

Regressão Linear

Gustavo J. V. Meira Filho

Table of contents

Bibliotecas e Importações	3
Objetivo	4
Introdução	5
Régressão Linear Matricial	7
Função de Régressão	12
Régressão Polinomial	14
Régressão Múltipla	16
Métricas de Goodness-of-Fit	19
Stochastic Gradient Descent	22
BatchGD	28

Bibliotecas e Importações

```
# Nativas Python
import sys
import os

# Dados Tabulares
import pandas as pd
import numpy as np

# Visualização
import plotly.graph_objects as go
import plotly.express as px
import plotly.figure_factory as ff
import plotly.io as pio
from graphmodex import plotlymodex

import matplotlib.pyplot as plt
import seaborn as sns

# Imagem png ou interativa (notebook)
pio.renderers.default = 'png'
```

Objetivo

Introduzir à ciência de dados e processos de otimização por álgebra linear.

- Conceitos de programação:
 - Arrays
 - Ajustes de Curva
 - Otimização
 - Redes neurais
- Bibliotecas:
 - `numpy`
 - `plotly`
- Aplicações:
 - Ajustar uma reta em dados experimentais (ex.: Conversão do Reator vs Temperatura).
 - Mostrar coeficientes da regressão (slope/intercept) e interpretar fisicamente.
 - Métricas de Goodness-of-Fit
 - Introdução à como funcionam redes neurais

Introdução

- O que é modelagem → ajustar uma função matemática a dados experimentais.
- Por que é útil → prever comportamento de processos químicos (ex.: reatores, trocadores, cinética).
- Regressão linear é o caso mais simples de aprendizado de máquina.

Exemplo físico para motivar: > “Queremos ver como a conversão do reator (X) varia com a temperatura (T) e encontrar a equação linear que melhor representa esse comportamento experimental.”

T (x) → variável independente

X (y) → variável dependente

$$y = a \cdot x + b$$

```
# Dados sintéticos de temperatura (K) e conversão (%)
T = np.array([300, 320, 340, 360, 380, 400])
X_exp = np.array([0.10, 0.20, 0.32, 0.40, 0.48, 0.59]) # dados experimentais
```

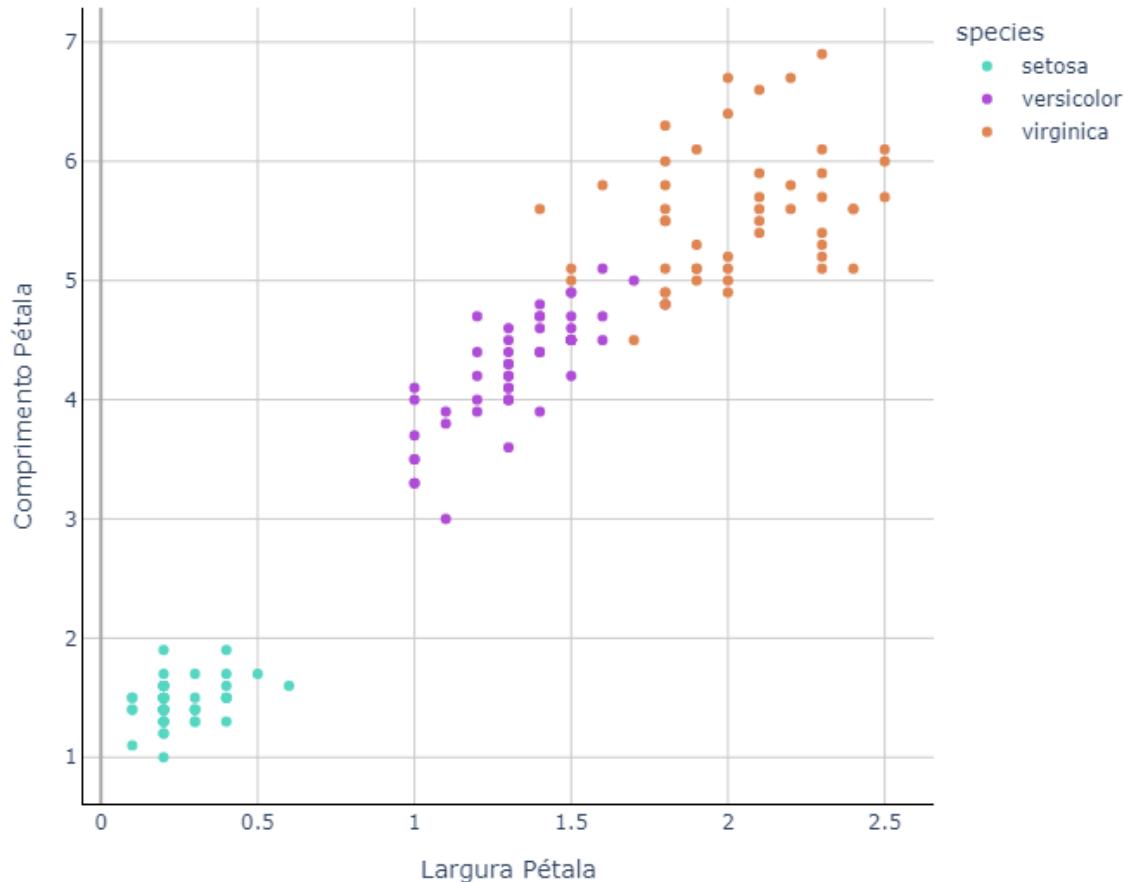
```
iris = sns.load_dataset('iris')
iris.head(10)
```

	sepal_length	sepal_width	petal_length	petal_width	species
0	5.1	3.5	1.4	0.2	setosa
1	4.9	3.0	1.4	0.2	setosa
2	4.7	3.2	1.3	0.2	setosa
3	4.6	3.1	1.5	0.2	setosa
4	5.0	3.6	1.4	0.2	setosa
5	5.4	3.9	1.7	0.4	setosa
6	4.6	3.4	1.4	0.3	setosa
7	5.0	3.4	1.5	0.2	setosa
8	4.4	2.9	1.4	0.2	setosa
9	4.9	3.1	1.5	0.1	setosa

```
fig = px.scatter(
    iris, x='petal_width', y='petal_length', color='species',
    color_discrete_sequence=["#54D6C1", "#AF4BD6", "#DF8551"]
)

plotlymodex.main_layout(
    fig, title='Dataset Iris',
    x='Largura Pétala', y='Comprimento Pétala'
)
```

Dataset Iris



```
X = np.array(iris.petal_width.copy(deep=True))
y = np.array(iris.petal_length.copy(deep=True))
```

Regressão Linear Matricial

O modelo de regressão linear assume uma das formas mais simples de modelagem, pois conta com os mesmos parâmetros da função linear – ou seja, um coeficiente linear 0 e outros coeficientes angulares n – sendo que é possível alocar múltiplas variáveis de input xn. Sendo \hat{y} o valor predito, podemos escrever o modelo da seguinte forma:

$$\hat{y} = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \cdots + \theta_n x_n$$

$$\hat{y} = \theta_0 + \sum_{i=1}^n \theta_i x_i$$

Da mesma forma, podemos escrever essa relação em termos matriciais (forma vetorializada) para ser recebido pelo modelo.

