

Computergrafik

Mitschrift von

Markus Vieth

Steffen Eiden

Lukas Birklein

10. Januar 2017

Vorwort

Dieses Skript basiert auf unserer Mitschrift der Vorlesung Computergrafik und VR im WS 2016/17 an der JGU Mainz (Dozent: Prof. Dr. E. Schömer).

Es handelt sich nicht um eine offizielle Veröffentlichung der Universität.

Wir übernehmen keine Gewähr für die Fehlerfreiheit und Vollständigkeit des Skripts.

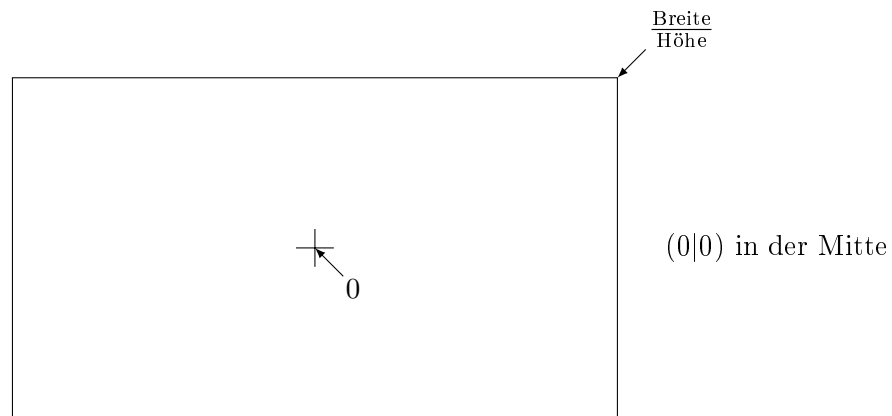
Fehler können unter [Github](#) gemeldet werden. Die aktuelle Version dieses Skriptes ist ebenfalls auf [Github](#) zu finden.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	i
1 Koordinatensysteme	1
1.1 Normalisiertes Koordinatensystem	1
1.2 Bildschirmkoordinaten \Leftrightarrow Weltkoordinaten	1
1.3 Homogene Koordinaten	2
1.4 Transformationen	3
1.4.1 Rotation	3
1.4.2 + Verschiebung	3
1.4.3 Skalierung	3
1.4.4 Translation	3
1.4.5 Hintereinanderausführung von Translation, Rotation und Skalierung	4
1.5 Invertierung von M	4
1.6 Qt	5
2 VBO	6
2.1 Baryzentrische Koordinaten	7
2.2 Texturen	8
2.2.1 Mipmap	8
3 3D-Objekte	10
3.1 Orthogonalprojektion	10
3.2 Perspektivische Projektion	11
3.3 Objekte drehen aka Blickwinkel ändern	14
4 Qt Formen	15
4.1 OFF-Format	16
5 Beleuchtung	17
5.1 Ein einfaches Beleuchtungsmodell	17
5.1.1 Smoothing	17
5.2 Phong Lichtmodell	18
5.2.1 Phong	18
6 Oberflächen	20
6.1 Texturen	20
6.2 Cube-Mapping	21
7 Volume Rendering mit 3d-Texturen	22
7.1 DVT	22
7.1.1 Lambert-Beer-Gesetz	22

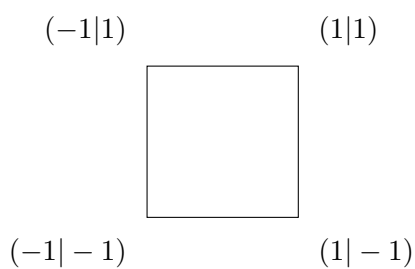
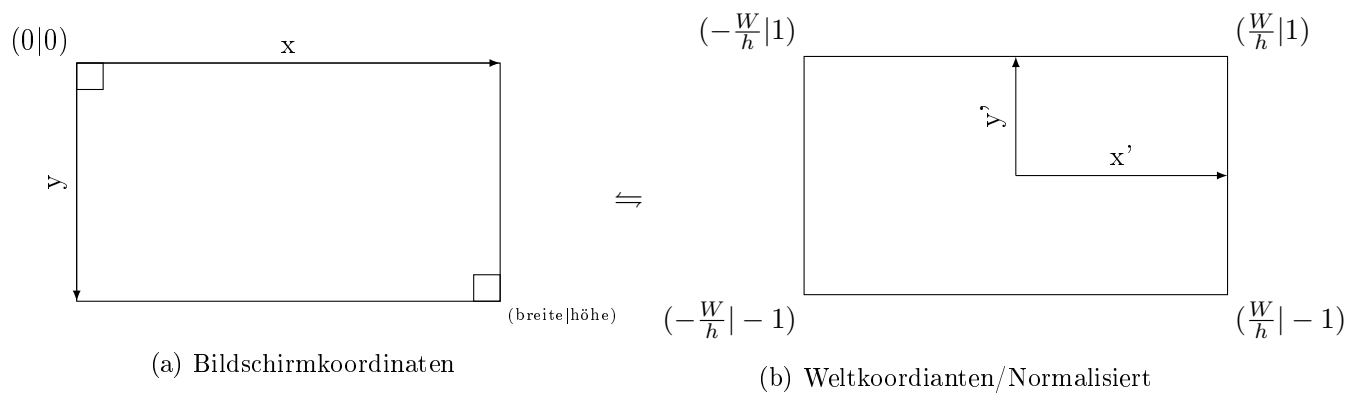
1 Koordinatensysteme

1.1 Normalisiertes Koordinatensystem



glViewport: Ausschnitt wo gezeichnet wird.

