

Theoretische Grundlagen der Informatik II

Blatt 4

Markus Vieth, David Klopp, Christian Stricker

23. November 2015

Aufgabe 1

Quelle: Richard M. Karp: Reducibility Among Combinatorial Problems. In: R. E. Miller und J. W. Thatcher (Hrsg.): Complexity of Computer Computations. Plenum Press, New York, 1972, S. 85–103

Karps 21 NPC-Probleme

SATISFIABILITY, 0-1 INTEGER PROGRAMMING, CLIQUE, SET PACKING, NODE COVER, SET COVERING, FEEDBACK NODE SET, FEEDBACK ARC SET, DIRECTED HAMILTON CIRCUIT, UNDIRECTED HAMILTON CIRCUIT, SATISFIABILITY WITH AT MOST 3 LITERALS PER CLAUSE, CHROMATIC NUMBER, CLIQUE COVER, EXACT COVER, HITTING SET, STEINER TREE, 3-DIMENSIONAL MATCHING, KNAPSACK, JOB SEQUENCING, PARTITION, MAX CUT

1. INTEGER PROGRAMMING

Eingabe: Matrix C aus ganzen Zahlen und ein ganzzahliger Vektor d

Beschreibung: Es gibt einen Vektor x bestehend aus 0 und 1, so dass $Cx = d$ gilt.

2. CLIQUE:

Eingabe: Graph G , positive ganze Zahl k

Beschreibung: Es gibt eine Menge der Größe k von Knoten, die alle paarweise untereinander verbunden sind.

3. SET PACKING:

Eingabe: Familie von Mengen $\{S_j\}$, positive ganze Zahl l

Beschreibung: Beinhaltet $\{S_j\}$ l paarweise disjunkte Teilmengen.

4. NODE COVER:

Eingabe: Graph G' , positive ganze Zahl l

Beschreibung: Es gibt eine Knotenmenge der Größe l , sodass alle Kanten mit mindestens einem Knoten aus dieser Menge verbunden sind.

5. SET COVERING:

Eingabe: endliche Familie von endlichen Mengen $\{S_j\}$, positive ganze Zahl k

Beschreibung: Es gibt eine Unterfamilie $\{T_h\} \subseteq \{S_j\}$ mit $\leq k$ Mengen, sodass $\cup T_h = \cup S_j$.

6. UNDIRECTED HAMILTON CIRCUIT:

Eingabe: Graph G

Beschreibung: G enthält einen Zirkel, der jeden Knoten genau einmal beinhaltet.

7. DIRECTED HAMILTON CIRCUIT:

Eingabe: gerichteter Graph H

Beschreibung: G enthält einen gerichteten Zirkel, der jeden Knoten genau einmal beinhaltet.

8. CLIQUE COVER:

Eingabe: Graph G' , positive ganze Zahl l

Beschreibung: N' ist die Vereinigung von l oder weniger Cliquen.

Was ist N' ?

9. Knapsack:

Eingabe: $(a_1, a_2, \dots, a_r, b) \in \mathbb{Z}^{n+1}$

Beschreibung: $\sum a_j x_j = b$ hat eine 0-1 Lösung.

10. PARTITION:

Eingabe: $(c_1, c_2, \dots, c_s) \in \mathbb{Z}^s$

Beschreibung: Es gibt eine Menge $I \subseteq \{1, 2, \dots, s\}$, sodass $\sum_{h \in I} c_h = \sum_{h \notin I} c_h$.

Aufgabe 2

Sei $f(x_1, \dots, x_n)$ ein boolescher Ausdruck mit den Klauseln Y_1, \dots, Y_k .

Behauptung: SAT \in NP**Guess**

Es werden nichtdeterministisch die Wahrheitsbelegungen von x_1 bis x_n geraten.

Check

Im folgenden sei KlauselIstWahr eine boolesche Variable.

For Y_i in $f(x_1, \dots, x_n)$:

 KlauselIstWahr = true

 For x_i in Y_i :

 // Falls ein Term 0 ist, wird die ganze Klausel false

 If $x_i == 0$:

 KlauselIstWahr = false

 // Wenn eine Klausel wahr ist, ist der ganze boolesche Ausdruck wahr

 If KlauselIstWahr == true:

 return Ja

return Nein

Im worst-case beträgt die Laufzeit $O(k \cdot n) \Rightarrow SAT \in NP$

Wo komme das k her?

Laufzeit für Guess und Check getrennt berechnen, daraus dann Gesamtlaufzeit ableiten.

Aufgabe 3

Reduktion 3-SAT \leq CLIQUE

Seien Y_1, \dots, Y_n die Klauseln des booleschen Ausdrucks.

Graph bilden:

Bilde die Menge aller Knoten V :

$V = \{ \langle \sigma, i \rangle \mid \text{wobei } \sigma \text{ ein Literal aus der Klausel } Y_i \text{ meint} \}$

D.h jedes Literal pro Klausel ist eindeutig durch einen Knoten vertreten.

Bilde die Menge der Kanten E :

$E = \{ \{ \langle \sigma, i \rangle, \langle \delta, j \rangle \} \mid i \neq j \vee \sigma \neq \delta \}$ D.h verbinde alle Kanten miteinander, die nicht in der selben Klausel sind und bei denen das Literal nicht der Negation des Literals entspricht.

Es ergibt sich somit der Graph $G(V, E)$. Wähle $k = \# \{Y_1, \dots, Y_n\}$. D.h k entspricht der Anzahl von Klauseln des booleschen Ausdrucks.

Diese Operationen lassen sich in polynomieller Laufzeit ausführen, da $3 \cdot k =: n$ Knoten erstellt werden müssen, und zwischen diesen maximal $3 \cdot \sum_{i=1}^k 3 \cdot (k - i) = 9 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} i = 9 \cdot \frac{k(k-1)}{2} = \frac{9}{2} \cdot k^2 + k$ (leichter overkill) Kanten verlaufen.

Wende nun den CLIQUEN-Algorithmus an. Die Lösung von 3-SAT ist nun äquivalent zur Lösung von CLIQUE.

Das muss auch noch gezeigt werden $3SAT \Rightarrow \text{Qlique}$

\Rightarrow Erfüllende Belegung von 3SAT gegeben \Rightarrow In jeder Klausel ist mindestens ein Literal wahr

Aus jeder Klausel wird genau ein wahres Literal gewählt. *q.e.d*