

# Computergrafik

Mitschrift von

Markus Vieth

Steffen Eiden

Lukas Birklein

10. Januar 2017



# Vorwort

Dieses Skript basiert auf unserer Mitschrift der Vorlesung Computergrafik und VR im WS 2016/17 an der JGU Mainz (Dozent: Prof. Dr. E. Schömer).

Es handelt sich nicht um eine offizielle Veröffentlichung der Universität.

Wir übernehmen keine Gewähr für die Fehlerfreiheit und Vollständigkeit des Skripts.

Fehler können unter [Github](#) gemeldet werden. Die aktuelle Version dieses Skriptes ist ebenfalls auf [Github](#) zu finden.



# Inhaltsverzeichnis

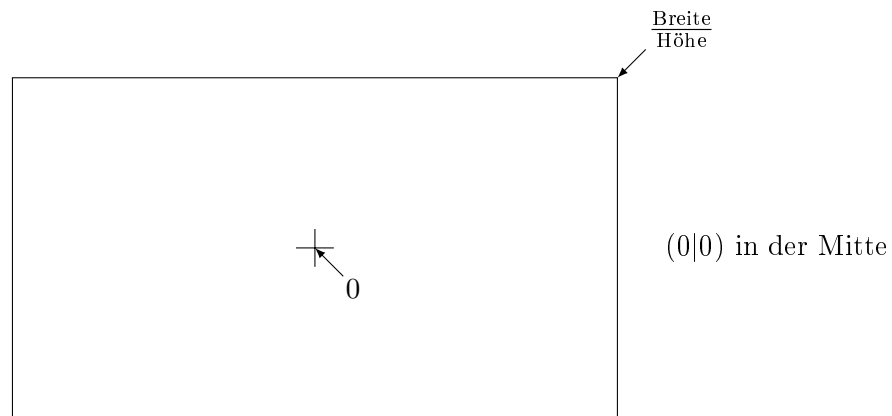
<b>Vorwort</b>	<b>i</b>
<b>1 Koordinatensysteme</b>	<b>1</b>
1.1 Normalisiertes Koordinatensystem . . . . .	1
1.2 Bildschirmkoordinaten $\Leftrightarrow$ Weltkoordinaten . . . . .	1
1.3 Homogene Koordinaten . . . . .	2
1.4 Transformationen . . . . .	3
1.4.1 Rotation . . . . .	3
1.4.2 + Verschiebung . . . . .	3
1.4.3 Skalierung . . . . .	3
1.4.4 Translation . . . . .	3
1.4.5 Hintereinanderausführung von Translation, Rotation und Skalierung . . . . .	4
1.5 Invertierung von $M$ . . . . .	4
1.6 Qt . . . . .	5
<b>2 VBO</b>	<b>6</b>
2.1 Baryzentrische Koordinaten . . . . .	7
2.2 Texturen . . . . .	8
2.2.1 Mipmap . . . . .	8
<b>3 3D-Objekte</b>	<b>10</b>
3.1 Orthogonalprojektion . . . . .	10
3.2 Perspektivische Projektion . . . . .	11
3.3 Objekte drehen aka Blickwinkel ändern . . . . .	14
<b>4 Qt Formen</b>	<b>15</b>
4.1 OFF-Format . . . . .	16
<b>5 Beleuchtung</b>	<b>17</b>
5.1 Ein einfaches Beleuchtungsmodell . . . . .	17
5.1.1 Lambertsches Gesetz . . . . .	17
<b>6 Einschübe</b>	<b>18</b>
6.1 Ellipsoid . . . . .	18
6.2 Tiefenbuffer . . . . .	18
<b>7 Beleuchtung (Fortsetzung)</b>	<b>19</b>
7.1 Smoothing . . . . .	19
7.2 Phong Lichtmodell . . . . .	20
7.2.1 Phong . . . . .	20
<b>8 Oberflächen</b>	<b>22</b>
8.1 Texturen . . . . .	22
8.2 Cube-Mapping . . . . .	23

## *Inhaltsverzeichnis*

<b>9</b>	<b>Volume Rendering mit 3D-Texturen</b>	<b>24</b>
9.1	DVT . . . . .	24
9.1.1	Lambert-Beer-Gesetz . . . . .	24
9.2	Raycasting mittels front-to-back rendering . . . . .	25
<b>10</b>	<b>Einschub: Algebraische Flächen</b>	<b>26</b>

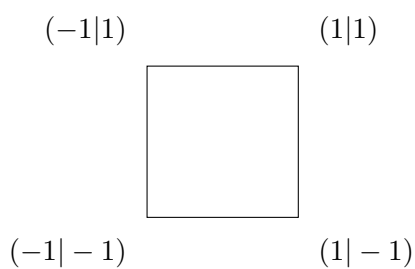
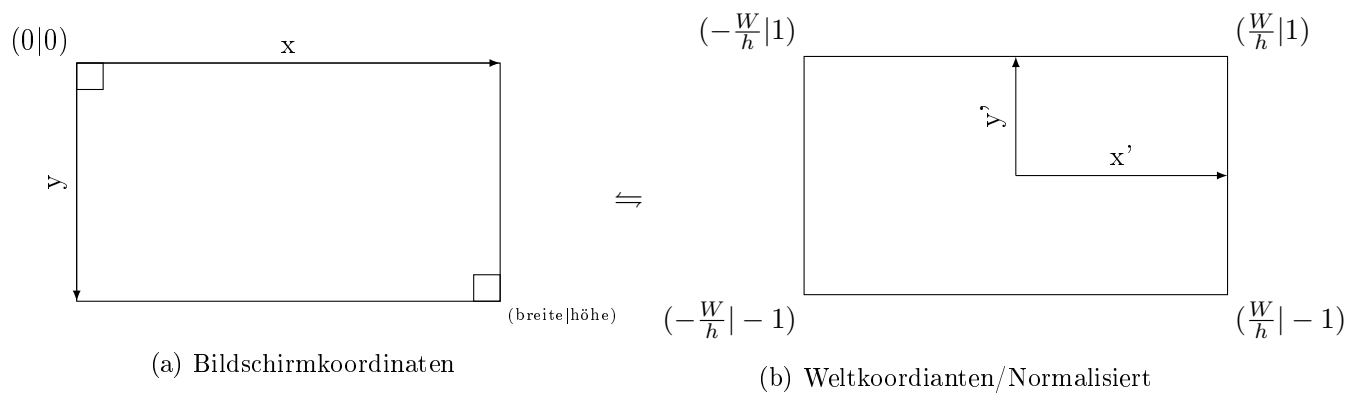
# 1 Koordinatensysteme

## 1.1 Normalisiertes Koordinatensystem



glViewport: Ausschnitt wo gezeichnet wird.

