Universidad de Costa Rica

Escuela de Matemática y Ciencias Actuariales

Teoría de selección de portafolios y un caso de aplicación con ETFs

Valoración de instrumentos financieros I

Integrantes

Gustavo Alberto Amador Fonseca C20459

Fabián Brenes Thomas C21380

Marco Antonio Guardia Ortiz C23521

Laura Jimena Villacís Delgado C28386

Noviembre 2024

1 Introducción

Un portafolio es una colección de activos financieros que posee una empresa o algún individuo; entre estos activos se pueden encontrar acciones, bonos, instrumentos financieros, entre otros. El objetivo de los portafolios es balancear el riesgo y las ganancias basados en los objetivos del inversionista para maximizar los beneficios. Crear un portafolio correctamente es de gran importancia, ya que ayuda a mantener cierto control sobre la incertidumbre del mercado, dando la oportunidad de maximizar los beneficios y controlar la volatilidad.

Ahora bien, existen diversos tipos de instrumentos de inversión que permiten crear portafolios ampliamente diversificados, como los EFT (Exchange-Traded Fund). Estos son fondos cotizados en bolsa, cuyo objetivo es replicar los índices que tienen como referencia. Este tipo de instrumentos son bastante populares, ya que permiten la diversificación, brindan acceso a diversos mercados y son más flexibles a un menor costo. Esta investigación se basará en ejemplificar la Teoría de Portafolios en este tipo de cartera.

Para armar un portafolio de ETF's, se explicarán distintas metodologías de selección de portafolios. Al elegir cuánto invertir de forma adecuada en cada activo, se pueden implementar múltiples técnicas, en donde se deben estimar de forma adecuada los retornos, la varianza y la covarianza de los activos. Markowitz (1952) define un portafolio óptimo como aquel que para un nivel de riesgo dado, maximiza el retorno, o bien, para un nivel de retorno dado, minimiza el riesgo. Asimismo, otra metodología consiste en el trabajo desarrollado por Von Neumman- Morenstern (1947), en donde se maximiza la esperanza de una función de utilidad. Este método permite involucrar las preferencias del agente inversionista, como su aversión al riesgo, con el fin de adaptar el portafolio de forma más adecuada. De esta manera, se plantea construir portafolios para diferentes tipos de inversionistas según su apetito por riesgo.

A su vez, se explorará añadir nuevas restricciones a los problemas de optimización, como restricciones al porcentaje máximo de un activo o relajar restricciones para permitir las ventas en corto y el apalancamiento. Por último, se realizarán simulaciones de Monte Carlo y análisis de sensibilidad para observar el comportamiento de los portafolios elegidos para los distintos grupos de inversionistas. A su vez, para la estimación de los retornos, o más bien, para verificar el funcionamiento del portafolo, se explorará el uso de distintas técnicas, tales como el modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) y otras métricas como Sharpe Ratio y Sortino Ratio.

2 Metodología

2.1 Markowitz

Para optimizar portafolios, se busca minimizar la varianza dado un nivel deseado de retorno, o de igual forma, maximizar el retorno dado un nivel de varianza. Suponga que se tienen m activos sujetos a riesgo. Defina $R = [R_1, \ldots, R_m]$ como los retornos anuales de cada activo. Defina $\hat{\mu} = [\hat{\mu}_1, \ldots, \hat{\mu}_m]$ como el estimador de $E[R]$ y $\hat{\Sigma}$ como el estimador de $Cov[R]$
El portafolio consiste en los m activos, donde cada un tiene un peso w. Se define el vector de pesos $w = [w_1, \ldots, w_n]$. Note que $\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$ El retorno del portafolio R_w consiste en la combinación lineal $w^T R$. Defina μ_w y σ_w^2 como el retorno y la varianza del portafolio con pesos w. Note entonces que $\hat{\mu_w} = w^T \hat{\mu}$ y $\hat{\sigma_w^2} = w^T \hat{\Sigma} w$. La solución a cuánto debería ser el vector de pesos, es un problema de minimización, donde para un nivel deseado de retorno, se minimiza la varianza. Equivalentemente, para un nivel deseado de varianza se maximiza los retornos del portafolio.
Primer método: Minimizar varianza

