

Computergrafik

Mitschrift von

Markus Vieth

David Klopp

21. Dezember 2016

Vorwort

Dieses Skript basiert auf unserer Mitschrift der Vorlesung Computergrafik und VR im WS 2016/17 an der JGU Mainz (Dozent: Prof. Dr. E. Schömer).

Es handelt sich nicht um eine offizielle Veröffentlichung der Universität.

Wir übernehmen keine Gewähr für die Fehlerfreiheit und Vollständigkeit des Skripts.

Fehler können unter [Github](#) gemeldet werden. Die aktuelle Version dieses Skriptes ist ebenfalls auf [Github](#) zu finden.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
1 VBO	1
1.1 Baryzentrische Koordinaten	2
1.2 Texturen	3
1.2.1 Mipmap	3
2 3D-Objekte	6
2.1 Orthogonalprojektion	6
2.2 Perspektivische Projektion	7
3 Beleuchtung	11
3.0.1 Smoothing	11
3.1 Phong Lichtmodell	12
3.1.1 Phong	12
4 Oberflächen	14
4.1 Texturen	14
4.2 Cube-Mapping	15
5 Volume Rendering mit 3d-Texturen	16
5.1 DVT	16
5.1.1 Lambert-Beer-Gesetz	16

1 VBO

	Kartesische Koord.	Farben	Textur-Koord.	Normal
v_0	x_0, y_0, z_0, w_0	r_0, g_0, b_0	s_0, t_0	u_0, v_0, w'_0
v_1				
\vdots				
v_{n-1}				

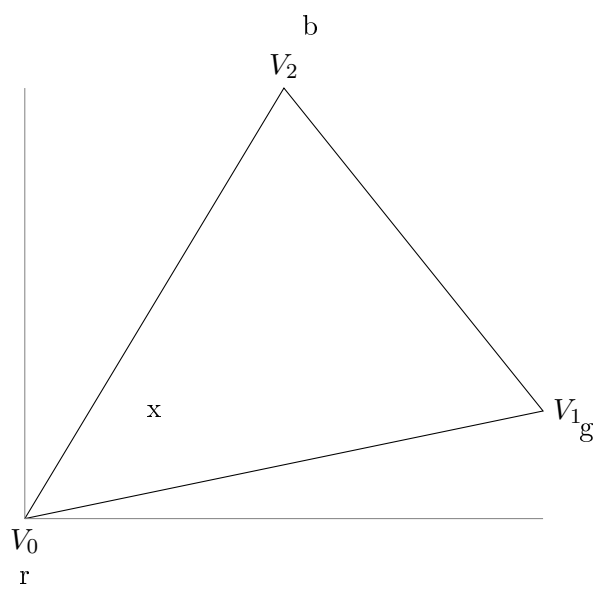


Abbildung 1.1: Beispiel Raster?