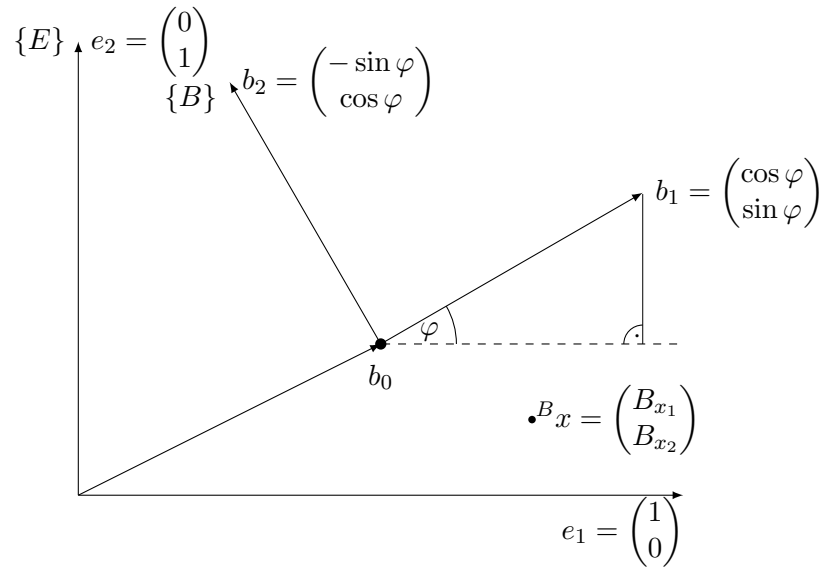
## 1.2 Bildschirmkoordinaten $\Leftrightarrow$ Weltkoordinaten



$$x' = ax + b$$

$$y' = cy + d$$

## 1 Koordinatensysteme



$b_0$ : E-Koordinaten des Ursprungs von System B

$b_1, b_2$  E-Koordinaten der Basisvektoren von System B

$${}^E x = b_0 + {}^B x_1 \cdot b_1 + {}^B x_2 \cdot b_2$$

$$[b_1, b_2] = R \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad |b_1| = |b_2| = 1, \quad \overbrace{b_1^T \cdot b - 2}^{\text{Standardskalarprodukt}} = 0$$

$$R^T \cdot R = \mathbb{E}, \det(R) = 1 \text{ (Rechtssystem)}$$

$$\Rightarrow {}^E x = b_0 + {}^E R \cdot {}^B x$$

### 1.3 Homogene Koordinaten

$${}^E x^1 = \begin{pmatrix} {}^E x_1 \\ {}^E x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^E x \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$= \left( \begin{array}{cc|c} {}^E R_B & b_0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} {}^B x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & b_{0_1} \\ \sin \varphi & \cos \varphi & b_{0_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^B x_1 \\ {}^B x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

$${}^E x^1 = {}^E M_B \cdot {}^B \hat{x}$$

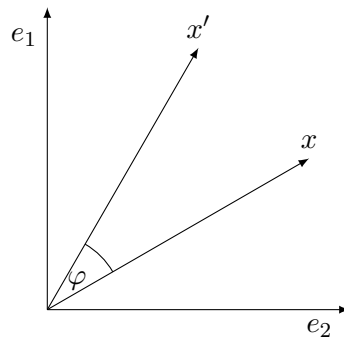
1.  ${}^E M_B$  beschreibt die Transformationsmatrix von Koordinaten aus System B in das System E
2.  ${}^E M_B$  kann auch interpretiert werden, als die (starre) Transformation, die E in B überführt.



## 1.4 Transformationen

### 1.4.1 Rotation

z.B.



$$x' = R \cdot x$$

### 1.4.2 + Verschiebung

$$x' = Rx + z$$

$$\rightsquigarrow \hat{x}' = Mx \text{ mit } M = \left( \begin{array}{c|c} R & t \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$x' = R(x + t)$$

### 1.4.3 Skalierung

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \quad x' = Sx = \begin{pmatrix} x'_1 = s_1 x_1 \\ x'_2 = s_2 x_2 \end{pmatrix}$$

homogenisiert

$$\hat{S} = \left( \begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

mit  $s_2 = -1$  Spiegelung um  $x_1$

### 1.4.4 Translation

Homogen:

$$\hat{T} = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

## 1 Koordinatensysteme

### 1.4.5 Hintereinanderausführung von Translation, Rotation und Skalierung

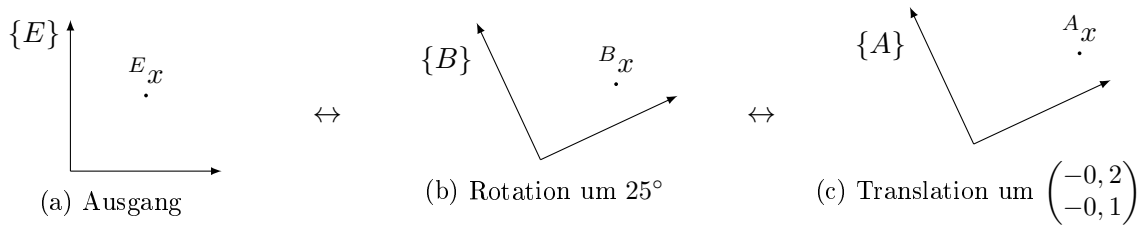
z.B.

$$x''' = S(R(x + t))$$

$$\rightsquigarrow x' = x + t; \quad x'' = Rx'; \quad x''' = Sx''$$

$$x''' = \underbrace{\hat{S}\hat{R}\hat{T}\hat{x}}_{\text{Leserichtung}} \quad \text{alles homogenisiert}$$

^ wird oft weggelassen, wenn klar.



$$\begin{aligned} {}^B M_A {}^A x &= {}^B x \\ {}^E x &= {}^E M_B {}^B x \\ \Rightarrow {}^E x &= \underbrace{{}^E M_B {}^B M_A}_{{}^E M_A} {}^A x \end{aligned}$$

z.B.

gegeben

$${}^E M_B \quad {}^E M_A$$

gesucht

$${}^B M_A$$

$$\begin{aligned} {}^E M_A &= {}^E M_B {}^B M_A \\ \Rightarrow {}^B M_A &= {}^E M_B^{-1} \cdot {}^E M_A \\ {}^E M_B^{-1} &= {}^B M_E \end{aligned}$$