Para un nivel deseado de retornos μ_0 se plantea el problema de minimización:

$$\begin{aligned} \min \quad & \hat{\sigma_w^2} = w^T \hat{\Sigma} w \\ \text{sujeto a} \quad & w^T R = \mu_0, \\ & \sum_{i=1}^{m} w_i = 1. \end{aligned}$$

Segundo método: Maximizar retorno

Para un nivel deseado de varianza se plantea el problema de maximización:

$$\begin{aligned} \max \quad & \hat{\mu_w} = w^T \hat{\mu} \\ \text{sujeto a} \quad & w^T \hat{\Sigma} w = \sigma_0^2, \\ & \sum_{i=1}^{m} w_i = 1. \end{aligned}$$

2.2 Funciones de utilidad

Von neumman-Morgenstern desarollo una teoría sobre funciones de utilidad bajo incertidumbre, su trabajo concluyó que la decisión racional es maximizar el valor esperado de la función de utilidad. (Neumann 1953)

Considere una función de utilidad $U(W)$, la cual representa la utilidad que obtiene el inversionista al tener una riqueza W. Esta función de utilidad debe cumplir $u'(W) > 0$ (entre más riqueza más utilidad) y usualmente cumple $u''(W) < 0$ (utilidad marginal decreciente). Esta función de utilidad es capaz de representar las preferencia del inversionista hacia el riesgo. Se define entonces las siguientes medidas:

1. Aversión absoluta al riesgo: $\lambda_A(W) = -\frac{u''(W)}{u'(W)}$
2. Aversión relativa al riesgo: $\lambda_R(W) = -\frac{Wu''(W)}{u'(W)}$

Consideramos ahora la expansión de Taylor de $u(W)$ alrededor de $W = w_*$, donde w_* es el valor esperado de W (es decir, $w_* = E[W]$).

$$u(W) \approx u(w_*) + u'(w_*)(W - w_*) + \frac{1}{2}u''(w_*)(W - w_*)^2 + \cdots$$

Utilizando $\lambda_A(w_*) = -\frac{u''(w_*)}{u'(w_*)}$ es el coeficiente de aversión absoluta al riesgo.

$$u(W) \approx u(w_*) + u'(w_*)(W - w_*) - \frac{1}{2}\lambda_A u'(w_*)(W - w_*)^2 + \cdots$$

$$u(W) \approx u(w_*) + u'(w_*)[W - w_* - \frac{1}{2}\lambda_A(W - w_*)^2]$$

Ahora, al tomar la esperanza:

$$E[u(W)] \approx E[u(w_*)] + u'(w_*)E[W - w_* - \frac{1}{2}\lambda_A(W - w_*)^2]$$

$$\propto E[W] - \frac{1}{2}\lambda_A E[(W - w_*)^2]$$

Dado que $E[(W - w_*)^2] = \text{Var}(W)$, obtenemos:

$$\approx E[W] - \frac{1}{2}\lambda_A \text{Var}(W)$$

Así entonces, obtenemos el problema de maximización:

$$\max_w \left(E[W] - \frac{1}{2}\lambda_A \text{Var}(W) \right)$$

Utilizando los estimadores de la media y la varianza obtenemos:

$$= \max_w \left(w^T \hat{\mu} - \frac{1}{2}\lambda_A w^T \hat{\Sigma} w \right)$$

La ventaja de esta metodología, es que permite incorporar momentos más altos como la asimetría, al considerar un desarollo de taylor de orden mayor. Defina β_A como un coeficiente de aversión absoluta a la asimetría: $\beta_A = -\frac{u'''(W)}{u'(W)}$