1.1 Baryzentrische Koordinaten

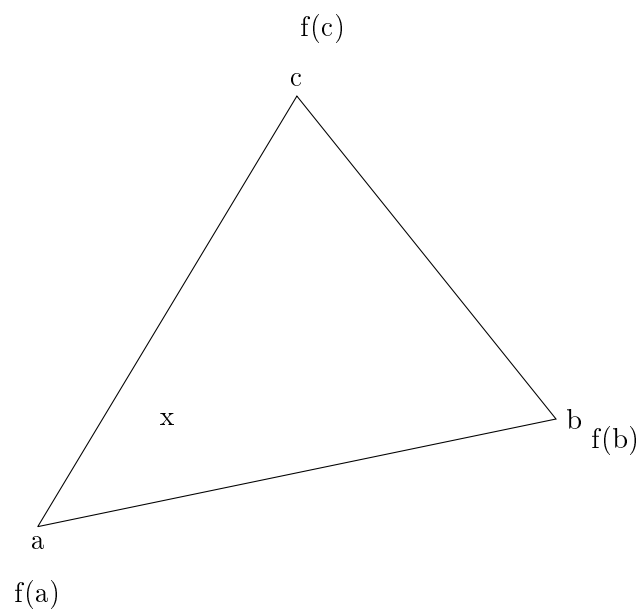


Abbildung 1.2: Baryzentrisches Koordinatensystem

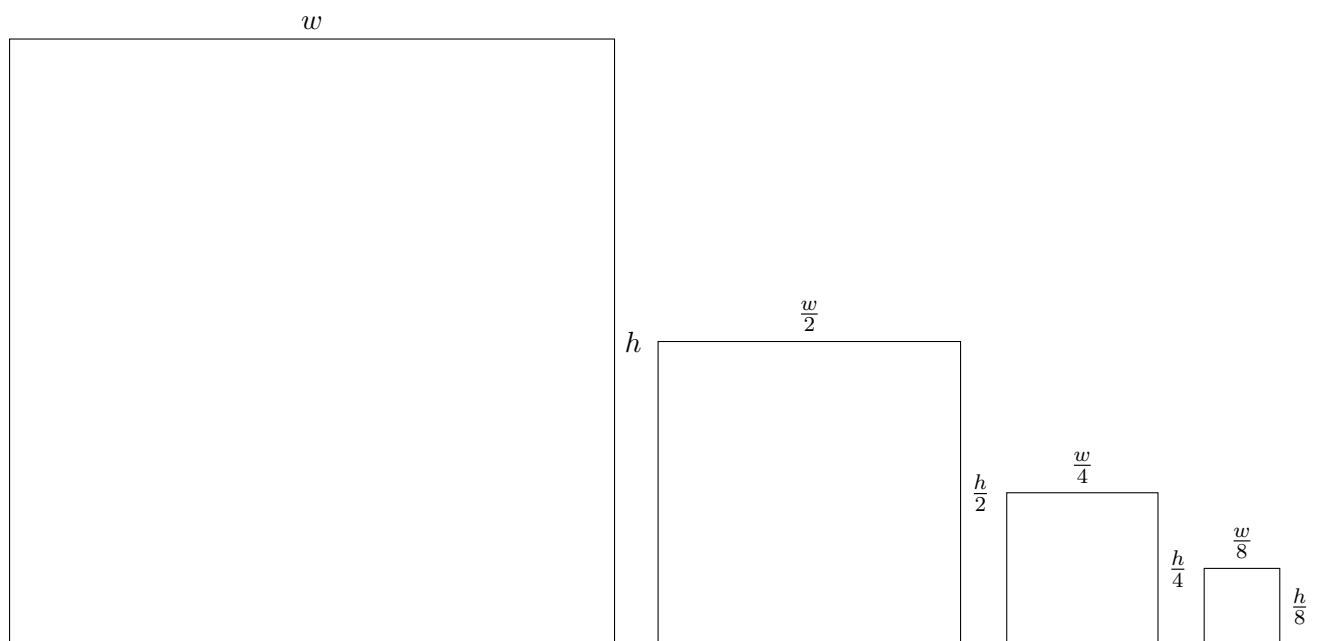
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c \wedge \alpha + \beta + \gamma = 1$$

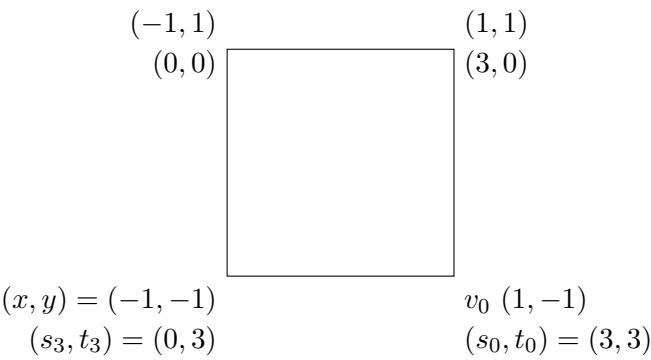
$$\Rightarrow f(x) = \alpha \cdot f(a) + \beta \cdot f(b) + \gamma \cdot f(c)$$

