2n+1}\right)(1+x+x^2+\ldots).$$

Здесь первое равенство получено применением формулы для суммы геометрической прогрессии. Таким образом,

$$S = 2^{n+1}\left(\binom{n}{0}+\ldots+\binom{n}{n}\right) - \left(\binom{2n+1}{0}+\ldots+\binom{2n+1}{n}\right) =$$
$$= 2^{n+1}\cdot 2^n - \frac{1}{2}\cdot 2^{2n+1} = 2^{2n+1} - 2^{2n} = 2^{2n}.$$

***2.1.6.*** Рассмотрите $\sum\limits_{k\geqslant 0}\varepsilon^k\binom{n}{k}$ для (a) $\varepsilon = \pm 1$;

(b) $\varepsilon = \pm 1, \pm i$; (c) $\varepsilon = \cos(2\pi k/3) + i\sin(2\pi k/3)$, $k = 1, 2, 3$.

Предответоиды (далее всюду $n \neq 0$):

(a) $\dfrac{(1+1)^n + (1-1)^n}{2}$.

(b) $\dfrac{(1+1)^n + (1+i)^n + (1-1)^n + (1-i)^n}{4}$.

(c) $\dfrac{(1+1)^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n}{3}$.

Предответы:

(a) $2^{n-1}$. (b) $2^{n-2} + 2^{n/2-1}\cos(\pi n/4)$. (c) $(2^n + 2\cos(\pi n/3))/3$.

Ответы:

(a) $2^{n-1}$.

(b) $2^{n-2} + 2^{[n/2]-1}f(n)$, где $f(8k+r)$ есть $1, 1, 0, -1, -1, -1, 0, 1$ для $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, соответственно.

(c) $(2^n + g(n))/3$, где $g(6k+r)$ есть $2, 1, -1, -2, -1, 1$ для $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, соответственно.

*Другое решение для пункта (a).* Сумма $\sum\limits_{k}\binom{n}{2k}$ — это количество подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ с чётным числом элементов. Для каждого из таких подмножеств возможны две ситуации:

• элемент $n$ содержится в подмножестве, тогда этому подмножеству соответствует подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ с нечётным числом элементов.

• элемент $n$ не содержится в подмножестве, тогда этому подмножеству соответствует подмножество множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ с чётным числом элементов.

Поэтому существует биекция между подмножествами множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ с чётным числом элементов и подмножествами множества $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Следовательно, наша сумма равна $2^{n-1}$.

***2.2.1.*** (a) Для каждого $j$, делящего 1001, обозначим через $A_j$ множество чисел от 1 до 1001, делящихся на $j$. Тогда

$$|A_j| = \frac{1001}{j} \quad \text{и} \quad A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_k} = A_{p_1 \cdot \ldots \cdot p_k}$$

для различных простых чисел $p_1, \ldots, p_k$. Следовательно, искомое количество чисел равно

$$|\{1, \ldots, 1001\} \setminus (A_7 \cup A_{11} \cup A_{13})| =$$

$$= 1001 - |A_7| - |A_{11}| - |A_{13}| + |A_7 \cap A_{11}| + |A_7 \cap A_{13}| + |A_{11} \cap A_{13}| -$$

$$-|A_7 \cap A_{11} \cap A_{13}| =$$

$$= 1001 - |A_7| - |A_{11}| - |A_{13}| + |A_{77}| + |A_{91}| + |A_{143}| - |A_{1001}| =$$

$$= 1001 - 143 - 91 - 77 + 7 + 11 + 13 - 1 = 720.$$

(c) Для любого $j \mid n$ определим $A_j$ как подмножество множества $\mathcal{R}_n$ чисел, которые делятся на $j$. Ясно, что

$$|A_j| = \frac{n}{j} \quad \text{и} \quad A_{p_1} \cap \ldots \cap A_{p_k} = A_{p_1 \cdot \ldots \cdot p_k}$$

для различных простых $p_1, \ldots, p_k$.

Обозначим

$$M_k := \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant s} \frac{n}{p_{j_1} p_{j_2} \cdot \ldots \cdot p_{j_k}}.$$

По определению $\varphi(n) = |\mathcal{R}_n \setminus (A_{p_1} \cup \ldots \cup A_{p_s})|$, откуда по формуле включений и исключений (см. утверждение 2.2.3) получаем, что

$$\varphi(n) = M_0 - M_1 + M_2 - \ldots = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

*2.2.2.* (a) Обозначим через $A_j$ множество точек, покрываемых $j$-ым ковром, через $|A_j|$ площадь $j$-ого ковра.
Пусть утверждение неверно, т. е. для любых $j, k$ выполнено неравенство $|A_j \cap A_k| < 4$. Следовательно,

$$24 \geqslant |A_1 \cup A_2 \cup A_3| > |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_3| >$$

$$> 12 + 12 + 12 - 4 - 4 - 4 = 24,$$

где второе неравенство следует из неравенства Бонферрони (см. утверждение 2.2.3.c). Полученное противоречие завершает доказательство.

*2.2.4.* (a) Обозначим через $U$ множество всех перестановок книг, через $A_j$ множество перестановок книг, при которых $j$-ая книга остается на месте. Выберем произвольное $k$-элементное подмножество $S \subset \mathcal{R}_n$. Тогда $\bigcap\limits_{j \in S} A_j$ состоит из тех перестановок книг, при которых каждая из книг $j \in S$ остается на месте. Значит,

$$|\bigcap_{j \in S} A_j| = (n-k)(n-k-1)\ldots 1 = (n-k)!.$$

Применяя формулу включений и исключений 2.2.3.a, получаем

$$|U \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_n)| = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)! =$$

$$= n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{n!}.$$

(b) Чтобы выбрать нужную перестановку, можно выбрать те 4 книги из 10, которые остаются на месте, а затем перестановку оставшихся книг, при которой ни одна книга не остается на месте. Поэтому и по (a) искомое количество равно

$$\binom{10}{4} \left( 6! - \frac{6!}{1!} + \frac{6!}{2!} - \frac{6!}{3!} + \ldots + \frac{6!}{6!} \right) >$$

$$> \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{24} \left( \frac{6!}{2} - \frac{6!}{6} \right) = 210 \cdot 240 = 7 \cdot 7200 > 50000.$$

***2.2.5.*** (a) Пусть $U$ — множество всех расселений туристов, $A_j$ — множество расселений туристов, при которых $j$-ый домик пуст. Количество расселений, при которых все домики с номерами из множества $S$ пусты, равно $|\bigcap\limits_{j\in S} A_j| = (5-|S|)^{20}$. По формуле включений и исключений 2.2.3.a получаем:

$$|U \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_5)| = \sum_{k=0}^{5}(-1)^k\binom{n}{k}(5-k)^{20} =$$

$$= 5^{20} - \binom{5}{1}4^{20} + \binom{5}{2}3^{20} - \binom{5}{3}2^{20} + \binom{5}{4}1^{20}.$$

(b) Пусть $U = {\mathcal{R}_n}^{\mathcal{R}_k}$ — множество всех отображений из $\mathcal{R}_k$ в $\mathcal{R}_n$. Для каждого $j = 1,\ldots,n$ обозначим через $A_j = (\mathcal{R}_n \setminus \{j\})^{\mathcal{R}_k}$ множество отображений из $\mathcal{R}_k$ в $\mathcal{R}_n$, образ которых не содержит элемент $j$. Тогда множество сюръекций из $\mathcal{R}_k$ в $\mathcal{R}_n$ — это множество $U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$. При этом $|\bigcap\limits_{j\in S} A_j| = (n-|S|)^k$. Применяя формулу включений и исключений 2.2.3.a, получаем:

$$|U \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)| =$$

$$= n^k - \binom{n}{1}(n-1)^k + \binom{n}{2}(n-2)^k - \ldots + \binom{n}{n}\cdot 1^k.$$

***2.3.2.*** (a) Если взять $7\cdot 8$ шаров, т.е. возможность вытащить по 8 шаров каждого цвета. Если же взять $7\cdot 8+1$ шаров, то по принципу Дирихле найдётся цвет, в которой покрашено больше, чем $\frac{57}{7} > 8$, т.е. 9 шаров.

***2.3.3.*** (a) Очевидно, количество чисел, удовлетворяющих условию утверждения, равно 9000. Для каждого $j = 0,1,\ldots,6$ обозначим через $a_j$ число всех 7-значных чисел, заканчивающихся на три нуля и имеющих остаток от деления на 7, равный $j$. Тогда $\sum_{j=0}^{6} a_j = 9000$. Поэтому существует $j_0 \in \{1,\ldots,6\}$, такое, что $a_{j_0} \geqslant \frac{9000}{7} > 1200$, что доказывает утверждение задачи.

*Замечание.* Разбив числа на семёрки, несложно явно найти, сколько есть чисел с каждым остатком. Принцип Дирихле позволяет дать немного более простое решение.

(b) Аналогично (a).

***2.3.4.*** (a) Рассмотрим последовательность чисел $\underbrace{111\ldots11}_{n}$, $n = 1, 2, \ldots, 1998$. По принципу Дирихле, среди этих чисел найдутся два числа, имеющих один и тот же остаток при делении на 1997. Тогда их разность делится на 1997. Она равна $\underbrace{11\ldots11}_{k}\cdot 10^j$, где $k > 0$, $j \geqslant 0$. Осталось заметить, что 10 взаимно просто с 1997. Значит, число $\underbrace{11\ldots11}_{k}$ также делится на 1997.

(b) Аналогично (a).

***2.3.5.*** (a) Обозначим дробную часть числа $x$ через $\{x\}$. Разделим отрезок $[0, 1]$ на $N$ равных отрезков. Тогда из чисел $\{x_1\}, \ldots, \{x_{N+1}\}$ два попадают в один отрезок. Следовательно, расстояние между ними не больше, чем $\frac{1}{N}$.

(b) Рассмотрим максимальный и минимальный элементы в таблице. Тогда расстояние между ними по клеткам таблицы (т. е. минимальное количество шагов между клетками, если можно двигаться только в соседнюю по стороне клетку) не более, чем 18. Следовательно, разность между ними не превосходит 90. Среди 100 чисел, принимающих 91 значение, по принципу Дирихле найдутся два равных.

***2.3.6.*** (a) Рассмотрим произвольное натуральное число $N > 1$ и рассмотрим последовательность $\{n\alpha\}, 1 \leqslant n \leqslant N+1$. По утверждению 2.3.5.a найдутся $1 \leqslant j < k \leqslant N+1$ такие, что $|\{k\alpha\} - \{j\alpha\}| \leqslant \frac{1}{N}$. Возьмём $p = [k\alpha] - [j\alpha]$, $q = k - j$. Тогда:

$$|(k-j)\alpha - p| = |k\alpha - [k\alpha] - (j\alpha - [j\alpha])| = |\{k\alpha\} - \{j\alpha\}| \leqslant \frac{1}{N} \Rightarrow$$

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{qN}.$$

(b) Докажем по индукции, что существует $k$ пар чисел, удовлетворяющих требуемому неравенству. База индукции следует из пункта (a):

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{qN} \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Пусть мы нашли дроби $\frac{p_1}{q_1}$, …, $\frac{p_k}{q_k}$ удовлетворяющие требуемому условию. Рассмотрим $N$ такое, что $\frac{1}{N} < \min_{i=1,\ldots,k} |\alpha - \frac{p_i}{q_i}|$. Применив пункт (a), найдем $p, q$ такие, что

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{qN} \leqslant \frac{1}{N} < \left|\alpha - \frac{p_i}{q_i}\right|$$

для всех $i = 1, \ldots, k$. Поэтому дробь $\frac{p}{q}$ отличается от всех предыдущих дробей. С другой стороны,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{qN} \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

Следовательно, количество таких дробей бесконечно.

***2.3.7.*** Каждому числу $k = 1, \ldots, 101$ последовательности сопоставим пару $(b_k, c_k)$, где

- $b_k$ — длина набольшей *убывающей* подпоследовательности, последним членом которой является $k$,
- $c_k$ — длина наибольшей *возрастающей* подпоследовательности, последним членом которой является $k$.

Можно проверить, что разным числам $j \neq k$ соответствуют различные пары чисел $(b_j, c_j)$ и $(b_k, c_k)$. Предположим, что нет ни возрастающей, ни убывающей подпоследовательности длины 11. Тогда мы получаем 101 различных пар чисел, причем элементы каждой пары лежат в пределах от 1 до 10. Последнее противоречит принципу Дирихле.

***2.3.8.*** (a) Количество способов выбрать какое-то (отличное от нуля) количество яблок из десяти равно $2^{10} - 1 = 1023$. Любой такой набор весит не более 1000 г. Значит, какие-то два набора отличаются не более, чем на 1 г. Выкинем из них общие яблоки, а остальное положим в тарелки (одна из тарелок при этом может оказаться пустой).

(b) Количество способов выбрать 5 яблок из десяти равно $\binom{10}{5} = 252$. По условию, каждый такой набор весит не более 500 г. Значит, какие-то два набора отличаются не более, чем на 2 г. Выкинем из них общие яблоки, а остальное положим в тарелки.

***2.3.9.*** $(\sum_k \varepsilon_k v_k)^2 = n + 2\sum_{k<l} \varepsilon_k \varepsilon_l v_k \cdot v_l$. Суммируя по всем $2^n$ наборам $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, получаем $n \cdot 2^n$. Значит, существует набор, для которого

(a) $(\sum_k \varepsilon_k v_k)^2 \leqslant n$. (b) $(\sum_k \varepsilon_k v_k)^2 \geqslant n$.

***2.4.1.*** См. подсказку. Потом расставьте нескольких коней, чтобы каждый бил *трех* других. См. рисунок [на обложке или ниже!!!] (4cube.pdf)

***2.4.3.*** (a) *Первый способ.* Индукцией по $n$ с применением правила Паскаля докажите, что для любого $n$ величина $\binom{n}{k}$ как функция от $k$ возрастает при $k \leqslant n/2$ и убывает при $k \geqslant n/2$.

*Второй способ.* Рассмотрите $\binom{n}{k} \Big/ \binom{n}{k+1}$ и используйте явную формулу для $\binom{n}{k}$.

(b) Для $n$-элементного множества семейство подмножеств $\binom{n}{[n/2]}$ удовлетворяет требуемому условию.

Докажем, что больше, чем $\binom{n}{[n/2]}$ подмножеств, в таком семействе быть не может.

Для каждой перестановки $(a_1, \ldots, a_n)$ множества $\mathcal{R}_n$ рассмотрим цепочку подмножеств

$$\{a_1\} \subset \{a_1, a_2\} \subset \ldots \subset \{a_1, \ldots, a_n\} = \mathcal{R}_n.$$

В любой такой цепочке имеется не более одного подмножества из нашего семейства. Всего перестановок $n!$. Подмножество из $a$ элементов участвует в цепочках для

$$a!(n-a)! \geqslant [n/2]! \cdot (n - [n/2])!$$

перестановок. Поэтому число подмножеств в нашем семействе не превосходит

$$\frac{n!}{[n/2]!(n-[n/2])!} = \binom{n}{[n/2]}.$$

*Указание к другому доказательству.* Рассмотрим все подмножества нашего семейства $S$, имеющие наименьшее число $a$ элементов. Если $a < [n/2]$, то можно в $S$ заменить их на такое же (или большее) количество $(a+1)$-элементных подмножеств, чтобы в полученном семействе по-прежнему ни одно из множеств не содержало другое. (Действительно, каждое $a$-элементное подмножество из $S$ содержится в $n-a$ подмножествах, состоящих из $a+1$ элемента. Ни одно из последних $(a+1)$-элементных подмножеств не лежит в $S$. С другой стороны, каждое $(a+1)$-элементное подмножество содержит не более $a$ подмножеств, состоящих из $a$ элементов и лежащих в $S$. Так как $n-a \geqslant a+1$, то количество $(a+1)$-элементных подмножеств, содержащих подмножество из $S$, не меньше количества $a$-элементных подмножеств из $S$. Заменяем вторые на первые.)
Поэтому существует экстремальное семейство, каждое множество в котором имеет не менее $[n/2]$ элементов. Аналогично, заменяя подмножества с наибольшим числом $a > [n/2]$ элементов на $(a-1)$-элементные, получаем экстремальное семейство, в котором каждое множество имеет ровно $[n/2]$ элементов.

***2.4.7.*** (e) Количество $(k+1)$-мерных подпространств пространства $\mathbb{Z}_2^{n+1}$,

- содержащихся в $\mathbb{Z}_2^n \subset \mathbb{Z}_2^{n+1}$, равно $\left|\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix}\right|$;
- не содержащихся в $\mathbb{Z}_2^n \subset \mathbb{Z}_2^{n+1}$, равно $2^{n-k}\left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right|$.

Докажем второе. $(k+1)$-мерное подпространство $L$ пространства $\mathbb{Z}_2^{n+1}$, не содержащееся в $\mathbb{Z}_2^n$, пересекается с $\mathbb{Z}_2^n$ по $k$-мерному подпространству $L \cap \mathbb{Z}_2^n$. Подпространство $L$ задается пересечением $L \cap \mathbb{Z}_2^n$ и вектором, лежащим в ортогональном дополнении к $L \cap \mathbb{Z}_2^n$ в $\mathbb{Z}_2^{n+1}$, но не лежащим в ортогональном дополнении к $L \cap \mathbb{Z}_2^n$ в $\mathbb{Z}_2^n$. Таких векторов $2^{n+1-k} - 2^{n-k} = 2^{n-k}$.

*Замечание.* Справедлива также формула $\left|\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix}\right| = \left|\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right| + 2^{k+1}\left|\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix}\right|$.
См. (g).

(g) Ответ: $\dfrac{(2^n-1)(2^{n-1}-1)\dots(2^{n-k+1}-1)}{(2^k-1)(2^{k-1}-1)\dots(2^1-1)}$.

***2.5.1.*** (a) Если $n = 1$, то по определению $\sum\limits_{d|n}\mu(n) = \mu(1) = 1$. Иначе $\mu(d) \neq 0$, только если $d$ является произведением $k$ простых сомножителей. Для такого $d$ выполнено равенство $\mu(d) = (-1)^k$. Обозначим через $M_k$ множество всех делителей числа $n$, являющихся произведением $k$ различных простых чисел, а через $s$ — общее количество различных простых делителей числа $n$ (единицу будем считать делителем $n$ с нулём простых делителей). Тогда имеем:

$$\sum_{d|n}\mu(d) = \sum_{k=0}^{s}\sum_{d\in M_k}\mu(d) = \sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}(-1)^k = 0,$$

последнее равенство выполнено при $s > 0$ по утверждению 2.1.5.a.
(b) В обозначениях указания к предыдущему пункту получаем, что искомая сумма равна

$$\sum_{k=0}^{[s/2]}\sum_{d\in M_{2k}}\mu(d) = \sum_{k=0}^{[s/2]}|M_{2k}| = \sum_{k=0}^{[s/2]}\binom{s}{2k} = 2^{s-1};$$

последнее равенство справедливо по утверждению 2.1.6.a.
(c) Имеем:

$$\sum_{d|n}\mu(d)g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n}\mu(d)\sum_{m|\frac{n}{d}}f(m) = \sum_{d|n}\sum_{m|\frac{n}{d}}\mu(d)f(m) =$$

$$= \sum_{m|n}\sum_{d|\frac{n}{m}}\mu(d)f(m) = \sum_{m|n}f(m)\sum_{d|\frac{n}{m}}\mu(d) = f(n).$$

***2.5.3.*** (a) Укажем решения для $n = 4, 6$.

($n = 4$) Если раскраска $\alpha$ карусели переходит в себя в результате трех циклических сдвигов, то она переходит в себя и в результате одного циклического сдвига. Поэтому $d(\alpha) = 1, 2$ или 4. Докажем следующие утверждения:

• *Количество раскрасок каруселей с $d(\alpha) = 1$ равно $r$.*

Очевидно, для произвольной одноцветной раскраски $\alpha$ карусели $d(\alpha) = 1$. Обратно, если $d = 1$, то раскраска карусели переходит в себя при циклическом сдвиге. Следовательно, все вагончики одноцветные. Значит, количество раскрасок карусели в этом случае равно $r$.

• *Количество раскрасок каруселей с* $d(\alpha) = 2$ *равно* $\frac{r^2-r}{2}$.

Раскраска карусели имеет период 2 тогда и только тогда, когда она имеет вид $abab$, $a \neq b$. Следовательно, количество раскрасок карусели в этом случае равно $\binom{r}{2}$.

• *Количество раскрасок каруселей с* $d(\alpha) = 4$ *равно* $\frac{r^4-r^2}{4}$.

Количество последовательностей длины 4 равно $r^4$. Такая последовательность имеет период 4 тогда и только тогда, когда она имеет вид, отличный от $abab$. Поэтому количество последовательностей длины 4 равно $r^4 - r^2$. Так как раскраске карусели периода 4 соответствует ровно 4 последовательности периода 4, то количество таких раскрасок карусели равно $\frac{r^4-r^2}{4}$.

Итого, количество раскрасок карусели равно

$$\frac{r^4-r^2}{4} + \frac{r^2-r}{2} + r = \frac{r^4+r^2+2r}{4}.$$

($n = 6$) В этом случае период раскраски карусели равен $1, 2, 3$ или 6. Вычислим количество раскрасок карусели в каждом из этих случаев. Получим, что искомое количество раскрасок карусели равно

$$\frac{r^6-r^3-r^2-r}{6} + \frac{r^3-r}{3} + \frac{r^2-r}{2} + r = \frac{r^6+r^3+2r^2+2r}{6}.$$

***2.5.4.*** (a) Пусть дана последовательность длины $n$ и периодом $d$. Разделим $n$ на $d$ с остатком: $n = dq+m$. Последовательность переходит в себя в результате $d$ циклических сдвигов. Тогда она переходит в себя и при циклическом сдвиге на $2d$, $3d$, …, $qd$, а значит и на $m = n - dq$. Если $m > 0$, то мы получаем противоречие с определением периода. Иначе $n$ делится на $d$.

(b) Действительно, последовательности $a_1, \ldots, a_d$ поставим в соответствие последовательности $a_1 \ldots a_d a_1 \ldots a_d \ldots a_1 \ldots a_d$, где $a_1, \ldots, a_d$ повторяется $\frac{n}{d}$ раз. Несложно показать, что это биекция, а значит, соответствующие количества последовательностей равны.

***2.5.5.*** (a) Напомним, что через $\mathcal{R}_r^n$ обозначается множество всех последовательностей длины $n$ из $\mathcal{R}_r$. Обозначим через $\mathcal{M}_r(n,d)$ множество последовательностей длины $n$ и периода $d$ из $\mathcal{R}_r$. Из утверждения 2.5.4 следует, что $\mathcal{R}_r^n = \cup_{d|n}\mathcal{M}_r(n,d)$. Из задачи 2.5.4.b следует, что $|\mathcal{M}_r(n,d)| = |\mathcal{M}_r(d,d)|$. Следовательно, имеем:

$$r^n = \sum_{d|n} |\mathcal{M}_r(n,d)| = \sum_{d|n} |\mathcal{M}_r(d,d)| = \sum_{d|n} M_r(d).$$

(b) Каждая раскраска карусели из $n$ вагончиков периода $l$ получается из $l$ последовательностей длины $n$ и периода $l$. Поэтому количество таких раскрасок каруселей равно $\frac{1}{l}|\mathcal{M}_r(n,l)|$. Следовательно,

$$T_r(n) = \sum_{l|n} \frac{1}{l}|\mathcal{M}_r(n,l)| = \sum_{l|n} \frac{1}{l} M_r(l).$$

(c) Применяя формулу обращения Мёбиуса к функции $M_r(n)$, получаем:

$$M_r(n) = \sum_{d|n} \mu(d) r^{\frac{n}{d}}.$$

Отсюда

$$T_r(n) = \sum_{l|n} \frac{1}{l} M_r(l) = \sum_{l|n} \frac{1}{l} \sum_{d|l} \mu(d) r^{\frac{l}{d}}.$$

(d)

$$T_r(n) = \sum_{l|n} \frac{1}{l} \sum_{d|l} \mu(d) r^{\frac{l}{d}} = \sum_{d|l|n} \frac{1}{l} \mu(d) r^{\frac{l}{d}} = \sum_{d|l|n} \frac{r^{\frac{l}{d}}}{\frac{l}{d}} \frac{\mu(d)}{d} \overset{(*)}{=}$$

$$\overset{(*)}{=} \sum_{qd|n} \frac{r^q}{q} \frac{\mu(d)}{d} = \sum_{q|n} \frac{r^q}{q} \sum_{d|\frac{n}{q}} \frac{\mu(d)}{d} \overset{(**)}{=} \sum_{q|n} \frac{r^q}{q} \frac{\varphi(\frac{n}{q})}{\frac{n}{q}} =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{q|n} \varphi\left(\frac{n}{q}\right) r^q = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) r^{\frac{n}{d}},$$

где

• под $\sum\limits_{d|l|n}$ подразумевается суммирование по всем парам $(d, l)$ таким, что $d \mid l \mid n$,
• в переходе $(*)$ обозначим $q := \frac{l}{d}$ и заменим суммирование по парам $(d, l)$ на суммирование по парам $(q, d)$,
• под $\sum\limits_{qd|n}$ подразумевается суммирование по всем парам $(q, d)$ таким, что $qd \mid n$,
• в переходе $(**)$ используем утверждения 2.2.1.c и 2.5.2.b.

***2.5.6.*** (b) Выбрать 4 цвета из 5 можно 5 способами. Для каждого из этих способов по формуле включения исключения посчитаем количество раскрасок, в которых участвуют все цвета. Таким образом, искомое число равно

$$5\left(T_4(10) - \binom{4}{3}T_3(10) + \binom{4}{2}T_2(10) - \binom{4}{1}T_1(10)\right) \overset{(*)}{=}$$
$$\overset{(*)}{=} \frac{5}{10}(4^{10} - 4\cdot 3^{10} + 6\cdot 2^{10} - 4 + 4^5 - 4\cdot 3^5 + 6\cdot 2^5 - 4+$$
$$+4(4^2 - 4\cdot 3^2 + 6\cdot 2^2 - 4 + 4 - 4\cdot 3 + 6\cdot 2 - 4)) =$$
$$= 2^{19} - 2\cdot 3^{10} + 7\cdot 2^9 - 2\cdot 3^5 + 3\cdot 2^5 - 4,$$

где $(*)$ — применение утверждения 2.5.5.d с перегруппировкой слагаемых.

***2.6.1.*** (b) *Первое решение.* Всего человекозаседаний $40\cdot 10 = 400$. Так как $400/60 > 6$, то по принципу Дирихле найдётся член комиссии, побывавший на 7 заседаниях. На этих заседаниях он встретил 63 человек. По принципу Дирихле двое из них совпадают.

*Второе решение.* Количество упорядоченных пар различных членов комиссии равно $60\cdot 59$. Всего парозаседаний $40\cdot(10\cdot 9) = 40\cdot 90 = 60\cdot 60 > 60\cdot 59$. Значит, по принципу Дирихле найдётся пара, которая встретилась по крайней мере на двух заседаниях.

(d) (*Это решение написано А. Головановым.*) Посчитаем число всех пар $(k, \sigma) \in \mathcal{R}_n \times S_n$ таких, что $\sigma(k) = k$. Обозначим через $\mathrm{fix}\colon S_n \to \mathbb{Z}$ число неподвижных точек. Тогда

$$\sum_{k=0}^{n} k\cdot P_n(k) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{fix}(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} |\{\sigma \in S_n \mid \sigma(k) = k\}| = \sum_{k=1}^{n}(n-1)! = n!.$$

***2.6.2.*** Оцените двумя способами количество пар $(X,Y)$, для которых $X$ является

(a) $l$-элементным; (b) $(k-1)$-элементным

подмножеством $n$-элементного множества, содержащимся хотя бы в одном подмножестве из $\mathcal{F}$, а $Y$ — подмножеством из $F$, содержащим $X$.

(a) Используйте то, что все $l$-множества должны быть накрыты, и что каждое $k$-множество накрывает ровно $\binom{k}{l}$ из $l$-множеств.

***2.6.3.*** Ответ: 6. Так как каждая страна участвует не менее, чем в трех блоках, то число блоков не меньше 6. Чтобы построить пример с 6 блоками, разбейте страны на группы по 25 стран. Тогда блоки — объединения двух из четырех груп.

***2.6.4.*** Обозначим $n=97$, $m=19$, количество равнобедренных одноцветных треугольников — через $x$, а разноцветных — через $y$. Тогда всего равнобедренных треугольников $x+y=\frac{n(n-1)}{2}$. Теперь посчитаем двумя способами количество пар $(a,b)$, где $a$ — равнобедренный треугольник и $b$ — его одноцветная сторона. Для каждой одноцветной стороны имеется три равнобедренных треугольника, в которые она входит. Каждому одноцветному треугольнику отвечает три пары, а не одноцветному — одна. Поэтому $\frac{m(m-1)}{2}+\frac{(n-m)(n-m-1)}{2}=3x+y$. Значит, $x$ зависит только от $n$ и $m$.

***2.6.5.*** Посчитаем количество пар $(a,b)$, где $a$ — отрезок с концами в $S$ и $b$ — точка из $S$, равноудаленная от его концов. На каждой прямой лежит не более двух точек множества $S$, поэтому таких пар не больше $n(n-1)$. С другой стороны, каждая точка множества $S$ лежит на хотя бы $\frac{k(k-1)}{2}$ перпендикулярах, проведенных к парам точек, равноудаленных от нее. Отсюда $n\frac{k(k-1)}{2}\leqslant n(n-1)$.

***2.6.6.*** Найдется простое число $p$, большее каждого из данных чисел. Обозначим $k:=[p/3]$ и обозначим через $x_1,\dots,x_n$ остатки от деления данных чисел на $p$. Достаточно доказать, что для некоторого $a\in\mathbb{Z}_p$ найдётся более $n/3$ индексов $j$, для которых

$$ax_j\in I:=\{k+1,k+2,\dots,2k,2k+1\}\subset\mathbb{Z}_p.$$

Для этого посчитаем двумя способами количество пар $(a, j) \in \mathbb{Z}_p \times \mathcal{R}_n$, для которых $ax_j \in I$. Для каждого $j$ количество таких пар $(a, j)$ равно $|I| = k + 1$. Всего $p$ значений $a$ и $n$ значений $j$. Значит, найдётся $a$, для которого имеется не менее $n(k+1)/p > n/3$ таких пар $(a, j)$.

***2.6.7.*** Посчитаем двумя способами количество всех таких пар $(a, x)$, что $a$ — распределение выходных и $x$ — вид работы, по которому в один из дней не будет специалиста при распределении $a$. Обозначим через $n$ число людей. Для каждого вида работ имеется $2^{n-7}$ распределений выходных, при которых все специалисты по этому виду работ отдыхают в один и тот же день. Так как видов работ 100, то количество пар не больше $100 \cdot 2^{n-7} < 2^n$. Общее число распределений выходных равно $2^n$. Значит, найдётся распределение выходных, при котором для каждого вида работ не все специалисты по нему отдыхают в один и тот же день.