Consideremos ahora una expansión de orden 3:

$$u(W) \approx u(w_*) + u'(w_*)(W - w_*) + \frac{1}{2}u''(w_*)(W - w_*)^2 + \frac{1}{6}u'''(w_*)(W - w_*)^3$$

$$u(W) \approx u(w_*) + u'(w_*)(W - w_*) - \frac{1}{2}\lambda_A u'(w_*)(W - w_*)^2 - \frac{1}{6}\beta_A u'(w_*)(W - w_*)^3$$

$$u(W) \approx u(w_*) + u'(w_*)[W - w_* - \frac{1}{2}\lambda_A(W - w_*)^2 - \frac{1}{6}\beta_A(W - w_*)^3]$$

Al tomar la esperanza:

$$E[u(W)] \approx E[u(w_*)] + u'(w_*)E[W - w_* - \frac{1}{2}\lambda_A(W - w_*)^2 - \frac{1}{6}\beta_A(W - w_*)^3]$$

$$\propto E[W] - \frac{1}{2}\lambda_A E[(W - w_*)^2] - \frac{1}{6}\beta_A E[(W - w_*)^3]$$

Así entonces obtenemos:

$$\approx E[W] - \frac{1}{2}\lambda_A \text{Var}(W) - \frac{1}{6}\beta_A \text{Skew}(W)$$

Por lo tanto se tiene el problema de maximización:

$$\max_w \left(E[W] - \frac{1}{2}\lambda_A \text{Var}(W) - \frac{1}{6}\beta_A \text{Skew}(W) \right)$$

Utilizando los estimadores de la media, la varianza y un estimador S para la asimetría de cada activo, se obtiene:

$$= \max_w \left(w^T \hat{\mu} - \frac{1}{2}\lambda_A w^T \hat{\Sigma} w - \frac{1}{6}\beta_A w^T \cdot S + 3 \cdot w^T \cdot \hat{\Sigma} \cdot w \right)$$

Restricciones del problema de optimización

Hasta entonces, únicamente se ha planteado las restricción:

$$\sum_{i=1}^{m} w_i = 1$$

Sin embargo, dependiendo si se desea permitir ventas en corto, o el endeudamiento, o pesos máximos por activo para diversificar, entre otros. Cada una de estas condiciones, se puede representar como una restricción en el problema de optimización.

- **Ventas en corto** Nótese que hasta ahora no se ha puesto una restricción para que los pesos sean estrictamente positivos, por tanto, estos pueden tomar valores negativos. Como deben sumar 1, un valor negativo equivale a que se está utilizando dinero de un activo negativo para comprar más de otro activo, es decir, venta en corto. Para deshabilitar la venta en corto se añade la restricción:

  $$w_i \geq 0 \quad \forall i$$

  Nótese además que si w_1 representa el peso del activo libre de riesgo, un peso negativo sobre este activo equivale a endeudarse a la tasa libre de riesgo. Por tanto, si se desea permitir las ventas en corto pero evitar el endeudamiento a la tasa libre de riesgo, la restricción sería:

  $$w_1 \geq 0$$

- **Apalancamiento a una tasa distinta a la tasa libre de riesgo** Usualmente el endeudamiento tiene una tasa mayor a la libre de riesgo. Si se desea permitir endeudamiento, pero resaltando esa distinción, se puede hacer que el segundo peso w_2 represente la proporción de enduedamiento. Este w_2 por tanto deberá ser menor o igual a 0. Por tanto se obtiene la siguiente restricción:

  $$w_2 \leq 0$$

A su vez, se podría restringir el nivel de apalancamiento a una proporción β fijada previamente. Así entonces se tiene la restricción:

$$w_2 \geq \beta$$

- **Diversificación** Es común querer evitar tener una gran parte del portafolio en un mismo activo, con el objetivo de lograr una diversificación adecuada y diluir el riesgo. Suponga que se desea evitar que un mismo activo supere una proporción α % del portafolio. Así entonces se obtiene la siguiente restricción:

$$w_i \leq \alpha \quad \forall i$$

2.3 Estimación de parámetros

Estimación de la media anual de los retornos

El cálculo de la media aritmética de los rendimientos diarios se realiza de la siguiente forma:

$$\bar{r}_{\text{diario}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} r_t$$