1.2 Texturen

1.2.1 Mipmap

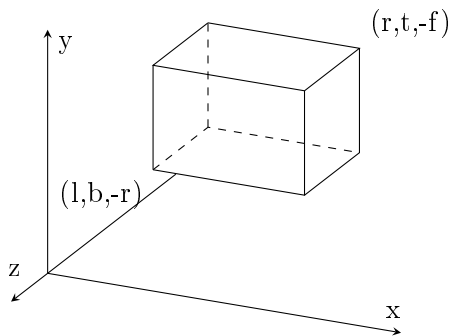


$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$



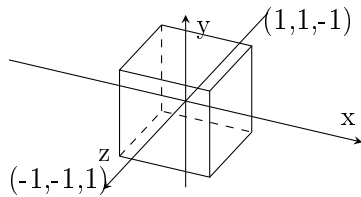
2 3D-Objekte

2.1 Orthogonalprojektion



$$\begin{aligned}x &\in [l, r] \\y &\in [b, t] \\z &\in [-f, -n]\end{aligned}$$

Sichtquader \rightarrow Einheitsquader



$$\begin{aligned}x' &\in [-1, 1] \\y' &\in [-1, 1] \\z' &\in [-1, 1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x' &= \alpha \cdot x + \beta \\l &\mapsto -1, \quad r \mapsto 1\end{aligned}$$

$$(1)$$

$$-1 = \alpha \cdot l + \beta$$

$$(2)$$

$$1 = \alpha \cdot r + \beta$$

$$(2) - (1)$$

$$2 = \alpha \cdot r - \alpha \cdot l \Rightarrow \alpha = \frac{2}{r-l}$$

$$1 = \frac{2 \cdot r}{r-l} + \beta$$

$$\beta = 1 - \frac{2r}{r-l} = \frac{r-l-2r}{r-l} = -\frac{r+l}{r-l}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{NDS}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & \frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & \frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_Q \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

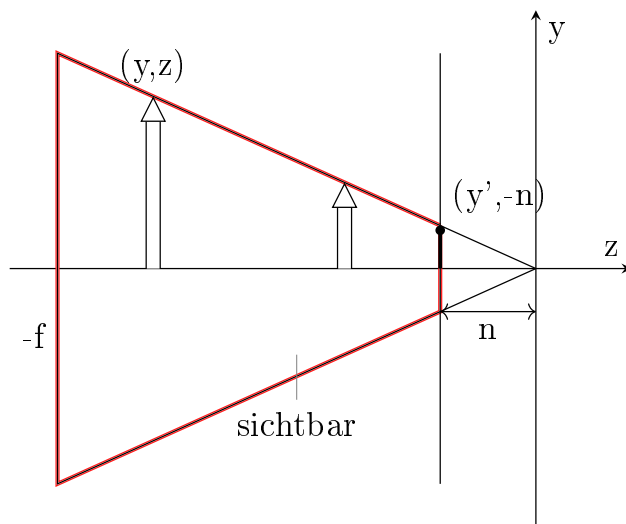
$$z' = -\frac{2}{f-n}z - \frac{f+n}{f-n}$$