*Решение обобщения.* Посчитаем двумя способами количество таких пар $(a, x)$, что $a$ — раскраска и $x$ — подмножество из семейства, одноцветное для $a$. Обозначим через $n$ число элементов в множестве. Для каждого подмножества имеется $2^{1+n-k}$ раскрасок, для которых оно одноцветно. Всего не более, чем $2^{k-1}$ подмножеств из семейства. Значит, количество пар не больше $2^{1+n-k+k-1} = 2^n$. Общее число раскрасок равно $2^n$. Найдётся раскраска, для которой каждое подможество из семейства одноцветно. Значит, найдётся раскраска, для которой ни одно подможество из семейства не одноцветно.

*Другая запись этого решения.* (Здесь достаточно интуитивного понимания того, что такое вероятность.) Раскрасим элементы случайно, независимо и равновероятно в два цвета. Самостоятельно постройте вероятностное пространство, неформально определённое этой фразой. Для данного подмножества из семейства вероятность его одноцветности равна $2^{1-k}$. Тогда вероятность одноцветности хотя бы одного подмножества из семейства меньше $2^{k-1}2^{1-k} = 1$. Значит, с положительной вероятностью существует раскраска элементов в два цвета, для которой никакое из $l$ подмножеств не одноцветно. Самостоятельно докажите, что отсюда вытекает утверждение задачи.

***2.6.8.*** (a) Рассмотрим множество из $n$ элементов и его раскраску в чёрный и белый цвет. Обозначим через $s$ число белых вершин. Тогда имеется $n-s$ чёрных вершин. Поэтому количество одноцветных $k$-элементных подмножеств равно $\binom{s}{k}+\binom{n-s}{k}\geqslant 2\binom{n/2}{k}$. (Это неравенство следует из $\binom{x-1}{k}+\binom{x+1}{k}\geqslant 2\binom{x}{k}$, что доказывается троекратным применением правила Паскаля.) Значит, неодноцветных $k$-элементных подмножеств не более $\binom{n}{k}-2\binom{n/2}{k}$. Поэтому упорядоченных наборов длины $l$ из неодноцветных $k$-элементных подмножеств не более $\left(\binom{n}{k}-2\binom{n/2}{k}\right)^l$. Тогда упорядоченных наборов длины $l$ из $k$-элементных подмножеств, неодноцветных хотя бы для одной двуцветной раскраски, не более

$$2^n\left(\binom{n}{k}-2\binom{n/2}{k}\right)^l<\binom{n}{k}^l.$$

Значит, найдётся упорядоченный набор длины $l$ из $k$-элементных подмножеств, среди которых при любой двуцветной раскраске найдется одноцветное.

*Другая запись этого решения.* Рассмотрим множество из $n$ элементов и его раскраску в чёрный и белый цвет. Обозначим через $s$ число белых вершин. Тогда имеется $n-s$ чёрных вершин.

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$, где $\Omega$ — множество всех $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества, $\mathcal{F}$ – множество всех подмножеств множества $\Omega$, и $\mathcal{P}$ — вероятностная мера, сопоставляющая подмножеству $\{A_1,\dots,A_s\}\in\mathcal{F}$ число $s\Big/\binom{n}{k}$.

Вероятность того, что данное $k$-элементное подмножество одноцветно, не меньше

$$\frac{\binom{s}{k}+\binom{n-s}{k}}{\binom{n}{k}}\geqslant 2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}$$

(неравенство доказывается аналогично предыдущему). Отсюда вероятность того, что данное $k$-элементное подмножество неодноцветно, не больше $1-2\dfrac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}$.

Теперь рассмотрим новое вероятностное пространство схемы из $l$ испытаний Бернулли для $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{P})$. Самостоятельно постройте вероятностное пространство, неформально определённое этой фразой. Тогда вероятность того, что все $l$ подмножеств из $k$ элементнов неодноцветны, не меньше

$$\left(1-2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right)^{l}.$$

Суммируя вероятности по всем возможным раскраскам $n$ вершин, получаем, что для нового вероятностного пространства матожидание числа правильных раскрасок равно

$$\left(1-2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right)^{l}2^n<1.$$

Значит, с положительной вероятностью найдётся упорядоченный набор длины $l$ из $k$-элементных подмножеств, среди которых при любой двуцветной раскраске найдется одноцветное. Самостоятельно докажите, что отсюда вытекает утверждение задачи.

(b) Это следствие предыдущего пункта. Обозначим через $\lceil x\rceil$ верхнюю целую часть числа $x$. Для $l(n):=\left\lceil\dfrac{n\binom{n}{k}\ln 2}{2\binom{n/2}{k}}\right\rceil$ имеем

$$\left(1-2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right)^{l(n)}2^n<\exp\left(-l(n)2\frac{\binom{n/2}{k}}{\binom{n}{k}}\right)2^n\leqslant 1.$$

Для чётного $k$ возьмём $n=k^2$. Тогда $l(n)\sim c_1k^22^k$ для некоторого $c_1>0$ (не зависящего от $k$). Случай нечётного $k$ сводится к случаю чётного путём увеличения константы. (Значение $n=k^2$ взято, чтобы минимизировать $l(n)$.)

***2.8.6.*** См. [Gr].

# 3 Основы теории графов

## 3.1 Основные определения

*Графом* $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые двухэлементные подмножества (т. е. неупорядоченные пары несовпадающих элементов) которого выделены. Множество выделенных подмножеств обозначается $E = E(G)$. Таким образом, $E \subset \binom{V}{2}$.

Элементы данного множества $V$ называются *вершинами*. Выделенные пары вершин называются *рёбрами*. Хотя эти пары неупорядоченные, в теории графов их традиционно обозначают круглыми скобками. Вершина, принадлежащая ребру, называется *его вершиной*. Если вершины $a$ и $b$ соединены ребром, они называются *соседними* или *смежными*, а само ребро $(a, b)$ называется *проходящим* через вершину $a$ и вершину $b$ или *инцидентным* вершине $a$ и вершине $b$.

Общепринятый термин для понятия графа, данного здесь — *граф без петель и кратных рёбер* или *простой граф*.

Если не оговорено противное, то через $n$ и $e$ обозначаются количества вершин и рёбер рассматриваемого графа, соответственно.

Граф можно представлять себе как набор точек (например, на плоскости), некоторые пары которых соединены ломаными. См. рис. 2, 3, 4, 7, 8, 10 и 11 ниже. При этом только концы каждой ломаной являются вершинами графа и каждая пара вершин не соединена более, чем одной ломаной. Точки называются *вершинами* графа, а ломаные — *рёбрами*. Ломаные могут пересекаться, но точки пересечения «не считаются», т.е. не являются вершинами.

*Путем* $P_n$ называется граф с вершинами $1, 2, \ldots, n$ и ребрами $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. *Циклом* $C_n$ называется граф с вершинами $1, 2, \ldots, n$ и ребрами $(1, n)$ и $(i, i+1)$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$. (Не путайте эти графы с *путем в графе* и *циклом в графе*, определенными ниже.) Граф с $n$ вершинами, любые две из которых соединены ребром, называется *полным* и обозначается $K_n$. Если вершины графа можно разделить на две части так, что нет рёбер, соединяющих вершины из одной и той же части, то граф называется *двудольным*, а части называются *долями*. Через $K_{m,n}$ обозначается двудольный граф с долями из $m$ и из $n$ вершин, в котором имеются все $mn$ рёбер между вершинами разных долей.

**3.1.1.** В любом графе есть двудольный подграф, содержащий не менее половины рёбер графа.

*Степенью* вершины графа называется число выходящих из нее рёбер. *Изолированной вершиной* называется вершина, из которой не выходит ни одного ребра.

Грубо говоря, *подграф* данного графа — это его часть. Формально, граф $G$ называется *подграфом* графа $H$, если множество вершин графа $G$ содержится в множестве вершин графа $H$ и каждое ребро графа $G$ является ребром графа $H$. При этом две вершины графа $G$, соединённые ребром в графе $H$, не обязательно соединены ребром в графе $G$.

*$k$-кликой* в графе называется его подграф с $k$ вершинами, являющийся полным. *Независимым множеством* или *антикликой* в графе называется набор его вершин, между которыми нет рёбер.

*Путем* в графе называется последовательность $v_1e_1v_2e_2\dots e_{n-1}v_n$, в которой для любого $i$ ребро $e_i$ соединяет вершины $v_i$ и $v_{i+1}$. Число $n-1$ называется *длиной* пути. (Ребра $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$ не обязательно попарно различны.)

*Циклом* в графе называется последовательность $v_1e_1v_2e_2\dots e_{n-1}v_ne_n$, в которой для любого $i<n$ ребро $e_i$ соединяет вершины $v_i$ и $v_{i+1}$, а ребро $e_n$ соединяет вершины $v_n$ и $v_1$. Циклы считаются одинаковыми, если они отличаются циклическим сдвигом последовательности. Число $n$ называется *длиной* цикла. *Обходом* называется цикл, для которого вершины $v_1, v_2, \dots, v_n$ попарно различны и рёбра $e_1, e_2, \dots, e_n$ попарно различны. Обход еще называют *несамопересекающимся* или *простым* циклом; мы лишь для компактности ввели новый термин.

**3.1.2.** (a) Любой цикл, не проходящий ни по одному ребру дважды, содержит обход.

(b) Любой цикл нечётной длины содержит обход нечётной длины.

(c) Справедливо ли аналогичное утверждение для циклов чётной длины, не проходящих ни по одному ребру дважды?

(d) В графе есть обход, проходящий через рёбра $a$ и $b$, а также есть обход, проходящий через рёбра $b$ и $c$. Тогда есть обход, проходящий через рёбра $a$ и $c$.

Граф называется *связным*, если любые две его вершины можно соединить путём, и *несвязным* иначе.

**3.1.3.** Если степень каждой из $n$ вершин графа больше $\frac{n}{2} - 1$, то граф связен.

Ясно, что «соединённость некоторым путём» является отношением эквивалентности на множестве вершин графа. *Связной компонентой* графа называется любой класс этой эквивалентности.

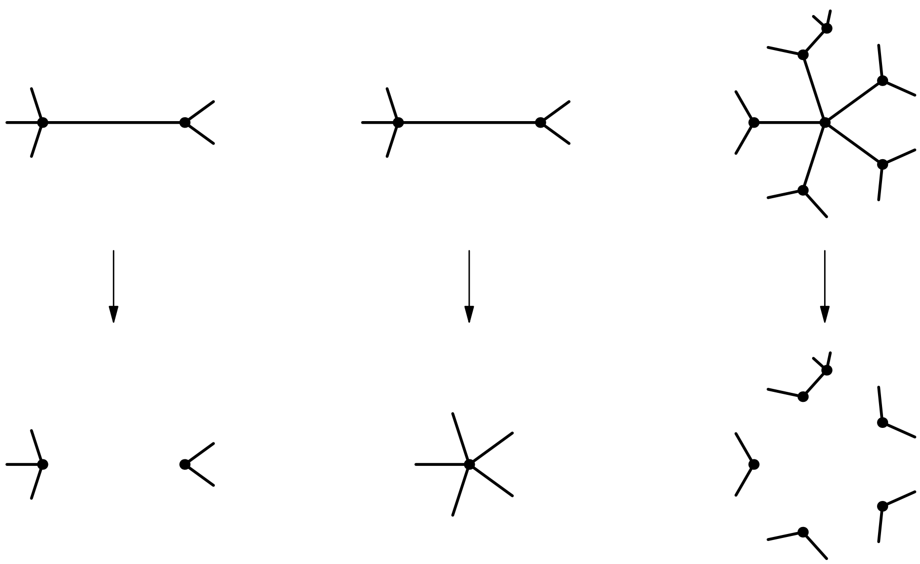

Рис. 1: Удаление ребра $G - e$, стягивание ребра $G/e$ и удаление вершины $G - x$

Определение операций удаления ребра и удаления вершины ясно из рис. 1. Операция *стягивания ребра* (рис. 1) удаляет из графа это ребро и заменяет вершины $A$ и $B$ этого ребра на одну вершину $D$, а все рёбра, выходящие из вершин $A$ и $B$ в некоторые вершины, заменяет на рёбра, выходящие из вершины $D$ в те же вершины. (Эта операция отличается от стягивания ребра в мультиграфах, см. §3.5, тем, что каждое получившееся ребра кратности больше 1 заменяется на ребро кратности 1.) Например, если граф — цикл с четырьмя вершинами, то при стягивании любого его ребра получится цикл с тремя вершинами.

*Ориентированным графом (без петель и кратных рёбер)* $G = (V, E)$ называется конечное множество $V = V(G)$, некоторые *упорядоченные* пары несовпадающих элементов которого выделены. Множество выделенных пар обозначается $E = E(G)$. Таким образом, $E \subset \{(x, y) \in V \times V \mid x \neq y\}$. Если выделены и пара $(a, b)$, и пара $(b, a)$, то это ребро не называется кратным.

*Ориентированный путь* в ориентированном графе — такая последовательность вершин, что в каждую следующую вершину ведет ориентированное ребро из предыдущей.

**3.1.4.** Пусть дан ориентированный граф $G$, у которого на каждом ребре $u$ написан вес $f(u)$. (Этот вес можно понимать как работу, которую нужно затратить для того, чтобы пройти по ребру от начала до конца.) Функция $p : V(G) \to \mathbb{R}$ («потенциал») такая, что $f(x, y) = p(x) - p(y)$ для любого ребра $u = (x, y)$, существует тогда и только тогда, когда сумма весов рёбер любого ориентированного цикла равна нулю (при прохождении ребра по циклу в направлении, противоположном ориентации, вес в сумму берётся с отрицательным знаком).

*Турниром* называется ориентированный граф, любые две вершины которого соединены ребром. (Т.е. для любых двух вершин $v, w$ турнира среди его ребер есть $(v, w)$ или $(w, v)$, но не оба ребра сразу.)

Некоторые другие определения приведены в начале каждого раздела.

## 3.2 Перечисление деревьев

Граф называется *деревом*, если он связен и не содержит обходов. *Остовом графа* называется любой его подграф, являющийся деревом и содержащий все вершины графа.

**3.2.1.** (a) В любом дереве найдется *лист*, т.е. вершина степени 1.

(b) В любом дереве с $n$ вершинами $n - 1$ ребро.

(c) Последовательность из $n$ натуральных чисел является последовательностью степеней вершин некоторого дерева тогда и только тогда, когда сумма её членов равна $2n-2$.

Заметим, что графы $(\{1,2,3\},\{\{1,2\}\})$ и $(\{1,2,3\},\{\{1,3\}\})$ различны. Графом называется именно граф, а не класс изоморфизма графов (определение изоморфизма приведено в начале §3.3). Или, говоря неформально, вершины графов считаются занумерованными. Поэтому вместо слова 'граф' иногда употребляют термин 'помеченный граф'.

**3.2.2.** Каких графов с данными $n$ вершинами больше:
(a) имеющих изолированную вершину или не имеющих?
(b) связных или несвязных?

**3.2.3.** (a) *Формула Кэли.* Число деревьев с данными $n$ вершинами равно $n^{n-2}$.
(b) Если сумма целых положительных чисел $d_1,\ldots,d_n$ равна $2n-2$, то число деревьев с данными $n$ вершинами, у которых $i$-я вершина имеет степень $d_i$, равно $\dfrac{(n-2)!}{(d_1-1)!\cdot\ldots\cdot(d_n-1)!}$.
Иными словами, $(x_1+\ldots+x_n)^{n-2}=\sum_T x_1^{\deg_T(1)-1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\deg_T(n)-1}$, где сумма берётся по всем деревьям $T$ с вершинами $1,2,\ldots,n$, и через $\deg_T(k)$ обозначена степень вершины $k$ дерева $T$.
(c) * Пусть $T_1,\ldots,T_r$ — деревья, множества вершин которых не пересекаются. Сколько есть деревьев, множество вершин которых есть объединение множества вершин этих $r$ деревьев, и которые содержат $T_1,\ldots,T_r$?

**3.2.4.** *Код Прюфера* сопоставляет дереву с вершинами $1,2,\ldots,n$ последовательность чисел от 1 до $n$ по следующему алгоритму. Сначала код Прюфера — пустое слово. Пока количество вершин больше двух,

1. Выбирается лист (см. задачу 3.2.1) $v$ с минимальным номером.
2. В код Прюфера добавляется номер вершины, смежной с $v$.
3. Вершина $v$ и инцидентное ей ребро удаляются из дерева.

Когда осталось две вершины, алгоритм завершает работу.
(a) Найдите код Прюфера дерева с вершинами $1,2,\ldots,10$ и рёбрами (8,9),(8,4),(4,10),(10,3),(3,5),(10,6),(10,1),(1,7),(1,2).

(b) Восстановите дерево по коду Прюфера 1,1,2,5,4,2,7.
(c) Код Прюфера определяет взаимно-однозначное соответствие между множеством деревьев с данными $n$ вершинами и множеством слов длины $n-2$ из этих вершин.
(d) В коде Прюфера вершина степени $d$ встречается $d-1$ раз.

**3.2.5.** Граф называется *унициклическим*, если он становится деревом после удаления некоторого ребра. (Или, эквивалентно, если он связен и имеет ровно один — с точностью до циклического сдвига — обход.)
(a) Каких графов больше, деревьев с данными 100 вершинами или унициклических графов с данными 98 вершинами?
(b) Выразите число унициклических графов с данными $n$ вершинами в виде суммы не более, чем $n$ слагаемых.

**3.2.6.** (a) В дереве нет непустых подграфов, у которых степень каждой вершины чётная и положительная.
(b) Для графа $G$ обозначим через $h_1(G)$ число его подграфов без изолированных вершин, у которых степень каждой вершины чётна. (Пустой подграф удовлетворяет этому условию.) Докажите, что $h_1(G)$ – степень двойки. Выразите $h_1(G)$ через количества $n$ вершин, $e$ рёбер и $k$ компонент связности графа.
*Замечание.* Такие подграфы называют *циклами* в смысле теории гомологий (не путайте с циклами в смысле теории графов). Как они возникают, написано, например, в [S3, §6].
(c) На рёбрах дерева стоят знаки $+$ и $-$. Разрешается менять знаки на всех рёбрах, выходящих из одной вершины. Тогда из любой расстановки можно получить любую другую.
(d) Для графа $G$ обозначим через $h^1(G)$ наибольшее количество расстановок знаков $+$ и $-$ на его рёбрах, ни одну из которых нельзя получить из другого описанными выше операциями. Докажите, что $h^1(G)$ — степень двойки. Выразите $h^1(G)$ через $n$, $e$ и $k$.
*Замечание.* В теории когомологий такие узоры называют *коциклами*, а приведенное отношение эквивалентности на коциклах — когомологичностью. Как возникает когомологичность коциклов, написано, например, в [S6, §11.1, §11.2].
(e)* Докажите, что $h_1(G)$ и $h^1(G)$ не меняются при стягивании ребра, и выведите отсюда, что $h_1(G) = h^1(G)$.

## 3.3 Графы с точностью до изоморфизма

Грубо говоря, графы изоморфны, если они одинаковы (при этом их изображения на плоскости могут быть разными). Формально, графы $G_1$ и $G_2$ называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $f : V(G_1) \to V(G_2)$, удовлетворяющее условию: *вершины* $A, B \in V(G_1)$ *соединены ребром в том и только в том случае, если вершины* $f(A), f(B) \in V(G_2)$ *соединены ребром.*

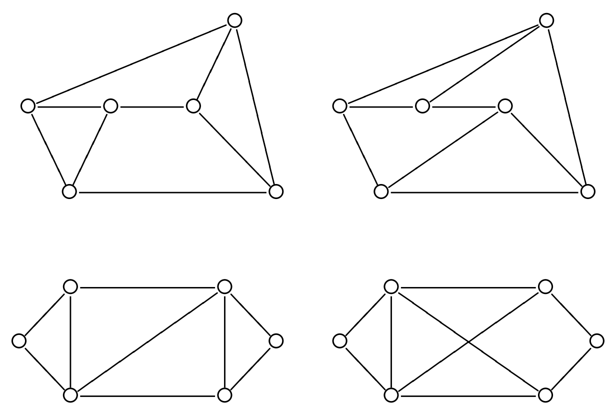

Рис. 2: Какие из графов на рисунке изоморфны?

**3.3.1.** Какие из графов на рисунке 2 изоморфны?

**3.3.2.** Для произвольных $k, l, m, n \in \mathbb{N}$ найдите количество
(a) клик размера $k$ в графе $K_n$,
(b) клик размера $k$ в графе $K_{m,n}$,
(c) независимых множеств размера $k$ в графе $K_n$,
(d) независимых множеств размера $k$ в графе $K_{m,n}$,
(e) подграфов в $K_n$, изоморфных $K_{k,l}$,
(f) подграфов в $K_{m,n}$, изоморфных $K_{k,l}$.
Будьте внимательны: эти задачи простые, но почти все требуют разбора случаев.

**3.3.3.** Перечислите все попарно неизоморфные
(a) графы с четырьмя вершинами,
(b) связные графы с пятью вершинами и пятью рёбрами,

(c) несвязные графы с пятью вершинами.

**3.3.4.** Сколько существует попарно неизоморфных графов, имеющих 8 вершин и 25 рёбер?

**3.3.5.** Количество классов изоморфизма деревьев с $n$ вершинами (т. е. количество различных деревьев с $n$ незанумерованными вершинами) меньше $4^n$.

## 3.4 Плоские графы

*Плоским графом* называется изображение графа на плоскости, для которого любые два ребра пересекаются только по их общим вершинам (в частности, если таких вершин нет, то не пересекаются).

Иногда такое изображение называют просто графом, но это неточно, поскольку один и тот же планарный граф можно изобразить (без самопересечений) на плоскости разными способами.

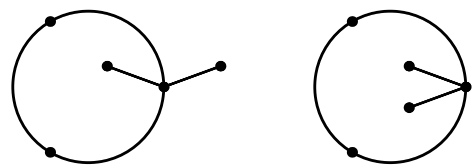

Рис. 3: Различные изображения графа на плоскости

Плоский граф делит плоскость на части, называемые *гранями* графа. Заметим, что одна из таких частей будет 'бесконечной'.

**3.4.1.** В плоском графе с треугольными гранями выкинули вершину вместе с выходящими из нее рёбрами.
(a) Верно ли, что получившаяся грань ограничена обходом?
(b) Верно ли, что если выкинуть еще одну вершину, то все грани опять будут ограничены обходами?
(c) Пусть в полученном графе степень каждой вершины не менее 3. Верно ли, что любую вершину нового графа можно удалить и получить граф, все грани которого будут ограничены обходами?

**3.4.2.** (a) *Формула Эйлера.* Для любого связного плоского графа с $f$ гранями имеет место равенство $n - e + f = 2$.
(Доказательство см., например, в [P]. Далее этим результатом можно пользоваться без доказательства. Эта формула часто записывается в виде $V - E + F = 2$.)
(b) Найдите аналог формулы Эйлера для плоского графа с $k$ компонентами связности.

**3.4.3.** *Применения формулы Эйлера.*

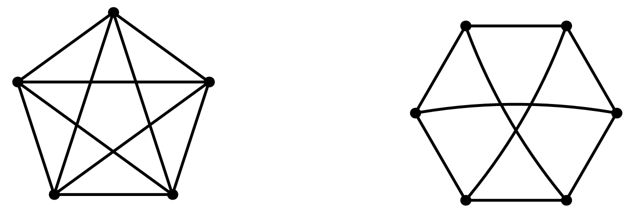


Рис. 4: Непланарные графы

(a) Ни один из графов $K_5$ и $K_{3,3}$ невозможно без самопересечений нарисовать на плоскости.
(b) На плоскости отмечено $n$ точек. Разрешается соединять некоторые две из них ломаной, не проходящей через другие точки. Два игрока по очереди соединяют ломаной какие-то две еще не соединённые точки. При этом требуется, чтобы эти ломаные не самопересекались и не пересекались нигде, кроме отмеченных точек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Для каких $n$ при правильной игре выигрывает тот, кто ходит первым?
(c) Опишите (с точностью до изоморфизма) плоские графы, у которых степени всех вершин равны и «степени» всех граней равны (т. е. граница каждой грани состоит из одного и того же числа рёбер).
*Замечание.* Если пункты (a), (b) или (c) не получаются, решайте следующие пункты. Определение изоморфизма см. в §3.3.
(d)* Выпуклых *правильных* многогранников (все грани — правильные многоугольники с одинаковым числом сторон, степени всех вершин равны) ровно 5 (с точностью до изоморфизма их графов). Конструкцию соответствующих многогранников нужно привести, она не предполагается известной.
(e) Для любого плоского связного графа без петель и кратных рёбер, имеющего более двух вершин, $2e \geqslant 3f$ и $e \leqslant 3n - 6$.
(f) В любом плоском графе есть вершина степени не более 5.
(g) Если каждая вершина плоского связного графа имеет степень $d$, а граница каждой грани состоит из ровно $k \geqslant 3$ рёбер, то

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}.$$

**3.4.4.** *Картой на плоскости* называется разбиение плоскости на конечное число многоугольников (возможно, 'бесконечных'). Раскраска карты называется *правильной*, если разные многоугольники, имеющие общий граничный отрезок, имеют разные цвета. Докажите, что любую карту можно правильно раскрасить в

(a) 6 цветов; (b) * 5 цветов; (c)** [Всё равно не докажете.]

*Замечание.* Используя конструкцию *двойственного графа*, можно доказать, что правильная раскрашиваемость любой карты на плоскости в $d$ цветов равносильна правильной раскрашиваемости любого плоского графа в $d$ цветов (§4.1).

Граф называется *планарным*, если его можно без самопересечений нарисовать на плоскости. Ясно, что любой подграф планарного графа планарен.

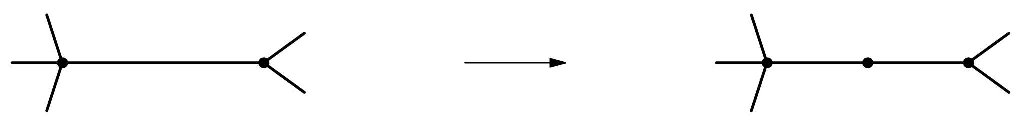

Рис. 5: Подразделение ребра

Операция *подразделения ребра* графа показана на рисунке.

Два графа называются *гомеоморфными*, если от одного можно перейти к другому при помощи операций подразделения ребра и обратных к ним; или, эквивалентно, если существует граф, полученный из каждого из данных графов операциями подразделения ребра.

Ясно, что гомеоморфные графы являются или не являются планарными одновременно.

**Теорема Куратовского.** *Граф является планарным тогда и только тогда, когда он не содержит подграфа, гомеоморфного графу $K_5$ или $K_{3,3}$ (рис. 4).* (Доказательство этой теоремы см., например, в [S1].)

**3.4.5.** Придумайте алгоритм

(a) распознавания планарности графа (здесь можно использовать без доказательства теорему Куратовского);

(b)* рисования без самопересечений заведомо планарного графа на плоскости.

Найдите асимптотику сложности вашего алгоритма в зависимости от числа $n$ рёбер графа. т. е. асимптотику максимума по графам с $n$ рёбрами от числа шагов в алгоритме, примененному к данному графу. См. «определение» нахождения асимптотики в §7.1.

**Теорема Хопкрофта-Тарджана.** *Существует линейный по количеству рёбер алгоритм распознавания планарности графа.*

**3.4.6.** *Теорема Фари.* Плоский граф можно нарисовать без самопересечений на плоскости так, что все рёбра будут отрезками.

Тор и лента Мёбиуса изображены на рис. 6. Эти фигуры предполагаются *прозрачными*, т. е. точка (или подмножество), «лежащая на одной стороне поверхности», «лежит и на другой стороне». Это аналогично тому, что при изучении геометрии мы говорим, например, о треугольнике на плоскости, а не о треугольнике на верхней (или нижней) стороне плоскости.

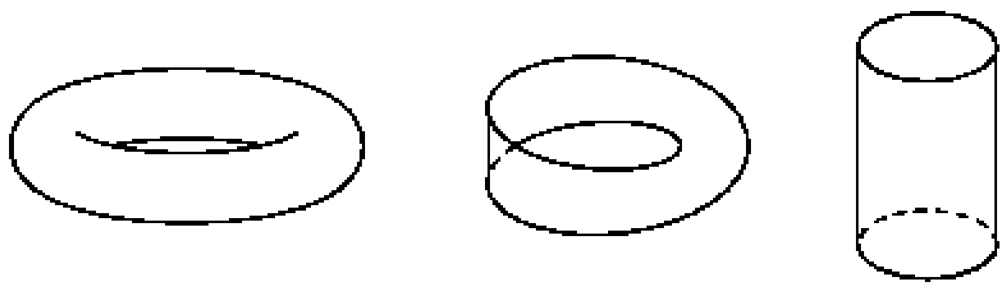

Рис. 6: Тор, лист Мёбиуса и цилиндр

**3.4.7.** Нарисуйте без самопересечений на торе граф
(5) $K_5$; (33) $K_{3,3}$; (6) $K_6$; (34) $K_{3,4}$; (7) $K_7$; (44) $K_{4,4}$.

**3.4.8.** Нарисуйте без самопересечений на ленте Мёбиуса граф
(5) $K_5$; (33) $K_{3,3}$; (6) $K_6$; (34) $K_{3,4}$.

**3.4.9.** *Картой на торе* называется разбиение тора на конечное число (криволинейных и изогнутых) многоугольников. Раскраска карты на торе называется *правильной*, если разные многоугольники, имеющие общую граничную кривую, имеют разные цвета. Любую ли карту на торе можно правильно раскрасить в
(5) 5 цветов; (6) 6 цветов; (7) 7 цветов?

Подробнее см. [S3, §2].

*Замечание.* Любой связный граф с $g$ рёбрами можно так нарисовать «на сфере с $g$ ручками» (т.е. внутри правильного $2g$-угольника, диаметрально противоположные стороны которого «склеены»), что некоторые рёбра являются отрезками, а остальные рёбра являются объединениями двух непересекающихся отрезков, у каждого из которых один конец — вершина графа, а другой конец лежит на стороне $2g$-угольника.

## 3.5 Эйлеровы пути и циклы

*Мультиграфом* (или *графом с петлями и кратными рёбрами*) называется квадратная таблица из целых неотрицательных чисел, симметричная относительно главной диагонали. При этом число, стоящее на пересечении $i$-й строки и $j$-го столбца, интерпретируют как число рёбер (или *кратность ребра*) между вершинами с номерами $i$ и $j$ при $i \neq j$ и как число петель в вершине с номером $i$ при $i = j$. Ребро называется *кратным*, если его кратность больше единицы.

*Степенью* вершины мультиграфа называется число выходящих из нее рёбер. При этом ребро кратности $k$, соединяющее вершину с другой вершиной, 'вносит вклад' $k$ в степень, а петля кратности $k$ 'вносит вклад' $2k$ в степень.

*Ориентированным мультиграфом* (или ориентированным графом с петлями и кратными рёбрами) называется квадратная таблица из целых неотрицательных чисел. Если в некоторой клетке (неважно, диагональной или нет) стоит число, большее 1, то говорят, что ориентированный мультиграф имеет кратные рёбра.

Читатель легко сообразит, как определить *(ориентированный) путь* в (ориентированном) мультиграфе, а также как изображать с самоперечечениями на плоскости (ориентированные) мультиграфы.

**3.5.1.** Сколько всего мультиграфов с данными $n$ вершинами
(a) ориентированных без кратных рёбер, но, возможно, с петлями?
(b) неориентированных без петель, но, возможно, с кратными рёбрами?