## 1.5 Invertierung von $M$

Sei  $M = \left( \begin{array}{c|c} R & t \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$   $\begin{matrix} R^{-1} \\ \uparrow \\ \text{Drehung um } -\varphi \end{matrix} = R^T$  u.a. auch, da Rotation ( $R^T R = 1$ )

$$\begin{aligned} Mx &= Rx + t = x' \\ \rightsquigarrow R^T(x' - t) &= x \\ \rightsquigarrow R^T x' - R^T t &= x \\ \rightsquigarrow M^{-1} &= \left( \begin{array}{c|c} R^T & -R^T t \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

## 1.6 Qt

```

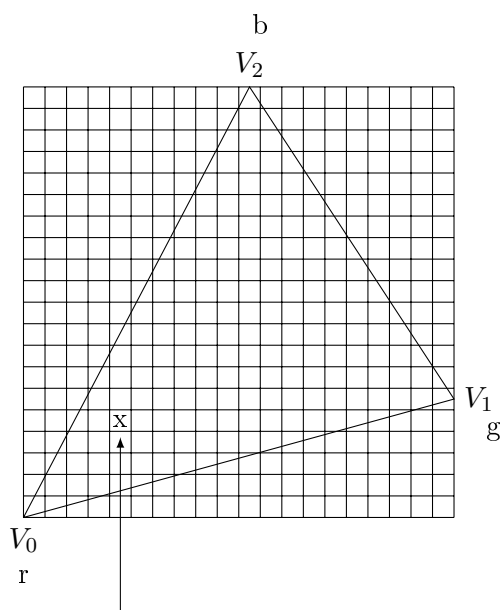
1  QMatrix4x4 M;
2  M.setToIdentity();    //  $M = \mathbb{1}$ 
3  M.rotate( $\varphi$ , 0, 0, 1); // Rotation um die z-Achse
4                          //  $M = M \cdot R$ 
5  M.scale( $s_1$ ,  $s_2$ );     //  $M = M \cdot S$ 
6  M.translate( $t_1$ ,  $t_2$ ); //  $M = M \cdot T$ 
7  //  $M = \underbrace{\mathbb{1} \cdot R \cdot S \cdot T}_{\text{Leserichtung für Transformation}}$ 
8  // Jeder Befehl wird zuerst ausgeführt! LIFO!
9  Mx'
```

## 2 VBO

	Kartesische Koord.	Farben	Textur-Koord.	Normal
$v_0$	$x_0, y_0, z_0, w_0$	$r_0, g_0, b_0$	$s_0, t_0$	$u_0, v_0, w'_0$
$v_1$				
$\vdots$				
$v_{n-1}$				

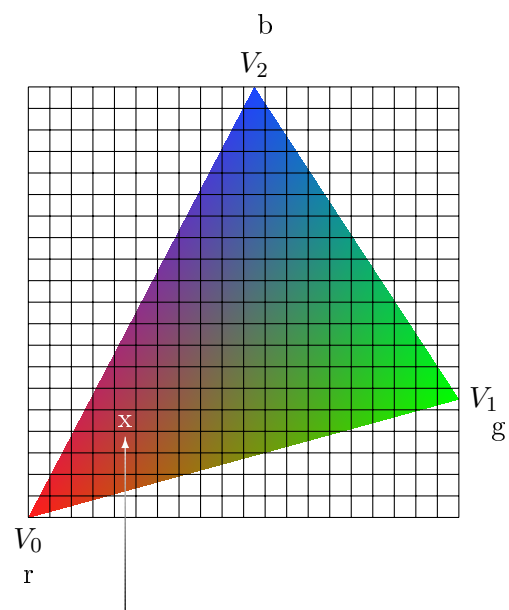
Entweder alles in einen Buffer  $\Rightarrow$  Array of Structs

Oder für jede Klasse einen eigenen Buffer  $\Rightarrow$  Struct of Array



interpolierte Farbe z.B. Mischung

(a) Beispiel Raster



interpolierte Farbe z.B. Mischung

(b) Beispiel Mischung der Farben

Shader nimmt die Attribute von den Randpunkten und prozessiert diese auf die Pixel im inneren des Dreiecks.

## 2.1 Baryzentrische Koordinaten

`varying` im Vertexshader

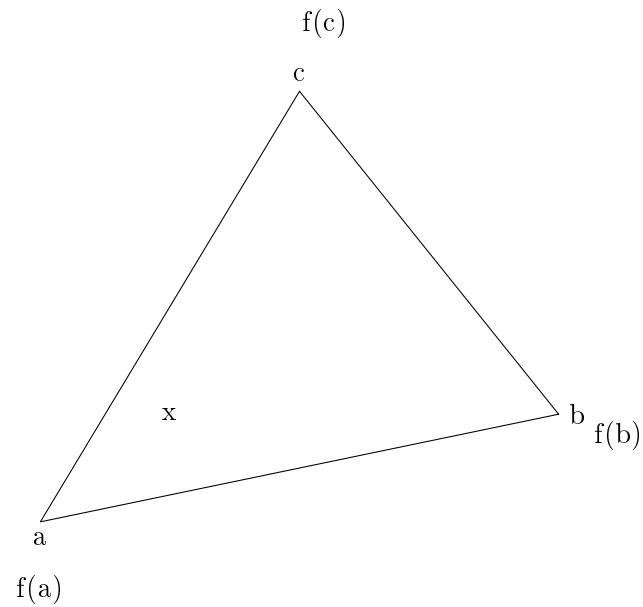


Abbildung 2.2: Baryzentrisches Koordinatensystem

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

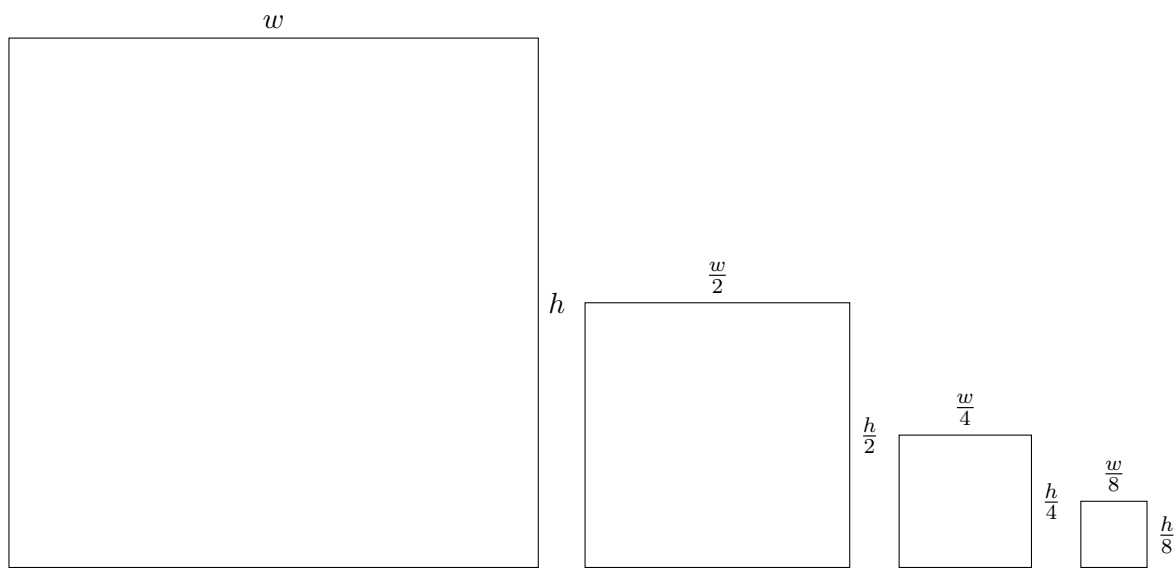
$$x = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c \wedge \alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \alpha \cdot f(a) + \beta \cdot f(b) + \gamma \cdot f(c)$$