$$z = n \quad z^* = \frac{2n - (f+n)}{f-n} = \frac{n-f}{f-n} = -1$$

$$-n \mapsto -1, \quad -f \mapsto 1$$

```
Qmatrix4x4.ortho(1,n,b,t,n,f);
```

2.2 Perspektivische Projektion

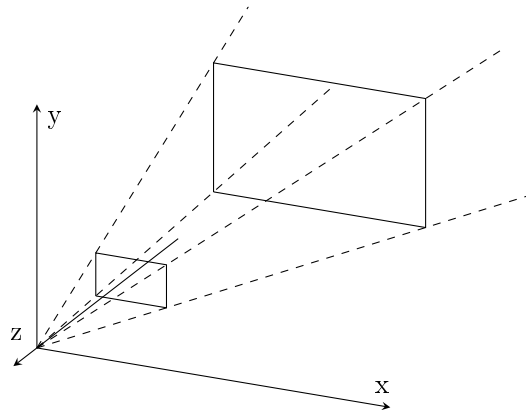


$$\frac{y'}{-n} = \frac{y}{z}$$

$$y' = -\frac{n \cdot y}{z}$$

2 3D-Objekte

Sichtpyramide \rightarrow Einheitswürfel



$$y' = -\frac{n \cdot y}{z}$$

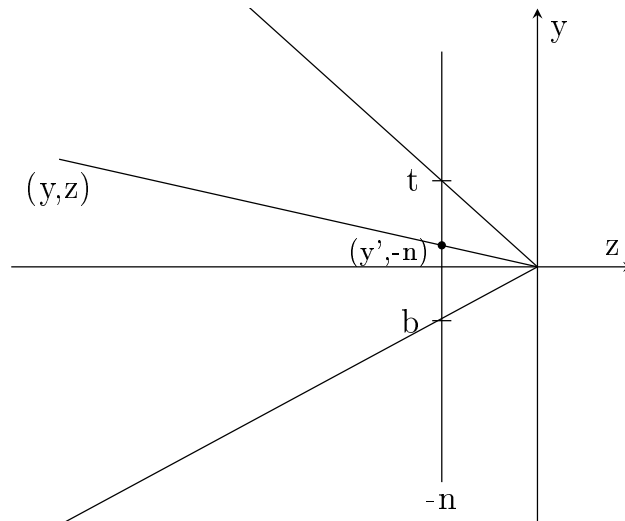
$$\cap$$

$$[b, t] \mapsto [-1, 1]$$

$$y'' = \alpha \cdot y' + \beta$$

$$y'' = \frac{2}{t \cdot b} \cdot y' - \frac{t+b}{t-b}$$

$$\boxed{y'' = \frac{-2n}{t-b} \cdot \frac{y}{z} - \frac{t+b}{t-b}}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Dehomogenisierung}} \begin{pmatrix} \frac{x}{w} \\ \frac{y}{w} \\ \frac{z}{w} \end{pmatrix}$$

homogene Koord. Kartesische koord.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ w'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y'' = \frac{2n}{t-b} \cdot y + \frac{t+b}{t-b} \cdot z$$

$$w'' = -z$$

$$\frac{y''}{w''} = \frac{2n}{t-b} \frac{y}{(-z)} + \frac{t+b}{t-b} \frac{z}{(-z)}$$

$$z''' = \frac{z''}{w''} = \frac{\alpha \cdot z + \beta}{-z} = -\alpha - \frac{\beta}{z}$$

$$-n \mapsto -1, \quad -f \mapsto 15$$

$$-\alpha - \frac{\beta}{-n} = -1$$

$$-\alpha - \frac{\beta}{-f} = 1$$

$$-\alpha + \frac{\beta}{n} = -1(1)$$

$$-\alpha + \frac{\beta}{f} = 1(2)$$

$$\frac{\beta}{f} - \frac{\beta}{n} = 2(2) - (1)$$

$$\beta \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{n} \right) = 2$$

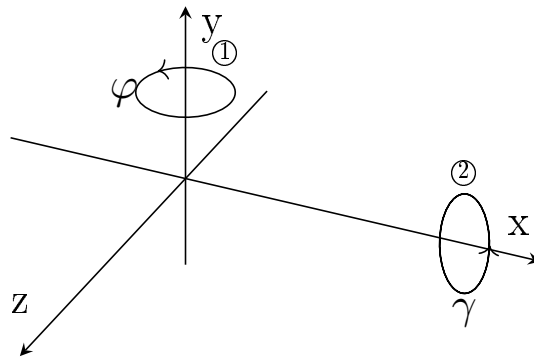
$$\beta \left(\frac{n-f}{fn} \right)$$

$$\beta = \frac{-2nf}{f-n}$$

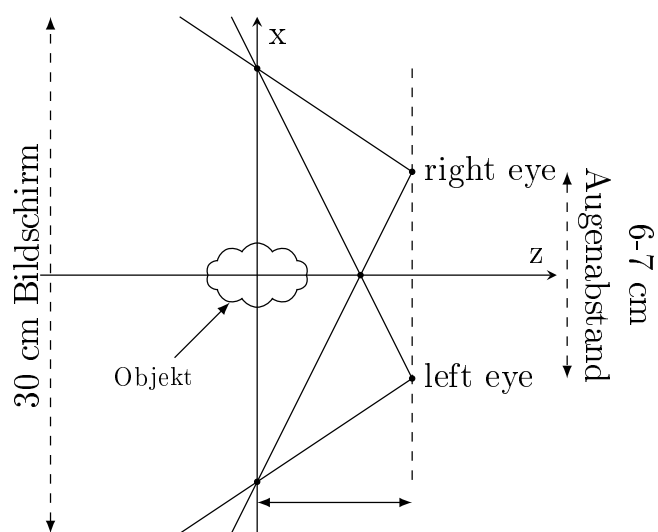
$$\alpha = \frac{\beta}{f} - 1 = -\frac{2n - (f-n)}{f-n} = \frac{f+n}{f-n}$$

$$p' = \underset{\substack{\textcircled{2} \\ \uparrow \\ \text{Drehung um} \\ \text{die Welt-x-Achse}}}{R_{\vartheta,x}} \cdot \underset{\substack{\textcircled{1} \\ \uparrow \\ \text{Drehung um} \\ \text{die Welt-y-Achse}}}{R_{\varphi,y}} \cdot p$$