**3.5.2.** Сколько всего мультиграфов с данными $n$ вершинами, имеющих $k$ рёбер и
(a) неориентированных без петель и кратных рёбер?
(b) неориентированных, у которых допускаются кратные рёбра и петли?

*Эйлеров цикл (путь)* в мультиграфе — цикл (путь), проходящий по каждому ребру мультиграфа ровно один раз.

**3.5.3.** (a) В связном мультиграфе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда степень каждой его вершины чётна.
(b) При каком условии в мультиграфе существует эйлеров путь?
(c) При каком условии в ориентированном мультиграфе существует ориентированный эйлеров цикл?
(d) При каких $n$ граф $K_n$ имеет эйлеров цикл?
(e) То же для графа $K_{m,n}$.

*Входящей степенью* вершины ориентированного мультиграфа называется число входящих в нее рёбер (с учетом кратности). Аналогично определяется исходящая степень. При петля кратности $k$ 'вносит вклад' $k$ и во входящую, и в исходящую степень.

**3.5.4.** (a) Если количество вершин нечётной степени в связном графе равно $2k$, то множество его рёбер можно представить в виде объединения $k$ путей, никакой из которых не проходит ни по какому ребру дважды и никакие два из которых не имеют общих рёбер.
(b) На рёбрах графа, у которого степень каждой вершины чётна, можно поставить стрелки так, что у каждой вершины входящая степень будет совпадать с исходящей.
(c) Все рёбра связного графа раскрашены в два цвета. Из каждой вершины выходит поровну рёбер обоих цветов. Тогда из любой вершины до любой другой можно добраться, каждый раз меняя цвет ребра.
(d) В нарисованном на плоскости без самопересечений связном графе есть эйлеров цикл тогда и только тогда, когда грани можно раскрасить в 2 цвета *правильно*, т.е. так, что при переходе через каждое ребро цвет меняется.

**3.5.5.** Математик забыл трёхзначный код своего замка́. Замок открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если перед этим были набраны другие цифры). Математик набирает одну цифру в секунду; набранная цифра добавляется в конец. Докажите, что математик сможет открыть замок за
(a) 29 секунд, если в коде могут быть использованы только цифры 1, 3 и 7;
(b) 1002 секунды, если в коде могут быть использованы только десять цифр.
(c) Сформулируйте и докажите правило «$0 < 1 < 2 \ldots < 8 < 9$» открытия замка за 1002 секунды.

*Последовательность де Брёйна (П. д. Б.) с параметрами $n$ и $k$* — последовательность, элементы которой принадлежат заданному множеству из $k$ элементов (обычно — $\{0, 1, \ldots, k-1\}$), причём все её подпоследовательности длины $n$ различны, и среди этих подпоследовательностей встречаются все $k^n$ возможных последовательностей. (Таким образом, длина П. д. Б. равна $k^n + n - 1$.)

(Также П. д. Б. называют бесконечную периодическую последовательность с периодом $k^n$, каждая подпоследовательность которой длины $k^n + n - 1$ является П. д. Б. с параметрами $n$ и $k$.)

**3.5.6.** Постройте последовательность де Брёйна с параметрами $k = 2$ (‘двоичную’) и
(a) $n = 3$, начинающуюся с 111;
(b) $n = 4$, начинающуюся с 1011;
(c) $n = 4$, заканчивающуюся на 1010.

**3.5.7.** *Правило «0 лучше 1».* Рассмотрим последовательность из 0 и 1, построенную по следующим правилам. Она начинается с $k$ единиц. Дальше мы пишем 1, только если при написании 0 не все подпоследовательности длины $k$ новой последовательности различны. Если даже при написании 1 не все подпоследовательности длины $k$ новой последовательности различны, то заканчиваем написание последовательности. Докажите, что таким образом получится последовательность де Брёйна.

**3.5.8.** Дан связный ориентированный мультиграф с $n$ вершинами. Входящая степень $d_k$ каждой вершины $k$ равна исходящей.

(a) Существует дерево, содержащее все вершины этого мультиграфа, все рёбра которого направлены в сторону вершины 1.
(b) Фиксируем дерево $T$ из (a). Будем обходить этот граф (по стрелкам), проходя по каждому ребру не более одного раза. Сначала выйдем из вершины 1 в произвольном направлении. Далее, пусть мы пришли в некоторую вершину $v$. Выходим из нее по любому ребру, не принадлежащему $T$, если это возможно. А если невозможно, то выходим из нее по ребру, принадлежащему $T$ (такое ребро единственно). Докажите, что обход закончится в вершине 1, и что в результате обхода получится ориентированный эйлеров цикл.
(c) Число ориентированных эйлеровых циклов в этом мультиграфе кратно числу $(d_1 - 1)! \cdot \ldots \cdot (d_n - 1)!$.

## 3.6 Гамильтоновы пути и циклы

*Гамильтонов путь (цикл)* в графе — путь (цикл), проходящий через каждую вершину ровно по одному разу.

**3.6.1.** Грани гамильтонова плоского графа можно правильно раскрасить в 4 цвета.

Напомним (§3.1), что *длина* пути — число его ребер (а не вершин).

**3.6.2.** (a) Если граф связен и $2e \geqslant n^2 - 3n + 6$, то в нём есть гамильтонов цикл.
(b) Граф, сумма степеней любых двух несмежных вершин которого не меньше $n$, имеет гамильтонов цикл.
(c) *Лемма Дирака.* Если $a_0 \ldots a_s$ — максимальный из путей в графе, проходящих по каждой своей вершине только один раз, $s \geqslant 3$ и $\deg a_0 + \deg a_s \geqslant s$, то в этом графе есть обход длины $s$.
(d) Если в связном графе есть обход длины $s < n$, то в этом графе есть путь длины $s$, проходящий по каждой своей вершине только один раз.
(e) Граф, сумма степеней любых двух несмежных вершин которого не меньше $n - 1$, имеет гамильтонов путь.

**3.6.3.** Пусть для некоторых графа и целого $k \geqslant 2$ среди любых $k + 1$ вершин графа есть ребро и после удаления любого набора из $k-1$ вершины граф остается связным. Тогда в этом графе есть гамильтонов цикл.

**3.6.4.** Пусть среди любых $k+1$ вершин графа есть ребро и после удаления любого набора из $k-1$ вершины граф остается связным.
(a) В этом графе есть хотя бы один обход.
(b) Обозначим через $v_1, \ldots, v_s$ максимальный обход в этом графе. Обозначим через $W$ любую компоненту связности графа, полученного удалением вершин этого обхода из исходного графа. Обозначим через $X$ множество вершин обхода, соседних с $W$.
Тогда $|X| \geqslant k$.
(c) Вершины $v_i, v_{i+1}$ не лежат одновременно в $X$.
(d) Если $v_i, v_j \in X$, то в графе нет ребра $v_{i+1}v_{j+1}$.

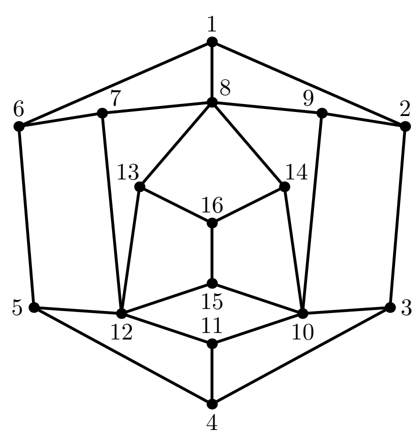


Рис. 7: Есть ли в этом графе гамильтонов путь?

**3.6.5.** (a) Есть ли гамильтонов путь в графе на рисунке 7?
(b) Есть ли гамильтонов цикл в графе на рисунке 8?

**3.6.6.** Максимальное число попарно непересекающихся по рёбрам гамильтоновых циклов в графе $K_n$ равно $\left[\dfrac{n-1}{2}\right]$.

**3.6.7.** (a) В любом турнире имеется ориентированный гамильтонов путь.
(b) Для любого $n$ существует турнир с $n$ вершинами, в котором имеется не менее $n!/2^{n-1}$ ориентированных гамильтоновых путей.

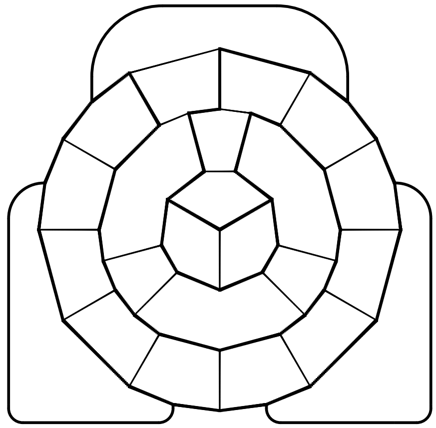

Рис. 8: Граф многогранника Гринбергса. Есть ли в нём гамильтонов путь?

**3.6.8.** *Рёберным графом* графа $G$ называется граф, вершины которого — рёбра графа $G$; две вершины рёберного графа соединены ребром, если соответствующие рёбра графа $G$ имеют общую вершину. Найдите в терминах графа $G$ необходимое и достаточное условие наличия гамильтонова цикла в его рёберном графе.

См. также [Ve].

## 3.7 Экстремальные задачи (теорема Турана)

**3.7.1.** Пункты этой задачи, кроме (b), являются различными версиями и частными случаями *теоремы Турана.*

*Треугольником* в графе называется цикл длины 3.

(a) Если граф не содержит треугольников, то $e \leqslant n^2/4$.

(b) Если $e = [n^2/4] + 1$, то в графе есть по крайней мере $[n/2]$ треугольников.

(c) Если $n = km$ и граф не содержит $(k+1)$-клики, то $2e \leqslant k(k-1)m^2$. (Переходя к дополнительному графу, получаем, что если $n = km$ и граф не содержит $(k+1)$-антиклики, то $2e \geqslant km(m-1)$.)

(d) Если граф не содержит $(k+1)$-антиклики, то $2e \geqslant km(m-1) + 2mr$, где $m := [n/k]$ и $r := k\{n/k\}$.

**3.7.2.** (a) Если граф не содержит обхода длины 4, то $e < n^{3/2}$.

(b) Если граф не содержит подграфа $K_{3,2}$, то $e < n^{3/2}$.

(c) Если граф не содержит подграфа $K_{3,3}$, то $e < 2n^{5/3}$.
(d)* Для любых целых $s, t$, $2 \leqslant s \leqslant t$, если граф не содержит подграфа $K_{s,t}$, то $e < tn^{2-1/s}$.

**3.7.3.** Для любых $n$ точек на плоскости существует не более $n$ *диаметров*, т. е. (неупорядоченных) пар точек, расстояние между которыми равно максимуму из всех возможных расстояний между парами из этих $n$ точек.

**3.7.4.** Для любых $n$ точек $A_1, \ldots, A_n$ в $\mathbb{R}^d$ обозначим через $D(A_1, \ldots, A_n)$ число (неупорядоченных) пар точек, расстояние между которыми равно 1. Обозначим

$$E_n(d) = \max\{D(A_1, \ldots, A_n) \ : \ A_1, \ldots, A_n \in \mathbb{R}^d\}.$$

Тогда:
(a) $E_n(2) > n[\log_2 n]/4$; (b) $E_n(2) \leqslant 2n^{3/2}$; (c) $E_n(3) \leqslant 2n^{5/3}$;
(d) $\dfrac{(n-1)^2}{4} \leqslant E_n(4) \leqslant \dfrac{2(n+4)^2}{5}$.

**3.7.5.** (a) Пусть $V$ — $11^q$-элементное подмножество пространства $\mathbb{R}^q$ (определение пространства $\mathbb{R}^q$ см. в главе 8) любое $10^q$-элементное подмножество которого содержит две точки $x, y$ на расстоянии 1: $|x-y| = 1$. Докажите, что для достаточно большого $q$ количество единичных расстояний между точками множества $V$ больше, чем $12^q/2$:

$$\frac{1}{2}\,|\{(x,y) \in V \times V \colon \ |x-y| = 1\}| > \frac{12^q}{2}.$$

(b) Докажите, что в условиях предыдущего пункта можно заменить число $12^q/2$ на $12,1^q$.

**3.7.6.** Можно рассмотреть обобщение задачи Турана (см. задачу 3.7.1), вместо клик заданного размера запретив другие подграфы. Обозначим через $\mathrm{ex}_H(n)$ максимальное количество рёбер в графе с $n$ вершинами, не содержащем подграфов, изоморфных $H$. Например, $\mathrm{ex}_{K_{k+1}}(n)$ — это максимальное число рёбер в графе с $n$ вершинами, не содержащем $(k+1)$-клики.

Докажите, что если $H_1$ — подграф графа $H_2$, то $\mathrm{ex}_{H_1}(n) \leqslant \mathrm{ex}_{H_2}(n)$.

См. также задачи 7.1.2 и 7.1.3.

## 3.8 Теорема Менгера

**3.8.1.** Из каждого связного мультиграфа можно удалить вершину (вместе со всеми выходящими из нее рёбрами) так, что он останется связным.

Граф или мультиграф называется *двусвязным*, если он отличен от $K_2$ и остается связным после удаления любой вершины.

**3.8.2.** (a) *Частный случай вершинной теоремы Менгера.* Любые две различные вершины двусвязного мультиграфа, не соединённые ребром, лежат на некотором обходе.
(b) Верно ли, что для любого пути $P$ в мультиграфе, имеющем не менее трёх вершин, найдётся другой путь в том же мультиграфе с теми же концами, не пересекающийся с $P$ нигде, кроме концов?

**3.8.3.** *Частный случай рёберной теоремы Менгера.* Если в мультиграфе есть хотя бы одно ребро и при удалении любого ребра найдётся путь между вершинами $a$ и $b$, то в мультиграфе найдутся два пути между вершинами $a$ и $b$, не имеющие общих рёбер.

**3.8.4.** (a) Для любого ребра $u$ двусвязного графа $G$, отличного от $K_3$, хотя бы один из графов $G - u$ и $G/u$ двусвязен.
(b) Для любых двух вершин выпуклого многогранника существуют три непересекающиеся (нигде, кроме этих вершин) пути по его рёбрам из одной вершины в другую. (Такие графы называют *трёхсвязными.*)
(c) Для трёхсвязного графа $G$ с ребром $xy$ (вершины которого — $x, y$) граф $G/xy$ трёхсвязен тогда и только тогда, когда граф $G - x - y$ двусвязен.

**3.8.5.** (a) *Теорема Уитни (вершинная).* Мультиграф остается связным после удаления любых $k-1$ вершин тогда и только тогда, когда любые две его вершины можно соединить $k$ путями, пересекающимися только в этих двух вершинах.
(b) *Теорема Менгера (вершинная).* Если вершины $a$ и $b$ мультиграфа $G$, не соединённые ребром, остаются в одной компоненте связности после удаления любых $k - 1$ других вершин, то $a$ и $b$ можно соединить $k$ путями, пересекающимися только в этих двух вершинах.

**3.8.6.** Вершины $A$ и $B$ графа назовем *эквивалентными*, если существует такая последовательность вершин $A = A_0, A_1, \ldots, A_n = B$, что любые две соседние вершины $A_i$ и $A_{i+1}$ можно соединить $k$ путями, не имеющими общих промежуточных вершин. Тогда любые две эквивалентные вершины можно соединить $k$ путями, не имеющими общих рёбер.

## 3.9 Подсказки

*3.1.1.* Обозначим данный граф через $G$. Посчитайте двумя способами количество таких пар $(A, x)$, что $A \subset V(G)$, $x \in E(G)$ и ровно один конец ребра $x$ лежит в $A$.

*3.2.3.* Используйте взаимно-однозначное соответствие из следующей задачи 3.2.4.

*3.3.1.* Чтобы доказать изоморфность, нужно привести изоморфизм: указать, какая вершина первого графа соответствует какой вершине второго. А чтобы доказать неизоморфность, нужно придумать какой-то инвариант, который должен быть одинаковым у изоморфных графов, а у заданной пары графов различен. Для начала в качестве инварианта можно попробовать взять количества вершин, рёбер, обход заданной длины, вершин заданной степени, наличие какого-то подграфа и т. д.

*3.3.3.* В этой задаче нужно выработать какую-нибудь стратегию перебора. В противном случае велики шансы либо забыть какой-нибудь граф, либо привести два изоморфных графа. Выберите какой-нибудь такой параметр (количество рёбер, количество обходов, длина минимального обхода, количество компонент связности и т. д.), что в зависимости от его значения множество всех графов разбивается на «не очень большое» количество «хорошо обозримых» групп, и в каждой из групп не слишком много графов. Тем самым вы сведете к минимуму вероятность ошибки, т.к. графы из разных групп заведомо неизоморфны, а внутри одной группы легче отслеживать изоморфизм и «полноту».

*3.4.2.* (b) $n - e + f = 1 + k$.

*3.4.3.* (a) Пусть граф $K_5$ нарисован на плоскости без самопересечений. Тогда по формуле Эйлера $5 - 10 + f = 2$. Значит, $f = 7$. Найдите соотношение между количествами граней и ребер.
(b) При $n \geqslant 3$ в конце игры все грани треугольные.
(c) Используйте (f) и (g). Предостережение: не забудьте доказать изоморфность графов с одинаковыми степенями вершин и граней.
(d) К (c) нужно добавить конструкцию соответствующих многогранников.
(e) Скольким граням принадлежит ребро? Какое наименьшее число рёбер может ограничивать грань?

*3.5.4.* (b) Нужно построить эйлеров цикл и ориентировать его.
(d) Используйте задачу 4.1.1 для «двойственного» графа.

*3.5.5.* (a) Определим *мультиграф де Брёйна для слов длины $n$ из $k$-буквенного алфавита.* (Стандартный термин — граф де Брёйна.) Его вершины — слова длины $n-1$ из $k$-буквенного алфавита. Ориентированные рёбра соответствуют словам $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$; ориентированное ребро, соответствующее слову $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$, ведет от вершины $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1})$ к вершине $(a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ (эти вершины могут совпадать).
Докажите существование эйлерова цикла в мультиграфе Де Брейна для слов длины 3 из 10-буквенного алфавита. Можно также действовать аналогично решению задачи 3.5.7.
(b) Аналогично решению пункта (a).
(c) Аналогично решению пункта 3.5.7.

*3.5.6.* (a) Аналогично решению задачи 3.5.5.a. Можно доказать и использовать утверждение задачи 3.5.7.

*3.5.7.* Используйте задачу 3.5.8.b для мультиграфа де Брёйна.

*3.6.3.* См. задачу 3.6.4.

*3.6.5.* Ответы: (a) нет; (b) нет.

*3.6.7.* (a) Индукция по количеству вершин графа.

(b) Посчитайте двумя способами число турнироперестановок.

*3.6.8.* Вот нужное условие: в графе $G$ существует цикл, содержащий хотя бы по одной вершине из каждого ребра и не проходящий ни по одному ребру дважды.

*3.7.1.* (a) У концов любого ребра нет общих соседей, иначе есть треугольник.

(b) Индукция по $n$ с переходом от $n$ к $n+2$. В доказательстве шага рассмотрите случай, когда каждое ребро содержится в некотором треугольнике, и противоположный случай.

(c) Обобщите рассуждения из (a).

(d) Аналогично решению пункта (c).

*3.7.2.* Посчитайте двумя способами количество пар $(a, \{b, c\})$, где $a, b, c$ — вершины графа, $b \neq c$, причем $ab$ и $ac$ — рёбра.

В (c) используйте соотношение

$$(n-2)^3 \leqslant 6\binom{n}{3} = n(n-1)(n-2) = (n-1)((n-1)^2-1) = (n-1)^3-n+1$$

и неравенство между средним арифметическим и средним кубическим. В (d) используйте неравенство между средним арифметическим и средним степенным порядка $s$.

*3.7.4.* В этой и следующей задаче удобно использовать понятие *дистанционного графа.* Это граф, множество вершин которого — заданное множество точек, и в котором ребром соединены вершины на расстоянии 1.

*3.8.5.* (b) Пусть $G$ — минимальный по числу рёбер контрпример к теореме Менгера (b) для $k = 3$. Докажите, что *вершины $a$ и $b$ оказываются в разных компонентах после удаления некоторых трёх вершин $x, y, z$, две из которых соединены ребром.*

## 3.10 Указания

***3.1.1.*** См. подсказку. Для каждого ребра $x$ найдётся ровно $2 \cdot 2^{n-2}$ таких пар. Всего $2^n$ подмножеств $A \subset V(G)$. Значит, какому-то из подмножеств отвечает не менее $e/2$ пар. Это подмножество — первая доля, его дополнение — вторая.

*Это комбинаторное решение можно записать на вероятностном языке следующим образом.* Рассмотрим случайное подмножество $A$ множества $V(G)$ вершин графа (каждый элемент берём с вероятностью, равной одной второй). Тогда каждое ребро с вероятностью $1/2$ соединяет вершину из $A$ с вершиной из $V(G) \setminus A$. Взяв мат. ожидание числа рёбер между этими двумя подмножествами, получим, что в среднем между $A$ и $V(G) \setminus A$ имеется половина рёбер. Значит, существует такое $A$, что условие выполняется.

***3.1.2.*** (b) Рассмотрим любую вершину, по которой цикл проходит хотя бы дважды. Можно рассмотреть две части цикла: между первым и вторым прохождениями этой вершины и оставшуюся. Каждая из этих частей является циклом, и одна из них имеет нечётную длину. Уменьшая так длину нечётного цикла, получим обход.

***3.2.2.*** (a) Ответ: при $n \geqslant 4$ имеющих изолированную вершину меньше, при $n = 2, 3$ — поровну, при $n = 1$ их больше.
Для $n \leqslant 3$ это доказывается перебором. Для $n \geqslant 4$ это следует из того, что дополнение графа, имеющего изолированную вершину, не имеет изолированных вершин, и того, что дополнение к пути длины $n$ не имеет изолированных вершин.
Другой способ получается из следующего соображения: количество графов с $n$ вершинами, у которых 1 — изолированная вершина, равно количеству графов с $n-1$ вершинами.

***3.2.3.*** (b) *Другой способ решения.* Индукция по $n$. Среди $d_i$ обязательно есть единица. Удалим её и применим индукционное предположение. При этом учтем, что удаленная вершина могла быть соединена с различными вершинами в графе.

(c) Если в одном из искомых деревьев стянуть в точку поддеревья $T_1, \ldots, T_r$, то получится дерево с $r$ вершинами. Если у этого дерева степени вершин равны $d_1, \ldots, d_r$, то количество искомых деревьев, ему соответствующих, равно $n_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot n_r^{d_r}$, где $n_i$ — число вершин в дереве $T_i$. Поэтому искомое число равно

$$\sum_{d_1,\ldots,d_r} \frac{(r-2)!}{(d_1-1)! \cdot \ldots \cdot (d_r-1)!} n_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot n_r^{d_r} =$$

$$= n_1 \cdot \ldots \cdot n_r (n_1 + \ldots + n_r)^{r-2}.$$

***3.2.5.*** (a) Ответ: деревьев со 100 вершинами больше.
Из дерева с 98 вершинами можно сделать уникличический граф не более, чем $\binom{98}{2}$ способами.

(b) Ответ: $\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)n^{n-k}$.

В уницикличеcком графе имеется ровно один обход. Количество уницикличеcких графов с $n$ вершинами, для которых этот обход имеет длину $k$, равно $\dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{2k}L(n,k)$, где $L(n,k)$ — количество уницикличеcких графов, для которых этот цикл есть $n, n-1, \ldots, n-k+1$. При удалении из каждого из этих $L(n,k)$ графов ребра $(n, n-1)$ получается дерево. Число $L(n,k)$ равно количеству кодов Прюфера получающихся деревьев. Поэтому $L(n,k) = kn^{n-1-k}$.

***3.3.5.*** Будем считать число *корневых деревьев*, т. е. пар (дерево, вершина этого дерева). Закодируем все корневые деревья с $n$ вершинами так. Нарисуем дерево на плоскости, у каждого ребра зададим направление (например, от корня). После этого, стартуя от корня, начинаем обходить дерево (так, как будто дерево — это система стен). Если обходим ребро по направлению стрелки, пишем единицу, если против — пишем ноль. В итоге получаем последовательность длины $2n-2$ из нулей и единиц. Несложно понять, что каждой последовательности соответствует только одно дерево, поэтому деревьев не больше, чем таких последовательностей.

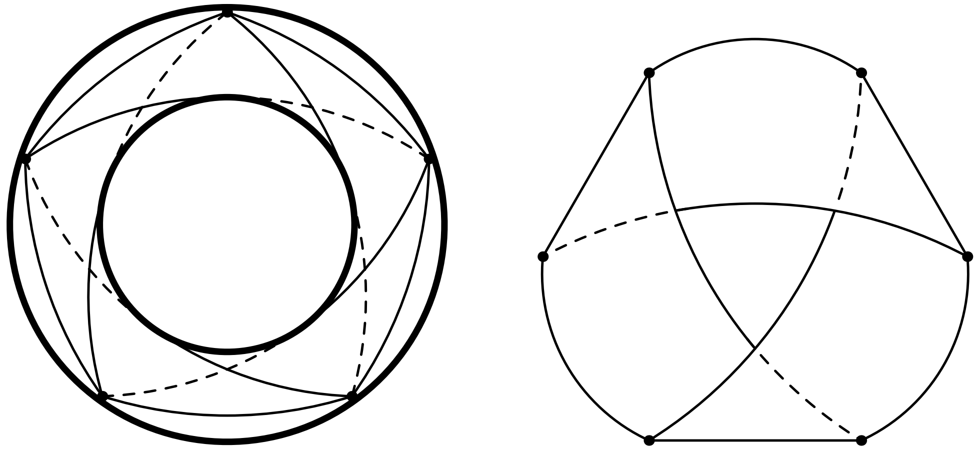

Рис. 9: Реализация графов Куратовского

***3.4.7.*** Смотри! (Рис. 9.)

Имеются другие решения. Например, можно сначала нарисовать граф Куратовского на плоскости с *одним* самопересечением. Или можно считать поверхность тора поверхностью Земли с одним подземным ходом.

***3.5.1.*** Ответы: (a) $2^{n^2}$; (b) бесконечно много.

***3.5.2.*** (a) Их количество равно числу $k$-элементных подмножеств множества всех $n(n-1)/2$ «возможных рёбер». Ответ: $\binom{n(n-1)/2}{k}$.
(b) Их количество равно числу сочетаний с повторениями размера $k$ из множества всех $n(n+1)/2$ «возможных рёбер». Ответ: $\binom{n(n+1)/2+k-1}{k}$.

***3.5.3.*** (a) Пусть в мультиграфе есть эйлеров цикл. Рассмотрим произвольную вершину. Эйлеров цикл проходит по всем выходящим из нее рёбрам ровно по одному разу. При этом цикл равное число раз входит в эту вершину и выходит из нее. Значит, степень вершины чётна.
Пусть теперь в связном мультиграфе степень каждой вершины чётна. Рассмотрим максимальный путь $v_1 \ldots v_n$. Так как степень каждой вершины чётна, то $v_1 = v_n$ (иначе в этом пути имеется нечётное

число рёбер, выходящих из $v_1$, значит, найдётся ребро, выходящее из вершины $v_1$, которого нет в пути, поэтому есть более длинный путь). Т. е. этот путь — цикл. Если в этом цикле имеются не все рёбра мультиграфа, то так как мультиграф связен, найдётся ребро, которое выходит из вершины цикла и не лежит в цикле. Поэтому есть более длинный путь. Противоречие. Значит, взятый нами максимальный путь является эйлеровым циклом.
(d) Ответ: при нечётных.

***3.5.4.*** (a) Это обобщение условия эйлеровости. Нужно начать каждый из $k$ путей в одной из вершин нечётной степени, а закончить в другой. При этом надо следить, чтобы при удалении очередного пути граф оставался связным.

***3.5.8.*** (b) То, что путь закончится в вершине 1, доказывается аналогично критерию эйлеровости. Для доказательства эйлеровости достаточно показать, что для каждой вершины мультиграфа все инцидентные ей рёбра содержатся в цикле. Это доказывается индукцией по длине ориентированного пути по дереву от заданной вершины к вершине 1.
(c) Зафиксируем произвольную начальную вершину $a$ и исходящее из нее ребро. Каждый эйлеров цикл мы будем строить, начиная с этой вершины и ребра. Сначала нужно показать, что любой эйлеров цикл получается с помощью алгоритма из (b). Для этого достаточно привести остовное корневое дерево. Его мы составим из исходящих рёбер, которые обходились в данном цикле последними (по одному для каждой из вершин, кроме $a$), а в качестве корня возьмём $a$. После этого докажите, что эйлеровых циклов, соответствующих одному остовному дереву, ровно $(d_1-1)!\cdot\ldots\cdot(d_n-1)!$.

***3.6.1.*** (При написании этого решения использован текст А. Голованова.) На плоскости гамильтонов цикл является замкнутой ломаной без самопересечений, то есть, границей многоугольника. Все вершины графа — вершины этого многоугольника. Проходящие внутри многоугольника ребра не соприкасаются, а концы их лежат на многоугольнике.

Докажем, что *все грани внутри многоугольника можно правильно покрасить в 2 цвета.* (Для этого, неформально говоря, сотрем все ребра и покрасим внутренность многоугольника в один цвет. Будем возвращать ребра по одному. Эта идея проще всего формализуется при помощи индукции.) Используем индукцию по количеству ребер внутри многоугольника. База индукции — если таких ребер нет — очевидна. Докажем шаг индукции. Добавленное ребро делит наш многоугольник на два меньших. В одном из них инвертируем все цвета. Докажем, что новая раскраска является правильной. Действительно, любые две смежные грани с одной стороны от этого ребра или поменяли свои цвета, или не поменяли, следовательно, их цвета по-прежнему различаются. Если же две смежные грани находятся по разные стороны от этого ребра, то они смежны ровно по этому ребру, т. е. эти две грани ранее были одной, но образовались в результате проведения этого ребра. Поэтому они имеют разные цвета.

Аналогично покрасим все грани снаружи многоугольника (это можно даже формально свести к случаю внутренности инверсией относительно любой точки внутри многоугольника). Итак, мы покрасили внутренность многоугольника в 2 цвета, внешнюю часть — в другие 2 цвета. Стало быть, построена правильная раскраска в 4 цвета.

***3.6.2.*** Пункты (a) и (b) следуют из (c). (Не нужно требовать связность, она автоматически следует из условия.)

(c) Если вершина $a_0$ соединена ребром с вершиной $a_s$, то получаем обход $a_0 \dots a_s$. Иначе ввиду максимальности вершина $a_0$ не соединена ребром ни с какой вершиной, кроме $a_1, \dots, a_{s-1}$ Аналогично вершина $a_s$ не соединена ребром ни с какой вершиной, кроме $a_1, \dots, a_{s-1}$. Если $a_s$ соединена ребром с $a_i$, то $a_0$ не соединена ребром с $a_{i+1}$ (иначе, т. е. если есть рёбра $(a_0, a_{i+1})$ и $(a_s, a_i)$, то в графе есть цикл $a_0 \dots a_i a_s a_{s-1} \dots a_{i+1}$). Значит, $\deg a_0 \leqslant s - 1 - \deg a_s$, что противоречит условию.

(d) Так как граф связен, то от данного цикла ведёт хоть одно ребро вовне цикла. Поэтому, размыкая цикл в нужном месте, получаем путь длины $s$, проходящий по каждой своей вершине только один раз.