$$\hat{y} = h_\theta(\mathbf{x}) = \theta \cdot \mathbf{x}$$

Nesse caso, representa o vetor de parâmetros do modelo, incluindo o termo de bias 0 e os de features n. O termo x é um vetor que contém os valores de x0 = 1 até xn. Portanto, a operação considera o produto matricial entre:

$$\hat{y} = \theta^T \mathbf{x} = [\theta_0 \ \theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

É importante identificar a notação matemática, com o sobrescrito T sendo um indicador de matriz transposta. Isso é necessário pois em ML os vetores são todos representados por vetores coluna. Na regressão linear, precisamos achar o valor de que minimiza o RMSE. Na prática, é mais simples minimizar o MSE, sendo que ele leva para o mesmo resultado já que minimizá-lo também é minimizar sua raiz quadrada. Se considerarmos h como sendo a função de previsão do sistema – também chamado de hipótese, indicamos que a hipótese de regressão linear considerando uma parametrização por (h) em um conjunto de dados de treino X, temos a seguinte equação:

$$\text{MSE}(\mathbf{X}, h_\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\theta^T \mathbf{x}^{(i)} - y^{(i)})^2$$

Para o caso da regressão linear, o vetor de parâmetros que minimiza MSE() possui uma solução fechada e analítica que é chamada de equação normal. Podemos transformar essa função de minimização em uma forma matricial:

$$\text{MSE}(\theta) = \frac{1}{m} (\mathbf{X}\theta - \mathbf{y})^\top (\mathbf{X}\theta - \mathbf{y})$$

Quando expandimos essa equação, temos que

$$\text{MSE}(\theta) = \frac{1}{m} [\theta^\top \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\theta - 2\mathbf{y}^\top \mathbf{X}\theta + \mathbf{y}^\top \mathbf{y}]$$

Uma vez que MSE é diferenciável, a condição mínima é alcançada quando a derivada é igual à zero. Se $\text{MSE}(\theta)$ for a derivada, então queremos que

$$\nabla_\theta \text{MSE}(\theta) = 0$$

Ao calcular essa derivada obtemos

$$\nabla_\theta \text{MSE}(\theta) = \frac{2}{m} \mathbf{X}^\top \mathbf{X}\theta - \frac{2}{m} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$$

Igualando a zero encontramos

$$\mathbf{X}^\top \mathbf{X}\theta = \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$$

Se $\mathbf{X}^\top \mathbf{X}$ for inversível (significa dizer que $\mathbf{X}^{-1} \mathbf{X} = \mathbf{I}$) e, com isso, que $\det(\mathbf{X}^\top \mathbf{X}) \neq 0$ e que todas as colunas são linearmente independentes, então a solução fechada é dada por:

$$\hat{\theta} = (\mathbf{X}^\top \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^\top \mathbf{y}$$

Aqui, é o valor que minimiza e \mathbf{y} é o vetor contendo os valores de $y(1)$ até $y(m)$. Só para ter plena ciência da notação, o vetor $\mathbf{x}(1)$ é uma coluna contendo os inputs e o vetor $\mathbf{y}(1)$ contém os output. Um exemplo seria dizer que

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Fornece os valores que preveem

$$y^{(1)} = 5$$

Supondo um cenário de 2000 inputs, podemos escrever:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} (\mathbf{x}^{(1)})^\top \\ (\mathbf{x}^{(2)})^\top \\ \vdots \\ (\mathbf{x}^{(1999)})^\top \\ (\mathbf{x}^{(2000)})^\top \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

De forma que $y(1) = h(x(1))$ é a previsão do valor. É importante entender que há uma forte necessidade de haver inversibilidade em $X^T X$. Mas ainda assim é possível realizar regressões lineares em matrizes não inversíveis a partir do conceito de matriz pseudoinversa. A pseudoinversa de Moore-Penrose (X^+) é uma generalização da inversão de matrizes. Quando X for quadrada e inversível, então $X^+ = X^{-1}$. Contudo, em casos em que esses critérios não forem adequados, então podemos usar a decomposição de valores singulares (SVD) de forma que

$$X = U V^\top$$

$$X^+ = V^+ U^\top$$

Em que U e V são matrizes ortogonais (rotação / espelhamento) e é uma matriz com valores singulares maiores ou iguais a zero. Nesse caso, assim como no próprio numpy, temos que a regressão linear é fornecida por:

$$\hat{\theta} = X^+ y$$

Como a equação normal computa o inverso de $X^T X$ – que é uma matriz de $(n+1)(n+1)$ com n sendo o número de features – a complexidade computacional da inversão dessa matriz reside entre $O(n^2,4)$ à $O(n^3)$ a depender da implementação. Usando o scikit-learn, a complexidade computacional a partir do SVD é de $O(n^2)$, de forma que se dobrarmos a quantidade de features o tempo computacional irá quadruplicar.

```
novo_X = []
for value in X:
    novo_X.append([float(value), 1.])
```

```
novo_X = np.array(novo_X)
```

```
print('shape =', novo_X.shape)
novo_X[:5]
```

```
shape = (150, 2)
```

```
array([[0.2, 1.],
       [0.2, 1.],
       [0.2, 1.],
       [0.2, 1.],
       [0.2, 1.]])
```

```
# Outra forma de escrevermos isso é por:
X = np.vstack([X, np.ones(len(X))]).T
X[:5]
```

```
array([[0.2, 1.],
       [0.2, 1.],
       [0.2, 1.],
       [0.2, 1.],
       [0.2, 1.]])
```

```
print('shape =', y.shape)
y[:5]

shape = (150,)

array([1.4, 1.4, 1.3, 1.5, 1.4])

theta = np.linalg.inv(X.T @ X) @ X.T @ y
print(f'theta =', theta)
```

```
theta = [2.2299405 1.08355803]
```

```
alpha, beta = theta

print(f"""Parâmetros Calculados:
a = {alpha:.2f}
b = {beta:.2f}
""")
```