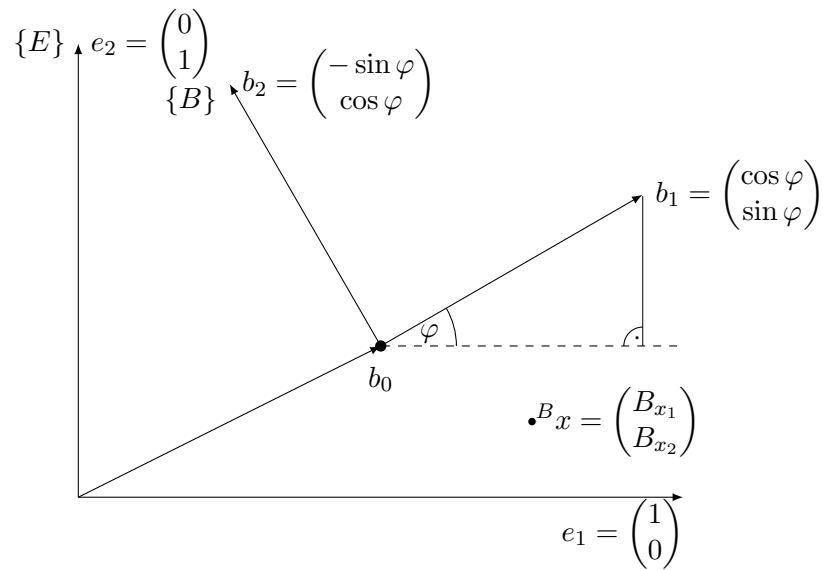
1.2 Bildschirmkoordinaten \Leftrightarrow Weltkoordinaten



$$x' = ax + b$$

$$y' = cy + d$$

1 Koordinatensysteme



b_0 : E-Koordinaten des Ursprungs von System B

b_1, b_2 E-Koordinaten der Basisvektoren von System B

$${}^E x = b_0 + {}^B x_1 \cdot b_1 + {}^B x_2 \cdot b_2$$

$$[b_1, b_2] = R \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad |b_1| = |b_2| = 1, \quad \overbrace{b_1^T \cdot b - 2}^{\text{Standardskalarprodukt}} = 0$$

$$R^T \cdot R = \mathbb{E}, \det(R) = 1 \text{ (Rechtssystem)}$$

$$\Rightarrow {}^E x = b_0 + {}^E R \cdot {}^B x$$

1.3 Homogene Koordinaten

$${}^E x^1 = \begin{pmatrix} {}^E x_1 \\ {}^E x_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^E x \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$= \left(\begin{array}{cc|c} {}^E R_B & b_0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \begin{pmatrix} {}^B x \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & b_{0_1} \\ \sin \varphi & \cos \varphi & b_{0_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^B x_1 \\ {}^B x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Allgemein:

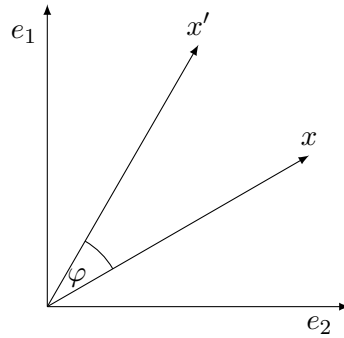
$${}^E x^1 = {}^E M_B \cdot {}^B \hat{x}$$

1. ${}^E M_B$ beschreibt die Transformationsmatrix von Koordinaten aus System B in das System E
2. ${}^E M_B$ kann auch interpretiert werden, als die (starre) Transformation, die E in B überführt.

1.4 Transformationen

1.4.1 Rotation

z.B.



$$x' = R \cdot x$$

1.4.2 + Verschiebung

$$x' = Rx + z$$

$$\rightsquigarrow \hat{x}' = Mx \text{ mit } M = \left(\begin{array}{c|c} R & t \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$x' = R(x + t)$$

1.4.3 Skalierung

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix} \quad x' = Sx = \begin{pmatrix} x'_1 = s_1 x_1 \\ x'_2 = s_2 x_2 \end{pmatrix}$$

homogenisiert

$$\hat{S} = \left(\begin{array}{c|c} S & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$$

mit $s_2 = -1$ Spiegelung um x_1

1.4.4 Translation

Homogen:

$$\hat{T} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

1 Koordinatensysteme

1.4.5 Hintereinanderausführung von Translation, Rotation und Skalierung

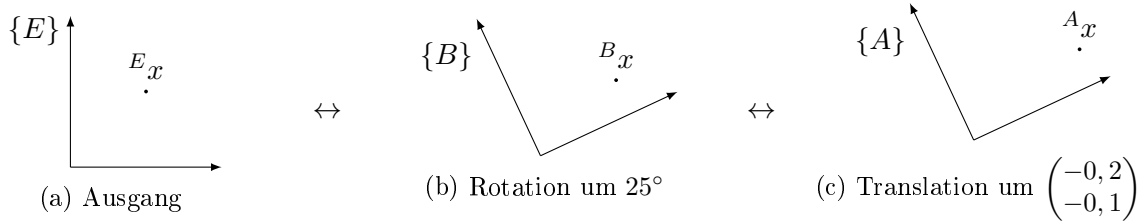
z.B.

$$x''' = S(R(x + t))$$

$$\rightsquigarrow x' = x + t; \quad x'' = Rx'; \quad x''' = Sx''$$

$$x''' = \underbrace{\hat{S}\hat{R}\hat{T}\hat{x}}_{\text{Leserichtung}} \quad \text{alles homogenisiert}$$

^ wird oft weggelassen, wenn klar.



$$\begin{aligned} {}^B M_A {}^A x &= {}^B x \\ {}^E x &= {}^E M_B {}^B x \\ \Rightarrow {}^E x &= \underbrace{{}^E M_B {}^B M_A}^{{}^E M_A} {}^A x \end{aligned}$$

z.B.

gegeben

$${}^E M_B \quad {}^E M_A$$

gesucht

$${}^B M_A$$

$$\begin{aligned} {}^E M_A &= {}^E M_B {}^B M_A \\ \Rightarrow {}^B M_A &= {}^E M_B^{-1} \cdot {}^E M_A \\ {}^E M_B^{-1} &= {}^B M_E \end{aligned}$$