Donde:

- $\bar{r}_{\text{diario}}$: Es el rendimiento promedio diario.
- N: Es el número total de días.
- r_t: Es el rendimiento diario en el día t, calculado como:

$$r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Para anualizar el rendimiento promedio diario:

$$\bar{r}_{\text{anual}} = \bar{r}_{\text{diario}} \cdot D$$

Donde:

- D: Es el número de días hábiles en un año (usualmente $D = 252$).

Cálculo de la desviación estándar anual

La fórmula para calcular la desviación estándar anual a partir de la desviación estándar diaria se basa en la relación entre la varianza y el tiempo. Supongamos que los rendimientos diarios r_t son independientes e idénticamente distribuidos (*i.i.d.*) con desviación estándar diaria σ_{diario}.

La **varianza diaria** se define como:

$$\text{Var}(r_{\text{diario}}) = \sigma^2_{\text{diario}}$$

Si acumulamos rendimientos durante D días ($D = 252$, número de días hábiles en un año), la **varianza anual** es la suma de las D varianzas diarias. Es decir:

$$\text{Var}(r_{\text{anual}}) = D \cdot \text{Var}(r_{\text{diario}})$$

Dado que la varianza de una suma de variables independientes es igual a la suma de sus varianzas, tenemos:

$$\text{Var}\left(\sum_{t=1}^{D} r_t\right) = \sum_{t=1}^{D} \text{Var}(r_t)$$

Desviación estándar anual La desviación estándar anual se define como la raíz cuadrada de la varianza anual:

$$\sigma_{\text{anual}} = \sqrt{\text{Var}(r_{\text{anual}})}$$

Sustituyendo la relación de la varianza anual:

$$\sigma_{\text{anual}} = \sqrt{D \cdot \text{Var}(r_{\text{diario}})} = \sqrt{D} \cdot \sigma_{\text{diario}}$$

Estimación de la matriz de covarianzas

La covarianza diaria entre dos activos X e Y se define como:

$$\text{Cov}_{\text{diaria}}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})$$

Donde:

- x_t y y_t son los rendimientos diarios de los activos X e Y, respectivamente.
- $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las medias diarias de los rendimientos.
- N es el número de observaciones diarias.

Si los rendimientos diarios son independientes e idénticamente distribuidos (*i.i.d.*), la covarianza anual se escala como:

$$\text{Cov}_{\text{anual}}(X, Y) = D \cdot \text{Cov}_{\text{diaria}}(X, Y)$$

Sustituyendo la fórmula de la covarianza diaria:

$$\text{Cov}_{\text{anual}}(X, Y) = D \cdot \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (x_t - \bar{x})(y_t - \bar{y})$$

Donde D es el número de días hábiles en un año (usualmente $D = 252$).

2.4 Métricas Financieras

1. Sharpe Ratio

El Sharpe Ratio mide los rendimientos del activo con base al riesgo asociado, es decir, indica si el rendimiento compensa el riesgo incurrido. La fórmula es:

$$S = \frac{R_p - R_f}{\sigma_p}$$

donde:

- R_p: Retorno promedio del portafolio.
- R_f: Tasa libre de riesgo.
- σ_p: Desviación estándar de los retornos del portafolio (medida del riesgo total).

De esta manera, entre mayor sea el ratio, más se compensa el riesgo, lo que indica un mejor desempeño ajustado al riesgo.

2. Roy's Safety First Ratio

Este se basa en el Roy's Safety-First Criterion (SFRatio), el cual indica que para cierto nivel de riesgo, se necesita un retorno mínimo garantizado. La fórmula es:

$$SFR = \frac{R_p - R_L}{\sigma_p}$$

donde:

- R_p: Retorno promedio del portafolio.
- R_L: Retorno mínimo aceptable (nivel de seguridad).
- σ_p: Desviación estándar de los retornos del portafolio (medida del riesgo total).