(e) Следует из (c,d) для $s = n - 1$.
Утверждение можно доказать и напрямую, аналогично (c). Обозначим через $a_0, \ldots, a_s$ максимальный из путей в графе, проходящих по каждой своей вершине только один раз. Ввиду его максимальности вершина $a_0$ не соединена ребром ни с какой вершиной, кроме $a_1, \ldots, a_s$ Если вершина $x$ не принадлежит пути и $a_0$ соединена ребром с $a_i$, то $x$ не соединена ребром с $a_{i-1}$ (иначе есть путь $xa_{i-1}a_{i-2} \ldots a_0 a_i a_{i+1} \ldots a_s$). Поэтому если $a_0$ соединена рёбрами с $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_l}$, то $x$ не соединена с $x$, $a_{i_1-1}, a_{i_2-1}, \ldots, a_{i_l-1}, a_s$. Значит, $\deg a_0 + \deg x \leqslant n - 2$, что противоречит условию.

***3.6.4.*** (a) В этом графе степень каждой вершины не менее $k \geqslant 2$.
(b) В $X$ нет двух соседних вершин обхода $v_1, \ldots, v_s$, иначе он не максимальный. Поэтому если удалить из графа вершины множества $X$, то $W$ и вершину обхода, не лежащая в $X$, нельзя будет соединить путем. Т.е. получится несвязный граф. Поэтому $|X| \geqslant k$.

***3.6.5.*** (a) Граф на рисунке 7 — двудольный с долями из 7 и 9 вершин: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 16 — одна доля. Гамильтонов путь в двудольном графе существует (тогда и) только тогда, когда количества вершин в долях отличаются не более чем на 1.
(b) В графе 46 вершин. Имеется одна 9-угольная грань, несколько 5-угольных и несколько 8-угольных. Обозначим
• через $f$ число граней с той же стороны от гамильтонова цикла, что и 9-угольная;
• через $f_k$ число $k$-угольных граней с той же стороны от гамильтонова цикла, что и 9-угольная.
Тогда $f = 1 + f_5 + f_8$. Количество гранеребер (или стрелок из задачи 3.4.3) равно $46 + 2(f - 1) = 9 + 5f_5 + 8f_8$. Складывая, получаем противоречие по модулю 3.

***3.6.6.*** Так как степень каждой вершины равна $n - 1$, а каждый гамильтонов цикл «уменьшает» степень вершины на 2, то в графе не может быть больше, чем $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ таких гамильтоновых циклов.

Для построения примера сначала постройте $\left[\frac{n}{2}\right]$ непересекающихся гамильтоновых путей в графе $K_n$. Чтобы получить в $K_n$

ровно $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ гамильтоновых циклов, нужно взять построенные гамильтоновы пути для $K_{n-1}$ и «склеить их в цикл с последней вершиной».

***3.6.7.*** (b) (При написании этого решения использован текст А. Жука.) База индукции: $n = 2$. В этом случае в графе есть гамильтонов путь, состоящий из начала и конца единственного ребра графа.

Шаг индукции. Пусть $n \geqslant 3$ и $v \in V$ — вершина графа. По предположению индукции граф, полученный из исходного удалением вершины $v$, содержит гамильтонов путь. Обозначим этот путь $v_1 \dots v_{n-1}$. Если ребро ведет из $v$ в $v_1$, то $v, v_1, \dots, v_{n-1}$ — искомый гамильтонов путь. Иначе ребро ведет из $v_1$ в $v$. Значит, существует максимальное число $l \in \{1, 2, \dots, n-1\}$, такое, что ребро ведет из $v_l$ в $v$. Если $l = n-1$, то $v_1, \dots, v_{n-1}, v$ — искомый путь. Иначе в графе есть ребра $v_l v$ и $v v_{l+1}$. Тогда $v_1, \dots, v_l, v, v_{l+1}, \dots, v_{n-1}$ — искомый путь.

***3.6.8.*** Пусть в рёберном графе есть гамильтонов цикл. Если идти в нём по гамильтонову циклу, то в графе $G$ мы идем по некоторому циклу с «остановками» в некоторых вершинах. Так как цикл гамильтонов, то любое ребро графа $G$ имеет общую вершину с данным циклом, и ни одно ребро не проходится дважды.

Обратно, пусть есть такой цикл в графе $G$. Заметим, что вершине степени $l$ в $G$ соответствует подграф, изоморфный $K_l$, в рёберном графе: его вершинами являются все рёбра исходного графа, проходящие через эту вершину. По циклу в графе $G$ строим гамильтонов цикл в рёберном графе так: приходя в вершину графа $G$ степени $l$, обходим гамильтоново те вершины подграфа $K_l$ в рёберном графе, через которые еще не проходили и не обязаны пройти в будущем, и так, чтобы последняя вершина соответствовала следующему ребру цикла в графе $G$, и т.д.

*Замечание.* При построении гамильтонова цикла в рёберном графе нельзя считать, что в $G$ в заданном цикле не повторяются вершины, и что вершины вне заданного цикла соединены ребром только с одной вершиной в заданном цикле.

***3.7.1.*** (a) Индукция по $n$. Докажем шаг индукции. Если рёбер нет, то утверждение очевидно. Иначе возьмём произвольное ребро. У вершин этого ребра нет общих соседей, иначе есть треугольник. Значит, из этих двух вершин в остаток графа выходит не более $n-2$ рёбер. По предположению индукции имеется не более $(n-2)^2/4$ рёбер, соединяющих оставшиеся вершины. Значит, $e \leqslant (n-2)^2/4 + n - 2 + 1 = n^2/4$.

(b) Индукция по $n$ с переходом от $n$ к $n+2$. Докажем шаг индукции. Обозначим через $t$ количество треугольников.

*Первый случай: каждое ребро содержится в некотором треугольнике.* (Идея доказательства в том, что если рёбер много, то и треугольников много.) Посчитаем двумя способами количество пар (треугольник, принадлежащее ему ребро). Получим $3t \geqslant e \geqslant [n^2/4]+1 \geqslant 3[n/2] - 2$. Последнее неравенство верно, поскольку

$$[n^2/4] - 3k + 3 \geqslant k^2 - 3k + 3 = (k - 1.5)^2 + 0.75 \geqslant 0, \quad \text{где} \quad k = [n/2].$$

*Второй случай: есть ребро, которое не содержится ни в одном треугольнике.* Тогда концы $A$ и $B$ этого ребра соединены не более, чем с $n-2$ другими вершинами. Удаляем вершины $A$ и $B$ (и все рёбра, из них выходящие).

*Если $A$ и $B$ соединены менее, чем с $n-2$ другими вершинами,* то в «оставшемся» графе хотя бы $[n^2/4] + 1 - n + 2 = [(n-2)^2/4] + 2$ ребра. Удалим ребро одного из треугольников. Получим граф с $[(n-2)^2/4] + 1$ рёбрами. По предположению индукции, в нём есть $[n/2] - 1$ треугольников. Значит, в «оставшемся» графе есть $[n/2]$ треугольников.

*Если $A$ и $B$ соединены ровно с $n-2$ другими вершинами,* то в «оставшемся» графе $[n^2/4] + 1 - n + 1 = [(n-2)^2/4] + 1$ рёбер. Значит, по предположению индукции, в нём есть $[n/2] - 1$ треугольников. Кроме того, $n-2$ ребра из $A$ и $B$ идут к $n-2$ разным вершинам (иначе ребро $AB$ попало бы в треугольник). Это значит, что ребра из $A$ и $B$ идут ко всем остальным вершинам. В частности, к любому треугольнику идут как минимум 2 ребра из одной вершины, создавая ещё один треугольник. Значит, в графе есть $[n/2]$ треугольников.

(c) Индукция по $n$ с переходом от $n$ к $n+k$. Можно считать, что в графе есть $k$-клика, иначе можно добавить рёбер.

# 4 Раскраски графов и многочлены

## 4.1 Раскраски графов

Раскраска графа (т.е. вершин графа) в несколько цветов называется *правильной*, если концы любого ребра разноцветны.

**4.1.1.** Докажите, что следующие три условия эквивалентны:
- граф двудолен;
- граф можно правильно раскрасить в 2 цвета;
- граф содержит циклы только чётной длины.

**4.1.2.** (a) Если в графе степень каждой вершины не превосходит $d$, то его можно правильно раскрасить в $d+1$ цвет.
(b) Если в связном графе степень каждой вершины не превосходит $d$ и есть вершина степени менее $d$, то его можно правильно раскрасить в $d$ цветов.
(c) Если в связном графе степень каждой вершины не превосходит $d$, и есть вершина, после удаления которой граф перестает быть связным, то граф можно правильно раскрасить в $d$ цветов.
(d) Если связный граф $G$, имеющий более двух вершин, при удалении некоторого ребра распадается на два графа, каждый из которых можно правильно раскрасить в $d$ цветов, то и исходный граф можно правильно раскрасить в $d$ цветов.

**4.1.3.** Если для некоторого $k$ в графе с $n$ вершинами среди любых $k+1$ вершин есть ребро, то граф невозможно правильно покрасить менее, чем в $n/k$ цветов.

**4.1.4.** В выпуклом многоугольнике провели несколько диагоналей, не имеющих общих внутренних точек. Полученный плоский граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.

**4.1.5.** (a) В связном графе степень каждой вершины не превосходит трёх. Известно, что его можно правильно раскрасить в 3 цвета так, чтобы соседи некоторой вершины были одноцветны. Добавили одну вершину и выходящие из нее рёбра так, что по-прежнему степени всех вершин не превосходят трёх. Докажите, что полученный граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.

(b) В связном графе степень каждой вершины не превосходит трёх. Известно, что его можно правильно раскрасить в 3 цвета и при любой такой раскраске у каждой вершины есть разноцветные соседи. Добавили одну вершину и выходящие из нее рёбра так, что по-прежнему степени всех вершин не превосходят трёх и полученный граф отличен от $K_4$. Докажите, что полученный граф можно правильно раскрасить в 3 цвета.
(c) *Теорема Брукса.* Если степень каждой вершины графа не превосходит $d \geqslant 3$ и нет $(d+1)$-клики, то граф можно правильно раскрасить в $d$ цветов.

**4.1.6.** Натуральные числа $d, k, d_1, \ldots, d_k$ таковы, что $d_1 + d_2 + \ldots + d_k = d + 1 - k$. Степень любой вершины графа не превосходит $d$. Докажите, что вершины можно разбить на $k$ групп так, что любая вершина $i$-й группы соединена не более, чем с $d_i$ вершинами своей группы.

**4.1.7.** Трем смышлёным девочкам Ире, Тане и Юле выдали по копии одного и того же графа. Юля и Таня раскрасили свои графы правильно. Юля использовала меньше цветов, чем Таня, зато у Тани в каждый цвет покрашено не менее двух вершин. Докажите, что Ира может правильно раскрасить свой граф, использовав не больше цветов, чем Юля, и чтобы в каждый цвет было покрашено не менее двух вершин.

**4.1.8.** (a) Если граф невозможно правильно раскрасить в $k-1$ цвет, то для любой его правильной раскраски в $k$ цветов существует путь, в котором встречается ровно по одной вершине каждого цвета.
(b) Если максимальный из путей в графе, проходящих по каждой своей вершине только один раз, проходит через $d$ вершин, то граф можно правильно раскрасить в $d$ цветов.
(c) Если максимальный нечётный обход в графе проходит через $d-1$ вершину, то граф можно правильно раскрасить в $d$ цветов.

**4.1.9.** Ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит не более $d$ рёбер, можно правильно раскрасить в $2d+1$ цвет.

**4.1.10.** Имеется несколько цветов. Каждой вершине двудольного графа с $n \leqslant 2^{k-1}$ вершинами сопоставлено не менее, чем $k$ цветов. («Списки» цветов, сопоставленные разным вершинам, могут быть и одинаковыми, и различными.) Тогда существует правильная раскраска графа, приписывающая каждой вершине некоторый сопоставленный ей цвет.

**4.1.11.** (a) Если степень каждой вершины графа не превосходит $d$, то *рёбра* графа можно раскрасить в $d+1$ цвет так, чтобы рёбра, имеющие общий конец, были разноцветны.
(b) Существует такая раскраска *рёбер* графа $K_{m,n}$ в два цвета, что число одноцветных подграфов $K_{a,b}$ не больше $\binom{m}{a}\binom{n}{b}2^{1-ab}$.

## 4.2 Хроматические число и индекс

*Хроматическим числом* $\chi(G)$ графа $G$ называется минимальное количество цветов, в которые можно правильно покрасить вершины графа $G$.

**4.2.1.** Если при удалении из графа любой вершины хроматическое число уменьшается, то $\chi(G) \leqslant 1 + [2e/n]$.

**4.2.2.** (a) На какое число может измениться хроматическое число графа, если добавить к графу одно ребро? Или, формально, найдите все целые $k$, для которых существует граф $G$ и его ребро $u$ такие, что $\chi(G) - \chi(G-u) = k$.
(b) $\chi(V, E_1 \cup E_2) \leqslant \chi(V, E_1)\chi(V, E_2)$. (Напомним, см. §3.1, что через $(V, E)$ обозначается граф со множеством вершин $V$ и множеством ребер $E$.)
(c) Для любых $r_1, r_2 \in \mathbb{N}$ постройте такие графы $(V, E_1)$ и $(V, E_2)$, что $\chi(V, E_1 \cup E_2) = \chi(V, E_1)\chi(V, E_2)$, $\chi(V, E_1) = r_1$ и $\chi(V, E_2) = r_2$.

**4.2.3.** Следующий алгоритм раскраски вершин графа называется *жадным*. Сначала все вершины произвольно нумеруются. После этого последовательно каждую вершину, начиная с первой, красим в цвет с минимальным номером, отсутствующим среди уже покрашенных соседей этой вершины.
(a) Вершины произвольного графа $G$ можно занумеровать так, чтобы жадный алгоритм его раскраски использовал ровно $\chi(G)$ цветов.

(b) Для каждого целого $k > 0$ постройте такие двудольный граф и нумерацию его вершин, что раскраска графа, построенная жадным алгоритмом, отвечающим построенной нумерации, имеет не менее $k$ цветов.

Эта задача показывает, что «качество» раскраски, построенной жадным алгоритмом, сильно зависит от упорядочения вершин.

Раскраска рёбер графа называется *правильной*, если любые два ребра, имеющие общую вершину, окрашены в разные цвета. *Хроматический индекс* графа — минимальное число цветов, в которые можно правильно раскрасить рёбра этого графа.

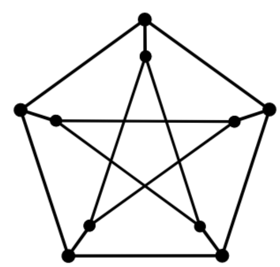

Рис. 10: Граф Петерсена

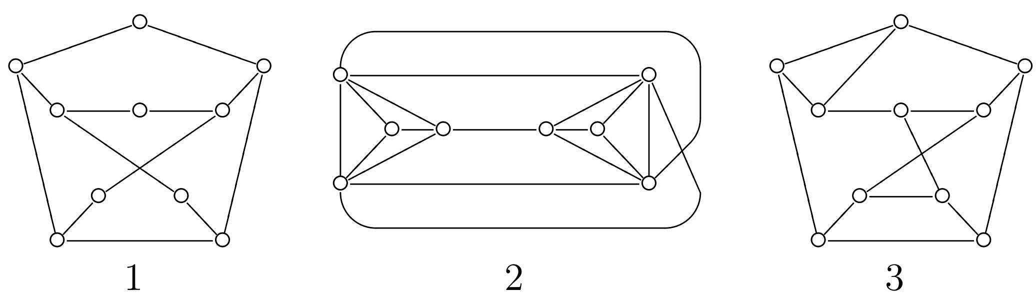


Рис. 11: Исследуйте на планарность, найдите хроматическое число и хроматический индекс графов

**4.2.4.** Исследуйте на планарность (§3.4), найдите хроматическое число и хроматический индекс графов:

(a) *графа Петерсена*, изображённого на рисунке 10;

(b) графов с рисунка 11.

## 4.3 Хроматический многочлен и многочлен Татта

Значением *хроматической функции* $\chi_G$ графа $G$ в точке $t$ называется количество правильных раскрасок графа в $t$ цветов.

**4.3.1.** Найдите хроматическую функцию для (a) полного графа; (b) графа, не имеющего ребер; (c) пути; (d) цикла; (e) дерева

с $n$ вершинами.

**4.3.2.** (a) $\chi_G = \chi_{G-u} - \chi_{G/u}$ для любого ребра $u$ графа $G$.

(b) *Теорема Биркгофа–Уитни.* Для каждого графа $G$ существует ровно один такой многочлен, что для любого $t$ число $\chi_G(t)$ правильных раскрасок графа $G$ в $t$ цветов равно значению в точке $t$ этого многочлена.

Ввиду этой теоремы хроматическая функция называется *хроматическим многочленом* и считается определенной не только для целых $t > 0$ (ср. с (e)).

(c) Степень хроматического многочлена $\chi_G$ равна $n$, старший коэффициент равен 1, второй коэффициент равен $(-e)$, коэффициенты знакопеременны (т. е. коэффициент при $t^{n-2k}$ неотрицателен и коэффициент при $t^{n-2k+1}$ неположителен для любого целого $k$).

(d) Третий коэффициент хроматического многочлена графа, считая с самого старшего, однозначно определяется набором подграфов графа, содержащих 3 вершины.

(e) Число $|\chi_G(-1)|$ равно числу *ациклических ориентаций* графа $G$, т. е. числу способов так расставить стрелки на его рёбрах, чтобы полученный ориентированный граф не содержал ориентированных циклов.

**4.3.3.** (a) Если хроматический многочлен графа равен $t(t-1)^{n-1}$, то граф — дерево.

(b) Не существует графа с хроматическим многочленом $t^4 - 3t^3 + 3t^2$.

**4.3.4.** (a) Найдите $\chi_{G \sqcup H}$, зная $\chi_G$ и $\chi_H$.

(b) Путь из $m$ вершин «прицепили» за один из концов к одной из вершин графа $G$, содержащего $n$ вершин. Выразите хроматический многочлен полученного графа с $m+n-1$ вершиной через $\chi_G$.
(c) Если $H, K$ — графы, на которые распадается связный граф $G$ при удалении его ребра, то $t\chi_G = (t-1)\chi_H\chi_K$.

**4.3.5.** Обозначим через $\chi'_G = \chi'_G(t)$ количество правильных раскрасок рёбер графа $G$ в $t$ цветов.
(a) Функция $\chi'_G$ является многочленом от $t$.
(b) Старший моном в $\chi'_G$ равен $t^e$.
(c) Коэффициент при $t^{e-1}$ в $\chi'_G$ равен $-\sum_{v\in V(G)}\binom{\deg v}{2}$.

*Мостом* называется ребро, при удалении которого количество связных компонент графа увеличивается. Граф называется *лесом*, если он не содержит обходов. Напомним, что при стягивании ребра в мультиграфах, в отличие от графов, получившиеся ребра кратности больше 1 не заменяются на ребра кратности 1.

**4.3.6.** Для любого мультиграфа $G$ выполнено $G = T_{G-u} + T_{G/u}$, где $u$ — ребро графа $G$, не являющееся мостом, и $T_G$ — число

(a) *остовных лесов* (т. е. объединений остовов его компонент);

(b) таких наборов рёбер, что для любой компоненты связности графа лежащие в ней рёбра из набора образуют связный подграф;

(c) подграфов, являющихся лесами.

**4.3.7.** *Теорема Татта.* В мультимножестве (т. е. в неупорядоченном наборе с кратностями) мультиграфов разрешается для любого мультиграфа $G$ и его ребра $u$, не являющегося ни петлёй, ни мостом, заменять один мультиграф $G$ на два мультиграфа $G-u, G/u$. Эта замена применяется до тех пор, пока не останутся только мультиграфы, в которых все рёбра являются петлями или мостами. Тогда для любого исходного графа полученное мультимножество с точностью до изоморфизмов входящих в него графов корректно определено , т. е. не зависит от порядка мультиграфов и рёбер, к которым мы применяем замены.

**4.3.8.** *Многочленом Татта* мультиграфа $G$ называется многочлен $T(x,y)$ от двух переменных, определённый рекуррентной формулой

$T_G = T_{G-u} + T_{G/u}$, если $u$ — не петля и не мост, и $T_G(x, y) = x^i y^j$, если $G$ имеет $i$ мостов, $j$ петель и не имеет других рёбер. Выразите через многочлен Татта

(a') хроматический многочлен; (a,b,c) числа из задачи 4.3.6.

## 4.4 Подсказки

*4.1.1.* Сначала докажите, что чётность любых двух путей, соединяющих фиксированные вершины $a$ и $b$, одинаковая.

*4.1.2.* (a), (b), (c) Примените индукцию по числу вершин.

*4.1.3.* Среди одноцветных вершин нет рёбер.

*4.1.11.* (b) Посчитаем двумя способами количество таких пар $(A, x)$, что $A$ — раскраска, а $x$ — подграф, изоморфный $K_{a,b}$ и одноцветный относительно $A$.

*4.3.2.* (b) Используйте (a).

*4.3.5.* Рассмотрите граф $G'$ — *рёберный граф* графа $G$. Вершины графа $G'$ соответствуют рёбрам графа $G$. Пара вершин $G'$ смежна, если соответствующие рёбра графа $G$ имеют общий конец. Остаётся использовать свойства обычного хроматического многочлена (задача 4.3.2).

*4.3.6.* Аналогично теореме Биркгофа-Уитни (задача 4.3.2.b). Или используйте задачи 4.3.7 и 4.3.8.

*4.3.8.* Ответы: (a') $\chi_G(t) = (-1)^{n-k} t^k T_G(1-t, 0)$, где $k$ — число компонент связности графа $G$.

(a) $T_G(1, 1)$. (b) $T_G(1, 2)$. (c) $T_G(2, 1)$.

## 4.5 Указания

***4.1.1.*** Будем считать, что граф связный. Тогда в качестве цвета вершины $u$ возьмём чётность пути от $u$ до некоторой заранее зафиксированной вершины $v_0$.

***4.1.2.*** (a) На цвет каждой очередной вершины имеется не более $d$ запретов, поэтому мы сможем её окрасить.
(b) Удалим из графа вершину степени меньше $d$ со всеми выходящими из нее рёбрами. Оставшийся граф можно правильно раскрасить по предположению индукции. Вернем удаленную вершину. На её цвет меньше чем $d$ запретов, поэтому мы сможем её окрасить.

***4.1.8.*** (a) Все вершины цвета $k-1$, не соединённые ребром с цветом $k$, перекрасим в цвет $k$. После этого все вершины цвета $k-2$, которые можно, перекрасим в цвет $k-1$. Аналогично перекрасим вершины цветов $k-3,\dots,2,1$. Согласно условию, в полученной раскраске найдётся вершина цвета 1. Так как мы её не перекрасили, то найдётся соседняя с ней вершина цвета 2. Так как эту вершину мы тоже не перекрасили, то найдётся соседняя с ней вершина цвета 3. Аналогично найдётся последовательность вершин цветов $3,4,\dots,k$ такая, что каждая следующая вершина соединена ребром с предыдущей. Эти вершины имели те же цвета в исходной раскраске графа (до перекрашиваний) в силу правильности исходной раскраски. Значит, мы нашли требуемый путь.
(b) Следует из (a).

***4.1.9.*** Сумма степеней вершин не превосходит $2nd$. Значит, есть вершина степени не более $2d$.

***4.1.10.*** Посчитаем двумя способами количество таких пар $(A,x)$, что

- $A$ — подмножество множества всех цветов,
- $x$ — вершина, и
- все цвета, сопоставленные вершине $x$ *равнозначны* относительно $A$, (т. е., либо все лежат в $A$, либо ни одно не лежит в $A$).

Обозначим через $s$ общее количество цветов. Каждая вершина лежит в паре не более чем с $2^{s-k+1}$ подмножествами $A$. Всего $n \leqslant 2^{k-1}$ вершин. Значит, количество пар не больше $2^s$. Количество подмножеств множества всех цветов равно $2^s$. С множеством $A$ из всех $s$ цветов каждая вершина $x$ лежит в паре. Если вершина только одна, утверждение очевидно, поэтому будем считать, что имеются две вершины. Тогда найдётся подмножество $A$, с которым ни одна вершина не лежит в паре. Иными словами, можно разделить цвета на *яркие* (т. е. лежащие в $A$) и *тусклые* (т. е. не лежащие в $A$) так, чтобы в списке любой вершины был бы и яркий, и тусклый цвет. Для каждой вершины одной доли графа возьмём яркий цвет из её списка, а для каждой вершины другой доли графа возьмём тусклый цвет из её списка. Полученная раскраска искомая.

*Другая запись этого решения.* Можно считать, что в списке каждой вершины ровно $k$ цветов. По задаче 2.6.7 можно *правильно покрасить* данные цвета, т. е. можно разделить цвета на *яркие* и *тусклые* так, чтобы в списке любой вершины был бы и яркий, и тусклый цвет. Для каждой вершины одной доли графа возьмём яркий цвет из её списка, а для каждой вершины другой доли графа возьмём тусклый цвет из её списка. Полученная раскраска искомая.

***4.1.11.*** (b) Для каждого подграфа $K_{a,b}$, т. е., для каждой пары подмножеств из $a$ вершин в первой доле и $b$ вершин во второй, число раскрасок, для которых этот подграф $K_{a,b}$ одноцветен, равно $2^{1+mn-ab}$. Значит, количество пар равно $\binom{m}{a}\binom{n}{b}2^{mn-ab}$. Всего раскрасок $2^{mn}$. Значит, для некоторой раскраски число одноцветных подграфов $K_{a,b}$ не больше $\binom{m}{a}\binom{n}{b}2^{1-ab}$.

***4.2.1.*** Из условия следует, что степень каждой вершины не меньше $\chi(G)-1$. Значит, $2e \geqslant n(\chi(G)-1)$.

***4.2.2.*** (a) Ответ: либо не изменится, либо увеличится на 1.
(c) Возьмите $(V, E_1 \cup E_2) = K_{r_1 r_2}$, $(V, E_1)$ — несвязное объединение $r_1$ копий графа $K_{r_2}$ и $(V, E_2) := K_{r_2,\dots,r_2}$.

***4.2.3.*** (a) Занумеруем цвета некоторой правильной раскраски. Занумеруем вершины так, чтобы меньшей из двух вершин при рассмотренной правильной раскраске отвечал цвет с меньшим или равным номером, чем номер цвета большей из двух вершин.

***4.2.4.*** (a) Хроматическое число и хроматический индекс графа Петерсена равны 3 и 4, соответственно.
Непланарность графа Петерсена получается из оценки числа рёбер в планарном графе без обходов малой длины (ср. с задачами 3.4.3.ae). (Или из переформулировки теоремы Куратовского в терминах сягивания на подграфы, и возможности стянуть к $K_5$ граф Петерсена или стянуть к $K_{3,3}$ некоторый его подграф.)

***4.3.1.*** Ответы: (a) $t(t-1)(t-2)\dots(t-n+1)$; (b) $t^n$; (c) $t(t-1)^{n-1}$; (d) $(t-1)^n+(-1)^n(t-1)$; (e) $t(t-1)^{n-1}$.

# 5 Основы теории Рамсея

## 5.1 Двухцветные числа Рамсея

**5.1.1.** (33') Среди пяти человек может не найтись ни трёх попарно знакомых, ни трёх попарно незнакомых.

(33) Среди любых шести человек найдётся либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(43) Среди любых десяти человек найдётся либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(439) Среди любых девяти человек найдётся либо четверо попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

(43') Среди восьми человек может не найтись ни трёх попарно знакомых, ни четверых попарно незнакомых.

(44) Среди любых 18 человек найдётся либо 4 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых.

(35) Среди любых 14 человек найдётся либо 5 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых.

*Числом Рамсея* $R(m,n)$ называется минимальное из таких целых положительных чисел $x$, что выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

• среди любых $x$ человек найдётся либо $m$ попарно знакомых, либо $n$ попарно незнакомых.

• в любом графе с $x$ вершинами найдётся либо $m$-клика, либо $n$-антиклика.

• для любой раскраски рёбер графа $K_x$ в синий и красный цвета найдётся либо синяя $m$-клика, либо красная $n$-клика.

Например, очевидно, что $R(1,n)=1$ и $R(2,n)=n$ для любого $n$. В задаче 5.1.1 доказано, что $R(3,3)=6$, $R(3,4)=9$, $R(4,4)\leqslant 18$ и $R(3,5)\leqslant 14$. Но не очевидно, что такое число существует для любых $m,n$.

**5.1.2.** (a) Если числа $R(m-1,n)$ и $R(m,n-1)$ существуют, то число $R(m,n)$ существует и $R(m,n)\leqslant R(m-1,n)+R(m,n-1)$. Это утверждение обычно коротко записывают в виде «$R(m,n)\leqslant R(m-1,n)+R(m,n-1)$». *Далее аналогичные утверждения записываются только в кратком виде.*

(b) $R(m,n) \leqslant \binom{m+n-2}{m-1}$.
(c) $R(m,n) \leqslant R(m-1,n) + R(m,n-1) - 1$, если числа $R(m-1,n)$ и $R(m,n-1)$ чётны.
(d) $R(5,5) \leqslant 62$.

**5.1.3.** (a) Если в графе с 13 вершинами нет ни треугольника, ни 5-антиклики, то степень каждой вершины равна 4.
(b) Если в графе с 18 вершинами нет ни треугольника, ни 6-антиклики, то степень каждой вершины равна 5.
(Во избежание порочного круга, при решении этой и других задач не используйте без доказательства ни равенства $R(3,6) = 18$, ни других фактов, которые не умеете доказывать.)

**5.1.4.** (a) $R(4,4) \geqslant 18$.
(b) $R(3,5) \geqslant 14$.

**5.1.5.** (a) *Теорема Эрдеша.* $R(n,n) > (1+o(1))n2^{n/2}/e$. (Если Вы не знаете, что такое $o(n)$, то докажите, что $R(n,n) > n2^{n/2+1}/5$ начиная с некоторого $n$.)
(b) Если $\binom{r}{n} < 2^{\binom{n}{2}-1}$, то $R(n,n) > r$.
(c) Если $\binom{r}{n} < s2^{\binom{n}{2}-1}$, то $R(n,n) > r - s$.
(d) $R(n,n) > r - \binom{r}{n}2^{1-\binom{n}{2}}$ для любого $r$.

**5.1.6.** В любом турнире с $4^n$ вершинами можно выбрать вершины $A_1, \ldots, A_n$ так, чтобы каждое ребро между ними было направлено от большего номера к меньшему.

**5.1.7.** При любой раскраске рёбер графа $K_n$ в два цвета в нём найдётся гамильтонов цикл, состоящий из двух одноцветных путей (цвета путей могут быть и одинаковы, и различны).

## 5.2 Многоцветные числа Рамсея

**5.2.1.** (a) На плоскости отметили 17 точек и соединили каждые 2 из них цветным отрезком: красным, желтым или зеленым. Тогда есть одноцветный треугольник.

(b) Придумайте 9 точек на плоскости и раскраску в 3 цвета всех соединяющих их отрезков, для которой нет одноцветного треугольника.
(c) То же, что в (b), для 16 точек.