1.5 Invertierung von M

Sei $M = \left(\begin{array}{c|c} R & t \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$ $\begin{matrix} R^{-1} \\ \uparrow \\ \text{Drehung um } -\varphi \end{matrix} = R^T$ u.a. auch, da Rotation ($R^T R = 1$)

$$\begin{aligned} Mx &= Rx + t = x' \\ \rightsquigarrow R^T(x' - t) &= x \\ \rightsquigarrow R^T x' - R^T t &= x \\ \rightsquigarrow M^{-1} &= \left(\begin{array}{c|c} R^T & -R^T t \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

1.6 Qt

```

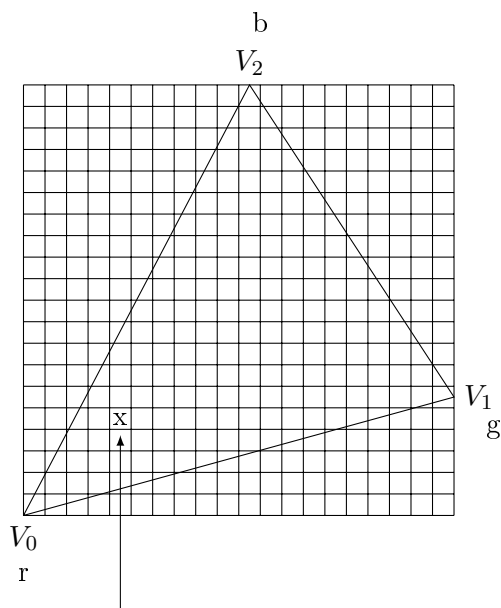
1  QMatrix4x4 M;
2  M.setToIdentity();    //  $M = \mathbb{1}$ 
3  M.rotate( $\varphi$ , 0, 0, 1); // Rotation um die z-Achse
4                          //  $M = M \cdot R$ 
5  M.scale( $s_1$ ,  $s_2$ );     //  $M = M \cdot S$ 
6  M.translate( $t_1$ ,  $t_2$ ); //  $M = M \cdot T$ 
7  //  $M = \underbrace{\mathbb{1} \cdot R \cdot S \cdot T}_{\text{Leserichtung für Transformation}}$ 
8  // Jeder Befehl wird zuerst ausgeführt! LIFO!
9  Mx'
```

2 VBO

	Kartesische Koord.	Farben	Textur-Koord.	Normal
v_0	x_0, y_0, z_0, w_0	r_0, g_0, b_0	s_0, t_0	u_0, v_0, w'_0
v_1				
\vdots				
v_{n-1}				

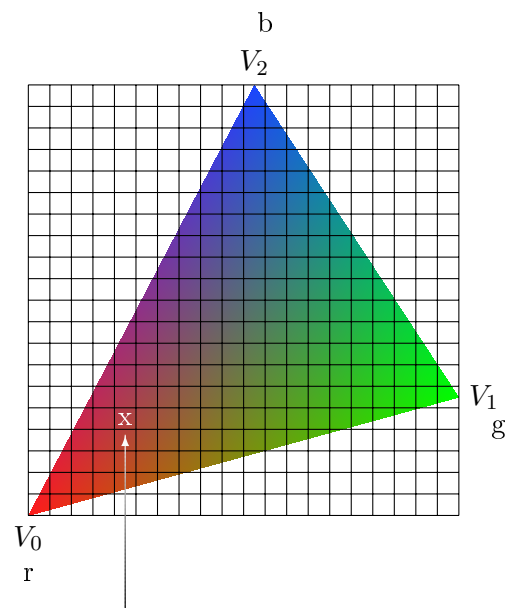
Entweder alles in einen Buffer \Rightarrow Array of Structs

Oder für jede Klasse einen eigenen Buffer \Rightarrow Struct of Array



interpolierte Farbe z.B. Mischung

(a) Beispiel Raster



interpolierte Farbe z.B. Mischung

(b) Beispiel Mischung der Farben

Shader nimmt die Attribute von den Randpunkten und prozessiert diese auf die Pixel im inneren des Dreiecks.