Esta métrica permite cuantificar el retorno extra sobre el mínimo establecido generado por el activo para el nivel de riesgo asumido.

3. Sortino Ratio

El Sortino Ratio mide el rendimiento adicional con respecto al riesgo negativo incurrido. Es similar al Sharpe Ratio, pero utiliza la desviación estándar solo de los retornos negativos. La fórmula es:

$$So = \frac{R_p - R_f}{\sigma_n}$$

donde:

- R_p: Retorno promedio del portafolio.
- R_f: Tasa libre de riesgo.
- σ_n: Desviación estándar de los retornos negativos (medida del riesgo negativo).

Esto lo hace más adecuado para evaluar activos que tienen distribución asimétrica de retornos.

4. Treynor Ratio

El Treynor Ratio calcula el exceso de los retornos sobre la tasa libre de riesgo con respecto al riesgo sistemático (riesgo de mercado). La fórmula es:

$$T = \frac{R_p - R_f}{\beta_p}$$

donde:

- R_p: Retorno promedio del portafolio.
- R_f: Tasa libre de riesgo.
- β_p: Beta del portafolio (medida del riesgo sistemático relativo al mercado).

Un Treynor Ratio más alto indica un mejor rendimiento ajustado al riesgo de mercado.

5. Jensen's Alpha

El Jensen's Alpha mide el retorno extra sobre el retorno esperado según el nivel de riesgo sistemático, utilizando el modelo de valoración de activos financieros (CAPM). La fórmula es:

$$\alpha = R_p - [R_f + \beta_p(R_m - R_f)]$$

donde:

- α: Jensen's Alpha.
- R_p: Retorno promedio del portafolio.
- R_f: Tasa libre de riesgo.
- β_p: Beta del portafolio.
- R_m: Retorno promedio del mercado.

Un α positivo indica que el portafolio tiene un rendimiento superior al esperado ajustado al riesgo, mientras que un α negativo sugiere un rendimiento inferior.

3 Datos a utilizar

Los datos a utilizar fueron extraídos de la página Yahoo! Finance; están basados en un informe histórico de precios y volúmenes de algunos fondos cotizados en la bolsa (ETF, por sus siglas en inglés). La base de datos incluye las variables de fecha, precio de apertura, cierre ajustado, máximos, mínimos y volumen de cada ETF. El conjunto de datos inicia en 02/01/2010 hasta 24/11/2024, además se puede actualizar diariamente para mayor precisión. Los datos incluyen ETFs pertenecientes a un distintos sectores de la economía.

- Tecnología: Technology Select Sector SPDR Fund (XLK). Invierte en empresas tecnológicas de EE.UU., como Apple y Microsoft. VanEck Semiconductor (SMH). Inverte en empresas de semiconductores.
- Salud: Health Care Select Sector SPDR Fund (XLV). Invierte en empresas de salud en EE.UU., como farmacéuticas y biotecnológicas. iShares Biotechnology ETF (IBB). Invierte en empresas de biotecnología en EE.UU.
- Finanzas: Financial Select Sector SPDR Fund (XLF) Invierte en bancos y aseguradoras del sector financiero de EE.UU.
- Internacional (Mercados desarrollados): Vanguard S&P 500 ETF (VOO). Invierte en las mayores 500 empresas de EE.UU.
- Bienes raíces: Vanguard Real Estate ETF (VNQ) Invierte en REITs que poseen bienes inmuebles en EE.UU.
- Energías: iShares US Energy ETF (IYE). Invierte en el mercado energético de EE.UU.
- Materias primas: SPDR Gold Trust (GLD). Invierte en oro.
- Internacional (Mercados emergentes): iShares Asia ETF 50 (AIA), las 50 mayores empresas en Asia.
- Tiendas minoristas: SPDR S&P Retail ETF (XRT). Invierte en tiendas minoristas en EE.UU.
- Consumo: The Consumer Discretionary Select Sector SPDR (XLY). Invierte en empresas de consumo y servicios de EE.UU.