(wird bei Qt durch das Keyword „Varying“ ausgelöst)

## 2.2 Texturen

### 2.2.1 Mipmap



$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Bildschirmpixel

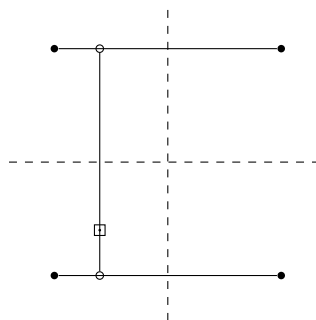
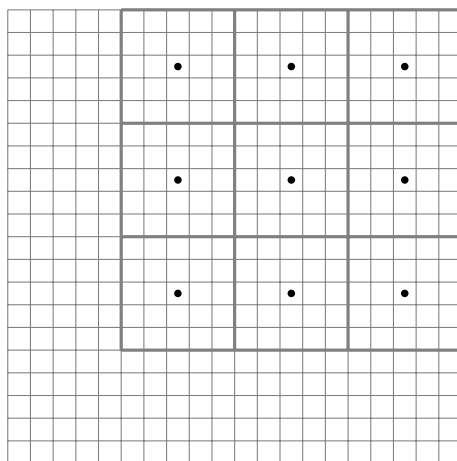
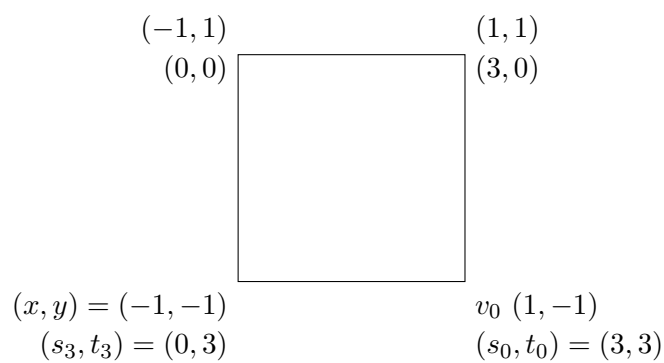


Abbildung 2.3: bilineare Interpolation



In der Regel sind Texturkoordinaten in  $[0, 1]^2$ , wenn größer wird sie periodisch verwendet.

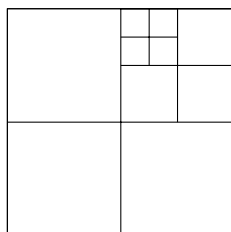
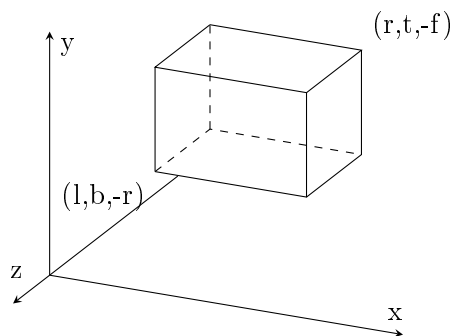


Abbildung 2.4: Maps Mipmapping

**Denkanstoß:** Welche Kette von Transformationen braucht man um zu einem Fixpunkt zu zoomen?

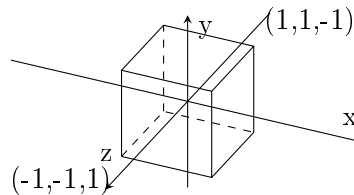
## 3 3D-Objekte

### 3.1 Orthogonalprojektion



$$\begin{aligned}x &\in [l, r] \\y &\in [b, t] \\z &\in [-f, -n]\end{aligned}$$

Sichtquader  $\rightarrow$  Einheitsquader



$$\begin{aligned}x' &\in [-1, 1] \\y' &\in [-1, 1] \\z' &\in [-1, 1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x' &= \alpha \cdot x + \beta \\l &\mapsto -1, \quad r \mapsto 1\end{aligned}$$

$$(1)$$

$$-1 = \alpha \cdot l + \beta$$

$$(2)$$

$$1 = \alpha \cdot r + \beta$$

$$(2) - (1)$$

$$2 = \alpha \cdot r - \alpha \cdot l \Rightarrow \alpha = \frac{2}{r-l}$$

$$1 = \frac{2 \cdot r}{r-l} + \beta$$

$$\beta = 1 - \frac{2r}{r-l} = \frac{r-l-2r}{r-l} = -\frac{r+l}{r-l}$$

Analog für  $y'$  und  $z'$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{NDS}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & \frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & \frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_O \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

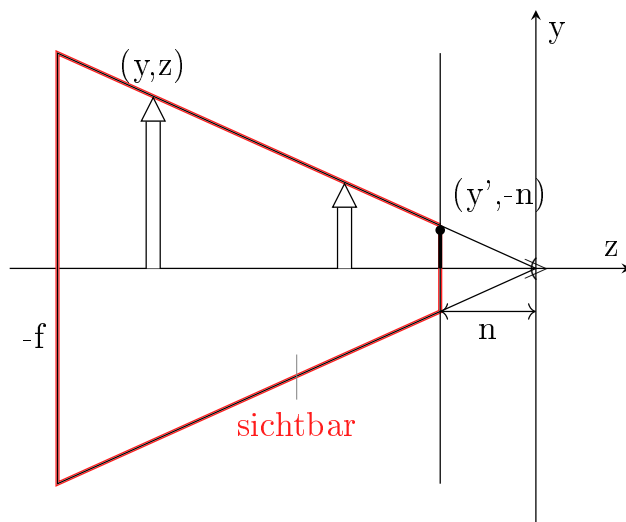
$$z' = -\frac{2}{f-n}z - \frac{f+n}{f-n}$$