2 3D-Objekte

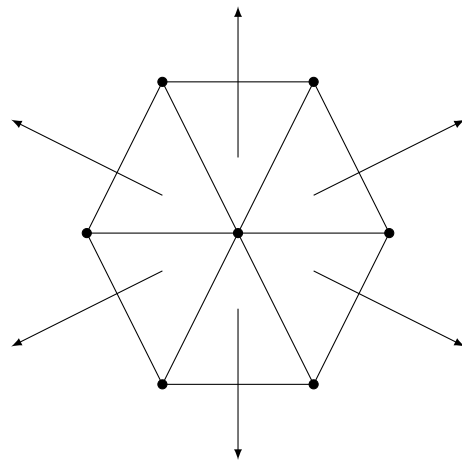
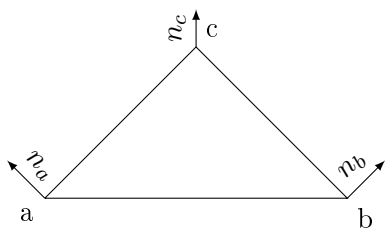


3D-Brille



3 Beleuchtung

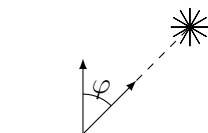
3.0.1 Smoothing



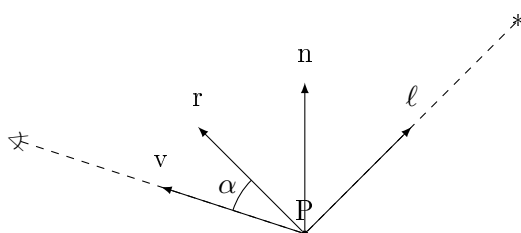
3 Beleuchtung

Lambert

$$I_D = I_L \cdot (n^T \cdot \ell)$$



3.1 Phong Lichtmodell

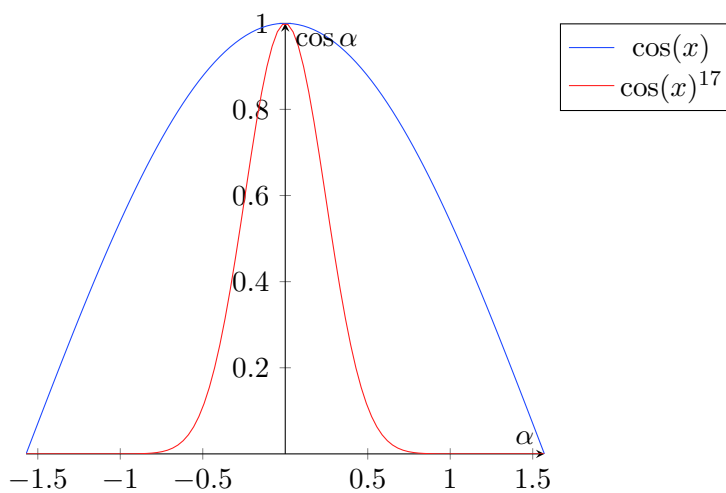


$$|n| = |\ell| = |r| = |v| = 1$$

$$r = 2n(n^T \ell) - \ell$$

S = Shininess

$$I_S = I_L (\cos \alpha)^S = I_L (r^T v)^S, \quad I_D = I_L (n^T \ell)$$



3.1.1 Phong

$$I_{\text{Color}} = I_{\text{Ambient, Color}} + I_{\text{Diffuse, Color}} + I_{\text{Specular, Color}}$$

$$\text{Color} \in \{\text{Red}, \text{Green}, \text{Blue}\}$$

```

1  void main() {
2      vec3 normal = normalize(vNormal);
3      vec3 lightDir = normalize(lighPos - vPos);
4      vec3 reflectDir = reflect(lightDir, normal);
5      vec3 viewDir = normalize(-vPos);

7      float lambertian = max(dot(lightDir, normal), 0.0.);
8      float specular = 0.0;

10     if ( lambertian > 0.0) {
11         float specAngle = max(dot(reflectDir, viewDir), 0.0);
12         specular = pow(specAngle, uShininess);
13     }
14     gl_FragColor = vec4(uAmbient + lambertian * uDiffuse + specular * uSpecular, 1.0);
15 }