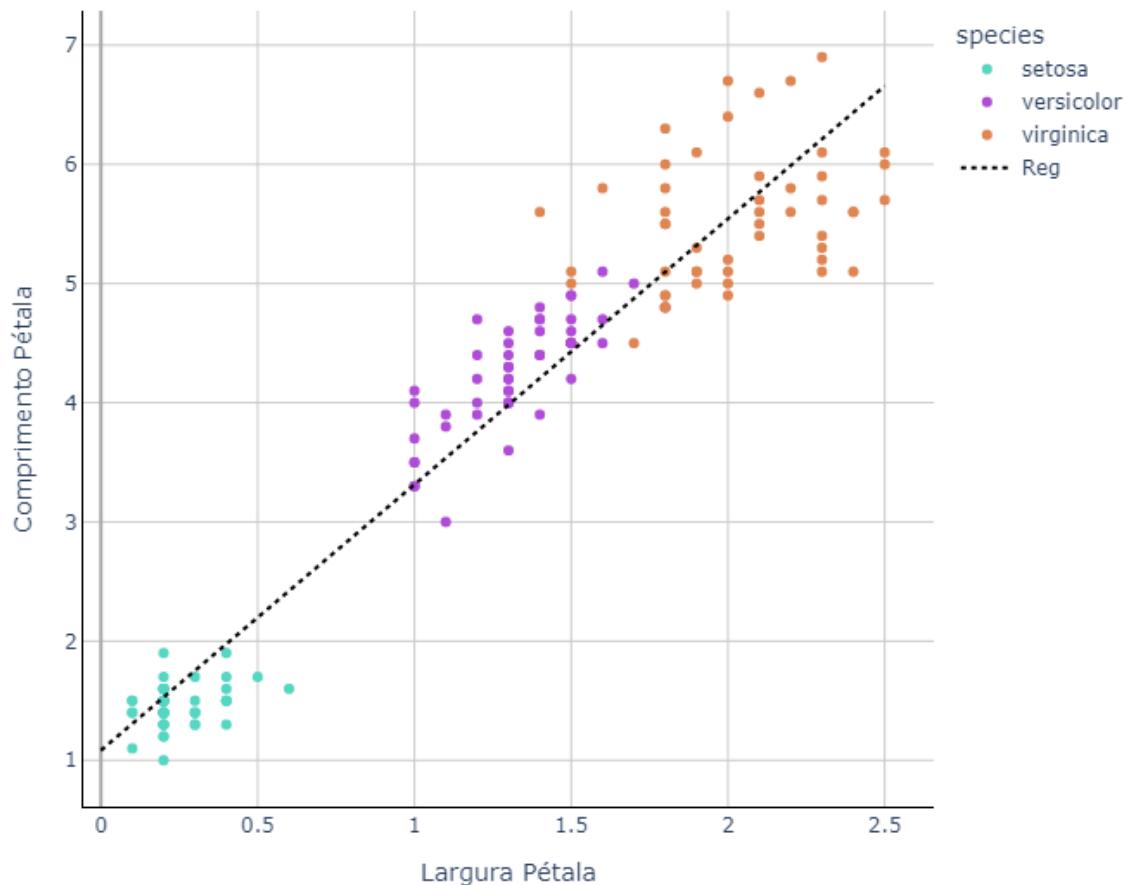
```
Parâmetros Calculados:
```

```
a = 2.23
b = 1.08
```

```
x_regressao = np.array([0, 2.5])
y_regressao = alpha*x_regressao + beta

fig.add_trace(go.Scatter(
    x=x_regressao, y=y_regressao,
    mode='lines', line=dict(color='black', dash='dot'),
    name='Reg'
))
```

Dataset Iris



Função de Regressão

```
def regressao_linear(
    df,
    x=None,
    y=None,
    color=None,
    plot=True,
):
    X = np.array(df[x])
    X = np.vstack([X, np.ones(len(X))]).T

    y_ = np.array(df[y])

    theta = np.linalg.inv(X.T @ X) @ X.T @ y_
    alpha, beta = theta

    if plot:
        fig = px.scatter(
            df, x=x, y=y, color=color,
        )

        x_regressao = np.linspace(df[x].min(), df[x].max(), 200)
        y_regressao = alpha*x_regressao + beta

        fig.add_trace(go.Scatter(
            x=x_regressao, y=y_regressao,
            mode='lines', line=dict(color='black', dash='dot'),
            name='Reg'
        ))

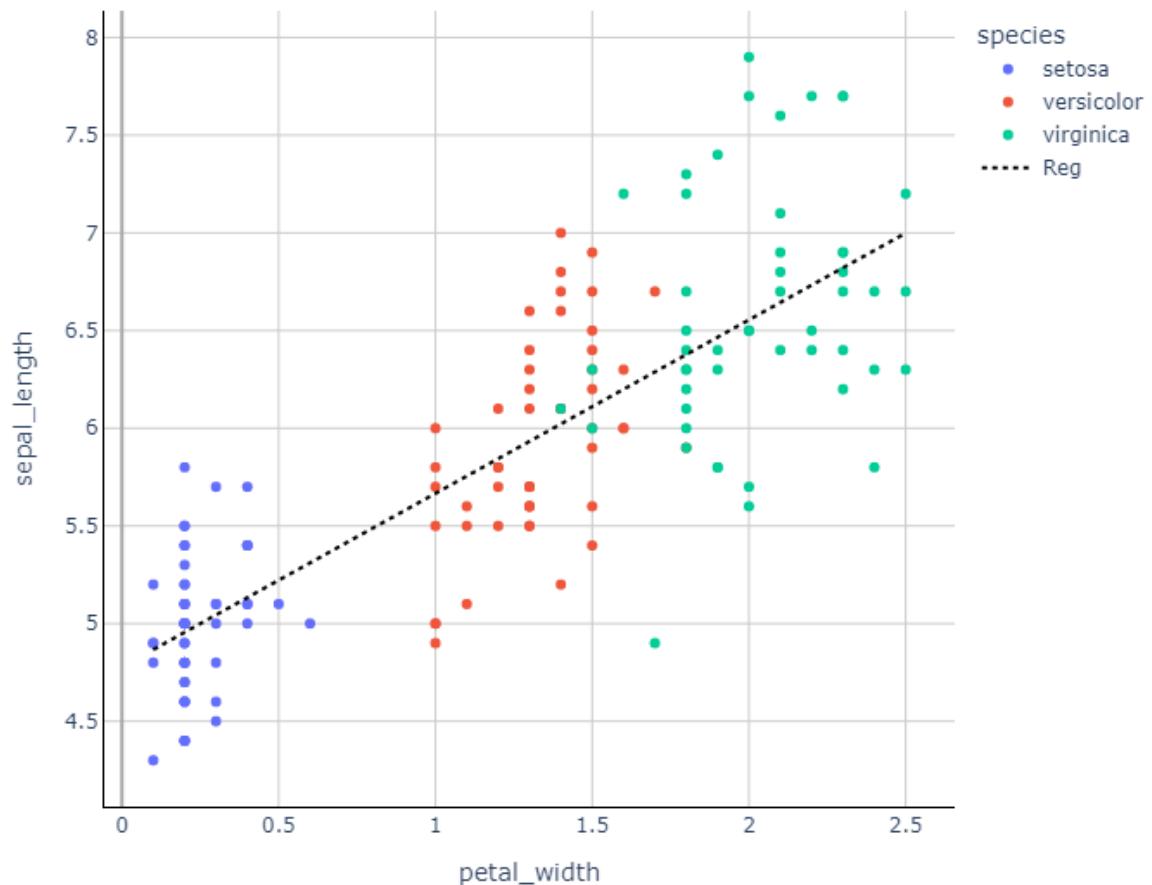
        plotlymodex.main_layout(
            fig, x=x, y=y, title=f'{alpha:.3f}x + {beta:.3f}'
        )

    fig.show()

    return alpha, beta

regressao_linear(df=iris, x='petal_width', y='sepal_length', color='species');
```

$$0.889x + 4.778$$



Regressão Polinomial

Podemos adicionar parâmetros com diferentes níveis de exponenciação para caracterizar curvas polinomiais e que, consequentemente, não se adequam ao padrão linear