*Числом Рамсея* $R(m_1, \ldots, m_k)$ называется минимальное из таких целых положительных чисел $x$, что для любой раскраски рёбер графа $K_x$ в $k$ цветов для некоторого $i$ найдётся $m_i$-клика $i$-ого цвета (т.е. $m_i$ вершин, попарно соединённых рёбрами цвета $i$).

Например, очевидно, что $R(1, m, n) = 1$ и $R(2, m, n) = R(m, n)$ для любых $m, n$. В задаче 5.2.1 доказано, что $R(3, 3, 3) \leqslant 17$, $\geqslant 10$ и $\geqslant 17$. Но не очевидно, что такое число существует для любых $m_1, \ldots, m_k$.

**5.2.2.** (a) $R(m, n, p) \leqslant R(R(m, n), p)$.
(b) $R(m_1, m_2, \ldots, m_k) \leqslant$

$$\leqslant R(m_1-1, m_2, \ldots, m_k)+R(m_1, m_2-1, \ldots, m_k)+\ldots+R(m_1, m_2, \ldots, m_k-1).$$

(c) Найдите оценку на $R(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ через биномиальные коэффициенты.

Подробнее см. [2] и [Ga].

**5.2.3.** Если рёбра графа $K_{31}$ раскрашены в синий, белый и красный цвета так, что нет ни синей 4-клики, ни белой 3-клики, ни красной 3-клики, то из каждой вершины выходит 14, 15 или 16 синих рёбер.

**5.2.4.** *Теорема.* Для любого целого $m > 0$ существует такое $M > 0$, что для любого простого числа $p > M$ сравнение $x^m + y^m \equiv z^m \pmod p$ имеет ненулевое решение. (Доказать эту теорему вы сможете после решения двух следующих задач.)

**5.2.5.** Сравнение $x^m + y^m \equiv z^m \pmod p$ имеет ненулевое решение для
(a) $m = 2$, любого простого $p$;
(b) $m = 3$, $p = 257$;
(c) $m = 3$, $p = 1987$;
(d) $m = 4$, $p = 1987$.

**5.2.6.** *Теорема Шура.* Для любой раскраски натурального ряда в конечное число цветов найдётся одноцветное решение уравнения $x+y=z$.

Более точно, для любого целого $k>0$ существует такое целое $r>0$, что для любой раскраски первых $r$ натуральных чисел в $k$ цветов найдётся одноцветное решение уравнения $x+y=z$.

## 5.3 Числа Рамсея для гиперграфов

**5.3.1.** Среди любых четырёх из 7000 студентов можно выбрать слаженную тройку (т. е. тройку, составляющую слаженную команду на олимпиаду по программированию). Докажите, что можно выбрать 5 студентов, любая тройка из которых является слаженной.

**5.3.2.** (a) Среди любых 5 точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 4-угольник.
(b) Найдётся 8 точек общего положения на плоскости, среди которых нет выпуклого 5-угольника.
(c) Среди любых 9 точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 5-угольник.
(d) *Теорема Эрдеша-Секереша.* Для некоторого $n$ среди любых $n$ точек общего положения на плоскости найдётся выпуклый 10-угольник. (Ср. с задачей 5.4.4.)

*Числом Рамсея для гиперграфов* $R_l(m_1,\dots,m_k)$, $m_j\geqslant l$, называется минимальное из таких целых положительных чисел $x$, что для любой раскраски $l$-элементных подмножеств $x$-элементного множества в $k$ цветов найдутся $i$ и подмножество размера $m_i$, у которого все $l$-элементные подмножества покрашены в $i$-й цвет. («Число Рамсея для гиперграфов» — единый термин, определённый выше; знание термина «гиперграф» не нужно для его понимания.)

Например, очевидно, что $R_2(m_1,\dots,m_k)=R(m_1,\dots,m_k)$ и $R_3(3,n)=n$. В задаче 5.3.1 доказано, что $R_3(5,4)\leqslant 7000$. А в решении задачи 5.3.2.d доказано, что $R_4(5,10)$ существует. Но не очевидно, что такое число существует для любых $l,m_1,\dots,m_k$.

**5.3.3.** (a) $R_l(m_1,\dots,m_k)\leqslant R_l(R_l(m_1,m_2),m_3,\dots,m_k)$.
(b) Число $R_l(m_1,\dots,m_k)$ существует для любых $m_j\geqslant l$.

(c) $R_l(m,n) \leqslant R_{l-1}(R_l(m-1,n), R_l(m,n-1)) + 1$.

**5.3.4.** (a) Если $\binom{r}{n} < 2^{\binom{n}{3}-1}$, то $R_3(n,n) > r$.

(b) Найдётся такое число $c > 0$, что $R_3(n,n) \geqslant 2^{cn^2}$.

Заметим, что $R_l(\underbrace{n,\dots,n}_{r^{2r}+1}) \geqslant (l-1)r^{r^{\dots^r}}$ (степенная башня высотой $n$).

## 5.4 Результаты рамсеевского типа

**5.4.1.** Верно ли, что для любой раскраски точек плоскости в два цвета найдётся

(a) одноцветный равносторонний треугольник со стороной 1 или $\sqrt{3}$?

(b) одноцветный равносторонний треугольник со стороной 1?

(c) одноцветный треугольник со сторонами $\sqrt{2}, \sqrt{6}, \pi$?

**5.4.2.** При любой раскраске точек плоскости в три цвета найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1.

**5.4.3.** (a) Найдётся такое $n$, что для любой раскраски пространства $\mathbb{R}^n$ (определение см. в главе 8) в 9 цветов найдётся прямоугольник с одноцветными вершинами и сторонами 1 и 2.

(b) Верно ли, что для любого параллелограмма $P$ с неперпендикулярными сторонами найдётся такое $n$, что для любой раскраски точек пространства $R^n$ в 4 цвета найдётся равный $P$ параллелограмм с одноцветными вершинами?

**5.4.4.** Назовем *$m$-чашкой* (*$m$-шапкой*) подмножество из $m$ точек графика выпуклой вниз (вверх) функции. Обозначим через $f(k,l)$ минимальное число $n$, такое, что среди любых $n$ точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на прямой, есть либо $k$-чашка, либо $l$-шапка. (Не очевидно, что такое число существует. Поэтому о формулах из этой задачи справедливо замечание, аналогичное сделанному в задаче 5.1.2.a.)

(a) Среди любых $f(m,m)$ точек на плоскости найдётся выпуклый $m$-угольник. (Ср. с задачей 5.3.2.)

(b) $f(k,l) \leqslant f(k-1,l) + f(k,l-1) - 1$.

(c) $f(k,l) \leqslant \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.

(d) $f(k,l) = \binom{k+l-4}{k-2} + 1$.

**5.4.5.** (a) При любой раскраске чисел $1,\ldots,9$ в 2 цвета найдётся одноцветная трёхчленная арифметическая прогрессия.

(b) Аналог предыдущего пункта для чисел $1,\ldots,8$ неверен.

(c) Существует такое целое $W$, что при любой раскраске чисел $1,\ldots,W$ в 2 цвета найдётся либо трёхчленная арифметическая прогрессия первого цвета, либо четырёхчленная — второго.

(d) Существует такое целое $W$, что при любой раскраске чисел $1,\ldots,W$ в 3 цвета найдётся одноцветная трёхчленная арифметическая прогрессия.

(e) То же, что в предыдущем пункте, для $r$ цветов.

(f)* *Теорема Ван дер Вардена.* Для любых $k, r$ при любой раскраске натурального ряда в $r$ цветов найдётся одноцветная $k$-членная арифметическая прогрессия.

Подробнее см. [G].

## 5.5 Числа Рамсея для подграфов

**5.5.1.** Для любых графов $G$ и $H$ существует целое положительное число $x$, для которого при любой раскраске рёбер графа $K_x$ в два цвета найдётся либо подграф первого цвета, изоморфный $G$, либо подграф второго цвета, изоморфный $H$.

Наименьшее из таких чисел $x$ обозначается $R(G,H)$.

**5.5.2.** $R(G,H) \geqslant (\chi(G)-1)(c(H)-1)+1$, где $\chi(G)$ — хроматическое число графа $G$, $c(H)$ — число вершин в наибольшей компоненте связности.

**5.5.3.** Обозначим через $T_m$ дерево на $m$ вершинах.

(a) $R(T_m, K_n) = (m-1)(n-1)+1$.

(b) Если $m-1$ делит $n-1$, то $R(T_m, K_{1,n}) = m+n-1$.

**5.5.4.** Обозначим через $nK_3$ граф из $n$ непересекающихся (по вершинам) треугольников.
(a) $R(nK_3, nK_3) \geqslant 5n$.
(b) Ребра графа раскрашены в два цвета. Если есть два непересекающихся треугольника, в каждом из которых есть ребра обоих цветов, то среди их вершин есть пять, на которых есть два треугольника, пересекающихся по одной вершине, в каждом из которых есть ребра обоих цветов (такая конструкция называется *бантик*).
(c) $R(nK_3, nK_3) \leqslant 5n + 1$.
(d)* $R(2K_3, 2K_3) = 10$.
(e)* $R(nK_3, nK_3) = 5n$ для любого $n > 1$.

**5.5.5.** Найдите $R(K_3, C_n)$, где $C_n$ — цикл с $n$ вершинами (3.1).

## 5.6 Подсказки

*5.1.2.* (b) Следует из рекуррентного соотношения (a).
(c) Пусть это неверно, т. е. существует граф с $R(m-1, n)+R(m, n-1) - 1$ вершинами, в котором нет ни $m$-клики, ни $n$-антиклики.
(d) Используйте рекуррентные соотношения (a,c).

*5.1.3.* (a) Используйте то, что $R(3, 4) \leqslant 9$ (задача 5.1.1.(349)).
(b) Используйте то, что $R(3, 5) \leqslant 14$ (задача 5.1.1.(35)).

*5.1.4.* (a) Рассмотрите граф с 17 вершинами, в котором вершины $i, j$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $i - j - x^2$ делится на 17 для некоторого целого $x$.
(b) Рассмотрите граф с 13 вершинами, в котором вершины $i, j$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $i - j - x^3$ делится на 13 для некоторого целого $x$.

*5.1.5.* (a) Возьмите $r := [n2^{n/2}/e]$ в (d).
(b) Подсчёт двумя способами, ср. §2.6, или случайная раскраска, §7.3.
(c) Аналогично решению пункта (b). После выбора раскраски, в которой одноцветных клик не более $s$, удалите из каждой одноцветной клики по вершине.

*5.2.1.* (a) Из каждой точки выходит не менее 6 одноцветных отрезков.

*5.2.2.* (c) Аналогично решению задачи 5.1.2.c.

*5.2.5.* (a) *Первый способ.* Найти явное решение при помощи пифагоровых троек.
*Второй способ.* Для $p \geqslant 7$ построим граф с $p$ вершинами, в котором вершины $i, j$ соединены ребром тогда и только тогда, когда $i - j$ — квадратичный вычет по модулю $p$. В таком графе есть либо 3-клика, либо 3-антиклика.
(c) Придумайте раскраску рёбер графа $K_{1986}$ в три цвета такую, чтобы наличие треугольника означало наличие необходимой тройки чисел.
(d) Возьмем ненулевое решение $(x, y, z) = (3, 4, 5)$ сравнения $x^2 + y^2 \equiv z^2 \pmod{1987}$. (Такие решения можно получать аналогично пункту (a).) По малой теореме Ферма $x^2 \equiv x^{1988} \equiv (x^{497})^4 \pmod{1987}$. Тогда $(3^{497})^4 + (4^{497})^4 \equiv (5^{497})^4 \pmod{1987}$.

*5.3.1.* Докажем, что можно выбрать 4 таких студентов, если всего студентов 19 (а не 7000). Выберем одного из студентов и назовем его Никитой. Двух студентов среди оставшихся подружим, если они вместе с Никитой составляют слаженную тройку. Так как $R(4, 4) \leqslant 18$, то среди оставшихся студентов найдутся либо четверо попарно дружных, либо четверо попарно не дружных.

В первом случае, так как среди этих четверых есть слаженная тройка, то эти трое вместе с Никитой составляют нужную четверку.

Во втором случае к любым трем из этих четверых можно добавить Никиту. Среди полученных четырёх студентов найдётся слаженная тройка. Такой тройкой может быть только тройка студентов, к которой мы добавили Никиту. Итак, четверо попарно не дружных студентов составляют нужную четверку.

*5.3.2.* (a) Несложный перебор, основанный на рассмотрении выпуклой оболочки точек.

(c) Более сложный перебор, основанный на рассмотрении выпуклой оболочки точек.
(d) Посадим в каждую точку по студенту. Скажем, что четверо студентов образуют команду по бриджу, если они сидят в вершинах выпуклого 4-угольника.

*5.3.4.* (b) Аналогично решению задачи 5.1.5.

*5.4.1.* (a) Используйте ромб с углом $\pi/3$.
(b) Раскрасьте плоскость «полосами».
(c) Используйте пункт (a).

*5.4.2.* В противном случае вершины любого равностороннего треугольника со стороной 1 разноцветны.

*5.4.5.* (a) Разберите варианты раскраски чисел 4 и 6.
(d) Приведём доказательство для двух цветов. Оно более сложно, чем решение пункта (a), зато обобщается на 3 цвета, если вместо прямоугольника взять параллелепипед.
Расположим числа $1, \ldots, 325$ в таблицу $5 \times 65$: $a_{jk} := j + 5(k-1)$, $j \in \{1,2,3,4,5\}$, $k \in \{1,2,\ldots,65\}$. Среди первых 33 (5-элементных) столбцов есть два одинаково раскрашенных. Пусть, например, это 1-й и 23-й столбцы. В каждом из них среди первых трёх элементов есть одноцветная арифметическая прогрессия длины 2. Пусть, например, это 1-й и 3-й элементы. Пусть нет трёхчленной арифметической прогрессии. Тогда элементы 5 в обоих столбцах (1-м и 23-м) другого цвета. Рассматривая элемент 5 в 45-м столбце, получаем противоречие.

*5.5.2.* Постройте раскраску графа $K_{(\chi(G)-1)(c(H)-1)}$, для которой нет ни подграфа первого цвета, изоморфного $G$, ни подграфа второго цвета, изоморфного $H$.

# 6 Системы множеств (гиперграфы)

Разделы этого параграфа практически независимы друг от друга, их можно изучать в произвольном порядке.

Когда речь идет о множестве подмножеств, употребляют синонимы ‘система’, ‘семейство’ или ‘набор’ подмножеств.

## 6.1 Пересечения подмножеств

**6.1.1.** В любом семействе попарно пересекающихся подмножеств $n$-элементного множества не более $2^{n-1}$ подмножеств.

**6.1.2.** Пусть $2 \leqslant t \leqslant n-2$.
(a) Постройте семейство из $2^{n-t}$ подмножеств $n$-элементного множества, любые два из которых пересекаются не менее, чем по $t$ элементам.
(b) Существует ли такое семейство из $2^{n-t}+1$ подмножеств?

**6.1.3.** *Теорема Эрдеша—Ко—Радо.* Пусть $\mathcal{F}$ — любое семейство $k$-элементных подмножеств $n$-элементного множества.
(a) Если $2k \leqslant n$ и любые два подмножества из $\mathcal{F}$ пересекаются, то $|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k-1}$.
(b) Если $2k \geqslant n$ и объединение никаких двух подмножеств из $\mathcal{F}$ не есть все $n$-элементное множество, то $|\mathcal{F}| \leqslant \binom{n-1}{k}$.

**6.1.4.** Любое семейство из двадцати 5-элементных подмножеств 15-элементного множества можно так разбить на 6 подсемейств, чтобы любые два непересекающихся подмножества лежали бы в разных подсемействах.

*Замечание.* В таких ситуациях (см. §8.1) обычно вместо разбиении на подсемейства говорят о раскраске в разные цвета. Тогда вопреки наглядному представлению о раскраске красятся множества, но при этом не красятся их элементы.

**6.1.5.** Для $l < k$ обозначим через $M(n,k,l)$ минимальное количество таких $k$-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, что любое

$l$-элементное подмножество множества $\mathcal{R}_n$ целиком содержится хотя бы в одном из них. Например, задача 2.6.2.a утверждает, что $M(n,k,l) \geqslant \binom{n}{l}/\binom{k}{l}$.
(a) Найдите $M(n,k,1)$.
(b) Найдите $M(6k+3,3,2)$.
(c)* Найдите $M(n,3,2)$.
(d) Докажите, что $M(n,k,l) \geqslant nM(n-1,k-1,l-1)/k$.

## 6.2 Системы общих представителей

**6.2.1.** В группе студентов Яндекса 20 человек. Из них ровно 5 человек — специалисты по поиску в интернете, 5 — по борьбе со спамом и т.д., всего 18 видов проблем (так что, очевидно, некоторые студенты являются специалистами по разным проблемам). Требуется составить из этих студентов сильную команду разработчиков. При этом хочется, чтобы для каждой проблемы в команде нашелся специалист по ней и чтобы размер команды был как можно меньше (для экономии зарплаты).
(a) При любом раскладе получится набрать такую команду из семи человек.
(b) При некотором раскладе не получится набрать такую команду из пяти человек.

*Системой общих представителей* (сокращённо с.о.п.) для набора $\mathcal{M}$ множеств называется такое множество $A$, что $M \cap A \neq \varnothing$ для любого $M \in \mathcal{M}$.

**6.2.2.** Для набора $\{\{1,6\},\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\},\{5,6\}\}$ множеств найдите (a) некоторую с.о.п.; (b) с.о.п. наименьшего размера.

*Жадным алгоритмом* называется следующий. Рассмотрим произвольный элемент $x_1$, который лежит в максимальном количестве множеств. Добавим его в с.о.п, выкинем множества, которые его содержат. Аналогично найдём элемент $x_2$, который лежит в максимальном количестве оставшихся множеств, и т.д.

*Минимальная* с.о.п. — с.о.п. наименьшего размера для данного набора $\mathcal{M}$.

**6.2.3.** Постройте пример набора множеств, у которого размер минимальной с.о.п. на $k$ меньше размера любой из с.о.п., которые могут быть получены жадным алгоритмом, если (a) $k = 1$; (b) $k = 2$; (c) $k$ произвольно.

**6.2.4.** Элемент из $\binom{\binom{\mathcal{R}_n}{k}}{s}$ есть система подмножеств множества $\mathcal{R}_n$, в которой $s$ множеств, каждое из которых состоит из $k$ элементов.

(a) Приведите пример такой системы $\mathcal{M} \in \binom{\binom{\mathcal{R}_{2n}}{k}}{2\binom{n-1}{k-1}}$, что минимальная с.о.п. состоит из двух элементов и единственна.

(b) Чему равно количество минимальных с.о.п. для системы $\mathcal{M}$ всех $k$-элементных подмножеств множества $\mathcal{R}_n$?

(c) При данных $n, k$ найдите наибольшее $s$, для которого найдётся система $\mathcal{M} \in \binom{\binom{\mathcal{R}_n}{k}}{s}$, имеющая ровно две минимальных с.о.п.

## 6.3 Системы различных представителей

**6.3.1.** (a) *Лемма о паросочетаниях.* Пусть есть несколько (конечное число) юношей и девушек. Каждый юноша любит некоторое (вполне возможно, нулевое) число девушек. Тогда всех юношей можно женить на любимых ими девушках (так, чтобы брачные пары не пересекались) тогда и только тогда, когда для любого множества юношей число девушек, которых любит хотя бы один из них, не меньше числа этих юношей.

(b) *Теорема Холла.* Пусть $S_1, \ldots, S_m$ — конечные множества. В каждом из них можно выбрать по элементу $x_i \in S_i$ так, чтобы все $x_i$ были различны, тогда и только тогда, когда для каждого $k \in \{1, \ldots, m\}$ объединение любых $k$ из этих множеств имеет не менее $k$ элементов.

**6.3.2.** Какое минимальное количество рёбер можно удалить из графа $K_{n,n}$, чтобы не осталось паросочетаний (т. е. подграфа из $n$ непересекающихся отрезков)?

Пусть дан набор $\mathcal{M}$ множеств. В каждом из множеств выбрали по элементу. Если все элементы различны, то такой набор назовем *системой различных представителей* (сокращенно с.р.п.). Или, формально, *системой различных представителей* для набора $\mathcal{M}$ множеств называется упорядоченный набор различных элементов $x(S) \in S$, $S \in \mathcal{M}$, т. е., такое инъективное отображение $x : \mathcal{M} \to \cup_{S\in\mathcal{M}} S$, что $x(S) \in S$ для любого $S \in \mathcal{M}$.

(Упорядоченность набора важна для подсчёта количества с.р.п. в задаче 6.3.5, а не для выяснения существования с.р.п.)

Например, теорема Холла утверждает, что у системы $S_1, \ldots, S_m$ конечных множеств есть система различных представителей тогда и только тогда, когда $|\cup_{i\in I} S_i| \geqslant |I|$ для любого $I \subset \{1, \ldots, m\}$.

**6.3.3.** Пусть для системы $m$-элементных множеств каждый элемент, входящий хотя бы в одно из них, входит ровно в $l$ из них. Тогда при $m \geqslant l$ у этой системы множеств есть с.р.п.

**6.3.4.** С.р.п. подсистемы можно дополнить до с.р.п. всей системы. Вот более подробная формулировка. Из системы $\mathcal{S}$ множеств выбрано несколько подмножеств $S_1, \ldots, S_k$. Допустим, что элементы $x_1, \ldots, x_k$ — это с.р.п. системы множеств $S_1, \ldots, S_k \in \mathcal{S}$. Если у всей системы $\mathcal{S}$ есть с.р.п., то существует ее с.р.п., содержащая элементы $x_1, \ldots, x_k$.

**6.3.5.** Обозначим через $F(S_1, \ldots, S_m)$ количество с.р.п. у системы $\{S_1, \ldots, S_m\}$.

(a) Для любого ли $k$ существует система $S_1, \ldots, S_m$ такая, что $F(S_1, \ldots, S_m) = k$?

(b) Найдите все возможные значения $F(S_1, S_2)$ при условии $|S_1| = |S_2| = 5$.

(c)* Найдите все возможные значения $F(S_1, S_2, S_3)$ при условии $|S_1| = |S_2| = |S_3| = 5$.

**6.3.6.** Пусть даны два разбиения множества $S$ на $m$ подмножеств: $S = \bigcup_{i=1}^m A_i = \bigcup_{i=1}^m B_i$, $m \leqslant |S|$. Пусть выполнено одно из следующих условий.

(a) Для любого подмножества $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$ множество $A_{i_1} \cup \ldots \cup A_{i_k}$ содержит не более $k$ из множеств $B_1, \ldots, B_m$.

(b) $|A_1| = \ldots = |A_m| = |B_1| = \ldots = |B_m|$ и $A_i \cap A_j = B_i \cap B_j = \varnothing$ при $1 \leqslant i < j \leqslant m$.

Тогда можно перенумеровать множества $A_1, \dots, A_m$ так, чтобы в новой нумерации имели место равенства $A_i \cap B_i \neq \varnothing$ для любого $i = 1, \dots, m$.

**6.3.7.*** Пусть даны два разбиения множества $S$ на $m$ подмножеств: $S = \bigcup_{i=1}^m A_i = \bigcup_{i=1}^m B_i$, $m \leqslant |S|$. Пусть для любых подмножеств $I, J \subset \{1, \dots, m\}$ выполнено неравенство:

$$\left| \left( \bigcup_{i \in I} A_i \right) \cap \left( \bigcup_{j \in J} B_j \right) \right| \geqslant |I| + |J| - m.$$

Тогда можно перенумеровать множества $A_1, \dots, A_m$ так, чтобы после нумерации нашлись попарно различные элементы $x_i \in A_i \cap B_i$, $i = 1, \dots, m$.

Такой набор $x_1, \dots, x_m$ называются *общей системой различных представителей* наборов множеств $A_1, \dots, A_m$ и $B_1, \dots, B_m$.

**6.3.8.** (a) При каком условии на любовь юношей и девушек можно распределить всех девушек по непересекающимся гаремам, в каждом из которых ровно по две жены?
Или, формально, найдите необходимое и достаточное условие на двудольный граф, при котором вершины можно занумеровать $A_1, \dots, A_n$ (в первой доле) и $B_1, C_1, \dots, B_n, C_n$ (во второй доле) так, что есть рёбра $A_1B_1, A_1C_1, \dots, A_nB_n, A_nC_n$.
(b) Пусть есть $m$ юношей и несколько девушек, каждый юноша любит не менее $t$ девушек, причем всех юношей можно женить на любимых ими девушках (так, чтобы брачные пары не пересекались), т. е. есть паросочетание. Тогда имеется не менее

$$\begin{cases} t!, & t \leqslant m \\ t!/(t-m)!, & t > m \end{cases}$$

способов переженить юношей на любимых ими девушках.

## 6.4 Перманент

*Перманент* квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ размера $n \times n$ определяется формулой

$$\mathrm{Per}(A) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)},$$

где $\Sigma_n$ есть множество всех перестановок $n$-элементного множества.

**6.4.1.** Найдите перманент матрицы

(2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

($k$) $4 \times 4$, у которой $k = 0, 1, 2, 3, 4$ диагональных элементов — нули, а все остальные (в т.ч. не диагональные) элементы — единицы;

($n$) $n \times n$, у которой на диагонали нули, а вне диагонали — единицы.

*Подматрицей* данной матрицы называется матрица, полученная из данной вычеркиванием некоторого количества строк и столбцов. *Перманент* прямоугольной матрицы $A$ определяется как сумма перманентов всех квадратных подматриц максимального размера. Или, формулой, при $m < n$

$$\mathrm{Per}(A) := \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^{m} a_{i,\sigma(i)},$$

где сумма берётся по всем $m$-элементным размещениям чисел от 1 до $n$. При $m > n$ положим $\mathrm{Per}(A) := \mathrm{Per}(A^T)$.

**6.4.2.** Найдите перманент матрицы $m \times n$, состоящей из одних единиц.

**6.4.3.** (a) Перманент не меняется при перестановке строк.

(b) *Формула разложения по строке.* Если $m \leqslant n$, то

$$\mathrm{Per}(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \mathrm{Per}(A_{ij}),$$

где $A_{ij}$ — матрица, получаемая из исходной вычеркиванием $i$-ой строки и $j$-ого столбца.

**6.4.4.** (a) Перманент матрицы $n \times n$ из нулей и единиц равен нулю тогда и только тогда, когда есть нулевая подматрица $s \times t$, где $s+t = n+1$.
(b) Для любых $m \leqslant n$ перманент прямоугольной матрицы $m \times n$ из нулей и единиц равен количеству с.р.п. (§6.3) для системы из $m$ подмножеств множества $\{1, \ldots, n\}$, определяемых строками.

## 6.5 Размерность Вапника-Червоненкиса

**6.5.1.** (a) Математики Вася и Чарли играют. Сначала Чарли отмечает на плоскости $k$ точек. Затем Вася красит некоторые из этих точек. Если теперь Чарли сможет провести прямую, отделяющую покрашенные точки от непокрашенных, то он выиграл, иначе — проиграл. При каком наибольшем $k$ Чарли может выиграть независимо от действий Васи?
(b) То же, но точки отмечаются в пространстве, и Чарли проводит полуплоскость.

Пусть $\mathcal{R} \subset 2^X$ — семейство подмножеств произвольного множества $X$. *Размерностью Вапника-Червоненкиса* $VC(X, \mathcal{R})$ (или VC-размерностью) пары $(X, \mathcal{R})$ называется максимальное $n$ такое, что существует $n$-элементное подмножество $A \subset X$, для которого любое подмножество в $A$ является пересечением $A$ и некоторого подмножества из $\mathcal{R}$. Такое подмножество $A$ называется *дробящимся* системой $\mathcal{R}$. Если такого $n$ не существует, то полагают $VC(X, \mathcal{R}) := \infty$.

Естественные примеры, в том числе пример с бесконечностью, приведены в следующих задачах.

**6.5.2.** (a) Найдите VC-размерность семейства всех (двумерных замкнутых) прямоугольников на плоскости со сторонами, параллельными осям координат.
(b) *Теорема.* VC-размерность семейства всех полупространств в $\mathbb{R}^n$ равна $n+1$.
(c) *Теорема Радона.* Любые $n+2$ точки в $\mathbb{R}^n$ можно разбить на два множества, выпуклые оболочки которых пересекаются.

**6.5.3.** Найдите VC-размерность следующих семейств множеств:
(a) $\{\{1, \ldots, k\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;

(b) $\{\{k,\, k+1,\, k+2,\, \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
(c) $\{\{k,\, 2k,\, 3k,\, \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
(d) $\{\{k,\, k^2,\, k^3,\, \ldots\} \mid k \in \mathbb{N}\}$;
(e) $\{\{k_1k_2,\, 2k_1k_2,\, 3k_1k_2,\, \ldots\} \mid k_1, k_2 \in \mathbb{N}\}$.

**6.5.4.** Найдите VC-размерность следующих конечных семейств:
(a) $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{1,2,4\}$ $\{1,2,5\}$, $\{2,3,6\}$, $\{3,4,5\}$, $\{3,4,6\}$, $\{2,4,5,6\}$.
(b) $\{1,2,3\}$, $\{3,4,5\}$, $\{1,2,4\}$ $\{1,2,5\}$, $\{2,4,5\}$, $\{2,3,5\}$, $\{2,6,7\}$, $\{3,4,6,7\}$.
(c) $\{1,2,3\}$, $\{4,5,6\}$, $\{7,8,9\}$, $\{1,4,7\}$, $\{2,5,8\}$, $\{3,6,9\}$, $\{1,6,9\}$.
(d) Можно ли добавить ещё одно множество к системам из предыдущих пунктов так, чтобы VC-размерность увеличилась на 1?

**6.5.5.** (a) Возможно ли равенство $VC(\mathbb{R}^2, \mathcal{R}) = \infty$ для некоторого набора $\mathcal{R} \subset 2^{\mathbb{R}^2}$?
(b) То же для некоторого счётного набора $\mathcal{R} \subset 2^{\mathbb{R}^2}$ ограниченных множеств.

**6.5.6.** В любом семействе VC-размерности $d$, в каждом множестве которого не более $r$ элементов, найдутся такие подмножества $X$ и $Y$, что (a) $|X \cap Y| \leqslant r - d$; (b) $|X \cap Y| \geqslant d - 1$.

**6.5.7.** Если $\mathcal{R} \subset 2^{\mathcal{R}_n}$ и $|\mathcal{R}| = n$, то для любого $k = 1, 2, \ldots, n$ найдётся такое множество $A$, что $|\{R \cap A \mid R \in \mathcal{R}\}| \geqslant k = |A| + 1$.

**6.5.8.** Если $\mathcal{R} \subset 2^{\mathcal{R}_n}$ — семейство VC-размерности $d$, то существует *наследственное* (т. е. содержащее с каждым множеством все его подмножества) семейство $\mathcal{R}' \subset 2^{\mathcal{R}_n}$ VC-размерности $d$, для которого (a) $|\mathcal{R}'| \leqslant |\mathcal{R}|$; (b) $|\mathcal{R}'| \geqslant |\mathcal{R}|$.

## 6.6 Подсолнухи

*Подсолнухом с $k$ лепестками и ядром $Y$* называют такой набор множеств $\{F_1, \ldots, F_k\}$, что $|F_i \cap F_j| = Y$ при $i \neq j$ и все множества $F_i \setminus Y$ непусты. Например,

• попарно непересекающиеся множества образуют подсолнух с пустым ядром.