```

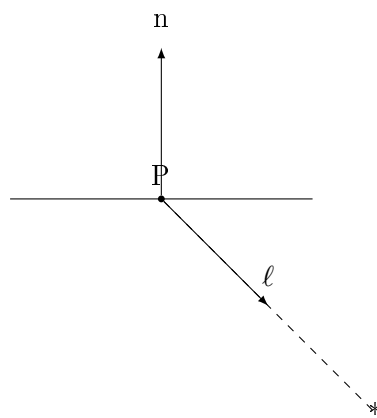
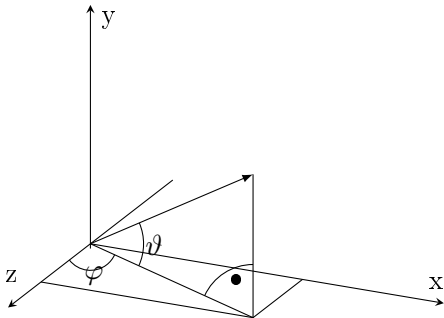


Abbildung 3.2: Zu ignorierende Lichtquelle

4 Oberflächen

4.1 Texturen



$$(\varphi, \vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \\ \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

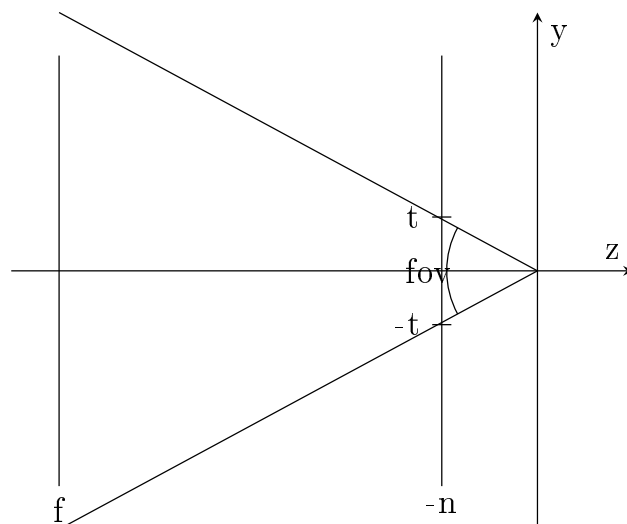
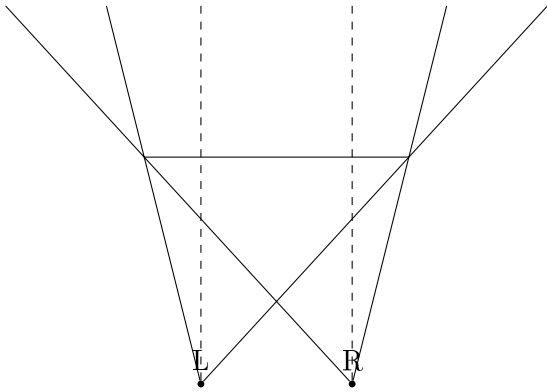
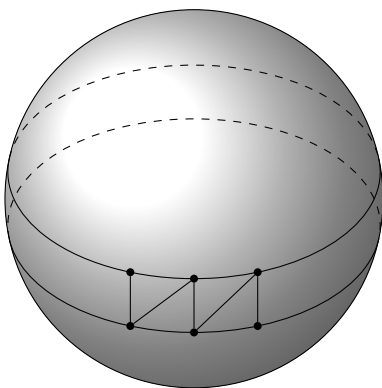
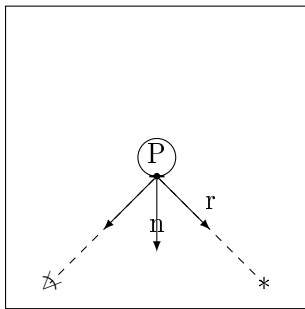
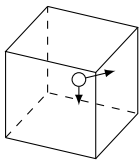