Aqui, a única diferença da linear é, portanto, a presença de valores exponenciais de X:

$$x \rightarrow [1, x, x^2, x^3, \dots, x^d]$$

Dessa forma, o modelo polinomial pode ser definido por:

$$y \approx \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 x^2 + \dots + \theta_d x^d$$

As formas de descoberta dos valores dos parâmetros são as mesmas da Regressão Linear, ou seja, equação normal, decomposição SVD e SGD. Em caso de polinômios de alto grau, é comum a presença de overfitting, de forma que podemos usar mecanismos de regularização (Ridge e Lasso) para evitar esse problema.

```
def regressao_quadratica(
    df,
    x=None,
    y=None,
    color=None,
    plot=True,
    return_y_pred=False,
):
    X = np.array(df[x])
    X = np.vstack([X**2, X, np.ones(len(X))]).T

    y_ = np.array(df[y])

    theta = np.linalg.inv(X.T @ X) @ X.T @ y_
    alpha, beta, gamma = theta

    if plot:
        fig = px.scatter(
            df, x=x, y=y, color=color
        )

        x_regressao = np.linspace(df[x].min(), df[x].max(), 200)
        y_regressao = alpha*x_regressao**2 + beta*x_regressao + gamma

        fig.add_trace(go.Scatter(
            x=x_regressao, y=y_regressao,
            mode='lines', line=dict(color='black', dash='dot'),
            name='Reg'
        ))

    plotlymodex.main_layout(
        fig, x=x, y=y, title=f'{alpha:.3f}x^2 + {beta:.3f}x + {gamma:.3f}'
    )
```

```

fig.show()

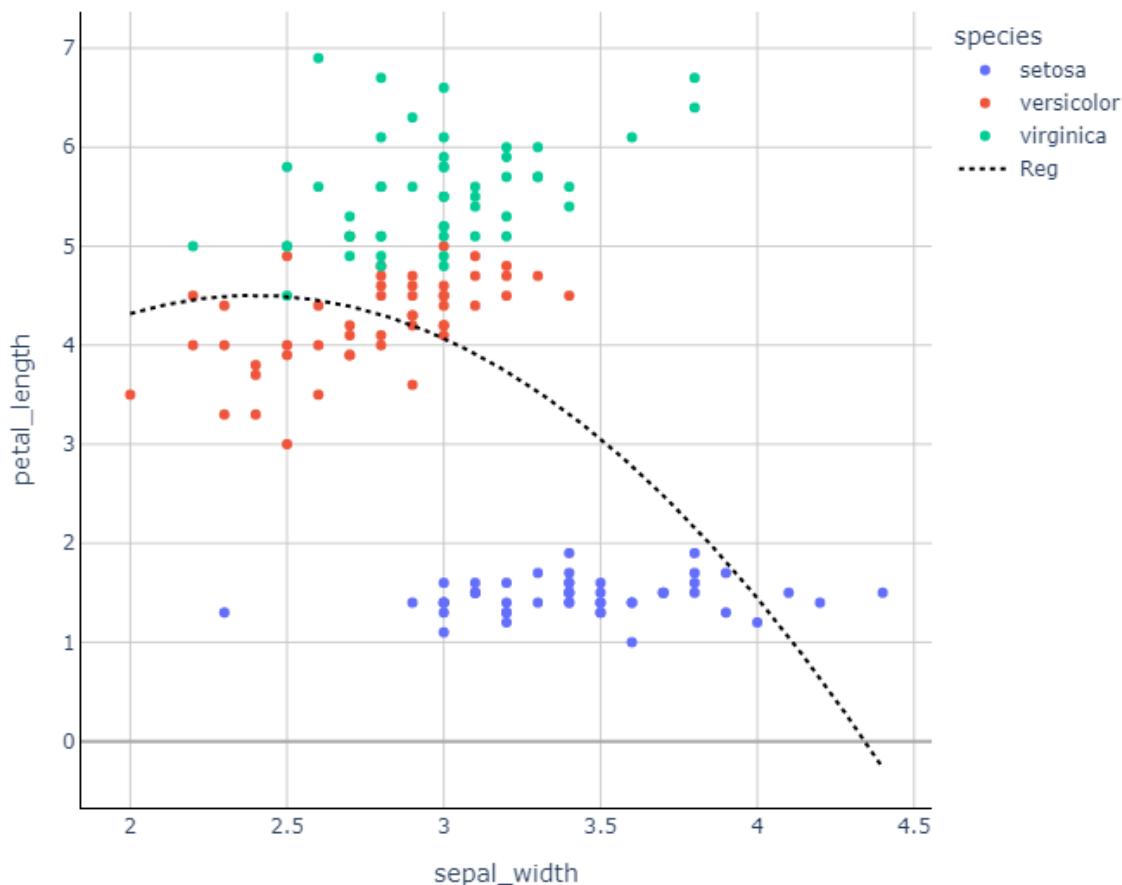
if return_y_pred:
    return alpha*np.array(df[x])**2 + beta*np.array(df[x]) + gamma

return alpha, beta, gamma

regressao_quadratica(
    df=iris, x='sepal_width',
    y='petal_length', color='species'
);

