Graphentheorie
Blatt 1

Markus Vieth Christian Stricker

7. November 2016

Aufgabe 1

a

$M \subseteq E$ heißt Matching, wenn jeder Knoten zu höchstens einer Kante aus M inzident ist.

b

Nach Lemma 2.6 des Paper gilt:
Es existieren mindestens $k = |M'| - |M|$ knotendisjunkte augmentierende Pfade in G für M.
Somit gilt:

$$M' = N \quad k = |M'| - |M| = |N| - |M| \geq 1$$

Somit gilt, es existieren mindestens $k = |N| - |M|$ viele knotendisjunkte M-verbessernde Pfade.

c

Ebenfalls nach Lemma 2.6 gilt:

$$\exists P \text{ M-augmentierender Pfad } ||P| = \ell \leq \frac{n}{k} - 1$$

$$M' \hat{=} \text{ maximum Matching } \; |M'| = |M| + k$$

Somit gilt:

$$\ell \leq \frac{n}{k} - 1 < \frac{n}{k} \Rightarrow k < \frac{n}{\ell} = \frac{|V|}{\ell} \Rightarrow |M'| = |M| + k < |M| + \frac{|V|}{\ell}$$

q.e.d.

Aufgabe 2

Unter der Annahme, dass der Algorithmus erfolgreich ist, wenn er ein perfektes Matching findet, gilt:

$$|E| = \underbrace{\frac{n^2 - n}{2}}_{\text{aus } (v_i, v_j) \in E \;\; \forall i \neq j \in \{1 \ldots n\}} + \underbrace{n}_{\text{aus } (v_i, u_i) \in E \;\; \forall i \in \{1 \ldots n\}} = \frac{n^2 + n}{2}$$

Angenommen der Algorithmus wählt im k-ten Durchlauf die Kante (v_{n+1-k}, u_{n+1-k}), dann verändert sich die Kantenmenge E' nach dem k-ten Durchlauf wie folgt:

$$|E'_{k+1}| = \underbrace{\frac{(n-k)^2 - (n-k)}{2}}_{\text{aus } (v_i, v_j) \in E \;\; \forall i \neq j \in \{1 \ldots n-k\}} + \underbrace{n - k}_{\text{aus } (v_i, u_i) \in E \;\; \forall i \in \{1 \ldots n-k\}} = \frac{(n-k)^2 + (n-k)}{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit im k-ten Durchlauf die richtige Kannte zu wählen (wenn vorher die richtigen gewählt wurden) ist demnach:

$$p(k) = \frac{n-k+1}{|E'_k|} = \frac{2(n-k+1)}{(n-k+1)(n-k+2)} = \frac{2}{n-k+2}$$

Die Wahrscheinlichkeit für ℓ richtige Züge in Folge ist:

$$P(\ell) = \prod_{i=1}^{\ell} \frac{2}{n-k+2} = \frac{2^\ell}{(n+1)!} \cdot (n-\ell)!$$

$\Rightarrow$ Die Wahrscheinlichkeit für n richtige in Folge ist demnach:

$$P(n) = \frac{2^n}{(n+1)!} \cdot (n-n)! = \frac{2^n}{(n+1)!}$$