$$z = n \quad z^* = \frac{2n - (f+n)}{f-n} = \frac{n-f}{f-n} = -1$$

$$-n \mapsto -1, \quad -f \mapsto 1$$

`Qmatrix4x4.ortho(1,n,b,t,n,f);` liefert  $O$

## 3.2 Perspektivische Projektion

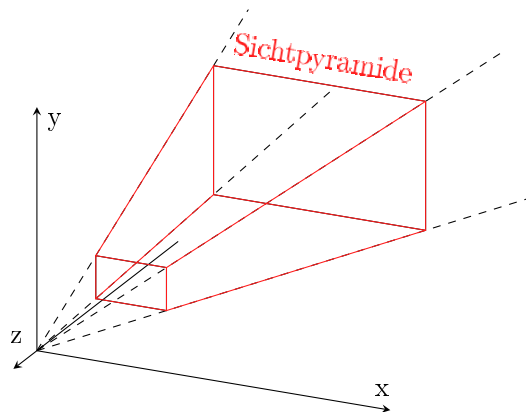


$$\frac{y'}{-n} = \frac{y}{z}$$

$$y' = -\frac{n \cdot y}{z}$$

### 3 3D-Objekte

Sichtpyramide  $\rightarrow$  Einheitswürfel



$$y' = -\frac{n \cdot y}{z}$$

$$\cap$$

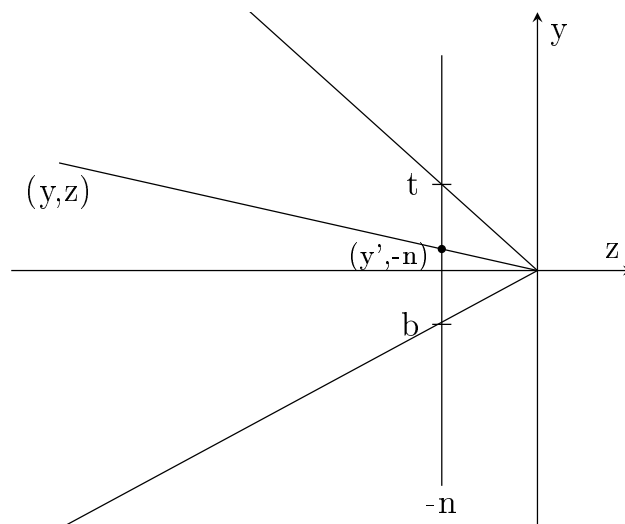
$$[b, t] \mapsto [-1, 1]$$

$$y'' = \alpha \cdot y' + \beta$$

$$y'' = \frac{2}{t \cdot b} \cdot y' - \frac{t+b}{t-b}$$

$$y'' = \frac{2n}{t-b} \cdot \frac{y}{-z} - \frac{t+b}{t-b}$$

analog für  $x''$ ,  $z''$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Dehomogenisierung}} \begin{pmatrix} \frac{x}{w} \\ \frac{y}{w} \\ \frac{z}{w} \end{pmatrix}$$

homogene Koord.  Kartesische koord.

Homogenisierungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ w'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y'' = \frac{2n}{t-b} \cdot y + \frac{t+b}{t-b} \cdot z$$

$$w'' = -z$$

$$\frac{y''}{w''} = \frac{2n}{t-b} \frac{y}{(-z)} + \frac{t+b}{t-b} \frac{z}{(-z)}$$

$$z''' = \frac{z''}{w''} = \frac{\alpha \cdot z + \beta}{-z} = -\alpha - \frac{\beta}{z}$$

$$-n \mapsto -1, \quad -f \mapsto 15$$

$$-\alpha - \frac{\beta}{-n} = -1$$

$$-\alpha - \frac{\beta}{-f} = 1$$

$$-\alpha + \frac{\beta}{n} = -1(1)$$

$$-\alpha + \frac{\beta}{f} = 1(2)$$


---

$$\frac{\beta}{f} - \frac{\beta}{n} = 2(2) - (1)$$

$$\beta \left( \frac{1}{f} - \frac{1}{n} \right) = 2$$

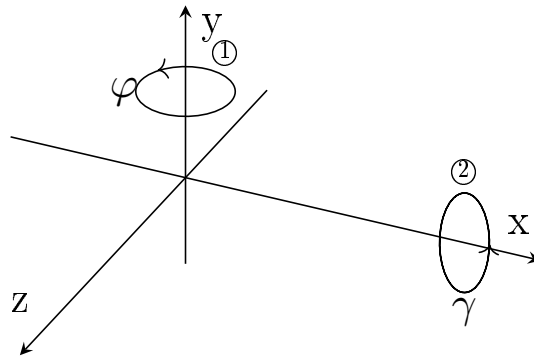
$$\beta \left( \frac{n-f}{fn} \right)$$

$$\beta = \frac{-2nf}{f-n}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{f} - 1 = -\frac{2n-(f-n)}{f-n} = \frac{f+n}{f-n}$$

### 3.3 Objekte drehen aka Blickwinkel ändern

$$p' = \underset{\substack{\textcircled{2} \\ \uparrow \\ \text{Drehung um} \\ \text{die Welt-x-Achse}}}{R_{\vartheta,x}} \cdot \underset{\substack{\textcircled{1} \\ \uparrow \\ \text{Drehung um} \\ \text{die Welt-y-Achse}}}{R_{\varphi,y}} \cdot p$$