2.1 Baryzentrische Koordinaten

`varying` im Vertexshader

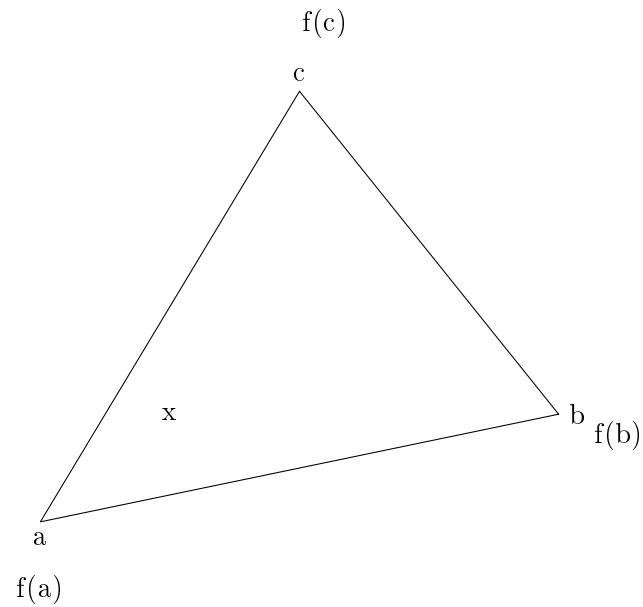


Abbildung 2.2: Baryzentrisches Koordinatensystem

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

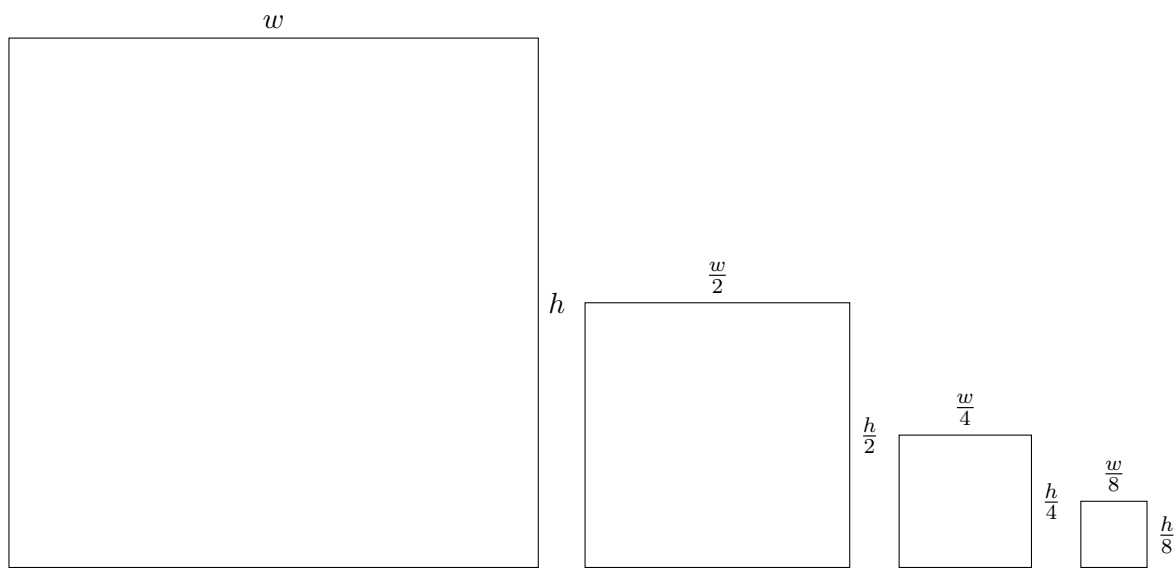
$$x = \alpha \cdot a + \beta \cdot b + \gamma \cdot c \wedge \alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = \alpha \cdot f(a) + \beta \cdot f(b) + \gamma \cdot f(c)$$

(wird bei Qt durch das Keyword „Varying“ ausgelöst)

2.2 Texturen

2.2.1 Mipmap



$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Bildschirmpixel

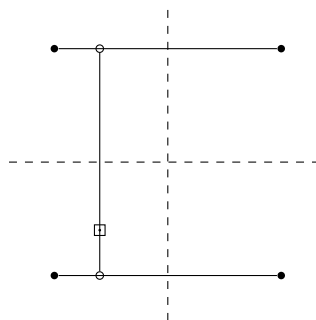
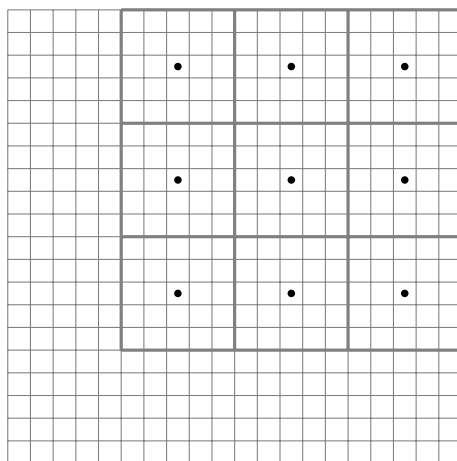
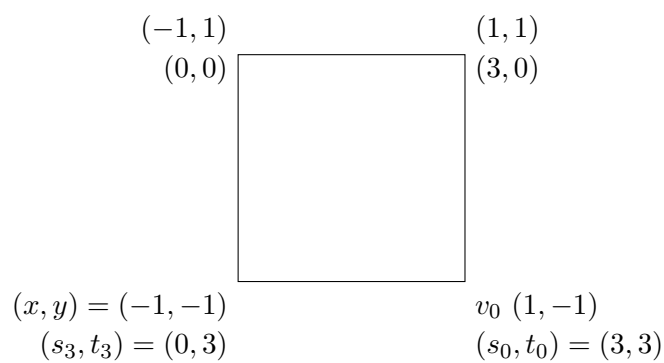


Abbildung 2.3: bilineare Interpolation



In der Regel sind Texturkoordinaten in $[0, 1]^2$, wenn größer wird sie periodisch verwendet.

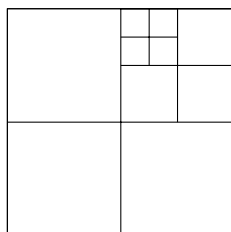
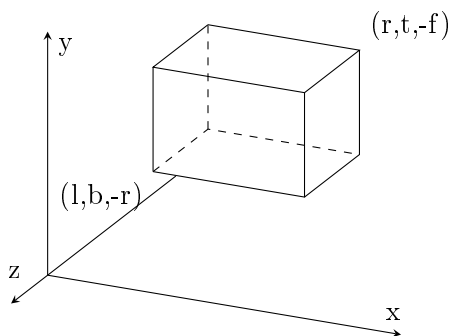


Abbildung 2.4: Maps Mipmapping

Denkanstoß: Welche Kette von Transformationen braucht man um zu einem Fixpunkt zu zoomen?

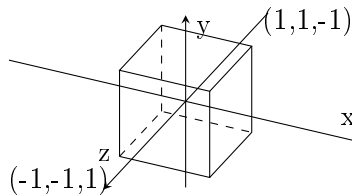
3 3D-Objekte

3.1 Orthogonalprojektion



$$\begin{aligned}x &\in [l, r] \\y &\in [b, t] \\z &\in [-f, -n]\end{aligned}$$

Sichtquader \rightarrow Einheitsquader



$$\begin{aligned}x' &\in [-1, 1] \\y' &\in [-1, 1] \\z' &\in [-1, 1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x' &= \alpha \cdot x + \beta \\l &\mapsto -1, \quad r \mapsto 1\end{aligned}$$

$$(1)$$

$$-1 = \alpha \cdot l + \beta$$

$$(2)$$

$$1 = \alpha \cdot r + \beta$$

$$(2) - (1)$$

$$2 = \alpha \cdot r - \alpha \cdot l \Rightarrow \alpha = \frac{2}{r-l}$$

$$1 = \frac{2 \cdot r}{r-l} + \beta$$

$$\beta = 1 - \frac{2r}{r-l} = \frac{r-l-2r}{r-l} = -\frac{r+l}{r-l}$$

Analog für y' und z'