4 Resultados

4.1 Supuestos

Para analizar cómo se comporta el portafolio de los tres tipos de inversores se deben establecer supuestos que se apliquen como restricciones para el modelo de Markowitz propuesto; por esto se establecen los siguientes supuestos para cada tipo de inversionista:

- Conservador: dado que es conservador, no está dispuesto a arriesgar más por un mayor rendimiento, por lo que su tasa de rendimiento esperada va a ser baja, con un valor de 6%. A su vez, se asume que el inversionista no está interesado en realizar ventas en corto ni apalancamiento. También se asume una diversificación alta, ya que no se permite que el peso de un activo sea mayor a un 10%, a excepción de los activos de la tasa libre de riesgo.

- Moderado: un inversionista moderado está dispuesto a arriesgar un poco más con tal de hacer crecer su dinero de manera a que no se expone a muchas pérdidas, por lo que su tasa de rendimiento esperada va a ser un valor moderado de 8%. A su vez, se asume que el inversionista no está interesado en realizar ventas en corto ni apalancamiento. También se asume una diversificación un poco menos estricta que el conservador, ya que no se permite que el peso de un activo sea mayor a un 20%, a excepción de los activos de la tasa libre de riesgo.

- Agresivo: un inversor agresivo está dispuesto a arriesgar más pérdidas con tal de obtener un mayor rendimiento esperado. Dado que suele buscar más riesgo, también utiliza diversas técnicas de mercado, por lo que se asume que se permite tanto la venta en corto, de 15% o más, como el apalancamiento; sin embargo, en este caso no se restringe por diversificación, por lo que puede invertir lo que guste en un solo activo.

4.2 Portafolios

Pesos

Portfolio	Libre	Prestamo	AIA	GLD	IBB	IYE	SMH
Conservador	86.21	0	0	0	0	0	3.62
Moderado	69.9	0	0	0	0	0	7.72
Agresivo	70.4059	0	-14.997	4.28914	-14.997	-14.997	15.9568

Portfolio	VNQ	VOO	XLF	XLK	XLV	XLY	XRT
Conservador	0	0	0	5.59	4.58	0	0
Moderado	0	0	0	12.29	10.09	0	0
Agresivo	-14.997	14.777	5.81884	13.7972	29.994	12.8874	-7.93841

Table 1: Pesos por activo en porcentajes para cada tipo de portafolio

La tasa libre de riesgo representa la asignación de activos a instrumentos seguros. En el caso del portafolio conservador, tiene el mayor peso asignado, lo que refleja un perfil altamente averso al riesgo. Los inversores conservadores priorizan la estabilidad y evitan la exposición a activos volátiles. Por su parte, el portafolio moderado asigna un peso significativo a la tasa libre de riesgo, lo que sugiere que busca un equilibrio entre la seguridad y el crecimiento. Aunque todavía da prioridad a los activos seguros, este portafolio deja espacio para incluir activos más riesgosos que ofrezcan mayores retornos. El portafolio agresivo, en cambio, asigna un 70% aproximadamente a la tasa libre de riesgo, pero compensa con una mayor exposición a activos volátiles. Este comportamiento podría ser una estrategia para mantener cierta estabilidad en mercados inciertos mientras maximiza los rendimientos mediante inversiones más riesgosas.

Ahora bien, note que el uso de préstamos para apalancamiento es otro aspecto clave en estos portafolios. En este análisis, se considera la tasa libre de riesgo más un diferencial para instituciones de grado B (+1.01%). En todos los portafolios, el peso asignado al ”préstamo” es cero, lo que indica que no se utiliza apalancamiento directo. Sin embargo, hay diferencias en las restricciones de endeudamiento según el tipo de portafolio. El portafolio conservador y el moderado no permiten el endeudamiento, priorizando la preservación del capital y una estructura de bajo riesgo. Por otro lado, aunque el portafolio agresivo permite el uso de apalancamiento, este prefiere obtener recursos adicionales mediante estrategias de ventas en corto en lugar de recurrir al endeudamiento tradicional.