### 3D-Brille

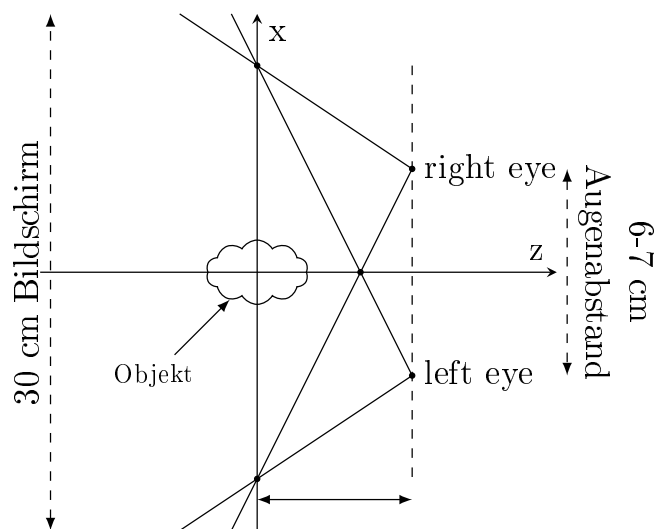
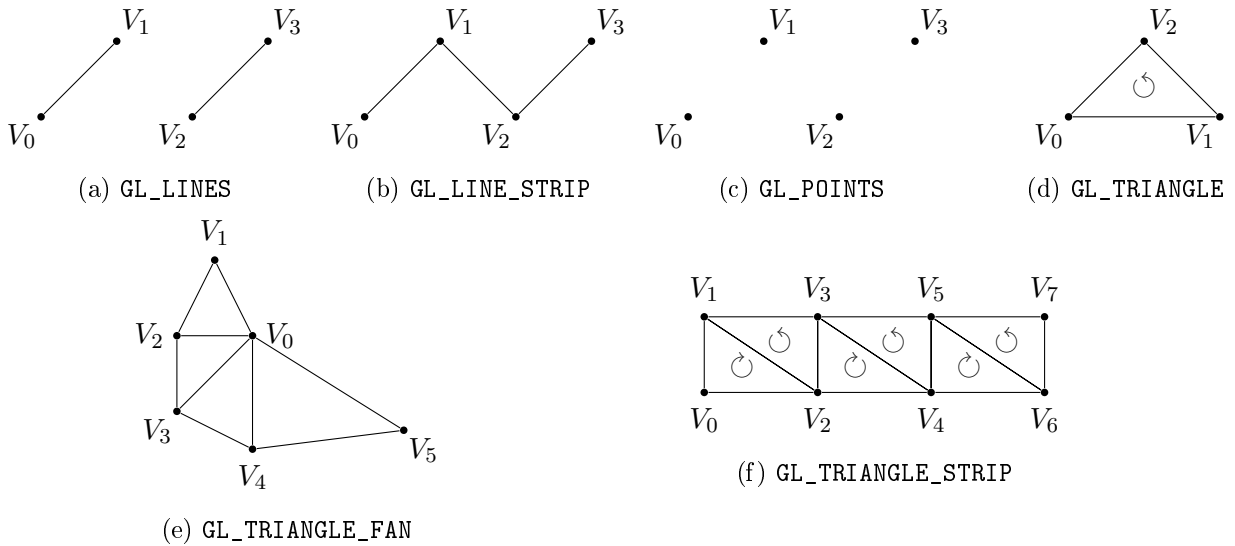
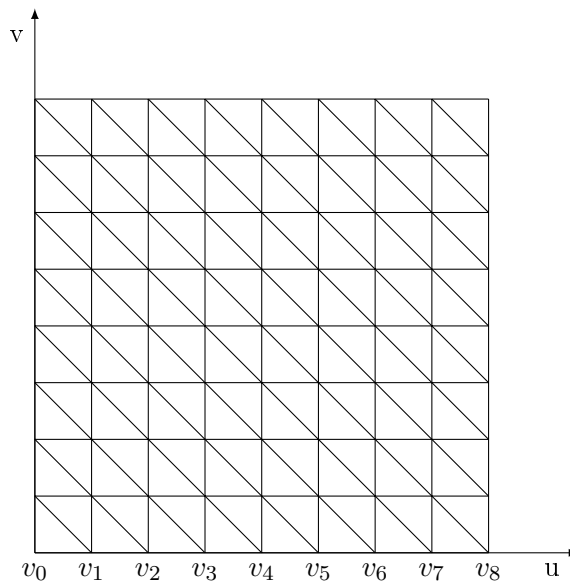


Abbildung 3.1: Streckenangaben sind beispielhaft

## 4 Qt Formen



Um den `GL_TRIANGLE_STRIP` abzuschließen wird der letzte Knoten (hier  $V_7$ ) zweimal gesendet.



$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow (x, y, z)$$

**Vertex Buffer Objects**  $\leftarrow$  Koordinatenzusatzinformationen

**Index Buffer Objects**  $\leftarrow$  Indices der Vertexe

4.1 OFF-Format

<i>n</i>	<i>f</i>	<i>e</i>
<i>x</i> <sub>0</sub>	<i>y</i> <sub>0</sub>	<i>z</i> <sub>0</sub>
<i>x</i> <sub>1</sub>	<i>y</i> <sub>1</sub>	<i>z</i> <sub>1</sub>
	⋮	
3	<i>i</i> <sub>1</sub>	<i>i</i> <sub>2</sub> <i>i</i> <sub>3</sub>
	⋮	

Index Face Set  
GL\_ELEMENT\_ARRAY\_BUFFER

# 5 Beleuchtung

## 5.1 Ein einfaches Beleuchtungsmodell

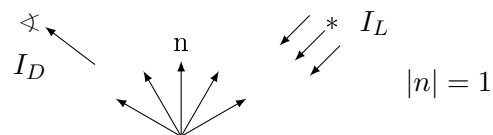
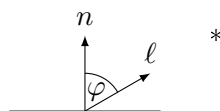


Abbildung 5.1: Diffuse Reflexion

### 5.1.1 Lambertsches Gesetz

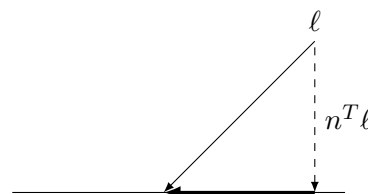


$$I_O = I_L \cdot \ell^T \cdot n$$

$$|n| = |\ell| = 1$$

$\ell$  zeigt zur Lichtquelle.

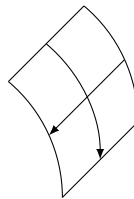
$$\cos(\varphi) = \frac{\ell^T \cdot n}{|n||\ell|} \left( = \frac{\langle \ell, n \rangle}{|n||\ell|} \right)$$



## 6 Einschübe

### 6.1 Elipsoid

$$(u, v) \rightarrow (x, y, z) = f$$



$$\frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \times \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} = n$$

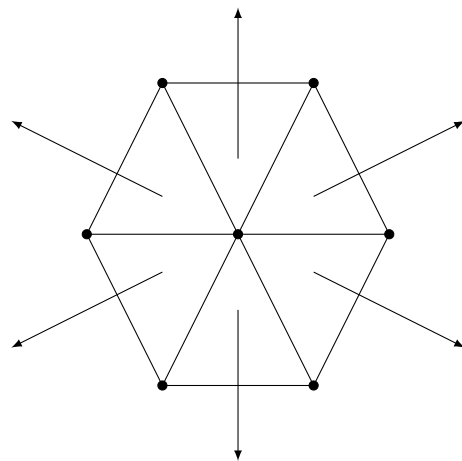
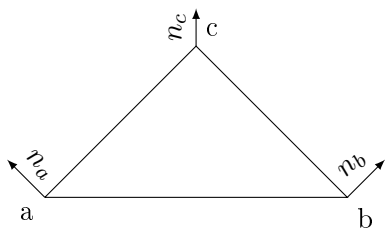
Im Allgemeinen gilt  $|n| \neq 1$