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}_{\text{NDS}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & \frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & \frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_O \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

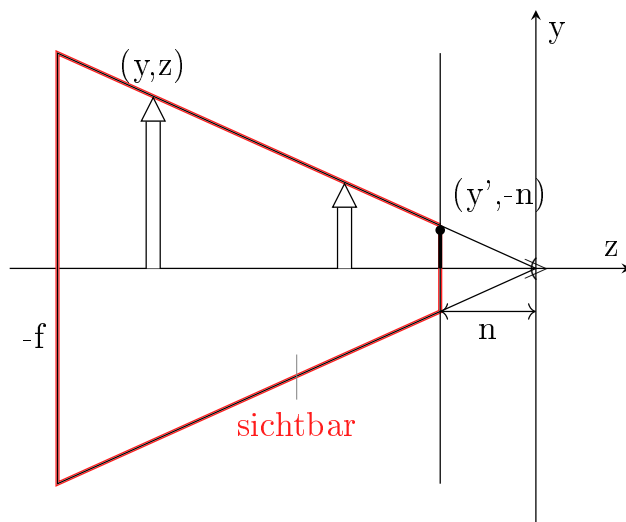
$$z' = -\frac{2}{f-n}z - \frac{f+n}{f-n}$$

$$z = n \quad z^* = \frac{2n - (f+n)}{f-n} = \frac{n-f}{f-n} = -1$$

$$-n \mapsto -1, \quad -f \mapsto 1$$

`Qmatrix4x4.ortho(1,n,b,t,n,f);` liefert O

3.2 Perspektivische Projektion

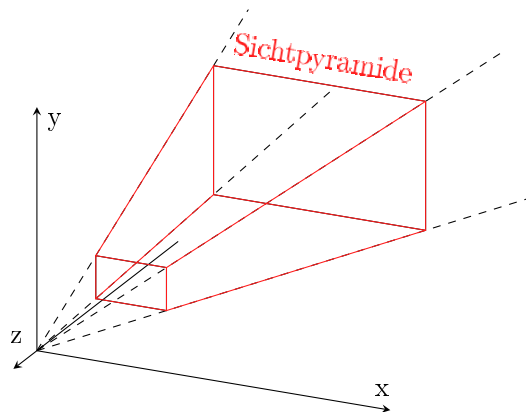


$$\frac{y'}{-n} = \frac{y}{z}$$

$$y' = -\frac{n \cdot y}{z}$$

3 3D-Objekte

Sichtpyramide \rightarrow Einheitswürfel



$$y' = -\frac{n \cdot y}{z}$$

$$\cap$$

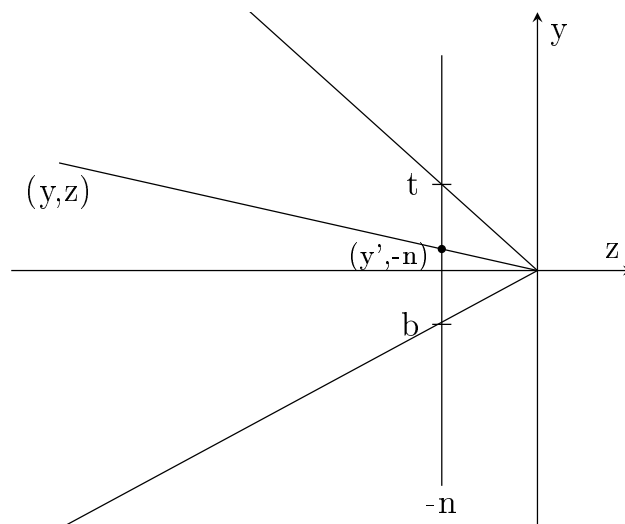
$$[b, t] \mapsto [-1, 1]$$

$$y'' = \alpha \cdot y' + \beta$$

$$y'' = \frac{2}{t \cdot b} \cdot y' - \frac{t+b}{t-b}$$

$$y'' = \frac{2n}{t-b} \cdot \frac{y}{-z} - \frac{t+b}{t-b}$$

analog für x'' , z''



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Dehomogenisierung}} \begin{pmatrix} \frac{x}{w} \\ \frac{y}{w} \\ \frac{z}{w} \end{pmatrix}$$

homogene Koord. Kartesische koord.

Homogenisierungsmatrix:

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ w'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & -\frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$y'' = \frac{2n}{t-b} \cdot y + \frac{t+b}{t-b} \cdot z$$

$$w'' = -z$$

$$\frac{y''}{w''} = \frac{2n}{t-b} \frac{y}{(-z)} + \frac{t+b}{t-b} \frac{z}{(-z)}$$

$$z''' = \frac{z''}{w''} = \frac{\alpha \cdot z + \beta}{-z} = -\alpha - \frac{\beta}{z}$$

$$-n \mapsto -1, \quad -f \mapsto 15$$

$$-\alpha - \frac{\beta}{-n} = -1$$

$$-\alpha - \frac{\beta}{-f} = 1$$

$$-\alpha + \frac{\beta}{n} = -1(1)$$

$$-\alpha + \frac{\beta}{f} = 1(2)$$

$$\frac{\beta}{f} - \frac{\beta}{n} = 2(2) - (1)$$

$$\beta \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{n} \right) = 2$$

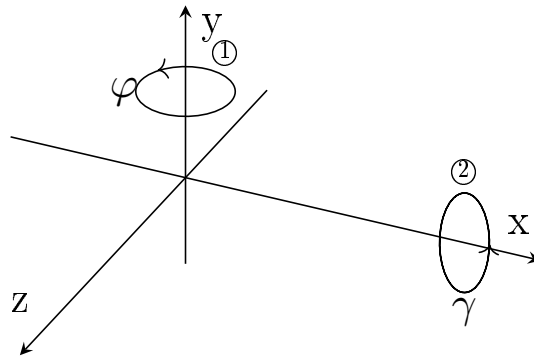
$$\beta \left(\frac{n-f}{fn} \right)$$

$$\beta = \frac{-2nf}{f-n}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{f} - 1 = -\frac{2n-(f-n)}{f-n} = \frac{f+n}{f-n}$$