• одномерные векторные подпространства (§8.1) образуют подсолнух с одноэлементным ядром.

• множества $X_p$ всех рациональных дробей с фиксированным простым знаменателем $p$ образуют подсолнух с бесконечным ядром.

Большая часть задач этого раздела взята из книги [J].

**6.6.1.** Найдите размер минимальной с.о.п. (§6.2) подсолнуха.

**6.6.2.** (a) Если $|\mathcal{F}| > s!(k-1)^s$, то в $\mathcal{F}$ найдётся подсолнух с $k$ лепестками.
(b) Найдутся $(k-1)^s$ подмножеств конечного множества, в каждом из которых $s$ элементов и среди которых нельзя выбрать подсолнух с $k$ лепестками.

Кроме подсолнухов, можно рассматривать также другие конфигурации множеств, задаваемые условиями на пересечения. Мы предлагаем читателю самостоятельно приводить интересные примеры таких конфигураций.

Пусть, например, попарные пересечения не обязательно равны, однако содержат одинаковое количество элементов. *Слабой $\Delta$-системой* называется такой набор множеств $S_1, \ldots, S_k$, что $|S_i \cap S_j|$ одинаковы при всех $i \neq j$. Очевидно, что подсолнух является слабой $\Delta$-системой. Обратное неверно. Однако есть следующая теорема.

**Теорема Деза.** *Если $\mathcal{F}$ — слабая $\Delta$-система из $s$-элементных множеств и $|\mathcal{F}| \geqslant s^2 - s + 2$, то $\mathcal{F}$ — подсолнух.*

Доказательство теоремы достаточно сложное.

Покажем, что приведенная оценка точна.

**6.6.3.** Для любого простого числа $p$ существует слабая $\Delta$-система $(p+1)$-элементных множеств, не являющаяся подсолнухом и состоящая из $p^2 + p + 1$ множеств.

**6.6.4.** *Общая часть* множеств $S_1, \ldots, S_k$ — это объединение $\bigcup_{i \neq j}(S_i \cap S_j)$ всех их попарных пересечений.
(a) Если $\mathcal{F}$ — конечный набор $s$-элементных множеств и $|\mathcal{F}| > (k-1)^s$, то найдутся $k$ множеств из $\mathcal{F}$, в общей части которых менее $s$ элементов.
(b) Оценка $|\mathcal{F}| > (k-1)^s$ в пункте (a) точна.

**6.6.5.** *Цветком с $k$ лепестками и ядром $Y$* называется такой набор $\mathcal{F}$ множеств, что каждое из них содержит $Y$ и не существует с.о.п. из $k-1$ элемента для набора $\{S \setminus Y : S \in \mathcal{F}\}$.
(a) Если $\mathcal{F}$ — конечный набор $s$-элементных множеств и $|\mathcal{F}| > (k-1)^s$, то $\mathcal{F}$ содержит цветок с $k$ лепестками (и некоторым ядром).
(b) Оценка $|\mathcal{F}| > (k-1)^s$ из пункта (a) точна.

## 6.7 Подсказки

*6.1.3.* (a) Среди $n-k+1$ подмножеств

$$\{1, 2, \ldots, k\},\ \{2, 3, \ldots, k+1\}, \ldots, \{n-k+1, n-k+2, \ldots, n\}$$

не более $k$ лежат в $\mathcal{F}$.

*6.2.2.* (a) Возьмите объединение.

*6.2.4.* (a) $\mathcal{M}$ состоит из всех $k$-элементных подмножеств в $\mathcal{R}_n$, содержащих 1, и всех $k$-элементных подмножеств в $\mathcal{R}_{2n} - \mathcal{R}_n$, содержащих $n+1$.

*6.3.1.* (b) Примените лемму о паросочетаниях. Нарисуем двудольный граф: вершины долей — это элементы и множества, ребро $(x, S)$ проведено тогда и только тогда, когда $x \in S$.
Несложно доказать утверждение и по индукции. Рассмотрите отдельно случай, когда найдётся подмножество $I \subset \{1, \ldots, m\}$ такое, что $|\cup_{i \in I} S_i| = |I|$.
Можно доказывать утверждение и в эквивалентной форме 6.4.4.a, см. задачу 6.4.4.b.

*6.3.3.* Примените теорему Холла 6.3.1.b.

*6.3.4.* Достаточно доказать утверждение для $|\mathcal{S}| = k+1$. Для этого надо проверить, что условие невозможности дополнения с.р.п. противоречит условию теоремы Холла для $\mathcal{S}$.

# 7 Аналитические и вероятностные методы

## 7.1 Асимптотики

Если не оговорено противное, то $o$, $O$ (рукописные обозначения: $\overline{o}$, $\underline{O}$), асимптотики и пределы рассматриваются при $n \to \infty$.

Найти асимптотику для функции $a(n)$ означает найти «явную» функцию $f(n)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a(n)}{f(n)} = 1$.

**7.1.1.** Найдите асимптотику для

(a,b,c) сумм из задачи 2.1.6;

(d) количества $A_n$ подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, не содержащих двух подряд идущих чисел;

(e)* То же, что в (d), для *трёх* подряд идущих чисел.

В ответе можно использовать функцию $x_P(a, b)$, которая по числам $a, b$ и многочлену $P$, имеющему единственный корень на отрезке $[a, b]$, выдает этот корень.

**7.1.2.** Найдите асимптотику наибольшего количества рёбер в графе с $n$ вершинами, не содержащем $k$-клики. Здесь $k = k_n = o(n)$.

**7.1.3.** Докажите следующие соотношения, предполагая в асимптотиках, что $n \to \infty$, а $k$ фиксировано. (Число $\mathrm{ex}_H(n)$ определено в задаче 3.7.6.)

(a) $\mathrm{ex}_{P_k}(n) \gtrsim \frac{k-2}{2} \cdot n$.

(b) $\mathrm{ex}_{C_{2k+1}}(n) \gtrsim \frac{n^2}{4}$.

(c) $\mathrm{ex}_{K_{1,k}}(n) \sim \frac{k-1}{2} \cdot n$.

*Замечание.* Знаменитая теорема Эрдеша-Стоуна-Шимоновица утверждает, что для любого фиксированного $H$ такого, что $\chi(H) > 2$, при $n \to \infty$ выполнено $\mathrm{ex}_H(n) \sim \dfrac{n^2}{2}\dfrac{\chi(H)-2}{\chi(H)-1}$. (Для двудольных $H$ известно лишь, что $\mathrm{ex}_H(n) = o(n^2)$.) То есть, если мы запрещаем графу иметь некоторый фиксированный подграф $H$, то доля рёбер, которые при этом можно провести, среди всевозможных рёбер определяется хроматическим числом графа $H$. Удивительно, что хроматическое число возникает в этой задаче! Доказательство теоремы можно прочесть по ссылке [1]. (Этой теоремой нельзя пользоваться при решении задачи 7.1.3.b.)

**7.1.4.** (a) $n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^n = (2+o(1))^n$. По определению, это означает, что существует функция $\psi(n) = o(1)$, для которой $n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^n = (2+\psi(n))^n$; или, что то же самое, $\sqrt[n]{n^2\left(2+\frac{1}{n}\right)^n} - 2 = o(1)$.
(b) $3^{\sqrt{n}}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n = (2+o(1))^n$.

**7.1.5.** (a) Найдите асимптотику для $\sqrt[n]{\binom{n}{[n/2]}}$ (ср. с задачами 2.4.3.b и 7.1.10.b).
(b) $\dfrac{2^n}{n+1} < \dbinom{n}{[n/2]} < 2^n$.
(c) Найдите асимптотику для $\sqrt[m]{\dbinom{3m}{m}}$.
(d) $\dfrac{3^{3m}}{n+1} < 2^{2m}\dbinom{3m}{m} < 3^{3m}$.
(e) $\dbinom{n}{[an]} = (a^{-a}(1-a)^{a-1}+o(1))^n$.
(f) $\dfrac{n!}{[a_1n]!\ldots[a_sn]!} = (e^{-a_1\ln a_1-\ldots-a_s\ln a_s}+o(1))^n$, где $a_1+\ldots+a_s=1$.

**7.1.6.** (a) Найдите асимптотику для $\ln(n!)$.
(b) Найдите асимптотику для $\sqrt[n]{n!}$.
(c) $n^ne^{-n+1} \leqslant n! \leqslant n^{n+1}e^{-n+1}$;
(d) $n! \leqslant n^ne^{-n+1}\sqrt{n}$.
(e)* *Формула Стирлинга.* $n! \sim n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n^ne^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1$.

**7.1.7.** (a) $\dbinom{n}{k} < \dfrac{n^k}{k!}$.
(b) $\ln\dfrac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k} = -\dfrac{k(k+1)}{2n}\left(1+O\left(\dfrac{k}{n}\right)\right)$ для $k=k_n<n/2$. Это означает, что существует функция $\psi(n) = O\left(\frac{k}{n}\right)$, для которой $\ln\dfrac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k} = -\dfrac{k(k+1)}{2n}(1+\psi(n))$; или, что то же самое, $-1-\dfrac{2n}{k(k+1)}\ln\dfrac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k} =$

$O\left(\dfrac{k}{n}\right)$.

(c) $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n^k}{k!}e^{-\frac{k(k-1)}{2n}+O(k^3/n^2)}$ для $k = k_n < n/2$.

(Сформулируйте сами, что здесь означает $e^{-\frac{k(k-1)}{2n}+O(k^3/n^2)}$.)

(d) $\dbinom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$ для $k = k_n = o(\sqrt{n})$.

Неформально, это означает, что для $k \ll \sqrt{n}$ вероятность выпадения ровно $k$ орлов при $n$ подбрасываниях монеты приближенно равна $\dfrac{n^k}{k!}2^{-n}$. В неформальном замечании к этому и следующему пунктам достаточно интуитивного понимания того, что такое вероятность.

(e) $\dbinom{2n}{n-k}\Big/\dbinom{2n}{n} = e^{-\frac{k^2}{n}(1+o(1))}$ для $k = k_n = o(n)$.

(Сформулируйте сами, что здесь означает $e^{-\frac{k^2}{n}(1+o(1))}$.)

Неформально, это означает, что для $k \ll n$ вероятность $P_k$ выпадения ровно $n-k$ орлов при $2n$ подбрасываниях монеты приближенно равна $P_0 e^{-k^2/n}$ (*нормальное распределение*).

**7.1.8.** (a) Верно ли, что записи $e^{o(n)}$ и $o(e^n)$ «равнозначны»? т. е., верно ли, что для любой функции $f : \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$ условия $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln f(n)}{n} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)e^{-n} = 0$ равносильны?

(b) Подберите функции $f, g : \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$ такие, что $f(n) \sim g(n)$, но $e^{f(n)} \neq O(e^{g(n)})$.

(c) Могут ли функции $f, g : \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(n) = o(g(n))$ и $g(n) = o(f(n))$?

(d) Могут ли функции $f, g : \mathbb{Z} \to (0, +\infty)$ одновременно удовлетворять соотношениям $f(n) = O(g(n))$ и $g(n) = O(f(n))$?

(e) Следует ли из двух соотношений из (d), что $f(n) \sim g(n)$?

**7.1.9.** (a) Какая функция растет быстрее: $x^{(x^x)}$ или $(x!)^{(2^x)}$? т. е. найдите $\lim\limits_{x\to\infty} x^{(x^x)}(x!)^{(-2^x)}$.

(b) Существует ли функция $\psi(n) = o(1)$, для которой $(2 + \psi(n))^n 2^{-n} e^{-\sqrt{n}} \to \infty$?

(Как в любой математической задаче, нужно обосновать ответ: привести пример такой функции или доказать её существование или доказать, что такой функции не существует.)

В задачах 7.1.10.bcde и 7.1.11.cef, в отличие от остальных, можно пользоваться без доказательства *формулой Стирлинга* 7.1.6.e.

**7.1.10.** Найдите асимптотику для

(a) $\ln\binom{n^2}{n}$; (b) $\binom{n}{[n/2]}$ (c) $\binom{n^2}{n}$;

(d)* $\binom{n}{[n^\alpha]}$, $\alpha \in (0,1)$; (e) $(2n-1)!! := (2n-1)\cdot(2n-3)\cdot\ldots\cdot3\cdot1$;

(f) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$; (g)* $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^4$.

**7.1.11.** Найдите асимптотику функции $s = s(n)$, заданной как

(a) $s^s = n$;

(b) $s^{s^3} = n$;

(c) $s(n) := \max\{k \mid k! \leqslant n\}$;

(d) $s(n) := \min\left\{m \in \mathbb{N} \mid \binom{n}{m} < 2^{\binom{m}{2}}\right\}$;

(e) $s(n) := \min\{m \in \mathbb{N} \mid 2^m/m > n\}$ (функция $2^m/m$ возникает как сложность реализации функций алгебры логики);

(f) $s(n) := \min\left\{m \in \mathbb{N} \mid \binom{m}{[m/2]} > n\right\}$ (ср. с задачей 2.4.3.b).

**7.1.12.*** В ответах можно использовать константы, заданные в виде суммы рядов. Найдите асимптотику для

(a) количества линейных подпространств в $\mathbb{Z}_2^n$ (см. задачу 2.4.7 и определение перед ней);

(b) количества унициклических графов с $n$ вершинами (см. задачу 3.2.5.b и определение перед ней).

## 7.2 Независимость и доказательства существования

### Введение

Цель этого раздела — продемонстрировать метод доказательства некоторых интересных комбинаторных результатов (7.2.1.b, 7.2.2-7.2.4 и 7.2.16-7.2.26), заключающийся в применении локальной леммы Ловаса 7.2.15.

Следующие две части введения важны, но формально не используются далее.

*Об открытии леммы Ловаса и ее роли в математике.* Локальная лемма Ловаса была доказана в 1973 году выдающимся венгерским математиком Ласло Ловасом. Впрочем, тогда Ловасу было всего 25 лет, и, хотя яркие результаты у него уже к тому времени были, все-таки на тот момент его воспринимали не как классика, но как восходящую звезду. Он уже был трехкратным победителем международных математических олимпиад (1964, 1965 и 1966 годов). Классиком Ловас станет позже, и весьма серьезную роль в этом сыграет доказанная им Локальная лемма. Разумеется, не только она: будет и топологический метод в комбинаторике, и мощные результаты в теории алгоритмов, и значительный вклад в науку о графовых пределах, и многое другое. Тем не менее, Локальная лемма — это замечательный инструмент вероятностной комбинаторики, благодаря которому были получены и продолжают получаться многочисленные яркие результаты в области дискретной математики и теории алгоритмов.

Работа, в которой Ловас формулирует и доказывает свою Локальную лемму, написана в соавторстве с Полом Эрдешем — еще одним великим специалистом по комбинаторике, основателем большой научной школы, автором множества задач и идей. Среди прочего, Эрдеш был одним из самых активных пропагандистов вероятностного метода в комбинаторике. Поэтому, несмотря на то, что Локальную лемму доказал именно Ловас, роль Эрдеша во всем этом не стоит недооценивать. В статье Эрдеша и Ловаса [EL] речь шла о раскрасках *гиперграфов* (т.е. наборов подмножеств конечного множества). Как раз ради доказательства существования некоторой раскраски Локальная лемма и придумывалась (т.е. ради обобщения задач 7.2.1 и 7.2.16; не бойтесь, эти задачи формулируются и решаются без слова ‘гиперграф’). Однако очень быстро стало понятно, насколько это мощный и плодотворный инструмент. Например, почти сразу же с его помощью Дж. Спенсер улучшил нижнюю оценку числа Рамсея, которая не поддавалась улучшению в течение сорока лет. Сейчас диапазон применения леммы становится все шире. Здесь теория графов и гиперграфов, здесь экстремальные задачи комбинаторики, теория алгоритмов и даже комбинаторная геометрия и теория диофантовых приближений.

За прошедшие десятилетия появились разнообразные усовершенствования Локальной леммы, многие из которых уже лишь отдаленно напоминают первоначальный вариант. И это еще одно свидетельство исключительной плодотворности идеи Ловаса.

*Как устроено изложение в этом разделе.* Основные идеи демонстрируются по одной и на ‘олимпиадных’ примерах, т.е. на простейших частных случаях, свободных от технических деталей. Мы показываем, *как можно придумать* лемму Ловаса. Путь к ее доказательству и применениям намечен в виде задач (всех задач этого и следующего разделов, кроме задач 7.2.6 и 7.2.7, которые просто поясняют понятие независимости).

Обычно лемму Ловаса излагают на вероятностном языке. Однако, по нашему мнению, приводимое комбинаторное изложение более доступно и полезно для начинающего. Поскольку излагать вероятностные идеи (например, независимости) и развивать вероятностную интуицию, но при этом сохранять строгость изложения, разумнее, не определяя понятия вероятностного пространства. [4] Эти и другие идеи как раз подготовят начинающего к введению этого довольно абстрактного понятия, ср. с [Z, философски-методическое отступление]. Кроме того, вероятностной интуиции начинающего противоречит получение вероятностными методами абсолютно (а не с некоторой вероятностью) верного результата. [5] (Впрочем, для человека, уже владеющего понятием вероятностного пространства, изложение на вероятностном языке не хуже комбинаторного.)

*Начнем с интересных фактов, которые можно доказать при помощи леммы Ловаса (и вряд ли можно доказать без нее!).* Видимо, из задач 7.2.1-7.2.4 вы сможете решить сейчас только задачу 7.2.1.a. К задачам 7.2.1.b-7.2.4 разумно вернуться после изучения

---

[4] Отличие элементарной теории вероятностей от перечислительной комбинаторики состоит в интересе к *долям* вместо чисел и к *неравенствам* вместо равенств. (М.Н. Вялый.)

[5] Объяснять, как с помощью вероятностных методов можно получить абсолютно верный результат, лучше на более простых примерах. См., например, задачи 7.2.5, 7.2.10, 7.2.11, 7.3.3.a и [Go, задача 3 на стр. 3]. Мы хотели бы сделать книгу доступной даже для тех, кто не разбирал таких примеров.

следующего подраздела. Более того, задача 7.2.2 естественнее по формулировке, но сложнее двух следующих.

**7.2.1.** (a) По каждому из 100 видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ на работе был специалист по нему. (Это задача 2.6.7.)

(b) По каждому из нескольких видов работ в фирме имеется ровно 8 специалистов. (Теперь видов работ не обязательно 100.) Каждый вид работ имеет общих специалистов не более, чем с 30 другими видами. Каждому сотруднику нужно дать выходной в субботу или в воскресенье. Докажите, что это можно сделать так, чтобы и в субботу, и в воскресенье для каждого вида работ на работе был специалист по нему.

Для каждого вида работ $e$ обозначим через $A_e$ множество распределений выходных, при которых для вида работ $e$ и в субботу, и в воскресенье на работе есть специалист по $e$. Нужно доказать, что $\cap_e A_e \neq \varnothing$. В пункте (a) это делается путём подсчёта количества элементов. В пункте (b) этого уже не хватает; нужна идея из следующего раздела. Там мы покажем, как *независимость* (определённую там) можно применять для оценки количества элементов в пересечении множеств.

**7.2.2.** По кругу стоит 160 студентов из 10 групп, в каждой из которых 16 студентов. Докажите, что можно в каждой группе выбрать по старосте так, чтобы никакие два старосты не стояли рядом.

**7.2.3.** Докажите, что можно раскрасить первые 15 миллионов натуральных чисел в 2 цвета так, чтобы не было одноцветной арифметической прогрессии длины 32.

**7.2.4.** Докажите, что для любых 10 чисел $M_1, \ldots, M_{10} \in \mathbb{R}$ можно раскрасить все вещественные числа в 2 цвета так, чтобы для любого $x \in \mathbb{R}$ не все числа $x + M_1, \ldots, x + M_{10}$ были одноцветны.

Решения задач 7.2.2-7.2.4 основаны на идее, аналогичной решению задачи 7.2.1.b.

Для удобства читателя этот раздел структурирован более тонко, чем остальные. В частности, некоторые указания и решения приведены прямо в нем (а не в конце параграфа).

### Независимость и лемма Ловаса

Приведем задачи, которые подведут нас к лемме Ловаса 7.2.15 (при помощи которой доказываются результаты 7.2.1.b, 7.2.2-7.2.4 и другие).

**7.2.5.** Каждый житель города либо здоров, либо болен, а также либо богат, либо беден. Богатство и здоровье *независимы*, т. е. доля богатых здоровых среди богатых равна доле здоровых среди всех жителей. Известно, что есть богатый горожанин и есть здоровый горожанин. Обязательно ли найдётся богатый здоровый горожанин?

Подмножества $A$ и $B$ конечного множества $M$ называются *независимыми*, если

$$|A \cap B| \cdot |M| = |A| \cdot |B|.$$

При $B \neq \varnothing$ это равносильно тому, что доля множества $A \cap B$ в $B$ равна доле множества $A$ в $M$.

**7.2.6.** Зависимы ли следующие подмножества? (Мы называем *зависимыми* подмножества, не являющиеся независимыми.)
(a) В множестве всех клеток шахматной доски подмножество клеток в первых трёх её строках с подмножеством клеток в последних четырёх её столбцах.
(b) подмножества $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4\}$ и $\{1,3\} \subset \{1,2,3,4\}$.
(c) подмножества $\{1,2\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$ и $\{1,3\} \subset \{1,2,3,4,5,6\}$.

**7.2.7.** Зависимы ли следующие подмножества множества целых чисел от 1 до 105?
(a) Подмножество чисел, делящихся на 5, и подмножество чисел, делящихся на 7.
(b) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 21.
(c) Подмножество чисел, делящихся на 15, и подмножество чисел, делящихся на 5.

(d) Подмножество чисел, делящихся на 10, и подмножество чисел, делящихся на 7.

**7.2.8.** (Ср. с замечанием после задачи 7.2.1.b.) Зависимы ли следующие подмножества множества всех раскрасок чисел $1, 2, \ldots, 400$ в два цвета?
(a) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ одноцветно.
(b) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ неодноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{11, 12, \ldots, 18\}$ неодноцветно (ср. с задачей 7.2.1.b).
(c) Подмножество раскрасок, для которых $\{1, 2, \ldots, 8\}$ одноцветно, и подмножество раскрасок, для которых $\{6, 7, \ldots, 13\}$ одноцветно.

**7.2.9.** Подмножества $A$ и $B$ конечного множества независимы тогда и только тогда, когда $A$ и $\overline{B}$ независимы.

**7.2.10.** (a) Обязательно ли найдётся богатый здоровый умный горожанин, если в городе доля богатых горожан больше $2/3$, доля здоровых больше $2/3$, и доля умных больше $2/3$.
(b) Тот же вопрос, если в городе есть богатый горожанин, есть здоровый горожанин и есть умный горожанин, богатство, здоровье и ум попарно независимы, и доля богатых здоровых умных среди богатых здоровых такая же, как и доля умных среди всех жителей. (Вместе с условием попарной независимости последнее называется *независимостью в совокупности.*)
(c) Тот же вопрос, если в городе богатых горожан больше половины, здоровых больше половины, умных больше половины, богатство и ум независимы, здоровье и ум независимы.

**7.2.11.** (a) Пусть $A_1, A_2, A_3, A_4$ — подмножества 720-элементного множества, в каждом из которых более 480 элементов. Если $A_k$ и $A_{k+1}$ независимы для любого $k = 1, 2, 3$, то $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \neq \varnothing$.
(b) Пусть $n \geqslant 2$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества, доля каждого из которых больше $1 - \dfrac{1}{n-1}$. Если $A_k$ и $A_{k+1}$ независимы для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$, то $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \varnothing$.

Подробнее о независимости см. [KZP].

Подмножество $A$ конечного множества $M$ называется *независимым от набора подмножеств* $B_1,\dots,B_k\subset M$, если $A$ независимо с любым подмножеством, являющимся пересечением нескольких (возможно, одного) множеств из $B_1,\dots,B_k$.

**7.2.12.** Приведите пример подмножеств $A,B_1,B_2$ конечного множества,
(a) попарно независимых, но для которых $A$ не является независимым от набора $B_1,B_2$;
(b) не являющихся попарно независимыми, но для которых $A$ независимо от набора $B_1,B_2$.

**7.2.13.** Обозначим через $M$ семейство всех раскрасок множества $\{1,2,\dots,400\}$ в два цвета. Для подмножества $\alpha\subset\{1,2,\dots,400\}$ обозначим через $A_\alpha\subset M$ подмножество тех раскрасок, для которых $\alpha$ одноцветно. Тогда $A_{\{1,2,\dots,8\}}$ не зависит от набора $\{A_\alpha\ :\ \alpha\subset\{9,10,\dots,400\}\}$. (Ср. с замечанием после задачи 7.2.1.b.)

**7.2.14.** Следующие условия на подмножества $A,B_1,\dots,B_k$ равносильны:

- $A$ независимо от набора $B_1,\dots,B_k$
- $\overline{A}$ независимо от набора $B_1,\dots,B_k$.
- $\overline{A}$ независимо от набора $\overline{B}_1,\dots,\overline{B}_k$.

**7.2.15.** (a) *Локальная лемма Ловаса в симметричной форме.* Пусть $A_1,\dots,A_n$ — подмножества конечного множества. Если для некоторого $d$ и любого $k$ доля подмножества $A_k$ не меньше $1-\dfrac{1}{4d}$ и существует набор из не менее чем $n-d$ подмножеств $A_j$, от которого $A_k$ не зависит, то $A_1\cap\ldots\cap A_n\ne\varnothing$. [6]

(b) При $d>2$ утверждение пункта (a) верно, если заменить $1-\dfrac{1}{4d}$ на $1-\dfrac{1}{e(d+1)}$.

[6] Вот формулировка на вероятностном языке, которая не используется в дальнейшем. *Пусть дано вероятностное пространство и $A_1,\dots,A_n$ — события. Пусть дано вероятностное пространство и $A_1,\dots,A_n$ — события. Пусть для некоторого $d$ и любого $k$ вероятность события $A_k$ не меньше $1-\frac{1}{4d}$ и существует набор из не менее, чем $n-d$ событий $A_j$, от которого $A_k$ не зависит. Тогда вероятность события $A_1\cap\ldots\cap A_n$ положительна.*

### Задачи для самостоятельного решения

**7.2.16.** Даны число

(a) $k \geqslant 10$; (b) $k = 9$

и семейство $k$-элементных подмножеств конечного множества $M$. Если каждый элемент множества $M$ содержится ровно в $k$ подмножествах семейства, то существует раскраска множества $M$ в два цвета, для которой ни одно из подмножеств данного семейства не одноцветно. (т. е. хроматическое число любого $k$-однородного $k$-регулярного гиперграфа равно двум при $k \geqslant 9$. Ср. с задачей 7.2.1.b.)

**7.2.17.** В конечном множестве выбрано несколько подмножеств. В каждом из них не менее 3 элементов. Каждое из них пересекается не более чем с $a_i$ $i$-элементными подмножествами среди выделенных. Если $\sum_i a_i 2^{-i} \leqslant 1/8$, то можно покрасить элементы данного множества в два цвета так, чтобы каждое выбранное подмножество содержало элементы обоих цветов.

**7.2.18.** (a) Для любого разбиения множества вершин цикла длины $16n$ на $n$ множеств по 16 вершин можно выбрать по вершине из каждого множества так, что среди выбранных $n$ вершин нет рёбер.
(b) То же для $11n$ вершин.
(c) В графе степень каждой вершины не превосходит $\Delta$. Все вершины раскрашены в $r$ цветов. Вершин каждого цвета не менее $2e\Delta + 1$. Тогда можно выбрать $r$ вершин разных цветов, никакие две из которых не соединены ребром.

**7.2.19.** (a) Каждую $k$-элементную арифметическую прогрессию в $\{1, 2, \dots, n\}$ пересекает не более $k^2 \left[\dfrac{n}{k-1}\right]$ других таких прогрессий.
(b) Для любого натурального $k$ существует раскраска первых $[2^{k-3}(k-1)/k^2]$ натуральных чисел в 2 цвета, для которой нет одноцветной $k$-элементной арифметической прогрессии.
(c) Каждую $k$-элементную арифметическую прогрессию в $\{1, 2, \dots, n\}$ пересекает не более $nk$ других таких прогрессий.
(d) Для любого натурального $k$ существует раскраска первых $[2^{k-3}/k]$

натуральных чисел в 2 цвета, для которой нет одноцветной $k$-элементной арифметической прогрессии.

**7.2.20.** (a) Если $X \subset \mathbb{R}$ — конечное множество и $m, r$ — натуральные числа, для которых $4rm(m-1)\left(1-\dfrac{1}{r}\right)^m < 1$, то для любого $m$-элементного подмножества $M \subset \mathbb{R}$ существует раскраска множества $\mathbb{R}$ в $r$ цветов такая, что для любого $x \in X$ множество $x + M := \{x + a \ : \ a \in M\}$ содержит точки каждого из $r$ цветов.
(b) То же для $X = \mathbb{Z}$.
(c) То же для $X = \mathbb{R}$.

**7.2.21.** (a) Если $\binom{n}{2}\binom{k}{n-2} + 1 < 2^{\binom{n}{2}-1}/e$, то $R(n,n) > k$, где $R(n,n)$ — *число Рамсея* (§5.1).
(b) $R(n,n) > \sqrt{2}e^{-1}n2^{n/2}(1+o(1))$.

**7.2.22.** Имеется несколько цветов. Каждой вершине некоторого графа сопоставлен список из не менее, чем $10d$ этих цветов, где $d > 1$. Для любых вершины $v$ и цвета из её списка имеется не более $d$ соседей вершины $v$, в списке которых есть этот цвет. Докажите, что существует правильная раскраска графа, при которой каждая вершина красится в цвет из её списка.

**7.2.23.** В ориентированном графе в каждую вершину входит не больше $\Delta$ рёбер и из каждой вершины выходит не меньше $\delta$ рёбер. Тогда для любого натурального $k \leqslant \dfrac{1}{1-(4\delta\Delta)^{-1/\delta}}$ найдётся ориентированный цикл длины, кратной $k$.

**7.2.24.** Клетки доски $n \times n$ раскрашены в несколько цветов. Клеток каждого цвета не больше, чем $(n-1)/16$. Тогда можно поставить на доску $n$ попарно не бьющих друг друга ладей, чтобы они стояли на клетках разных цветов.

**7.2.25.** *КНФ-формула* — конъюнкция набора дизъюнкций нескольких из переменных $x_1, \ldots, x_n$ или их отрицаний. Если в каждом «сомножителе» КНФ-формулы ровно $k$ «слагаемых» и у каждого «сомножителя» есть общие переменные не более, чем с $2^{k-2}$ другими, то булева функция, определяемая формулой, не является тождественным нулем.

*Замечание.* Проблема $k$-выполнимости ($k$-SAT problem): существует ли алгоритм, который по КНФ-формуле, в каждой дизъюнкции которой ровно $k$ переменных, выясняет, является ли тождественным нулем булева функция, определяемая формулой. Эта проблема одна из центральных в computer science. При $k = 2$ есть полиномиальный алгоритм её решения. При бóльших $k$ это наиболее стандартная *NP-полная проблема.* Поэтому полиномиальный алгоритм дал бы и равенство *классов P и NP.*

**7.2.26.** (a) *Локальная лемма Ловаса.* Пусть $A_1, \dots, A_n$ — подмножества конечного множества, $J_1, \dots, J_n \subset \{1, \dots, n\}$ и $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in (0, 1)$. Пусть также для любого $k$

• доля подмножества $A_k$ не меньше $1 - (1 - \gamma_k) \prod_{j \notin J_k} \gamma_j$;

• множество $A_k$ не зависит от набора $\{A_j \ : \ j \in J_k\}$.