### 6.2 Tiefenbuffer



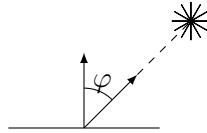
## 7 Beleuchtung (Fortsetzung)

### 7.1 Smoothing

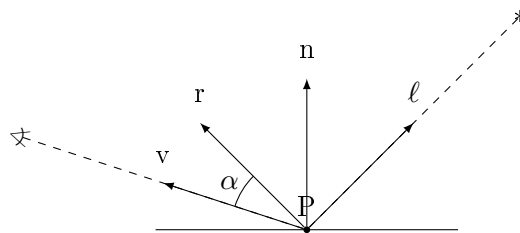


## Lambert

$$I_D = I_L \cdot (n^T \cdot \ell)$$



## 7.2 Phong Lichtmodell

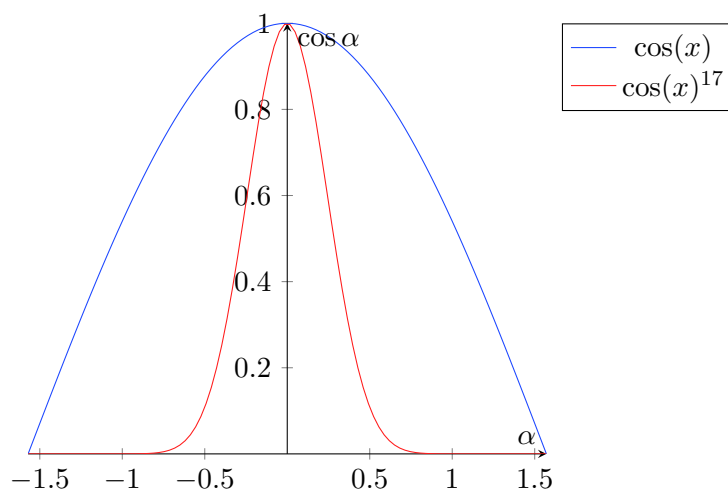


$$|n| = |\ell| = |r| = |v| = 1$$

$$r = 2n(n^T \ell) - \ell$$

S = Shininess

$$I_S = I_L (\cos \alpha)^S = I_L (r^T v)^S, \quad I_D = I_L (n^T \ell)$$



### 7.2.1 Phong

$$I_{\text{Color}} = I_{\text{Ambient, Color}} + I_{\text{Diffuse, Color}} + I_{\text{Specular, Color}}$$

$$\text{Color} \in \{\text{Red}, \text{Green}, \text{Blue}\}$$

```

1  void main() {
2      vec3 normal = normalize(vNormal);
3      vec3 lightDir = normalize(lighPos - vPos);
4      vec3 reflectDir = reflect(lightDir, normal);
5      vec3 viewDir = normalize(-vPos);

7      float lambertian = max(dot(lightDir, normal), 0.0.);
8      float specular = 0.0;

10     if ( lambertian > 0.0) {
11         float specAngle = max(dot(reflectDir, viewDir), 0.0);
12         specular = pow(specAngle, uShininess);
13     }
14     gl_FragColor = vec4(uAmbient + lambertian * uDiffuse + specular * uSpecular, 1.0);
15 }

```

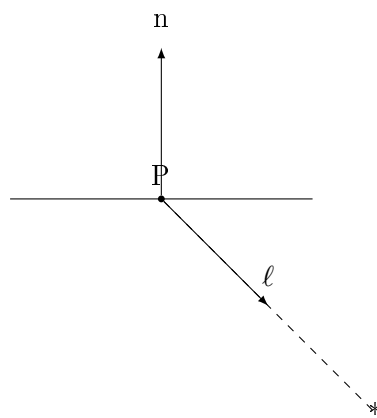
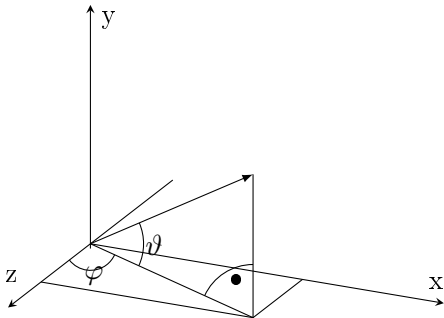


Abbildung 7.2: Zu ignorierende Lichtquelle

## 8 Oberflächen

### 8.1 Texturen



$$(\varphi, \vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \\ \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

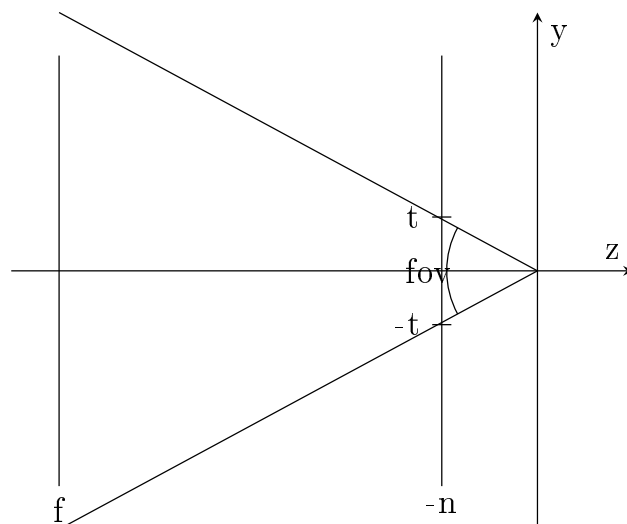
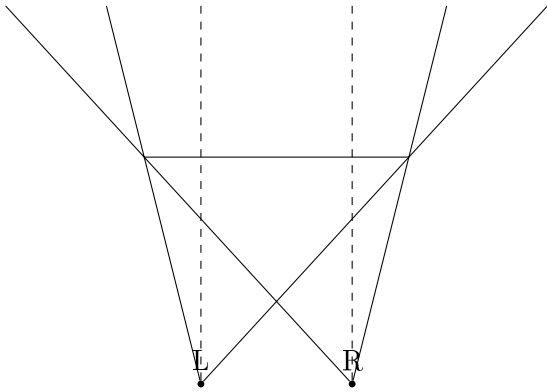
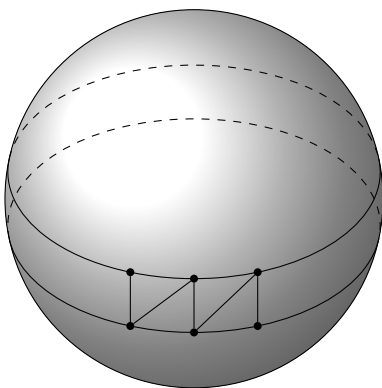
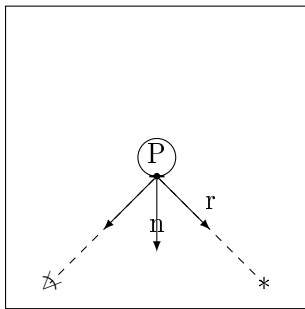
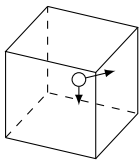