3.3 Objekte drehen aka Blickwinkel ändern

$$p' = \underset{\substack{\textcircled{2} \\ \uparrow \\ \text{Drehung um} \\ \text{die Welt-x-Achse}}}{R_{\vartheta,x}} \cdot \underset{\substack{\textcircled{1} \\ \uparrow \\ \text{Drehung um} \\ \text{die Welt-y-Achse}}}{R_{\varphi,y}} \cdot p$$



3D-Brille

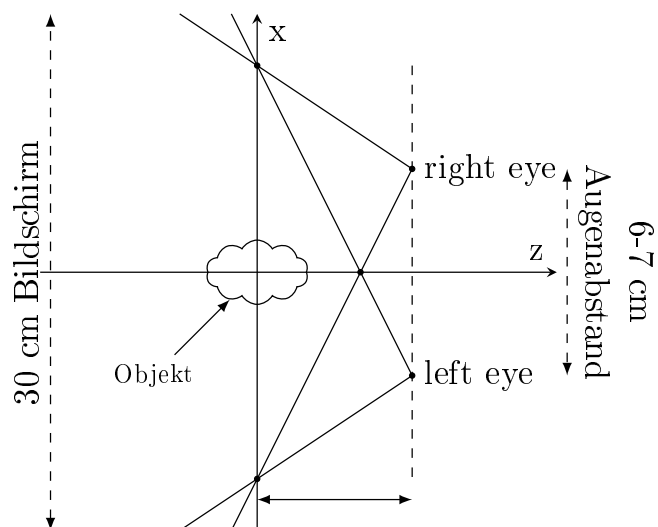
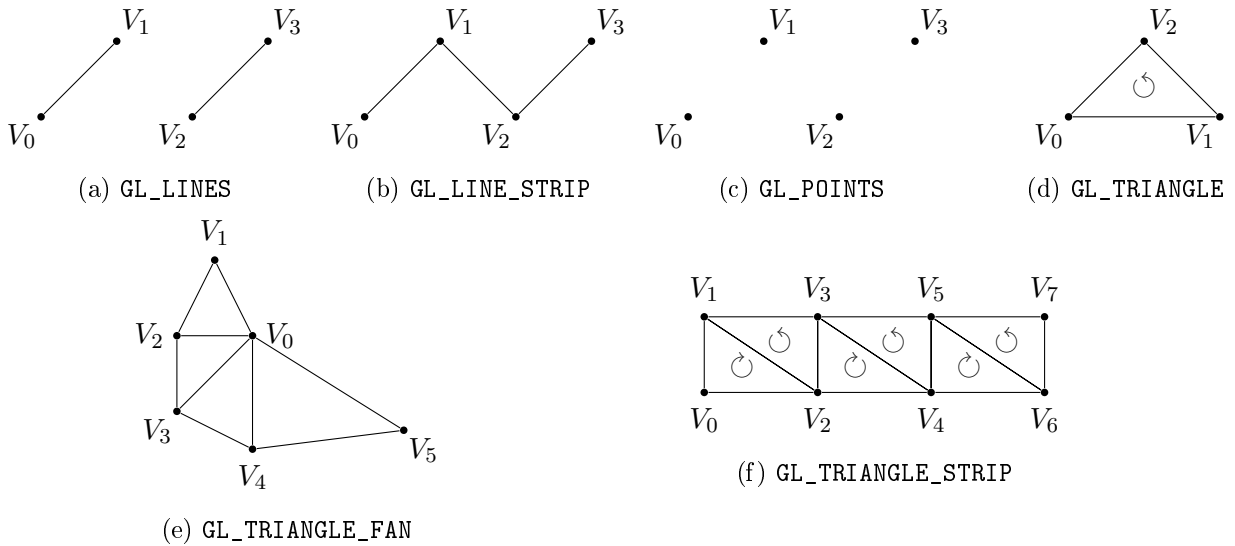
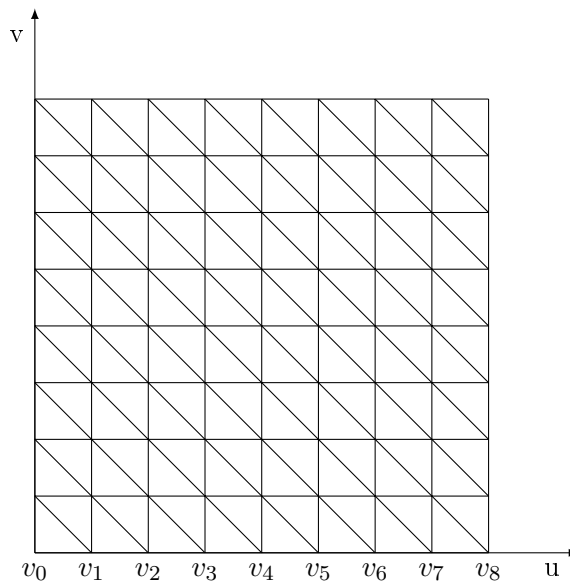


Abbildung 3.1: Streckenangaben sind beispielhaft

4 Qt Formen



Um den `GL_TRIANGLE_STRIP` abzuschließen wird der letzte Knoten (hier V_7) zweimal gesendet.