Тогда доля пересечения $\bigcap_{k=1}^n A_k$ не меньше $\prod_{k=1}^n \gamma_k > 0$. [7]

(b) Существует такое $c > 0$ что $R(3, n) > cn\sqrt{n}$ для любого $n$.

*Замечание.* При помощи более сложных вычислений из локальной леммы Ловаса выводится, что $R(3, n) > c_1 n^2 / \ln^2 n$. Более того, это 'лучшее', что можно выжать из локальной леммы Ловаса. Известно также неравенство $R(3, n) > c_2 n^2 / \ln n$ (теорема Кима). Его доказательство вместо локальной леммы Ловаса использует квазислучайные графы, неравенства плотной концентрации и пр.

## 7.3 Случайные графы

Начнем с интересных задач, которые можно решить при помощи случайных графов (и вряд ли можно решить без них!). Видимо, из задач 7.3.1, 7.3.2 и 7.3.3 вы сможете решить сейчас только 7.3.3.a. К решению остальных разумно вернуться после задачи 7.3.8 (хотя формально приведенная ниже теория не используется в решении задачи 7.3.1).

---

[7] Вот формулировка на вероятностном языке, которая не используется в дальнейшем. *Пусть дано вероятностное пространство,* $A_1, \dots, A_n$ *— события,* $J_1, \dots, J_n \subset \{1, \dots, n\}$ *и* $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in (0, 1)$. *Пусть для любого* $k$ *вероятность события* $A_k$ *не меньше* $1 - (1 - \gamma_k) \prod_{j \notin J_k} \gamma_j$ *и событие* $A_k$ *не зависит от набора* $\{A_j, j \in J_k\}$. *Тогда вероятность события* $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ *не меньше* $\prod_{j=1}^m \gamma_j$.

**7.3.1.** Если в графе $G=(V,E)$ с $n$ вершинами минимальная степень вершины равна $\delta$, то
(a) Для любого $p\in(0,1)$ существует такое множество вершин $A\subset V$, что в объединении $A$ и множества всех вершин, не соединённых ни с какой вершиной из $A$, имеется не более $np+n(1-p)^{\delta+1}$ вершин.
(b) Существует такое множество вершин $D\subset V$, что любая вершина из $V\setminus D$ соединена ребром с некоторой вершиной из $D$, и $|D|\leqslant n\dfrac{1+\ln(\delta+1)}{\delta+1}$.

**7.3.2.** Число гамильтоновых путей в турнире с $n$ вершинами не меньше $n!/2^n$.

*Замечание.* При помощи перманента (§6.4) доказывается, что для некоторого $c>0$ число из задачи 7.3.2 не превосходит $cn^{3/2}n!/2^n$ [AS].

**7.3.3.** (a) Денежные купюры разного достоинства и разных стран упакованы в два чемодана. Средняя стоимость купюры равна 100 рублей. Общее число купюр в левом чемодане больше, чем в правом. Обязательно ли в левом чемодане найдется купюра стоимостью не более 200 рублей? (Ср. с неравенством Маркова 7.3.8.a.)
(b) Для любых целых $l,q>0$ существует граф, не содержащий обходов длины $\leqslant l$, который невозможно правильно раскрасить в $q$ цветов. (См. определение правильности раскраски в §4.1.)

Зафиксируем $p\in(0,1)$ и назовем *вероятностью* графа (в модели, или в вероятностном пространстве, Эрдеша-Реньи) с $n$ вершинами $\{1,2,\ldots,n\}$ и $e$ рёбрами число $\mathrm{P}(G)=\mathrm{P}_p(G):=p^e(1-p)^{\frac{n(n-1)}{2}-e}$. *Вероятностью* семейства (или, что то же самое, свойства) графов с вершинами $1,2,\ldots,n$ называется сумма вероятностей входящих в него графов.

*Случайной величиной* называется функция, определённая на множестве графов с вершинами $1,2,\ldots,n$.

Например, количество рёбер графа — случайная величина.

Пусть случайная величина $Y$ принимает $k$ различных значений $y_1,\ldots,y_k$. Тогда *математическим ожиданием* (мат. ожиданием) случайной величины $Y$ называется её «взвешенное среднее»

$\mathbb{E}Y := \sum\limits_{s=1}^{k} y_s \mathrm{P}(Y^{-1}(y_s))$, где $Y^{-1}(y_s)$ – множество всех графов $G$, для которых $Y(G) = y_s$. Последнюю вероятность обозначают $\mathrm{P}(Y = y_s)$.

**7.3.4.** Для данных $n$ и $p$ вероятность наличия $k$ вершин, между которыми нет рёбер, меньше $e^{k\ln n - pk(k-1)/2}$.

**7.3.5.** Для данных $n$ и $p$ найдите мат. ожидание количества
(a) изолированных вершин;
(b) треугольников;
(c) $k$-клик;
(d) $k$-клик, являющихся компонентами связности;
(e) гамильтоновых циклов;
(f) обходов длины $k$;
(g) обходов длины $k$, являющихся компонентами связности;
(h) деревьев с $k$ вершинами;
(i) древесных компонент данного размера $k$, т.е. деревьев с $k$ вершинами, являющихся компонентами связности.

**7.3.6.** Для данного $p$ найдите асимптотику (при $n \to \infty$) величины $\mathbb{E}^{(k)}(Y) := \mathbb{E}\left(Y(Y-1)\ldots(Y-k+1)\right)$ (т. е. *$k$-го факториального момента*), если $Y$ — число изолированных вершин.

*Дисперсией* случайной величины $X$ называется число $\mathbb{D}X := \mathbb{E}(X - \mathbb{E}X)^2$.

**7.3.7.** Для данных $n$ и $p$ найдите дисперсию количества (a) изолированных вершин; (b) треугольников.

**7.3.8.** Пусть $X$ — неотрицательная случайная величина, $\mathbb{E}X < \infty$ и $a > 0$.
(a) *Неравенство Маркова.* $\mathrm{P}(|X| > a) \leqslant \mathbb{E}|X|/a$. (Ср. с задачей 7.3.3.a.)
(b) *Неравенство Чебышева.* $\mathrm{P}(|X - \mathbb{E}X| > a) \leqslant \mathbb{D}X/a^2$.

Событие $A_n$ *происходит асимптотически почти наверное (или с асимптотической вероятностью 1) относительно последовательности* $f(n)$, если $\mathrm{P}_{f(n)}(A_n) \to 1$. Общепринятое сокращение: при $p(n) = f(n)$ событие $A_n$ происходит а.п.н. (формально, эта фраза не имеет смысла, поскольку означает «если $p(n) = f(n)$, то событие $A_n$ происходит а.п.н.», а без указания последовательности $f(n)$ фраза «событие $A_n$ происходит а.п.н.» не может быть определена как надо).

**7.3.9.** При $p(n) = 1/(2n)$
(a) для некоторой последовательности $d_n \to 0$ а.п.н. имеется более $(1 + d_n)n/2$ изолированных вершин (специалисты говорят: имеется более $(1 + o(1))n/2$ изолированных вершин).
(b) для некоторого $C > 0$ а.п.н. каждая компонента связности имеет менее $C \ln n$ вершин (специалисты говорят: менее $O(\ln n)$ вершин).
(c) А.п.н. каждая компонента связности является деревом или уницикличеcким графом.
(d) для некоторого $C > 0$ а.п.н. имеется менее $C$ уницикличеcких компонент.

**7.3.10.** (a) При $p(n) = o\left(n^{-3/2}\right)$ а.п.н. рёбра попарно не пересекаются.
(b) При $p(n) = o\left(n^{-3/2}\right)$ и $pn^2 \to \infty$ существует такая функция $M(n)$, что $2M(n) \sim pn^2$ и а.п.н. $2M(n)$ степеней вершин равны 1, а остальные степени равны нулю.
(c) *Теорема о связности случайного графа.* Если $c > 1$ $(0 < c < 1)$, то при $p(n) = c \ln n/n$ а.п.н. случайный граф связен (несвязен).

**7.3.11.** (a) Найдите хотя бы одну такую функцию $p^*(n)$, что
• при $p(n)/p^*(n) \to 0$ а.п.н. граф не содержит подграф, изоморфный $K_3$, и
• при $p(n)/p^*(n) \to +\infty$ а.п.н. граф содержит подграф, изоморфный $K_3$.
(b) То же с заменой $K_3$ на $K_4$.
(c)* То же с заменой $K_4$ на заданный граф с $v$ вершинами и $e$ рёбрами.

*Замечание.* Такая функция $p^*$ называется *пороговой вероятностью.* Пороговая вероятность существует для любого монотонного семейства. Монотонно возрастающим (убывающим) семейством графов называется такое семейство графов, которое вместе с каждым графом содержит любой его надграф (подграф).

**7.3.12.** Хроматическое число графа а.п.н. не больше
(a) трёх при $p_n = c/n$, где $c < 1$;
(b) двух при $p_n = o(1/n)$;
(c) одного при $p_n = o(1/n^2)$.

**7.3.13.** (a) Жадный алгоритм раскраски (см. задачу 4.2.3) на почти всяком графе ошибается не более, чем в 2 раза.
(b) Для любых $\varepsilon, \delta > 0$ существует такая последовательность $G_n$ графов с $n$ вершинами, что при случайной нумерации вершин графа $G_n$ вероятность того, что отношение числа цветов в жадной раскраске к $\chi(G_n)$ больше $n^{1-\epsilon}$, больше $\delta$. (Иными словами, с одной стороны, почти для любого графа в любой нумерация жадная раскраска хороша, но, с другой стороны, есть графы, которые почти как ни нумеруй, а все дрянь получится!)

(Приведите аккуратные формулировки самостоятельно.)

**7.3.14.** (a) Если $\binom{k}{m} p^{\binom{m}{2}} + \binom{k}{n} (1-p)^{\binom{n}{2}} < 1$ для некоторого $p \in (0,1)$, то $R(m,n) > k$.
(b)* $R(4,n) \geqslant \Omega\left(\dfrac{n^2}{\ln^2 n}\right)$ (мы пишем $g \geqslant \Omega(f)$, если $f = O(g)$).

*Замечание.* См. подробнее [R3, R4, R5]. В частности, в [R4] доказаны следующие результаты.

*Первая теорема Боллобаша.* Существует последовательность $f_n = o\left(\dfrac{n}{2\log_2 n}\right)$, для которой при $p = 1/2$ а.п.н. $\left|\chi(G) - \dfrac{n}{2\log_2 n}\right| < f_n$.

(Эта теорема обобщается на практически любые значения $p$ [Ja].)

*Вторая теорема Боллобаша.* Для любого $\alpha > 2/3$ существуют последовательности $a_n$ и $b_n$, для которых при $p_n = n^{-\alpha}$ а.п.н. $\chi(G) \in \{a_n, b_n\}$.

(В этой теореме для некоторых $\alpha$ последовательности $a_n$ и $b_n$ могут быть выбраны так, что $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \infty$.)

*Замечание.* Приведем результат [Bo, стр. 100, теорема 5.4]. Для $k \geqslant 2$ обозначим через $T_k = T_{k,p_n}$ число компонент связности в случайном графе, являющихся деревьями с $k$ вершинами.

(a) Если $p_n = o(n^{-k/(k-1)})$, то а.п.н. $T_k = 0$.

(b) Если $\lim_{n\to\infty} p_n n^{k/(k-1)} = c > 0$, то последовательность случайных величин $T_k = T_{k,p_n}$ *сходится при* $n \to \infty$ *к случайной величине, имеющей распределение Пуассона с параметром* $\lambda := c^{k-1}k^{k-2}/k!$, т.е. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(T_k = s) = \frac{\lambda^s}{s!}e^{-\lambda}$ для любого $s \in \mathbb{Z}$, $s \geqslant 0$.

(c) Если $n^{k/(k-1)} = o(p_n)$ и $\lim_{n\to\infty}(p_n kn - \ln n - (k-1)\ln\ln n) = -\infty$, то $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(T_k \geqslant L) = 1$ для любого $L > 0$.

(d) Если $\lim_{n\to\infty}(p_n kn - \ln n - (k-1)\ln\ln n) = x \in \mathbb{R}$, то последовательность случайных величин $T_k = T_{k,p_n}$ сходится при $n \to \infty$ к случайной величине, имеющей распределение Пуассона с параметром $\lambda := e^{-x}/(k \cdot k!)$.

(e) Если $\lim_{n\to\infty}(p_n kn - \ln n - (k-1)\ln\ln n) = +\infty$, то а.п.н. $T_k = 0$.

## 7.4 Подсказки

*7.1.1.* (d,e) См. задачу 2.1.3.

*7.1.2.* См. задачу 3.7.1.

*7.2.19.* (c) Оцените количество пересекающих прогрессий, содержащих данный элемент $x \in \{1, 2, \dots, n\}$, и просуммируйте по всем $x$.

*7.2.20.* (a) Обозначим через $A$ семейство раскрасок множества $M+X$ в $r$ цветов. Для любого $x \in X$ обозначим через $A_x$ семейство раскрасок множества $M+X$ в $r$ цветов, для которых множество $x+M$ содержит не все цвета.
(b) Используйте компактность.

*7.2.21.* (a) Для любого $S \subset \{1, 2, \dots, r\}$ обозначим через $A_S$ множество графов с $r$ вершинами, для которых индуцированный на $S$ подграф пуст.

*7.2.22.* Сначала надо уменьшить множество цветов, чтобы каждой вершине было поставлено в соответствие ровно $10d$ цветов. Покрасим множество вершин случайно равновероятно в те цвета, которые им сопоставлены.

*7.2.25.* Примените локальную лемму Ловаса в симметричной форме (задачу 7.2.15.a).

*7.3.1.* (a) Возьмём произвольное $0 < p < 1$. Неформально говоря, будем считать, что $P(v \in A) = p$ для каждой вершины $v$ и подмножества $A \subset V$. Формально, поставим в соответствие каждому подмножеству $A \subset V$ число $p^{|A|}(1-p)^{n-|A|}$. Т. е. рассмотрим вероятностное пространство всех подмножеств множества $V$ с вероятностью подмножества $A$, равной $p^{|A|}(1-p)^{n-|A|}$. (Это возможно, поскольку сумма всех $2^n$ таких вероятностей равна 1.) Тогда для каждой вершины $v$ имеем $P(v \in A) = \sum_{A \ni v} p^{|A|}(1-p)^{n-|A|} = p$. Определим случайную величину $\chi_A$ (*индикатор* события $v \in A$) как $\chi_A(v) = 1_{v\in A} := \begin{cases} 1, & v \in A; \\ 0, & v \notin A. \end{cases}$

*7.3.2.* Следует из аналога задачи 7.3.5.e.

*7.3.3.* (b) Набор вершин называется *независимым*, если между ними нет рёбер. По задаче 4.1.3 достаточно для достаточно большого $n$ построить граф, в котором длина каждого обхода больше $l$ и любые $k = k(n)$ вершин зависимы, для некоторой функции $k$ такой, что $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{k(n)-2} = \infty$. Такой граф легко получить из графа с $n$ вершинами, в котором любые $k = k(n)$ вершин зависимы, и в котором менее $n/2$ обходов длины не более $l$. А для доказательства существования последнего графа нужно построить вероятностное пространство и оценить мат. ожидание количества обходов длины не более $l$ в графах с $n$ вершинами, в которых любые $k = k(n)$ вершин зависимы. Оно оценивается через мат. ожидание $E_0$ количества обходов длины не более $l$ во всех графах с $n$ вершинами и вероятность $p_0$ отсутствия $k$ независимых вершин.

*7.3.6.* $k$-й факториальный момент для числа того-то — это мат. ожидание числа упорядоченных последовательностей длины $k$ из того-то, в которых все элементы различны.

*7.3.9.* (a) Посчитайте мат. ожидание и дисперсию числа изолированных вершин.
(b) Найдите мат. ожидание количества связных компонент размера не менее, чем $C\ln n$.
(c) Введите случайные величины аналогично решению пункта (b) и посчитайте их мат. ожидания, используя (b).
(d) То же самое.

*7.3.10.* (a) Оцените вероятность того, что степень каждой вершины равна 0 или 1.
(b) Мат. ожидание количества вершин степени 1 равно

$$n(n-1)p(1-p)^{n-2} \sim n^2 p\left((1-o(n^{-3/2}))^{n^{3/2}}\right)^{1/\sqrt{n}} \to n^2 p.$$

Поэтому утверждение задачи следует из закона больших чисел.

*7.3.11.* Подойдёт, например, (a) $p^*(n) = 1/n$. (b) $p^*(n) = 1/\sqrt[3]{n^2}$.
(c) $p^*(n) = n^{-v/e}$.

*7.3.12.* (b) $P(\chi(G) \leqslant 2) \leqslant P(G$ дерево$) \to 1$, ибо мат. ожидание количества обходов $E < \dfrac{(np)^3}{1-np} \to 0$ при $n \to \infty$.
(c) $P(\chi(G) \leqslant 1) = (1-p)^{n(n-1)/2} \to 1$.

*7.3.14.* (a) Рассмотрите модель $G(k,p)$.

## 7.5 Указания

***7.1.1.*** (d) Ответ: $A_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}$.
Указание: для сокращения вычислений введите $A_0 = 1$ и даже $A_{-1} = 1$.
(e) $A_n \sim Ca^n$, где $C$ — некоторое число (его можно и нужно найти), $a$ — единственный вещественный корень уравнения $x^3 = x^2 + x + 1$ (он положителен). В доказательстве нужно показать, что

$a$ больше модуля $r$ каждого из двух комплексно сопряжённых корней этого многочлена. Нетрудно проверить, что $a > 1$. По теореме Виета $ar^2 = 1$. Значит, $r < 1 < a$.

*Другое доказательство того, что $a > r$.* Обозначая комплексные корни через $re^{\pm i\varphi}$, записываем теорему Виета:

$$a \cdot 2r\cos\varphi + r^2 = -1, \quad a + 2r\cos\varphi = 1, \quad ar^2 = 1.$$

Из $a > 0$ и первого уравнения получаем $\cos\varphi < 0$. Из этого и второго уравнения получаем $a > 1$. Из этого и третьего уравнения получаем $r < 1$. Значит, $r < a$.

***7.1.5.*** (a) Следует из (b).

(b) Следует из тождества для суммы биномиальных коэффициентов и задачи 2.4.3.a.

(c) Следует из (d). (Такое решение этого и следующего пунктов предложено Д. Ахтямовым.)

(d) Следует из бинома Ньютона для $(1+2)^{3m}$ и аналога задачи 2.4.3.a.

(e) Для рациональных $a$ аналогично пунктам (a,c). Для иррациональных $a$ нужно перейти к пределу в оценках (но не в асимптотиках!). Другое решение получается использованием задачи 7.1.6.b.

(f) Первое решение аналогично первому решению пункта (e).

*Другое решение.* По задаче 7.1.6.b $\sqrt[n]{n!} \sim n/e$. Значит, для любого $0 < a \leqslant 1$ выполнено

$$\sqrt[n]{[an]!} \sim ([an]/e)^{[an]/n} \sim ([an]/e)^a \sim (an/e)^a = a^a(n/e)^a.$$

Деля эквивалентность $\sqrt[n]{[an]!} \sim a^a(n/e)^a$ для $a = 1$ на аналогичные эквивалентности для $a = a_1, \ldots, a_s$, получаем $\sqrt[n]{\dfrac{n!}{[a_1n]!\ldots[a_sn]!}} \sim a_1^{-a_1} \cdot \ldots \cdot a_s^{-a_s}$, что и требовалось.

***7.1.6.*** (a) Следует из $(n/M)^{n(1-1/M)} < n! < n^n$ для любого $M$ и достаточно больших $n$.

(b) Следует из (c).

(c) (*Это решение написано А. Жуком.*) Необходимое неравенство равносильно следующему:

$$n\ln n - (n-1) < \ln 1 + \dots + \ln n < (n+1)\ln n - (n-1)$$

Так как $\ln x$ есть возрастающая функция и $\lfloor x\rfloor \leqslant x \leqslant \lceil x\rceil$, то

$$\ln\lfloor x\rfloor \leqslant \ln x \leqslant \ln\lceil x\rceil,\ x \in [1,+\infty)$$

Интегрируя по $[1,n]$, получаем

$$\int_1^n \ln\lfloor x\rfloor dx < \int_1^n \ln x dx < \int_1^n \ln\lceil x\rceil dx$$

Вычислим значения этих интегралов:

$$\int_1^n \ln\lfloor x\rfloor dx = \int_1^2 \ln\lfloor x\rfloor dx + \dots + \int_{n-1}^n \ln\lfloor x\rfloor dx = \ln 1 + \dots + \ln(n-1)$$

$$\int_1^n \ln x dx = x(\ln x - 1)|_1^n = n\ln n - (n-1)$$

$$\int_1^n \ln\lceil x\rceil dx = \int_1^2 \ln\lceil x\rceil dx + \dots + \int_{n-1}^n \ln\lceil x\rceil dx = \ln 2 + \dots + \ln n$$

Получаем искомые неравенства:

$$\ln 1 + \dots + \ln(n-1) + \ln n = \int_1^n \ln\lfloor x\rfloor dx + \ln n <$$

$$< \int_1^n \ln x dx + \ln n = (n+1)\ln n - (n-1),$$

$$n\ln n - (n-1) = \int_1^n \ln x dx <$$

$$< \int_1^n \ln\lceil x\rceil dx = \ln 2 + \dots + \ln n = \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n.$$

*Немного другое решение.* Оценив интеграл методом прямоугольников, получаем

$$\int\limits_1^n \ln x dx < \ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n < \int\limits_2^{n+1} \ln x dx.$$

Так как

$$\int \ln x dx = x\ln x - x + C, \quad \text{то} \quad n^n e^{-n+1} < n! < (n+1)^{n+1}e^{-n+1}/4.$$

Так как $(n+1)^{n+1} = n^{n+1}(1+\frac{1}{n})^{n+1} \leqslant 4n^{n+1}$, получаем требуемое. Оценка сверху следует также из (d).
Другое решение — индукция по $n$ с использованием неравенств $(1+\frac{1}{n})^n < e < (1+\frac{1}{n})^{n+1}$.
(d) Оценив интеграл методом трапеций, получаем

$$\frac{\ln 1}{2} + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln(n-2) + \ln(n-1) + \frac{\ln n}{2} < \int\limits_1^n \ln x dx.$$

Решение по индукции есть, но требует громоздких вычислений.
(e) См., например, [4] (это доказательство ближе всего к идеям настоящего курса), [5] (это доказательство продолжает идеи пунктов (c), (d)) [6] (это доказательство, видимо, самое короткое).

***7.1.7.*** (b) Так как $-x-x^2 < \ln(1-x) < -x$ при $0 < x < 1/2$ и $k < n/2$, то

$$-\frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \ldots - \frac{k}{n} - \frac{1^2}{n^2} - \frac{2^2}{n^2} - \ldots - \frac{k^2}{n^2} <$$

$$< \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \ln\left(1-\frac{k}{n}\right) < -\frac{1}{n} - \frac{2}{n} - \ldots - \frac{k}{n}.$$

Поэтому

$$\ln\frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{n^k} = -\frac{k(k+1)}{2n} + O\left(\frac{k(k+1)(2k+1)}{6n^2}\right) =$$

$$= -\frac{k(k+1)}{2n}\left(1+O\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

*Замечание.* Для любого $\alpha < 1$ утверждение верно при $k_n < \alpha n$. Если условие $k_n < \alpha n$ заменить на $k_n < n$, то полученное утверждение, по-видимому, неверно.

(c) Следует из (b).
(d) Следует из (a,b).
(e) Для $k \geqslant 0$ имеем

$$\frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} =$$

$$= \frac{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{n^{k-1}} \frac{n^k}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}.$$

Используя (b) и аналогичную оценку для $\dfrac{n^k}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)}$, получаем

$$-\ln\frac{\binom{2n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(k-1)k}{2n}\left(1+O\left(\frac{k}{n}\right)\right) + \frac{k(k+1)}{2n}\left(1+O\left(\frac{k}{n}\right)\right) =$$

$$= \frac{k^2}{n}\left(1+O\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \frac{k^2}{n}(1+o(1)).$$

***7.1.8.*** (a) Нет, не равносильны. Рассмотрите функцию $f(n) = 2^n$.

***7.1.9.*** (a) $(x!)^{2^x} \leqslant x^{x2^x} = x^{o(x^x)}$.
(b) Да, существует. Например, $\psi(n) = n^{-1/3}$.
Доказательство:

$$(2+\psi(n))^n 2^{-n} e^{-\sqrt{n}} = 2^n(1+n^{-1/3}/2)^n 2^{-n} e^{-\sqrt{n}} =$$

$$= (1+n^{-1/3}/2)^{2n^{1/3}\cdot\frac{n^{2/3}}{2}} e^{-n^{1/2}} = e^{\frac{n^{2/3}}{2}(1+o(1))-n^{1/2}} \to \infty.$$

***7.1.10.*** (a) По задаче 7.1.6.c $\dfrac{\ln(n!)}{n} = \ln n - 1 + O\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$. Отсюда

$$\frac{\ln\binom{n^2}{n}}{n} = n(\ln(n^2)-1) + O(1) - (\ln n - 1) - (n-1)(\ln(n^2-n)-1) =$$

$$= (2n-1)\ln n - (n-1)\ln(n^2-n) + O(1) =$$

$$= (2n-1)\ln n - (2n-2)\ln n - (n-1)\ln\left(1-\frac{1}{n}\right) + O(1) =$$

$$= \ln n + (n-1)O\left(\frac{1}{n}\right) + O(1) \sim \ln n.$$

(b) Ответ: $\binom{n}{[n/2]} \sim \frac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}}$.

(c) Следует из 7.1.7.c. Или аналогично решению пункта (d), для $\alpha = 1/2$.

(d) После применения формулы Стирлинга 7.1.6.e получаем

$$\binom{n}{n^\alpha} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n^\alpha}}\left(\frac{n}{n-n^\alpha}\right)^{n-n^\alpha} = \frac{n^{-\alpha/2}}{\sqrt{2\pi}}(1-n^{\alpha-1})^{n^\alpha-n}.$$

Для вычисления асимптотики второго сомножителя нужно найти асимптотическое поведение его логарифма с точностью до $o(1)$. Имеем

$$(n^\alpha - n)\ln(1-n^{\alpha-1}) = (n-n^\alpha)\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n^{k(\alpha-1)}}{k}\right).$$

В зависимости от $\alpha$ нужно отбросить все слагаемые ряда, начиная с некоторого.

(e) $(2n-1)!! = 2^{-n}(2n)!/n!$.

(f) Это число равно $\binom{2n}{n}$.

(g) Используйте 7.1.7.c.

***7.1.11.*** (a) Логарифмируя, получаем: $s\ln s = \ln n$. Поэтому

$$\text{при} \quad n > 27 \quad \text{имеем} \quad s > 3 \quad \Rightarrow \quad \ln s > 1 \quad \Rightarrow \quad s < \ln n \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \ln s = \ln\ln n - \ln\ln s \sim \ln\ln n \quad \Rightarrow \quad s = \frac{\ln n}{\ln s} \sim \frac{\ln n}{\ln\ln n}.$$

(b) Логарифмируя, получаем: $s^3\ln s = \ln n$. Аналогично предыдущему,

$$\text{при} \quad n > 3^{3^3} \quad \text{имеем} \quad s > 3 \quad \Rightarrow \quad \ln s > 1 \quad \Rightarrow \quad s < \sqrt[3]{\ln n} \quad \Rightarrow$$

# 8 Алгебраические методы

## 8.1 Линейно-алгебраический метод в комбинаторике

Напомним, что для множества $F$

$$F^n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \ : \ a_1, a_2, \dots, a_n \in F\}.$$

Элементы этого множества называются *векторами* (или *наборами* или *точками*). Если $F \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, то векторы можно покомпонентно складывать:

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n).$$

Если $F \in \{\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, то вектор можно покомпонентно умножить на число $\lambda \in F$:

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

(Это можно делать и для $F = \mathbb{Z}_2$, но не интересно.)

**8.1.1.** *Теорема о линейной зависимости.*

($\mathbb{Z}_2$) Среди любых $n+1$ наборов длины $n$ из нулей и единиц найдется несколько (не ноль) наборов, покомпонентная сумма по модулю два которых есть нулевой набор.

($\mathbb{Q}$) Для любых $n+1$ векторов $v_1, \dots, v_{n+1} \in \mathbb{Q}^n$ найдутся рациональные числа $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$, не все равные нулю, для которых $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n+1} v_{n+1} = (0, \dots, 0)$.

($\mathbb{R}$) Аналог теоремы ($\mathbb{Q}$) справедлив для вещественных, комплексных и целых чисел.

Наборы из задач 8.1.1.($\mathbb{Z}_2$),($\mathbb{Q}$) называются *линейно зависимыми* — над $\mathbb{Z}_2$ и над $\mathbb{Q}$ соответственно. *Линейная независимость* — отрицание *линейной зависимости.* Аналогично определяется линейная (не)зависимость многочленов над $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Q}$ соответственно. (Эти и следующие понятия используются в формулировках задач 8.1.4.c, 8.1.5.c, 8.1.7.b и в решениях некоторых задач.)

Для $F \in \{\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ *скалярное произведение* $F^n \times F^n \to F$ определяется формулой

$$(x_1, \dots, x_n) \cdot (y_1, \dots, y_n) := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Векторы $x, y \in F^n$ называются *ортогональными*, если $x \cdot y = 0$.

*Расстояние* между точками пространства $\mathbb{R}^n$ определяется формулой

$$|(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)| := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

*Линейным подпространством* называется подмножество $L \subset \mathbb{Q}^n$, замкнутое относительно сложения векторов и умножения на рациональные числа. Линейное подпространство $L$ называется *$n$-мерным*, если найдутся такие линейно независимые векторы $v_1, \ldots, v_n \in L$, что любой вектор $v \in L$ линейно выражается через данные векторы, т. е. найдутся числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{Q}$, для которых $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Число $n$ называют *размерностью* пространства $L$. Ср. с определением перед задачей 2.4.7.

*Замечание.* Аналогичные определения можно дать и в более общей ситуации — это приводит к понятию *кольца* и *модуля* над ним. Попытка доказать (и использовать!) аналог теоремы о линейной зависимости (задачи 8.1.1.($\mathbb{Z}_2$),($\mathbb{Q}$)) приводит к понятиям *поля* и *линейного пространства* над ним. (Для случая целых чисел уже не все обобщения проходят.) Подробности можно найти в учебнике по линейной алгебре.

**8.1.2.** Дано семейство $\mathcal{F}$ подмножеств множества $\mathcal{R}_n$.

(a) Если в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ нечётное число элементов, а в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ чётное число элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(b) Постройте пример, когда эта оценка достигается.

(c) Если в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно $k$ элементов и в каждом подмножестве из $\mathcal{F}$ более $k$ элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

(d) Если $k > 0$ и в пересечении любых двух подмножеств из $\mathcal{F}$ ровно $k$ элементов, то $|\mathcal{F}| \leqslant n$.