Abbildung 8.1: Field of view

```
perspective(fov, aspectratio, n, f);
```

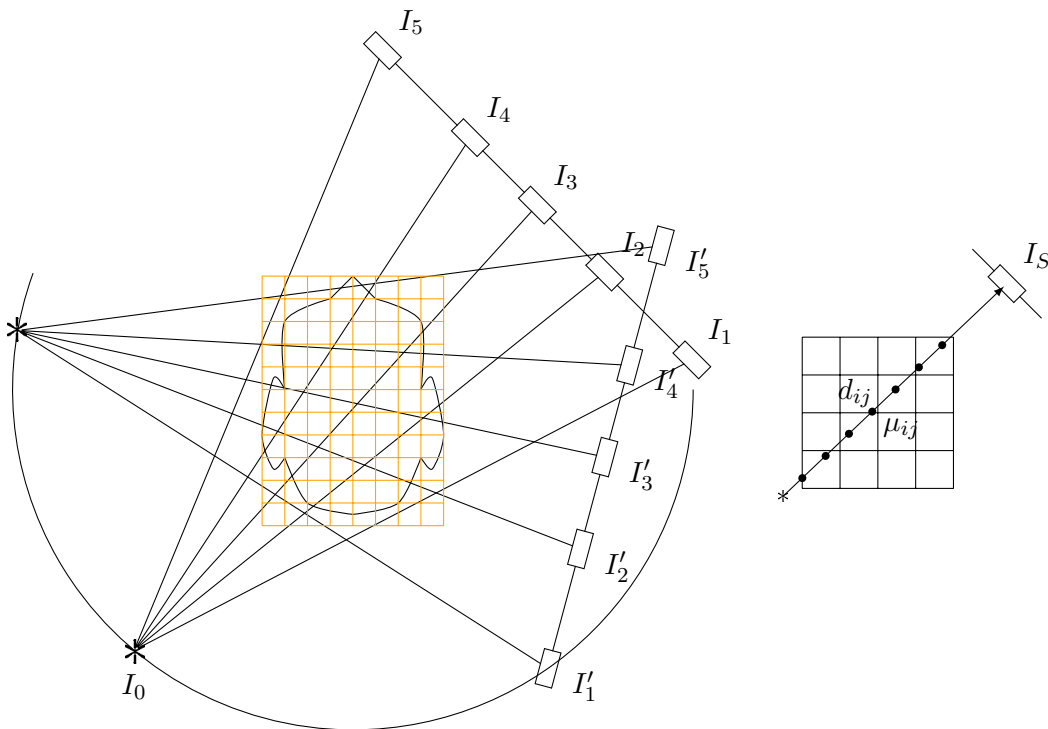


## 8.2 Cube-Mapping



## 9 Volume Rendering mit 3D-Texturen

### 9.1 DVT



#### 9.1.1 Lambert-Beer-Gesetz

$$I^{\text{out}} = I^{\text{in}} \cdot e^{-\mu \cdot d}$$

Schwächungskoeffizienten

$$I_S = I_0 \cdot e^{\sum_{\square(i,j) \cap S \neq \emptyset} \mu_{ij} \cdot d_{ij}}$$

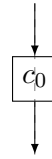
$$\ln \frac{I_0}{I_S} = \sum_{\square(i,j) \cap S \neq \emptyset} \mu_{ij} \cdot d_{ij}$$

$$I = \bigcap_{\mathbb{R}^{360.000.000 \times 128.000.000}} D \cdot \mu$$

#### Inverses Problem

**Gegeben:** Gemessene Intensitäten  $I_S$  für alle Strahlen, die die Bildebene treffen für hinreichend viele Aufnahmerrichtungen.

**Gesucht:** Schwächungskoeffizienten für alle Voxel des zu rekonstruierenden Volumens.



$$c^{\text{out}} = c^{\text{in}} \cdot (1 - \alpha_i) + c_i \alpha_i$$

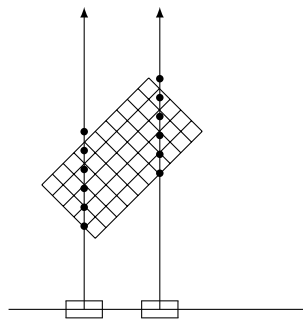
$\alpha_i$  = Deckkraft der Farbe  $c_i$

$1 - \alpha_i \hat{=}$  Transparenz



$$c^{\text{out}} = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \prod_{j=i+1}^n (1 - \alpha_j)$$

## 9.2 Raycasting mittels front-to-back rendering



## 10 Einschub: Algebraische Flächen

$$f(x, y, z) = 0$$

z.B.  $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$

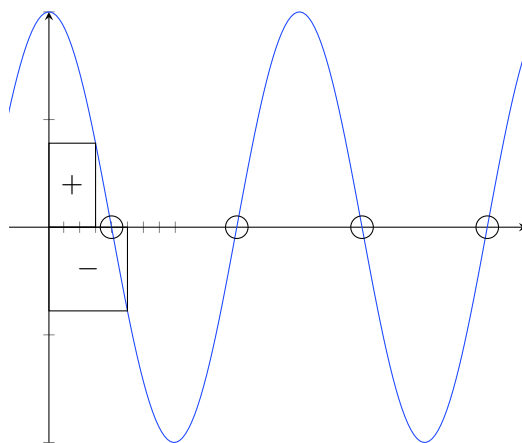
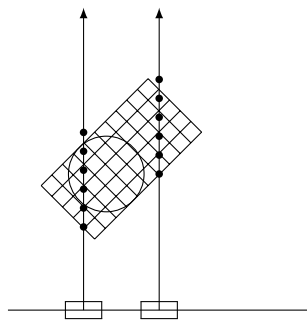


Abbildung 10.1: Finden von Nullstellen durch Suche nach Vorzeichenwechsel

$$p \quad \nabla f(p) = n$$