Abbildung 4.1: Field of view

```
perspective(fov, aspectratio, n, f);
```

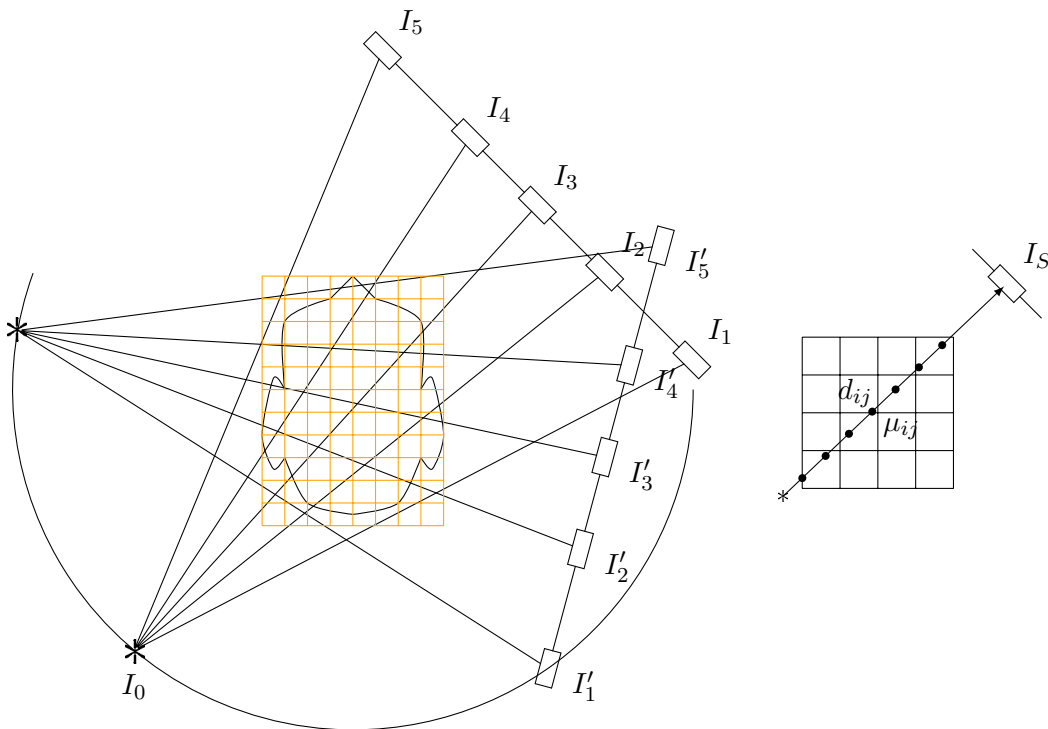


4.2 Cube-Mapping



5 Volume Rendering mit 3d-Texturen

5.1 DVT



5.1.1 Lambert-Beer-Gesetz

$$I^{\text{out}} = I^{\text{in}} \cdot e^{-\mu \cdot d}$$

Schwächungskoeffizienten

$$I_S = I_0 \cdot e^{\sum_{\square(i,j) \cap S \neq \emptyset} \mu_{ij} \cdot d_{ij}}$$

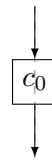
$$\ln \frac{I_0}{I_S} = \sum_{\square(i,j) \cap S \neq \emptyset} \mu_{ij} \cdot d_{ij}$$

$$I = \bigcap_{\mathbb{R}^{360.000.000 \times 128.000.000}} D \cdot \mu$$

Inverses Problem

Gegeben: Gemessene Intensitäten I_S für alle Strahlen, die die Bildebene treffen für hinreichend viele Aufnahmerrichtungen.

Gesucht: Schwächungskoeffizienten für alle Voxel des zu rekonstruierenden Volumens.



$$c^{\text{out}} = c^{\text{in}} \cdot (1 - \alpha_i) + c_i \alpha_i$$

α_i = Deckkraft der Farbe c_i

$1 - \alpha_i \hat{=}$ Transparenz



$$c^{\text{out}} = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \prod_{j=i+1}^n (1 - \alpha_j)$$