**8.1.3.** (a) Существуют $2^k$ подмножеств $2k$-элементного множества, в каждом из которых чётное число элементов и в пересечении любых двух из которых чётное число элементов.

(b) Больше, чем $2^k$ подмножеств, в условиях пункта (a) быть не может.

**8.1.4.** (a) Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n$ с равными попарными расстояниями равно $n+1$.
(b) Постройте $n(n-1)/2$ точек в $\mathbb{R}^n$, попарные расстояния между которыми принимают только два различных значения.
(c) Для $a \in \mathbb{R}$ и точек $v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ обозначим $P_v(x) := |x-v|^2 - a^2$. Если попарные расстояния между $k$ точками $u_1, \ldots, u_k \in \mathbb{R}^n$ равны $a$, то многочлены $P_{u_1}, \ldots, P_{u_k}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.
(d) Если попарные расстояния между $k$ точками в $\mathbb{R}^n$ принимают только два различных значения, то $k \leqslant (n+1)(n+4)/2$.

**8.1.5.** (a) Среди любых 327 попарно пересекающихся 9-элементных подмножеств 25-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 3 или ровно 6 элементов.
(b) Для $n, k \in \mathbb{Z}$ обозначим

$$V_{n,k} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \{0,1\}^n \ : \ \sum_s x_s = k\}.$$

Среди любых 327 точек в $V_{25,9}$ есть две, скалярное произведение которых лежит в $\{0, 3, 6\}$.
(c) Для любого $\vec{a} \in V_{25,9}$ раскроем скобки в произведении

$$(\vec{a} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{25}) - 1)(\vec{a} \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_{25}) - 2),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{25}$ — переменные. С каждым из полученных одночленов проведём следующую операцию: для каждого $i$ если в одночлене есть множитель $x_i^n$, то заменим этот множитель на $x_i$ при $n$ нечётном и на 1 при $n$ чётном. Полученный многочлен обозначим $F_{\vec{a}}(x_1, \ldots, x_{25})$. Докажите, что если скалярное произведение никаких двух векторов среди $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_s \in V_{25,9}$ не делится на 3, то многочлены $F_{\vec{a}_1}, \ldots, F_{\vec{a}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.
(d) Укажите 326 многочленов, линейными комбинациями которых с рациональными коэффициентами можно получить каждый многочлен $F_{\vec{a}}$, $\vec{a} \in V_{25,9}$.

**8.1.6.** (a) Среди любых 107 пятиэлементных подмножеств 14-элементного множества найдутся два подмножества, в пересечении которых ровно 2 элемента.

(b) То же для 93 подмножеств.
(c) То же для 92 подмножеств.
(d) Невозможно раскрасить в 21 цвет все пятиэлементные подмножества 14-элементного множества так, чтобы любые два пятиэлементные подмножества, пересекающиеся ровно по двум элементам, были разноцветны.
(Ср. с замечанием в задаче 6.1.4. Вот эквивалентная формулировка. Вершинами графа являются все пятиэлементные подмножества 14-элементного множества. Его ребрами являются пары подмножеств, пересекающиеся ровно по двум элементам. Докажите, что этот граф нельзя правильно раскрасить в 21 цвет.)

**8.1.7.** (a) Для простого $p$ и целого $t$ число $G(t) := (t-1)(t-2)\dots(t-p+1)$ делится на $p$ тогда и только тогда, когда $t$ не делится на $p$.
(b) Пусть $p$ простое и $n = 4p$. Обозначим

$$M = \{(1, y_2, y_3 \dots, y_n) \mid$$

$$\mid \; y_k \in \{1, -1\} \text{ и среди } y_2, \dots, y_n \text{ число минус единиц чётно}\}.$$

Обозначим $G(t) := (t-1)(t-2)\dots(t-p+1)$. Для любого $\vec{a} \in M$ раскроем скобки в произведении $G(\vec{a} \cdot (1, x_2, \dots, x_n))$, где $x_1, x_2, \dots, x_n$ — переменные. В каждом из полученных одночленов для каждого $i$ будем заменять $x_i^2$ на 1, пока это возможно. Полученный многочлен обозначим $F_{\vec{a}}(x_2, \dots, x_n)$.
Докажите, что если скалярное произведение никаких векторов среди $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_s \in M$ не равно нулю, то многочлены $F_{\vec{a}_1}, \dots, F_{\vec{a}_s}$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.
(c) Существуют $n$ и ограниченное подмножество в $\mathbb{R}^n$, которое невозможно разбить на $n+1$ непустых частей меньшего диаметра.

**8.1.8.** (a) Если множество рёбер графа $K_n$ является объединением множеств рёбер $s$ полных двудольных графов, не пересекающихся по рёбрам, то $s \geqslant n-1$.
(b) Постройте набор двудольных графов, на котором эта оценка достигается.

## 8.2 Матрицы Адамара

**8.2.1.** *Теорема Адамара.* Если у матрицы $A$ размера $n \times n$ все элементы по модулю меньше 1, то $|\det A| \leqslant n^{n/2}$.

Квадратная матрица $H$ называется *матрицей Адамара*, если все её элементы равны $\pm 1$ и $H \cdot H^T = nE_n$, где $n$ — порядок матрицы $H$ и $E_n$ — единичная матрица.

**8.2.2.** Постройте матрицу Адамара $n \times n$ для $n =$
(2) 2; (4) 4; (8) 8; (16) 16; (12) 12.

**8.2.3.** (a) У матрицы Адамара любые два столбца ортогональны.
(b) Матрица является матрицей Адамара тогда и только тогда, когда её элементы равны $\pm 1$ и любые две строки ортогональны.
(c) Для матриц Адамара достигается верхняя оценка в теореме Адамара. (Название матрицы Адамара получили благодаря этому результату.)
(d) Если существует матрица Адамара $n \times n$ и $n > 2$, то $n$ делится на 4.

**Гипотеза.** Матрица Адамара $n \times n$ существует для любого числа $n$, делящегося на 4.

Гипотеза не доказана даже для некоторых чисел, меньших 1000; а именно, для 668, 716, 892.

Для решения двух следующих задач потребуются простейшие свойства квадратичных вычетов; см. [O, §9], [Vi, §5], [Z, 3.8].

**8.2.4.** Для простого числа $p$ обозначим $S_d = S_{p,d} := \sum\limits_{j \in \mathbb{Z}_p} \left( \dfrac{j(j+d)}{p} \right)$ (это сумма символов Лежандра).

(a) Докажите, что $S_d$ не зависит от $d \neq 0$.

(b) Найдите $S_d$ для каждого $d \in \mathbb{Z}_p$.

**8.2.5.** Постройте матрицу Адамара $n \times n$ для $n$, равного

(2a) $2a$, если существует матрица Адамара $a \times a$;

(ab) $ab$, если существуют матрицы Адамара $a \times a$ и $b \times b$;

(4k) $p+1$, где $p$ — простое число вида $4k-1$;

(8k+4) $2p+2$, где $p$ — простое число вида $4k+1$.

Матрица Адамара называется *нормализованной*, если у неё первая строчка и первый столбец состоят из одних единиц.

**8.2.6.** Нарисуйте все нормализованные матрицы Адамара порядков 1; 2; 4.

**8.2.7.** Адамаровость матрицы сохраняется при следующих преобразованиях:

(1) умножение строчки или столбца на $-1$;

(2) перестановка строчек или столбцов местами.

Матрицы Адамара, получаемые друг их друга применением некоторого числа преобразований (1) и (2), называются *эквивалентными*.

**8.2.8.** (a) Какие из матриц из задачи 8.2.6 эквивалентны?
(b) Любая матрица Адамара эквивалентна некоторой нормализованной.

Количество классов эквивалентности: для порядков 1,2,4,8,12 — 1, 16 — 5, 20 — 3, 24 — 60, 28 — 487, 32 — больше миллиона.

**8.2.9.** Для любых ли матриц Адамара $H$ и $H'$ матрицы $H \otimes H'$ и $H' \otimes H$ эквивалентны? Здесь тензорное произведение $\otimes$ определено в указании к задаче 8.2.5.($ab$).

**8.2.10.** Матрица Адамара $H$, построенная при помощи конструкции (Пэйли) из задачи 8.2.5.($8k+4$), эквивалентна матрице $H^T$.

**8.2.11.*** Существует ли матрица Адамара $H$, не эквивалентная матрице $H^T$?

## 8.3 Подсказки

*8.1.2.* (a) Если подмножеств больше $n$, то по теореме о корректности определения размерности одно из них равно симметрической разности некоторых других: $A = B_1 \oplus B_2 \oplus \ldots \oplus B_s$.
(c) Возьмём векторы $v_1, \ldots, v_m \in \{0,1\}^n$, соответствующие подмножествам $\{A_1, \ldots, A_m\} = \mathcal{F}$. По теореме о корректности определения размерности достаточно показать линейную независимость этих векторов над $\mathbb{Q}$.

*8.1.3.* (b) Для семейства $U$ подмножеств множества $\{1,2,\ldots,n\}$, замкнутого относительно суммы по модулю 2 (т. е. для линейного подпространства в $\mathbb{Z}_2^n$), обозначим

$$U^\perp := \{X \subset \{1,2,\ldots,n\} \ : \ |X \cap Y| \text{ чётно для любого } Y \in U\}.$$

Докажите, что $\dim U^\perp \leqslant n - \dim U$.

*8.1.4.* (d) Докажем, что если попарные расстояния между $k$ точками в $\mathbb{R}^n$ равны, то $k \leqslant n+2$. Это сложное доказательство более слабой верхней оценки $n+2$ интересно тем, что его обобщение работает для двух расстояний. Обозначим через $a$ данное расстояние. Многочлен $P_v(x_1,\ldots,x_n)$ является линейной комбинацией (с коэффициентами, не зависящими от $x_1,\ldots,x_n$) многочленов $|x|^2, x_1,\ldots,x_n$ и 1. В этом списке $n+2$ многочлена. По (a) многочлены, соответствующие данным точкам в $\mathbb{R}^n$, линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Поэтому количество точек не превосходит $n+2$.

*8.1.5.* (a) Следует из (b).
(b) Следует из (c).
(c) Пусть, напротив,

$$\lambda_1 F_{\vec{a}_1} + \ldots + \lambda_s F_{\vec{a}_s} = 0$$

для некоторых $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_s \in V_{25,9}$ и рациональных $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$, причем не все $\lambda_k$ равны нулю. Умножим и поделим это равенство на некоторые целые числа, чтобы сделать $\lambda_1,\ldots,\lambda_s$ целыми, не все из которых делятся на 3. Не уменьшая общности, можно считать, что $\lambda_1$ не делится на 3. Подставим в полученное равенство значения $x_1 = (\vec{a}_1)_1, \ldots, x_n = (\vec{a}_1)_n$.

## 8.4 Указания

***8.1.1.*** *Доказательство для целых чисел.* Рассмотрим векторы с целыми координатами как векторы с рациональными координатами. Подберем рациональные коэффициенты для линейной комбинации, равной 0. Умножим все коэффициенты на общий знаменатель. Получим равную 0 линейную комбинацию с целыми коэффициентами.

# 9 Теоремы об инцидентностях в геометрии

## 9.1 Задачи

**9.1.1.** *Теорема Сильвестра-Галлаи.* Пусть даны $n$ точек на плоскости, не все точки лежат на одной прямой. Тогда найдётся прямая, которая пройдёт ровно через две точки.

*Числом скрещиваний* $\mathrm{cr}(\widetilde{G})$ изображения $\widetilde{G}$ графа на плоскости называется число пар таких пересекающихся ребер, которые не имеют общих вершин.

*Числом скрещиваний* $\mathrm{cr}(G)$ графа $G$ называется минимальное число скрещиваний среди всех изображений графа на плоскости.

*Замечание.* Планарные графы составляют ничтожную долю от всех графов: для планарности в графе должно быть «мало» рёбер, в то время, как в «типичном» графе число рёбер квадратично по числу вершин. Поэтому вместо того, чтобы делить мир на чёрное и белое, планарные и непланарные графы, часто хочется классифицировать графы более тонко, по степени их «удалённости от планарных». Соответствующих характеристик непланарности несколько. Одна из главных — это число скрещиваний.

**9.1.2.** Докажите, что для любого графа $G$ с $n$ вершинами и $e$ рёбрами выполнено неравенство $\mathrm{cr}(G) \geqslant e - 3n$.

**9.1.3.*** Дан граф $G$ с $n$ вершинами и $e$ рёбрами.
(a) Если $e \geqslant 4n$, то $\mathrm{cr}(G) \geqslant \frac{e^3}{64 \cdot n^2}$.
(b) $\mathrm{cr}(G) \geqslant \frac{e^3}{64 \cdot n^2} - n$.

Пусть $P$ — множество некоторых точек на плоскости, $L$ — множество некоторых прямых на плоскости. *Числом инциденций* $I(P, L) := |\{(p, l) \in P \times L : p \in l\}|$ называется количество пар вида (точка на прямой, прямая), где прямая и точка взяты из соответствующих множеств. Обозначим через $I(n, m)$ максимальное число инциденций для всех конфигураций из $n$ различных точек и $m$ различных прямых на плоскости.

**9.1.4.** * Для произвольного $n$ верно неравенство $I(n, n) \geqslant 2n^{4/3}$.

**9.1.5.** Пусть $P$ — множество из $n$ различных точек на плоскости, $L$ — множество из $m$ различных прямых. Пусть $G$ — граф, определяемый следующим образом. Вершины $G$ соответствуют точкам из множества $P$, а ребро между двумя вершинами $G$ проводится если и только если две соответствующие точки из множества $P$ лежат на какой-либо прямой из множества $L$ рядом, т. е. не разделены другой точкой из множества $P$. Таким образом, рёбрам графа $G$ соответствуют отрезки прямых из множества $L$. Пусть $e$ — число рёбер в графе $G$.

(a) $\mathrm{cr}(G) \leqslant m^2$.

(b) $e \geqslant I(P, L) - m$.

(c) *Теорема Семереди-Троттера.* $I(P, L) \leqslant 4(mn)^{2/3} + m + 4n$.

*Замечание.* Из задач 9.1.4 и 9.1.5.c следует, что $I(n, n) \sim cn^{4/3}$. Важность этого результата, в частности, в том, что он показывает комбинаторные различия между плоскостью $\mathbb{R}^2$ и конечными проективными плоскостями. (См. указание к задаче 6.6.3, а также [J, 12.4] Для них соответствующая формула выглядела бы как $cn^{3/2}$. Из этой задачи выросла целая область, которая изучает различные обобщения данного вопроса, например, на случай полиномиальных кривых, пространств бóльших размерностей и т.п. Кроме того, она тесно связана с задачами о расстояниях, которые мы обсудим ниже, и с вопросами о сложности геометрических конфигураций. Стоит отметить, что исторически первый вопрос в духе вопроса Эрдеша об инциденциях был поставлен Сильвестром ещё в 19 веке (см. задачу 9.1.1). Однако, он не получил должного внимания.

**9.1.6.** Существует такое число $c$, что для любых $n$ точек плоскости верно следующее утверждение. Для $2 \leqslant k \leqslant \sqrt{n}$ число прямых, каждая из которых содержит по крайней мере $k$ из этих точек, не превосходит $cn^2/k^3$.

**9.1.7.*** *Теорема Спенсера—Семереди—Троттера.* Существует такое $c$, что для любых $n$ точек плоскости количество неупорядоченных пар точек, находящихся на расстоянии 1, не превосходит $cn^{4/3}$.

# 10 Аддитивная комбинаторика

## 10.1 Задачи

*Суммой* $A+B$ подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ или $A, B \subset \mathbb{Z}_m$ называется множество

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

**10.1.1.** (a) Если $A, B \subset \mathbb{Z}_4$, $|A + B| = |A| \neq 0$ и $|B| = 2$, то $|A| \in \{2, 4\}$.
(b) Если $A, B \subset \mathbb{Z}_6$, $|A + B| = |A| \neq 0$ и $|B| = 2$, то $|A| \in \{3, 6\}$.

Базовые свойства суммы множеств даются следующей задачей.

**10.1.2.** Для любых конечных подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$
(a) $\max\{|A|, |B|\} \leqslant |A + B| \leqslant |A||B|$;
(b) $|A| \leqslant |A + A| \leqslant \frac{|A|(|A|+1)}{2}$.

**10.1.3.** (a) Если $A = \{2^j : j = 0, 1, \ldots, n-1\}$, то $|A+A| = \frac{n(n+1)}{2}$.
(b) Для любой конечной арифметической прогрессии $P \subset \mathbb{R}$ верно неравенство $|P + P| = 2|P| - 1$.

*Замечание.* Задача 10.1.3.a даёт пример подмножества, для которого достигается верхняя оценка в задаче 10.1.2.b. Задача 10.1.3.b даёт пример подмножества, для которого «почти достигается» нижняя оценка в задаче 10.1.2.b. Пример подмножества, для которого эта оценка достигается — произвольное одноэлементное подмножество.

**10.1.4.** *Теорема Кнезера для* $\mathbb{R}$. Для любых конечных подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ верно неравенство $|A + B| \geqslant |A| + |B| - 1$.

Следующий $\mathbb{Z}_p$-аналог можно использовать в дальнейшем без доказательства.

**Теорема Коши–Давенпорта** *Для любого простого числа* $p$ *и для произвольных двух подмножеств* $A, B \subset \mathbb{Z}_p$ *верно неравенство*

$$|A + B| \geqslant \min\{|A| + |B| - 1, p\}.$$

**10.1.5.** (a) Если $A, B \subset \mathbb{R}$ и $|A+B| = |A|$, то $|B| = 1$.
(b) Если $p$ простое, $A, B \subset \mathbb{Z}_p$ и $|A+B| = |A|$, то либо $|B| \leqslant 1$, либо $A = \mathbb{Z}_p$.

Аналогично сумме множеств можно определить их *разность*:

$$A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}.$$

**10.1.6.** *Неравенство Ружи.* Для любых конечных подмножеств $A, B, C \subset \mathbb{R}$

$$|C||A-B| \leqslant |A-C||B-C|.$$

**10.1.7.** (a) Для любого непустого конечного подмножества $X \subset \mathbb{R}$ выполнено неравенство $|X - X| \leqslant \dfrac{|X+X|^2}{|X|}$.
(b) Для любых непустых конечных подмножеств $X, Y \subset \mathbb{R}$ выполнено неравенство $|X + X| \leqslant \dfrac{|X+Y|^2}{|Y|}$.
(c) Для любых конечных подмножеств $X, Y \subset \mathbb{R}$ таких, что $X \cap Y \neq \varnothing$ выполнено неравенство $|X+Y| \leqslant \dfrac{|X+X||Y+Y|}{|X \cap Y|}$.

**10.1.8.** Для любых непустых подмножеств $A, B \subset \mathbb{R}$ следующие утверждения эквивалентны:
(1) $|A+B| = |A||B|$;
(2) $|A-B| = |A||B|$;
(3) $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 + b_1 = a_2 + b_2\}| = |A||B|$;
(4) $|\{(a_1, a_2, b_1, b_2) \in A \times A \times B \times B : a_1 - b_1 = a_2 - b_2\}| = |A||B|$;
(5) $|A \cap (\{x\} - B)| = 1$ для любого $x \in A + B$;
(6) $|A \cap (B + \{y\})| = 1$ для любого $y \in A - B$;
(7) $(A - A) \cap (B - B) = \{0\}$.

*Сумма* произвольных подмножеств $X_1, X_2, \ldots, X_n \subset \mathbb{R}$ определяется как

$$X_1 + X_2 + \ldots + X_n := \{x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ : \ x_i \in X_i \text{ для любого } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

Для произвольного подмножества $X \subset \mathbb{R}$ и любого целого $k > 0$ положим

$$kX := \underbrace{X + X + \ldots + X}_{k \text{ раз}}.$$

Неравенство Ружи (задача 10.1.6) можно обобщить на случай суммы $n$ множеств.

**Неравенство Плюннеке–Ружи.** *Для любых непустых конечных подмножеств* $A_1, A_2, \ldots, A_n, B \subset \mathbb{R}$

$$|A_1 + A_2 + \ldots + A_n| \leqslant \frac{|A_1 + B||A_2 + B| \ldots |A_n + B|}{|B|^{n-1}}.$$

**10.1.9.** Для любого конечного подмножества $A \subset \mathbb{R}$ и произвольного $n \in \mathbb{N}$ верны неравенства $|A| \leqslant |nA| \leqslant \binom{|A|+n-1}{n}$.

Аналогично сумме множеств можно определить их *произведение*:

$$AB := \{ab : a \in A, b \in B\}.$$

**10.1.10.** Если $A, B \subset \mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$, $|AB| = |A| \neq 0$ и $|B| = 2$, то $|A| \in \{2, 4\}$.

**10.1.11.** (a) Существует такое $c > 0$, что для любого конечного множества $A \subset \mathbb{R}$ выполняется неравенство $\max\{|A + A|, |A \cdot A|\} \geqslant c|A|^{5/4}$.
(b) Существует такое $c > 0$, что для любой арифметической прогрессии $P \subset \mathbb{R}$ длины более 3 верно неравенство $|P \cdot P| > c|P|^{5/4}$.

*Замечание.* На самом деле, если $P$ — арифметическая прогрессия длины $n$ во множестве целых чисел, то можно улучшить оценку из задачи 10.1.11.b. А именно, для любого $\varepsilon \in (0, 2)$ существует такое $c > 0$, что $|P \cdot P| \geqslant c|P|^{\varepsilon}$. Доказательство этого факта использует нетривиальные теоремы из теории чисел, поэтому выходит за рамки этой книги.

**10.1.12.** Дано произвольное конечное непустое подмножество $A \subseteq \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{L}$ семейство прямых на плоскости, задаваемых уравнением $y = a(x - b)$, где $a, b \in A$. Обозначим $\mathcal{P} := (A + A) \times (A \cdot A)$. Докажите, что общее количество инциденций (определение смотри в §9) между прямыми из $\mathcal{L}$ и точками из $\mathcal{P}$ не меньше, чем $|A|^3$.

## 10.2 Подсказки

*10.1.1.* Задача решается перебором.

*10.1.2.* (b) Для любых двух $a_1, a_2 \in A$ верно равенство $a_1 + a_2 = a_2 + a_1$. Дальше используйте определение.

*10.1.3.* (a) Рассмотрите четыре целых числа $0 \leqslant i, j, k, l \leqslant n-1$ таких, что $i \leqslant j$, $k \leqslant l$, $i \neq k$, и покажите, что $2^i + 2^j \neq 2^k + 2^l$.

*10.1.4.* Упорядочим каждое множество и рассмотрим $|A| + |B| - 1$ заведомо разных сумм.

*10.1.5.* (a) Используйте теорему Кнезера.

*10.1.6.* Используйте формулу $a - b = (a - c) + (c - b)$.

*10.1.8.* Докажите и используйте следующий факт: если $|A + B| = |A||B|$, то для любого элемента $z \in A + B$ существует единственная пара $(a, b) \in A \times B$, для которой $z = a + b$.

*10.1.9.* Используйте определение.

*10.1.11.* (a) Рассмотрите множество точек $\mathcal{P}$ и множество прямых $\mathcal{L}$, определённые в задаче 10.1.12. Запишите оценку количества инциденций между прямыми из $\mathcal{L}$ и точками из $\mathcal{P}$, которую даёт теорема Семереди-Троттера (задача 9.1.5). Сравните её с оценкой из задачи 10.1.12. Из получившегося двойного неравенства выведите требуемое неравенство.

*10.1.12.* Посчитайте $|\mathcal{P}|$ и $|\mathcal{L}|$. Потом докажите, что каждая прямая из $\mathcal{L}$ содержит по крайней мере $|A|$ точек из $\mathcal{P}$.

# Предметный указатель

# Литература


[AM] *Акопян А. В. , Мусин О. Р.* О множествах с двумя расстояниями. Мат. Просвещение, 17 (2013), 136–151.
URL: http://www.mccme.ru/free-books/matpros/mph.pdf

[A] *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1984.

[AS] *Алон Н., Спенсер Дж.* Вероятностный метод. М.: Бином, 2011.

[B] *Babai L., Frankl P.* Linear algebra methods in combinatorics, Part 1. Department of Computer Science, The University of Chicago, 1992.

[Bo] *Bollobás B.* Random Graphs. Cambridge studies in advanced mathematics, 2001.

[BKS] *Брагин В.,Клячко А., Скопенков А.* Когда любая группа из $n$ элементов циклическая?
URL: http://arxiv.org/abs/1108.5406.

[BKKSS] *Баранов Д., Клячко А., Кохась К., Скопенков А., Скопенков М.* Когда любая группа из $n$ элементов циклическая?
URL: http://olympiads.mccme.ru/lktg/2011/6/index.htm

[EL] P. Erdős, L. Lovász, “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions”, *Infinite and Finite Sets*, Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai, **10**, Amsterdam: North Holland, 1973, 609–627.

[Ga] *Гарднер М.* Рамсеевская теория графов. // Квант, 1988, N4, с. 15–20, 82.
URL: http://kvant.mccme.ru/1988/04/ramseevskaya_teoriya_grafov.htm

[Go] Городская устная математическая олимпиада, М.: 2014. http://olympiads.mccme.ru/ustn/ustn14.pdf

[Gr] *Григорьев И.* Порождение перестановок «восьмёркой».
URL: http://www.mccme.ru/mmks/dec10/grigoryev_report.pdf

[G] *Грэхем Р.* Начала теории Рамсея. М.: Мир, 1984.

[GIF] *С. А. Генкин, И. В. Итенберг и Д. В. Фомин*, Ленинградские математические кружки, Киров, 1994.

[GKP] *Грэхем Р., Кнут Д., Паташник А.* Конкретная математика. М.: Мир, 1998.

[Har] *Харари Ф.* Теория графов. М.: УРСС, 2003.

[Hal] *Холл М.* Комбинаторика. М.: Мир, 1970.

[IKRS] *Ильинский Д., Купавский А., Райгородский А., Скопенков А.* Дискретный анализ для математиков и программистов (подборка задач). Мат. Просвещение, 17 (2013), с. 162–181.
URL: http://www.mccme.ru/free-books/matpros/matprosi.html.

[I] *Игнатьев М.В.* Квантовая комбинаторика. Мат. Просвещение. 18 (2014), с. 66–111.

[Ja] *Janson, Luczak, Rucinski* Random graphs. John Wiley, 2000.

[J] *Jukna S.* Extremal Combinatorics With Applications in Computer Science. Springer-Verlag, XVII (2001).

[K] *Калужнин Л. А., Сущанский В. И.* Преобразования и перестановки. М.: Физматлит, 1985.

[KZP] *Колмогоров А. Н., Журбенко И. Г., Прохоров А. В.,* Введение в теорию вероятностей. Серия «Библиотечка «Квант» », выпуск 23. М.: Наука, 1982.
URL: http://ilib.mccme.ru/djvu/bib-kvant/teorver.htm

[KR] *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2001.
URL: http://ilib.mccme.ru/pdf/kurant.htm .

[L] *Lovász L.* Combinatorial problems and exercises. North-Holland, Amsterdam, 1979.

[MS] *Медников Л. Э., Шаповалов А.В.* Турнир городов: мир математики в задачах. МЦНМО, 2012.

[O] Задачник по ОКТЧ./ Глибичук А.А. [и др.] Готовится к печати.

[P] *Прасолов В. В.* Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии. М.: МЦНМО, 2004.
URL: http://www.mccme.ru/prasolov

[R1] *Райгородский А.М.* Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2007.

[R2] *Райгородский А.М.* Проблема Борсука. М.: МЦНМО, 2006.

[R3] *Райгородский А.М.* Вероятность и алгебра в комбинаторике. М.: МЦНМО, 2010.

[R4] *Райгородский А.М.* Модели случайных графов и их применения.
URL: http://ium.mccme.ru/postscript/s12/gasnikov-raigorodskii.pdf

[R5] *Райгородский А.М.*, Комбинаторика и теория вероятностей. М.: Изд-во МФТИ, 2012.

[R6] *Райгородский А.М.*, Системы общих представителей в комбинаторике и их приложения в геометрии. М.: МЦНМО, 2013.

[S1] *Skopenkov A.* On the Kuratowski graph planarity criterion.
URL: http://arxiv.org/abs/0802.3820 , v3.

Русскоязычная версия: *Скопенков А.* Вокруг критерия Куратовского планарности графов, Мат. Просвещение, 9 (2005), 116–128 и 10 (2006), 276–277.
URL: http://www.mccme.ru/free-books/matprosa.html

[S2] *Skopenkov A.* A two-page disproof of the Borsuk partition conjecture.
URL: http://arxiv.org/abs/0712.4009 , v2.

Русскоязычная версия: *Скопенков А.* Короткое опровержение гипотезы Борсука. Мат. Просвещение, 17 (2013), с. 88–92.
URL: http://www.mccme.ru/free-books/matpros/matprosi.html

[S3] *Скопенков А.* Алгебраическая топология с геометрической точки зрения. М.: МЦНМО,в печати.
URL: http://arxiv.org/abs/0808.1395, http://www.mccme.ru/circles/oim/obstruct.pdf

[S4] *Скопенков А.* Олимпиады и математика. Мат. Просвещение, 10 (2006), с. 57–63.
URL: http://www.mccme.ru/free-books/matprosb.html

[S5] *Skopenkov A.* A simple proof of the Abel-Ruffini theorem.
URL: http://arxiv.org/abs/1102.2100

Русскоязычная версия: *Скопенков А.* Простое доказательство теоремы Руффини-Абеля, Мат. Просвещение, 15 (2011), с. 113–126.
URL: http://www.mccme.ru/free-books/matprosg.html

[S6] *Скопенков А.* Алгоритмы распознавания реализуемости гиперграфов.
URL: http://www.mccme.ru/circles/oim/algor.pdf

[So] *Соловьева Ф. И.* Введение в теорию кодирования. Новосибирск, 2006.
URL: http://tc.nsu.ru/uploads/codingtheory.pdf

[Ve] *Веснин А.Ю.* Гамильтоновы графы и остовные подграфы: задачи для исследования, материалы Московской математической конференции школьников.
URL: http://www.mccme.ru/mmks/mar08/vesnin3.pdf

[Vi] *Виноградов И.М.* Основы теории чисел. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.

[VS] *Волков М., Силкин Н.* Кого послать на Марс? // «Квант» (1988) N8, с. 51–57.
URL: http://kvant.mccme.ru/1988/08/kogo_poslat_na_mars.htm

[Z] Математика в задачах. Сборник материалов московских выездных математических школ. Под редакцией А. Заславского и др. М.: МЦНМО, 2009.
URL: http://www.mccme.ru/free-books/olymp/matprob.pdf

[1] https://www.dpmms.cam.ac.uk/~dc340/EGT3.pdf

[2] http://www.cs.rit.edu/~spr/ElJC/ejcram14.pdf

[3] http://www.math.upenn.edu/~wilf/website/Three%20problems.pdf

[4] http://www.unn.ru/math/no/5/_nom5_001_ilyin.pdf

[5] http://www.sosmath.com/calculus/sequence/stirling/stirling.html

[6] http://www.spbstu.ru/publications/m_v/n_002/Polischook/Stirling.pdf

[7] http://arxiv.org/pdf/1109.2546.pdf