```

$$-1.186x^2 + 5.682x + -2.300$$



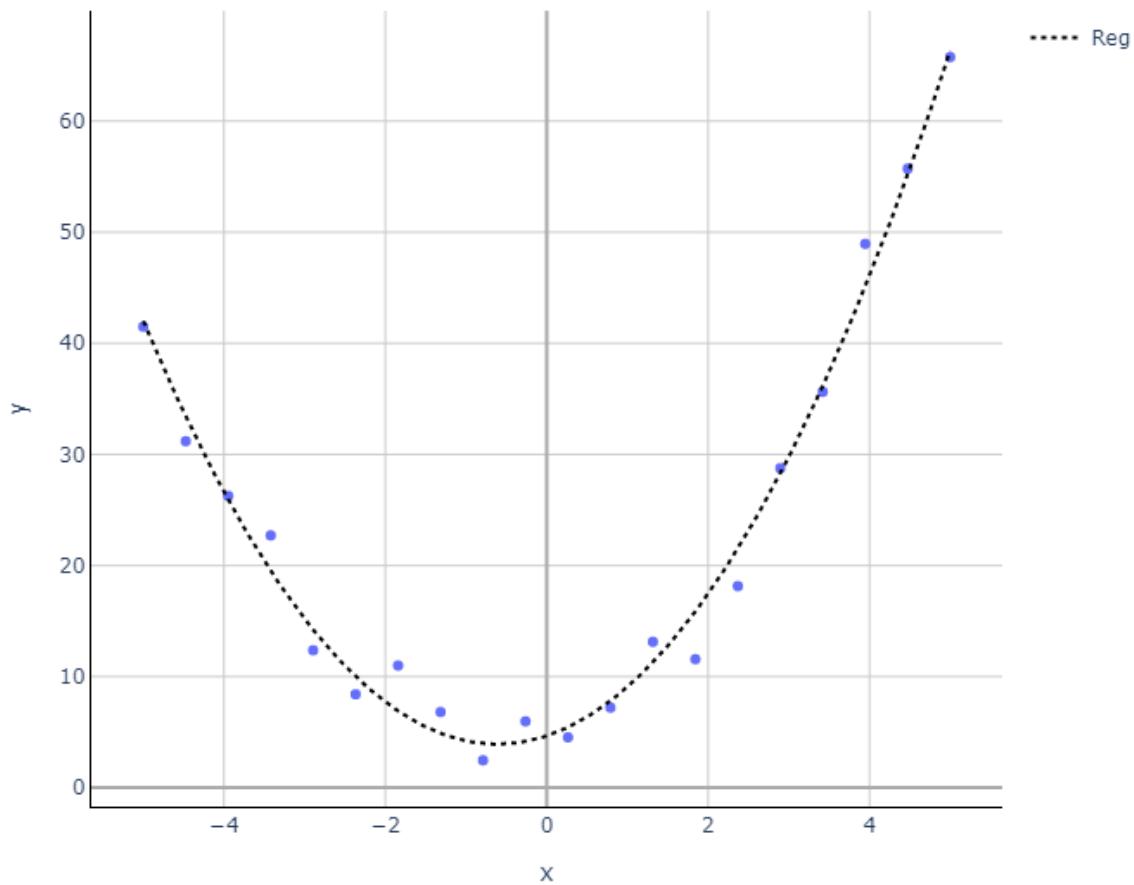
```

# Gera dados simulando uma relação quadrática: y = 2x2 + 3x + 5 + ruído
np.random.seed(42)
x = np.linspace(-5, 5, 20)
y = 2*x**2 + 3*x + 5 + np.random.normal(0, 3, size=len(x))

# Cria DataFrame
df_teste = pd.DataFrame({'x': x, 'y': y})
regressao_quadratica(df=df_teste, x='x', y='y');

```

$$1.980x^2 + 2.432x + 4.670$$



Regressão Múltipla

Nosso intuito aqui é alocar uma terceira dimensão, de forma que teremos x_1 e x_2 .

```
def regressao_multipla(
    df,
    x1=None,
    x2=None,
    y=None,
    plot=True,
):
    X1 = np.array(df[x1])
    X2 = np.array(df[x2])
    X = np.vstack([X1, X2, np.ones(len(X1))]).T
    y_ = np.array(df[y])

    theta = np.linalg.inv(X.T @ X) @ X.T @ y_
    beta1, beta2, gamma = theta
```

```

if plot:
    # Base 3D scatter
    fig = px.scatter_3d(
        df, x=x1, y=x2, z=y, color='species',
        opacity=0.85, size_max=6,
        color_discrete_sequence=px.colors.qualitative.Dark24
    )

    # Create regression surface grid
    x1_range = np.linspace(df[x1].min(), df[x1].max(), 30)
    x2_range = np.linspace(df[x2].min(), df[x2].max(), 30)
    x1_grid, x2_grid = np.meshgrid(x1_range, x2_range)
    y_grid = beta1*x1_grid + beta2*x2_grid + gamma

    # Add regression plane
    fig.add_trace(go.Surface(
        x=x1_grid, y=x2_grid, z=y_grid,
        colorscale='sunsetdark', opacity=0.4,
        showscale=False,
    ))
    plotlymodex.main_layout(fig)

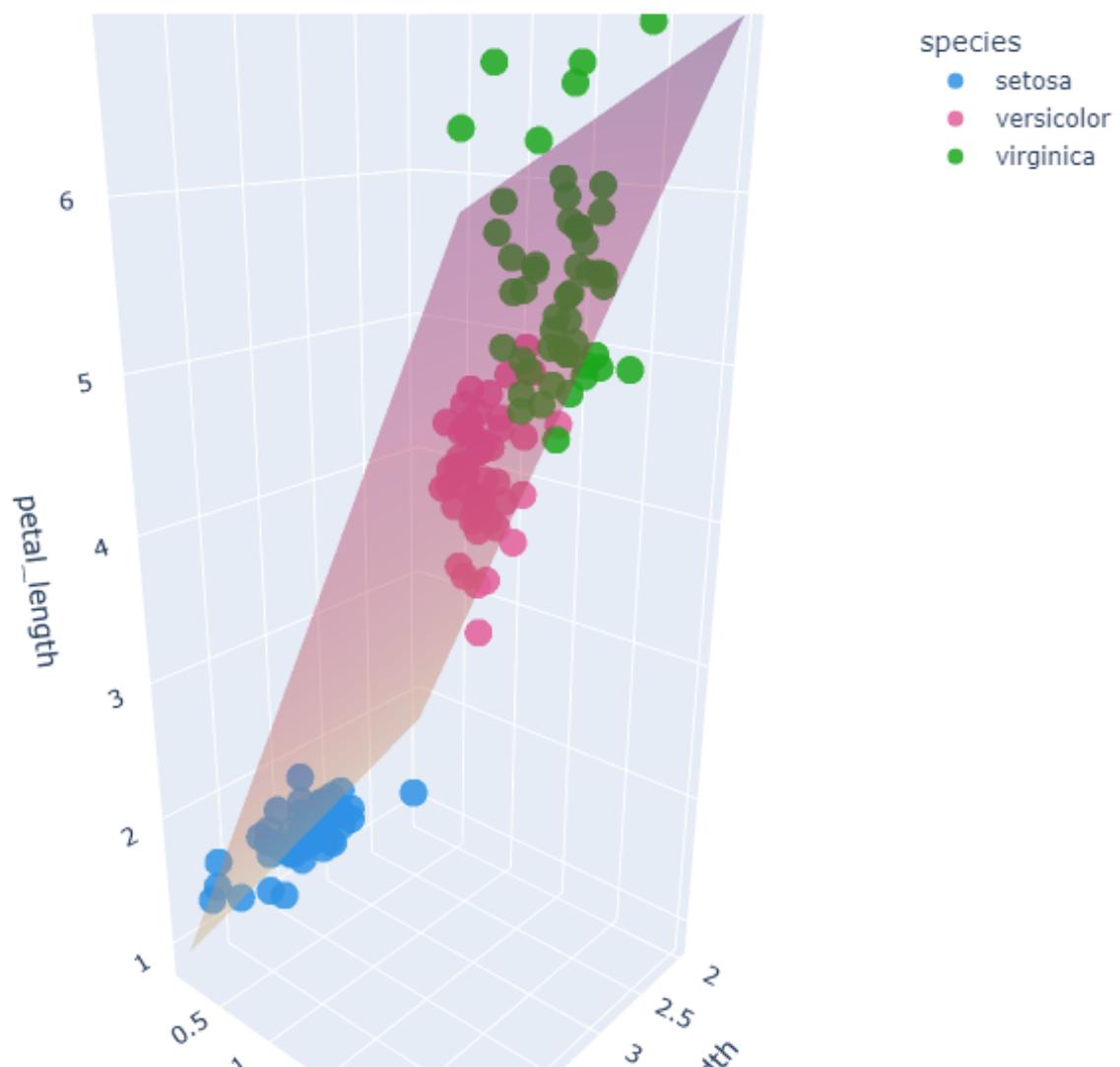
    # Layout styling
    fig.update_layout(
        title=f'y = {beta1:.3f}·{x1} + {beta2:.3f}·{x2} + {gamma:.3f}',
        margin=dict(l=10, r=10, b=10, t=60),
        scene_camera=dict(
            eye=dict(x=1.6, y=1.4, z=0.8)
        ),
        width=600
    )
    fig.show()

    return beta1, beta2, gamma

regressao_multipla(
    df=iris, x1='sepal_width', x2='petal_width',
    y='petal_length',
);

