Graphenalgorithmen
Blatt 7

Markus Vieth Christian Stricker

21. Dezember 2016

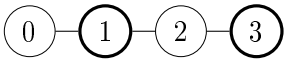
Markus Vieth, Christian Stricker

1 Aufgabe 1: FPT Vertex-Cover (10 P)

1.1 Vorüberlegung

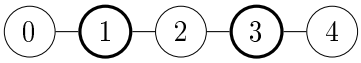
Aus $d(v) \leq 2$ folgt, dass der Graph nur aus Einzelknoten mit $d(v) = 0$, Strecken aus 2 Knoten mit $d(v) = 1$ und beliebig vielen Zwichenknoten mit $d(v) = 2$ sowie aus Zyklen in denen für alle Knoten gilt $d(v) = 2$.
Offensichtlich gilt, wir können alle Knoten mit $d(v) = 0$ ohne Schaden löschen. Für Pfade und Zykel wird eine Fallunterscheidung gemacht:

1.1.1 Pfad mit gerader Knotenanzahl



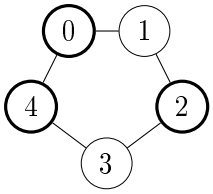
Es reicht von einer Seite anfangend jeden 2. Knoten ins Set aufzunehmen, angefangen mit dem zweitem. Durch Induktion lässt sich zeigen, dass diese Wahl immer minimal ist.

1.1.2 Pfad mit ungerader Knotenanzahl



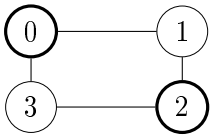
Es reicht von einer Seite anfangend jeden 2. Knoten ins Set aufzunehmen, angefangen mit dem zweitem. Durch Induktion lässt sich zeigen, dass diese Wahl immer minimal ist.

1.1.3 Zykel mit gerader Knotenanzahl



Es reicht von einem Knoten anfangend jeden 2. Knoten ins Set aufzunehmen, angefangen mit dem ersten. Durch Induktion lässt sich zeigen, dass diese Wahl immer minimal ist.

1.1.4 Zykel mit ungerader Knotenanzahl



Es reicht von einer Seite anfangend jeden 2. Knoten ins Set aufzunehmen, angefangen mit dem ersten. Durch Induktion lässt sich zeigen, dass diese Wahl immer minimal ist.

1.2 Pseudocode

```
1  Knoten[] findVertexCover(G = (V, E)) {
2      Knoten[] result;
3      zuBesuchen = V;
4      for(Knoten v in zuBesuchen) { // Laufzeit in O(n)
5          // Lösche alle Knoten vom Grad 0
6          if(v.grad == 0) {
7              zuBesuchen.remove(v); // Bei geeigneter Datenstruktur (z.B. Hashing) O(1)
8              continue;
9          }
10         // Bei Knoten vom Grad 1, suche Pfad ab und füge jeden 2. Knoten dem Ergebniss hinzu
11         if(v.grad == 1) {
12             boolean second = false;
13             zuBesuchen.remove(v); // Bei geeigneter Datenstruktur (z.B. Hashing) O(1)
14             prev = NULL;
15             while(v.hasNext(prev)) { // Laufzeit in O(n)
16                 second = !second;
17                 v = v.next(prev); // O(1)
18                 zuBesuchen.remove(v); // Bei geeigneter Datenstruktur (z.B. Hashing) O(1)
19                 if(second)
20                     result += [v]; // O(1)
21             }
22             continue;
23         }
24     }
25     // Da keine Knoten mehr vom Grad < 2 da sind, müssen alle anderen Knoten Zykel bilden
26     for(Knoten v in zuBesuchen) { // Laufzeit in O(n)
27         boolean second = false;
28         zuBesuchen.remove(v); // Bei geeigneter Datenstruktur (z.B. Hashing) O(1)
29         result += [v]; // O(1)
30         prev = NULL;
31         first = v;
32         while(v.next(prev) != first) { // Laufzeit in O(n)
33             second = !second;
34             v = v.next(prev); // O(1)
35             zuBesuchen.remove(v); // Bei geeigneter Datenstruktur (z.B. Hashing) O(1)
36                 if(!second)
37                     result += [v]; // O(1)
38             }
39         }
40     }
41     class Knoten {
42         // Liste benachtbarter Knoten
43         Knoten[] nachbarn;

45         int grad() { // O(1)
46             return nachbarn.size();
47         }

49         // return nächst besten Nachbarn ungleich prev
50         Knoten next(Knoten prev) { // O(1)
51             if(prev != NULL && prev == nachbarn[0])
52                 return nachbarn[1];
53             return nachbarn[0]
54         }

56         // wenn prev = null, hat dieser Knoten einen Nachbarn? sonst: Hat dieser Knoten einen
               Nachbarn ungleich prev?
57         boolean hasNext(Knoten prev) { // O(1)
58             if(prev == NULL)
```

```
59                  return this.grad > 0;
60              boolean res = false;
61              for(Knoten v in this.nachbarn)
62                  res |= (v == prev);
63              return res;
64          }
65      }
66      return res;
67  }
```

$\Rightarrow$ Laufzeit in $O(n) * O(n) + O(n) * O(n) = O(n^2)$ und somit in polynomialer Zeit

q.e.d.

2 Aufgabe 2: FPT Pathfind (10 P)

2.1 $k \leq d$

2.2 Pseudocode

```
1   Knoten[] findKPath(G,k) {
2       Knoten[] result;
3       if (k ≤ G.d ) {
4           Knoten v = V[0];
5           result += [v];
6           v.setMarked(true);
7           while(result.size < k) { // O(k)
8               v = v.nextUnmarked(); // O(d) ∈ O(n)
9               result += [v];
10              v.setMarked(true);
11          }
12      } // O(kn)
13      else
14      {
15          // siehe Text
16      }
17  }
```

2.3 $k > d$

Parallel zur Vorlesung nutzen wir eine Tabelle und dynamische Programmierung:
Wir speichern in der Zelle $T[i, j]$ alle erlaubten Sequenzen der Länge i startend beim Knoten v_j. Die erste Zeile beinhaltet somit $T[0, j] = \emptyset$, die zweite Zeile $T[1, j] = \{v_j\}$. Im weiteren nehmen wir alle Pfade in die Zelle auf, für die gilt, dass sie aus $[v_j] + P$ bestehen, mit $P \in T[i-1, \ell]$ mit $\ell \neq j$. Machen wir das über alle Möglichkeiten ergibt sich als Formel:

$$T[i, j] = \bigcup_{v_\ell | \{v_i, v_\ell\} \in E} \{[v_j] + P | P \in T[i-1, \ell] \wedge v_j \notin P\}$$

Weiter gilt, dass ein Knoten v_i genau d Nachbarn hat, die in der obigen Vereinigung beachtet werden und das j bis k läuft. Für jede Zellen müssen maximal d Werte betrachtet werden. Parallel zur Vorlesung gilt somit eine Tabellengröße von $d^k \cdot n$ und eine Laufzeit von $O(k^k \cdot n)$

3 Aufgabe 3: FPT Independent-Set (10 P)