$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(u, v) \rightarrow (x, y, z)$$

Vertex Buffer Objects \leftarrow Koordinatenzusatzinformationen

Index Buffer Objects \leftarrow Indices der Vertexe

4.1 OFF-Format

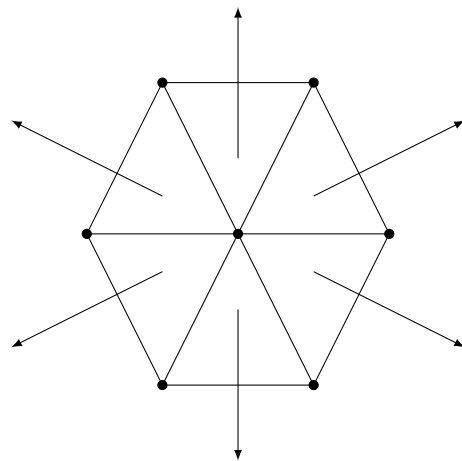
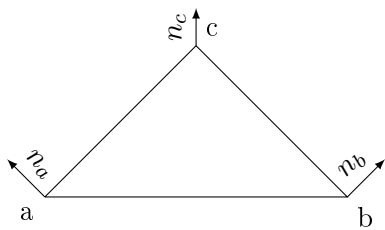
<i>n</i>	<i>f</i>	<i>e</i>
<i>x</i> ₀	<i>y</i> ₀	<i>z</i> ₀
<i>x</i> ₁	<i>y</i> ₁	<i>z</i> ₁
	⋮	
3	<i>i</i> ₁	<i>i</i> ₂ <i>i</i> ₃
	⋮	

Index Face Set
GL_ELEMENT_ARRAY_BUFFER

5 Beleuchtung

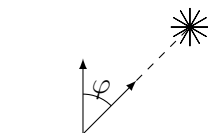
5.1 Ein einfaches Beleuchtungsmodell

5.1.1 Smoothing

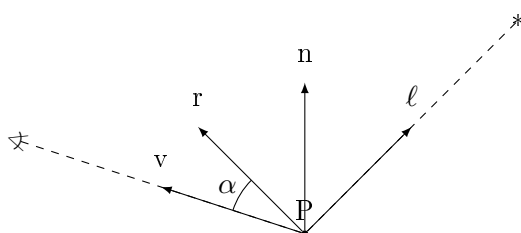


Lambert

$$I_D = I_L \cdot (n^T \cdot \ell)$$



5.2 Phong Lichtmodell

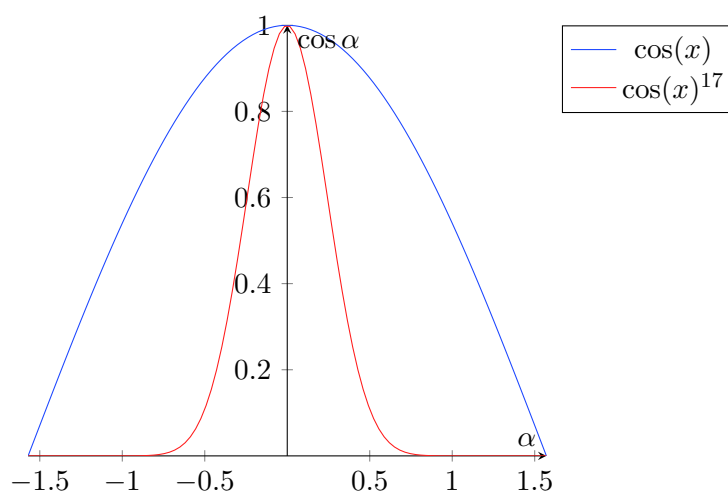


$$|n| = |\ell| = |r| = |v| = 1$$

$$r = 2n(n^T \ell) - \ell$$

S = Shininess

$$I_S = I_L (\cos \alpha)^S = I_L (r^T v)^S, \quad I_D = I_L (n^T \ell)$$



5.2.1 Phong

$$I_{\text{Color}} = I_{\text{Ambient, Color}} + I_{\text{Diffuse, Color}} + I_{\text{Specular, Color}}$$

$$\text{Color} \in \{\text{Red, Green, Blue}\}$$


```

1  void main() {
2      vec3 normal = normalize(vNormal);
3      vec3 lightDir = normalize(lighPos - vPos);
4      vec3 reflectDir = reflect(lightDir, normal);
5      vec3 viewDir = normalize(-vPos);

7      float lambertian = max(dot(lightDir, normal), 0.0.);
8      float specular = 0.0;

10     if ( lambertian > 0.0) {
11         float specAngle = max(dot(reflectDir, viewDir), 0.0);
12         specular = pow(specAngle, uShininess);
13     }
14     gl_FragColor = vec4(uAmbient + lambertian * uDiffuse + specular * uSpecular, 1.0);
15 }

```

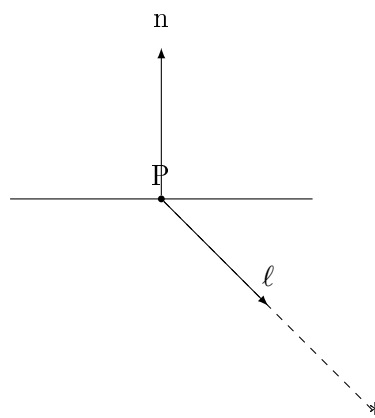
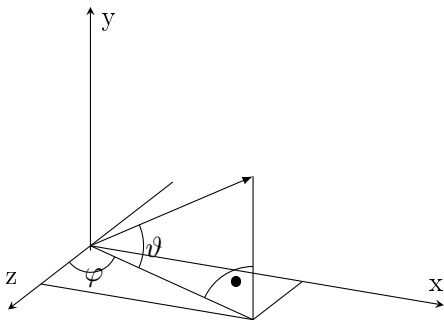


Abbildung 5.2: Zu ignorierende Lichtquelle

6 Oberflächen

6.1 Texturen



$$(\varphi, \vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \\ \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$$