```

$$y = -0.355 \cdot \text{sepal_width} + 2.156 \cdot \text{petal_width} + 2.258$$

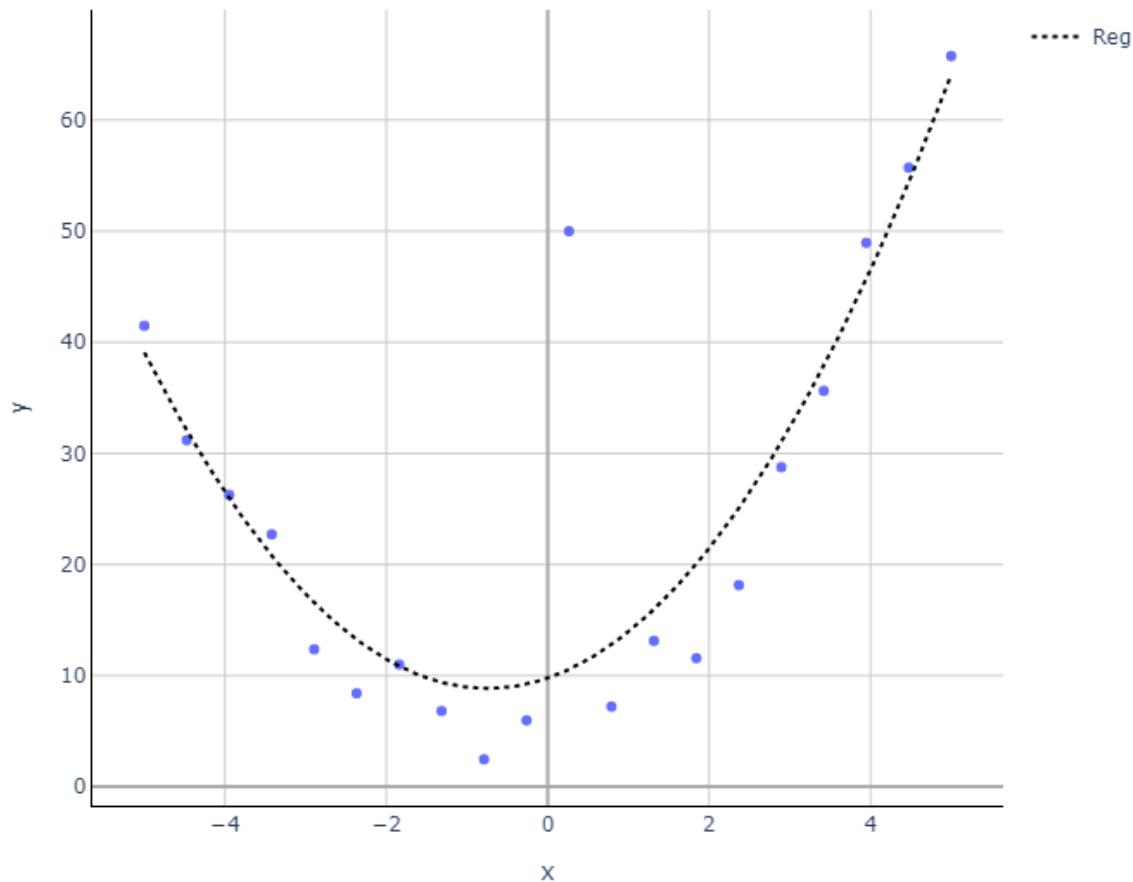


Métricas de Goodness-of-Fit

```
# Gera dados simulando uma relação quadrática: y = 2x2 + 3x + 5 + ruído
np.random.seed(42)
x = np.linspace(-5, 5, 20)
y = 2*x**2 + 3*x + 5 + np.random.normal(0, 3, size=len(x))
y[10] = 50

# Cria DataFrame
df_teste = pd.DataFrame({'x': x, 'y': y})
regressao_quadratica(df=df_teste, x='x', y='y', return_y_pred=True)
```

$$1.672x^2 + 2.497x + 9.784$$



```
array([39.08671752, 32.06633748, 25.97204804, 20.80384918, 16.56174091,
       13.24572322, 10.85579613, 9.39195962, 8.85421371, 9.24255838,
```

```

10.55699363, 12.79751948, 15.96413591, 20.05684294, 25.07564055,
31.02052875, 37.89150753, 45.68857691, 54.41173687, 64.06098742])

def mae(y_pred, y_true):
    """
    Calcula o erro absoluto médio (Mean Absolute Error).

    Mede a média das diferenças absolutas entre os valores previstos e os reais.
    É uma métrica simples que indica o quanto, em média, as previsões se afastam
    dos valores observados.
    """
    return np.mean(np.abs(y_pred - y_true)).round(3)

def mse(y_pred, y_true):
    """
    Calcula o erro quadrático médio (Mean Squared Error).

    Mede a média dos quadrados das diferenças entre os valores previstos e os reais.
    Penaliza mais fortemente grandes erros e é muito usada em problemas de regressão.
    """
    return np.mean((y_pred - y_true) ** 2).round(3)

def rmse(y_pred, y_true):
    """
    Calcula a raiz do erro quadrático médio (Root Mean Squared Error).

    É a raiz quadrada do MSE e possui a mesma unidade dos valores previstos.
    Fornece uma noção mais intuitiva da magnitude média do erro.
    """
    return np.sqrt(mse(y_pred, y_true)).round(3)

# Dados inventados com ruído
np.random.seed(42)
x = np.linspace(-5, 5, 20)
y_true = 2*x**2 + 3*x + 5 + np.random.normal(0, 3, size=len(x))

df_teste = pd.DataFrame({'x': x, 'y': y_true})

y_pred = regressao_quadratica(
    df=df_teste, x='x', y='y',
    plot=False, return_y_pred=True
)

print('MAE')
mae(
    y_pred=y_pred,
    y_true=y_true
)

```

MAE

```
np.float64(1.801)
```

```
print('MSE')
mse(
    y_pred=y_pred,
    y_true=y_true
)
```

MSE

```
np.float64(4.887)
```

```
print('RMSE')
rmse(
    y_pred=y_pred,
    y_true=y_true
)
```

RMSE

```
np.float64(2.211)
```

Stochastic Gradient Descent

1. Objetivo da Regressão Linear

A regressão linear busca encontrar uma **reta (ou hiperplano)** que melhor se ajusta aos dados.

A forma geral do modelo é:

$$\hat{y} = X\theta$$

onde:

- X é a matriz de entrada (com a primeira coluna igual a 1, para o termo de bias),
- θ é o vetor de parâmetros $(\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$,
- \hat{y} é a previsão do modelo.

O objetivo é encontrar os parâmetros θ que **minimizam o erro** entre as previsões \hat{y} e os valores reais y .

2. Função de Custo

A função de custo mais comum é o **Erro Quadrático Médio (MSE)**:

$$\text{MSE}(\theta) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{y}^{(i)} - y^{(i)})^2 = \frac{1}{m} (X\theta - y)^T (X\theta - y)$$

onde m é o número de exemplos de treino.

Nosso objetivo é minimizar $\text{MSE}(\theta)$.

3. Gradiente da Função de Custo

O **gradiente** (vetor de derivadas parciais) indica a direção de maior crescimento de $\text{MSE}(\theta)$. Para minimizar a função, precisamos mover θ na **direção oposta ao gradiente**:

$$\nabla_{\theta} \text{MSE}(\theta) = \frac{2}{m} X^T (X\theta - y)$$

4. Atualização dos Parâmetros — Gradiente Descendente

O **Gradiente Descendente (GD)** faz atualizações iterativas em θ :

$$\theta := \theta - \eta \cdot \nabla_{\theta} \text{MSE}(\theta)$$

onde:

- η é a **taxa de aprendizado (learning rate)** — controla o tamanho do passo dado em cada atualização.
-

5. SGD — Stochastic Gradient Descent

O **SGD** é uma variação do gradiente descendente onde o gradiente é calculado **a partir de apenas um exemplo (ou um pequeno batch)** de cada vez.

Enquanto o **Batch Gradient Descent** calcula o gradiente usando **todos os exemplos**, o **SGD** usa **apenas um exemplo aleatório** em cada iteração:

$$\theta := \theta - \eta \cdot 2x_i^T(x_i\theta - y_i)$$

onde (x_i, y_i) é um único exemplo do conjunto de dados.

Passo a passo:

1. **Inicializa os parâmetros aleatoriamente (theta).**

2. **Para cada época (epoch):**

- Escolhe **um exemplo aleatório (xi, yi).**
- Calcula o **gradiente local**:

$$g_i = 2x_i^T(x_i\theta - y_i)$$

- Atualiza θ na direção contrária ao gradiente:

$$\theta := \theta - \eta g_i$$

3. Após várias épocas, θ converge para valores que minimizam o erro médio.

6. Intuição Geométrica

- O vetor θ define a **reta** (ou hiperplano) que ajusta os dados.
- O gradiente indica **para onde o erro cresce mais**.
- Atualizar θ na direção oposta **reduz o erro**.
- No SGD, como cada passo é feito com apenas um exemplo, o caminho até o mínimo é **oscilante**, mas converge em média para a solução ótima.

Vamos começar selecionando os mesmos dados do dataset iris que estavmos usando! Aqui, vamos fazer nosso algoritmo já considerando as dimensões certas.

```

X = np.array(iris.petal_width.copy(deep=True))
y = np.array(iris.petal_length.copy(deep=True))

# Cria matriz de entrada com a forma [[x, 1.], [x, 1.], ...]
X_b = np.c_[X, np.ones(len(X))] # shape (6, 2)
print(f'{" X_b ":=^11}')
print(X_b[:5])
print()
print(f'{" y ":=^11}')
print(y.reshape(-1, 1)[:5])

```

```

==== X_b ====
[[0.2 1. ]
 [0.2 1. ]
 [0.2 1. ]
 [0.2 1. ]
 [0.2 1. ]
 [0.2 1. ]]
```

```

==== y ====
[[1.4]
 [1.4]
 [1.3]
 [1.5]
 [1.4]]
```

O parâmetro η é de extrema importância para nosso GoF (goodness-of-fit). Ele indicará se o mínimo local estará muito longe para ser alcançado no nosso número de épocas, se será ideal ou se a gente baterá loucamente em todos os lados da função convexa.

```

# Hiperparâmetros
eta = 0.001 # learning rate
n_epochs = 100
m = len(X)

# Inicialização aleatória de theta (2x1)
theta = np.random.randn(2, 1)

# SGD
for epoch in range(n_epochs):
    for i in range(m):
        random_index = np.random.randint(m)
        xi = X_b[random_index:random_index+1] # shape (1, 2)
        yi = y[random_index:random_index+1].reshape(-1, 1)

        # Gradiente (forma vetorializada)
        gradients = 2 * xi.T.dot(xi.dot(theta) - yi)

        # Atualização dos parâmetros
        theta = theta - eta * gradients

```

```

print("Parâmetros ajustados (theta):")
print(theta)

# Previsões
y_pred = X_b.dot(theta)

print("\nPrevisões:")
print(y_pred.ravel()[:5])

```

Parâmetros ajustados (theta):
[[2.19233248]
 [1.066523]]

Previsões:
[1.50498949 1.50498949 1.50498949 1.50498949 1.50498949]

Conseguimos visualizar todo o racional que ele está fazendo por debaixo dos panos!

```

fig = px.scatter(
    iris, x='petal_width', y='petal_length', color='species',
    color_discrete_sequence=["#54D6C1", "#AF4BD6", "#DF8551"]
)

plotlymode.main_layout(
    fig, title='Dataset Iris', height=700,
    x='Largura Pétala', y='Comprimento Pétala'
);

# Hiperparâmetros
eta = 0.0001 # learning rate
n_epochs = 21
m = len(X)

# Inicialização aleatória de theta (2x1)
np.random.seed(42)
theta = np.random.randn(2, 1)
a, b = theta
a, b = a.item(), b.item()

x1=0; x2=2.5
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=np.array([x1, x2]), y=np.array([a*x1+b, a*x2+b]),
    mode='lines', line=dict(color='#e3356f', dash='dot'),
    name='theta_0'
))

# SGD
for epoch in range(n_epochs):
    for i in range(m):
        random_index = np.random.randint(m)