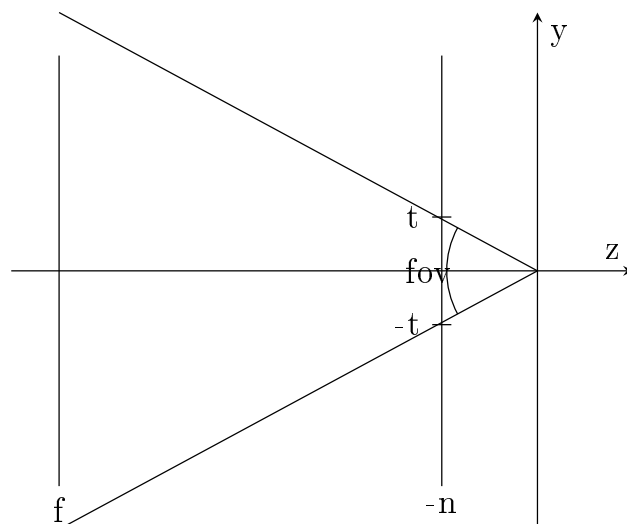
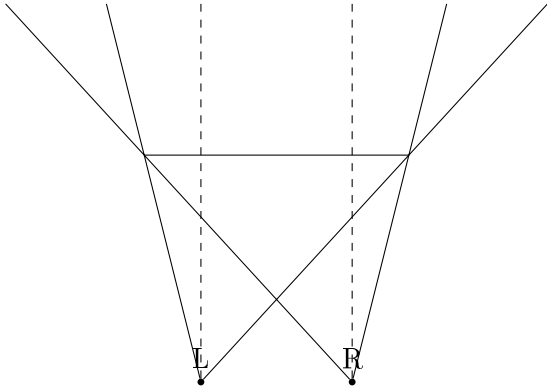
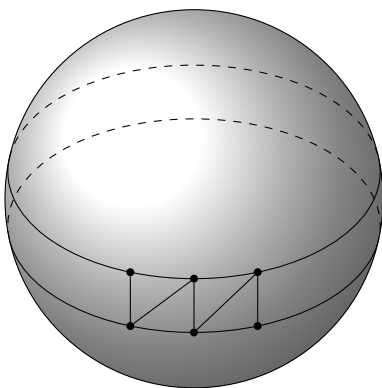
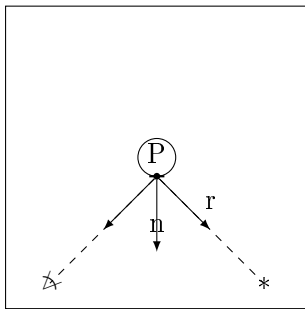
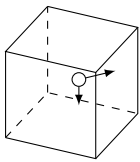


Abbildung 6.1: Field of view

```
perspective(fov, aspectratio, n, f);
```

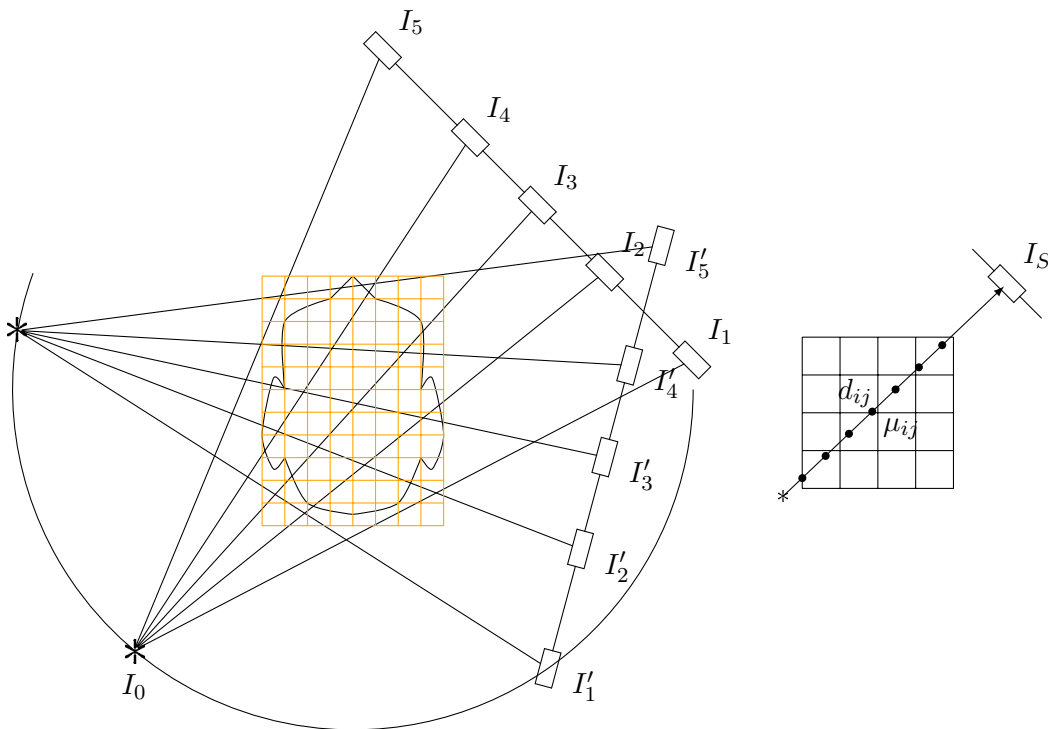


6.2 Cube-Mapping



7 Volume Rendering mit 3d-Texturen

7.1 DVT



7.1.1 Lambert-Beer-Gesetz

$$I^{\text{out}} = I^{\text{in}} \cdot e^{-\mu \cdot d}$$

Schwächungskoeffizienten

$$I_S = I_0 \cdot e^{\sum_{\square(i,j) \cap S \neq \emptyset} \mu_{ij} \cdot d_{ij}}$$

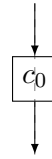
$$\ln \frac{I_0}{I_S} = \sum_{\square(i,j) \cap S \neq \emptyset} \mu_{ij} \cdot d_{ij}$$

$$I = \frac{D}{\bigcap_{\mathbb{R}^{360.000.000 \times 128.000.000}}} \cdot \mu$$

Inverses Problem

Gegeben: Gemessene Intensitäten I_S für alle Strahlen, die die Bildebene treffen für hinreichend viele Aufnahmerrichtungen.

Gesucht: Schwächungskoeffizienten für alle Voxel des zu rekonstruierenden Volumens.



$$c^{\text{out}} = c^{\text{in}} \cdot (1 - \alpha_i) + c_i \alpha_i$$

α_i = Deckkraft der Farbe c_i

$1 - \alpha_i \hat{=}$ Transparenz



$$c^{\text{out}} = \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i \prod_{j=i+1}^n (1 - \alpha_j)$$