```

```

xi = X_b[random_index:random_index+1] # shape (1, 2)
yi = y[random_index:random_index+1].reshape(-1, 1)

# Gradiente (forma vetorializada)
gradients = 2 * xi.T.dot(xi.dot(theta) - yi)

# Atualização dos parâmetros
theta = theta - eta * gradients

if epoch == n_epochs-1:
    break

a, b = theta
a, b = a.item(), b.item()

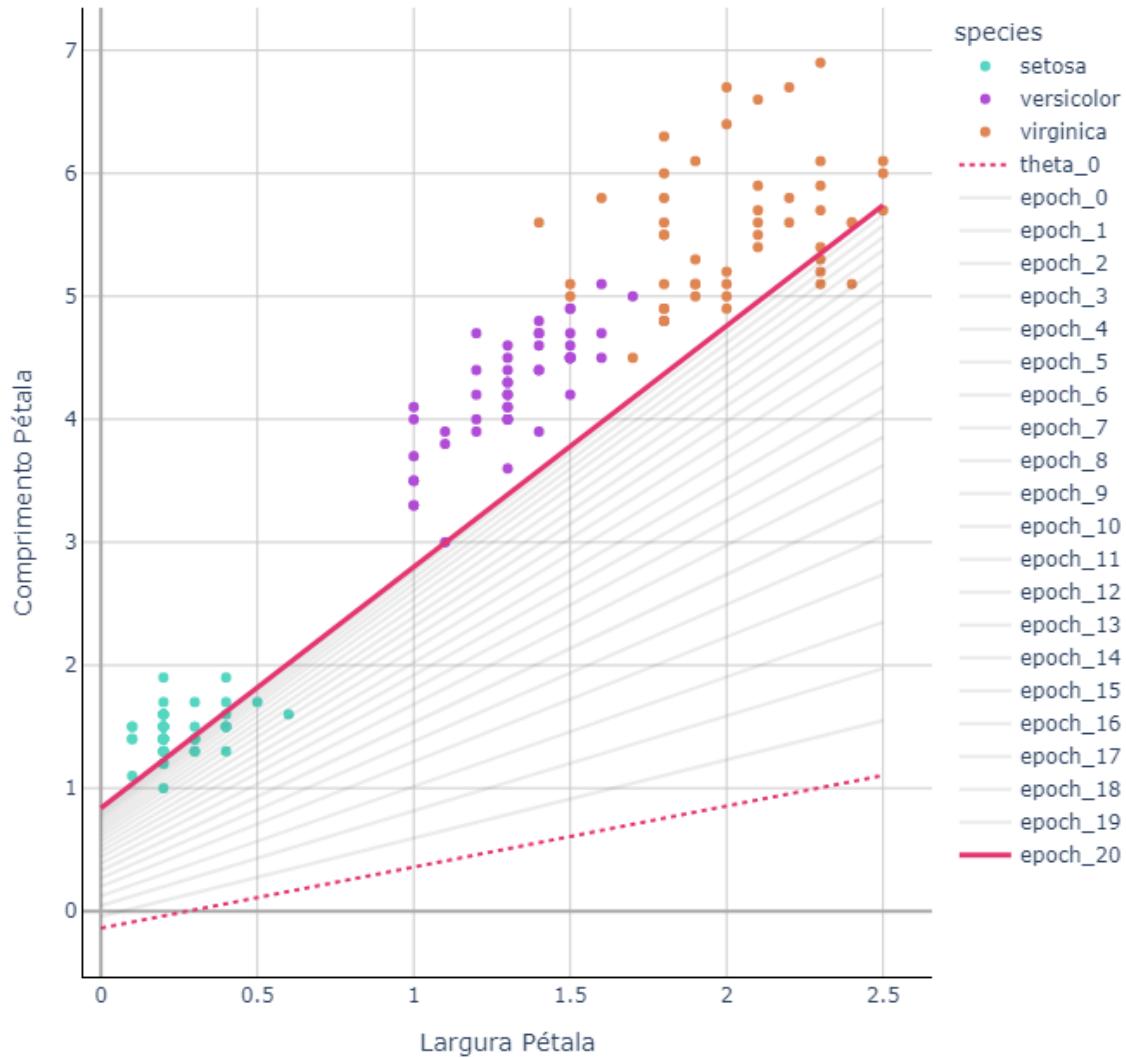
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=np.array([x1, x2]), y=np.array([a*x1+b, a*x2+b]),
    mode='lines', line=dict(color='rgba(59, 59, 59, 0.1)'),
    name=f'epoch_{epoch}'
))

a, b = theta
a, b = a.item(), b.item()

fig.add_trace(go.Scatter(
    x=np.array([x1, x2]), y=np.array([a*x1+b, a*x2+b]),
    mode='lines', line=dict(color='#e3356f', width=3),
    name=f'epoch_{epoch}'
))

```

Dataset Iris



BatchGD

Método	Código	Custo por época	Estabilidade	Quando usar
Batch GD	Simples (sem loop interno)	Alto	Alta	Conjuntos pequenos/médios
SGD	Mais código (loop interno)	Baixo (por iteração)	Oscilante	Conjuntos grandes, deep learning

```
# Hiperparâmetros
eta = 0.1 # taxa de aprendizado
n_epochs = 100
m = len(X)

# Inicialização aleatória de theta (2x1)
theta = np.random.randn(2, 1)

# Batch Gradient Descent
for epoch in range(n_epochs):
    # Gradiente calculado com TODOS os exemplos
    gradients = (2/m) * X_b.T.dot(X_b.dot(theta) - y.reshape(-1, 1))

    # Atualização dos parâmetros
    theta = theta - eta * gradients

print("Parâmetros ajustados (theta):")
print(theta)

# Previsões
y_pred = X_b.dot(theta)
print("\nPrevisões:")
print(y_pred.ravel()[:5])
```

```
Parâmetros ajustados (theta):
[[2.23298703]
 [1.07895988]]
```

```
Previsões:
[1.52555729 1.52555729 1.52555729 1.52555729 1.52555729]
```

```
fig = px.scatter(
    iris, x='petal_width', y='petal_length', color='species',
    color_discrete_sequence=["#54D6C1", "#AF4BD6", "#DF8551"]
)

plotlymodex.main_layout(
    fig, title='Dataset Iris', height=700,
    x='Largura Pétala', y='Comprimento Pétala'
);
```

```

# Hiperparâmetros
eta = 0.1 # learning rate
n_epochs = 11
m = len(X)

# Inicialização aleatória de theta (2x1)
np.random.seed(42)
theta = np.random.randn(2, 1)
a, b = theta
a, b = a.item(), b.item()

x1=0; x2=2.5
fig.add_trace(go.Scatter(
    x=np.array([x1, x2]), y=np.array([a*x1+b, a*x2+b]),
    mode='lines', line=dict(color='#e3356f', dash='dot'),
    name='theta_0'
))

# SGD
for epoch in range(n_epochs):
    # Gradiente calculado com TODOS os exemplos
    gradients = (2/m) * X_b.T.dot(X_b.dot(theta)) - y.reshape(-1, 1))

    # Atualização dos parâmetros
    theta = theta - eta * gradients

    if epoch == n_epochs-1:
        break

    a, b = theta
    a, b = a.item(), b.item()

    fig.add_trace(go.Scatter(
        x=np.array([x1, x2]), y=np.array([a*x1+b, a*x2+b]),
        mode='lines', line=dict(color='rgba(59, 59, 59, 0.1)'),
        name=f'epoch_{epoch}'
))

a, b = theta
a, b = a.item(), b.item()

fig.add_trace(go.Scatter(
    x=np.array([x1, x2]), y=np.array([a*x1+b, a*x2+b]),
    mode='lines', line=dict(color='#e3356f', width=3),
    name=f'epoch_{epoch}'
))

```

Dataset Iris