En cuanto a los enfoques estratégicos, el portafolio conservador asigna la mayor parte de su capital a activos seguros como la tasa libre de riesgo y evita sectores volátiles, priorizando la seguridad sobre los rendimientos. El portafolio moderado, en cambio, busca un equilibrio entre estabilidad y crecimiento, combinando activos seguros con otros más riesgosos, como los del sector tecnológico y financiero. Finalmente, el portafolio agresivo se caracteriza por emplear estrategias de alto riesgo, como ventas en corto en sectores específicos, y asignar exposiciones significativas a sectores con alto potencial, como tecnología, salud y semiconductores, con el objetivo de maximizar los retornos a largo plazo.

Simulaciones

Portafolio	**Retorno E.**	**Desviación**	**Retorno (5%)**	**Retorno (50%)**	**Retorno (95%)**
Conservador	0.0599	2.7168	0.0123	0.0594	0.1032
Moderado	0.0799	5.9134	-0.0247	0.0779	0.1734
Agresivo	0.1199	8.1047	-0.0214	0.1168	0.2498

Table 2: Tabla con datos de retorno y desviación esperado.

La tabla muestra los datos clave de rendimiento, donde el retorno esperado y la desviación son datos fijos que se obtuvieron con los pesos y el histórico, mientras que los percentiles del retorno son los encontrados en las simulaciones realizadas, y riesgo asociados a tres tipos de portafolios. Vea que el portafolio conservador tiene un retorno esperado bajo y la menor desviación estándar, lo que refleja su enfoque en la estabilidad y baja volatilidad. Los percentiles muestran que las pérdidas esperadas son mínimas y los rendimientos máximos son moderados. Luego, el portafolio moderado presenta un retorno esperado mayor y una desviación estándar más alta, lo que indica un balance entre riesgo y rendimiento. Sus percentiles reflejan mayor dispersión. Por último, el agresivo muestra el mayor retorno esperado y la mayor desviación estándar, destacando su alta volatilidad. Este portafolio es el más riesgoso, con la posibilidad de pérdidas significativas, pero también el mayor potencial de ganancias.

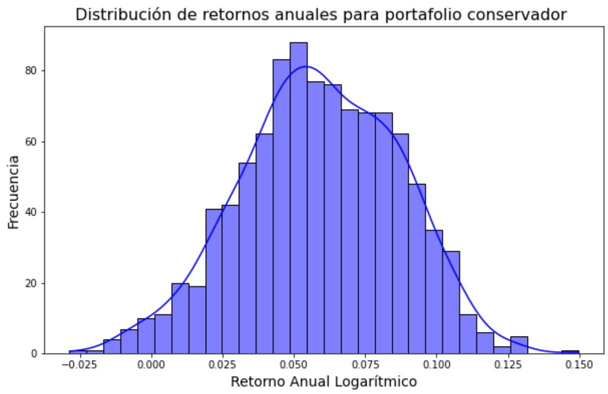

Figure 1: Distribución de retornos anuales del portafolio conservador

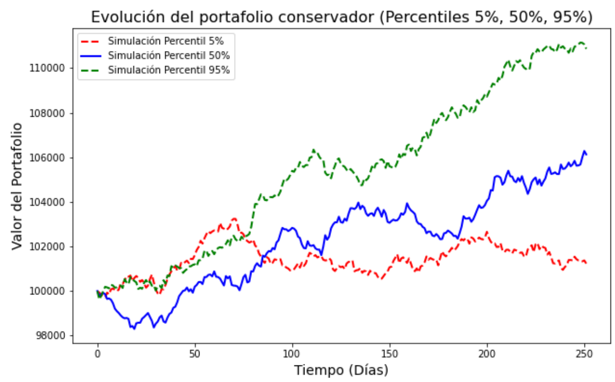

Figure 2: Evolución del portafolio conservador, según percentiles

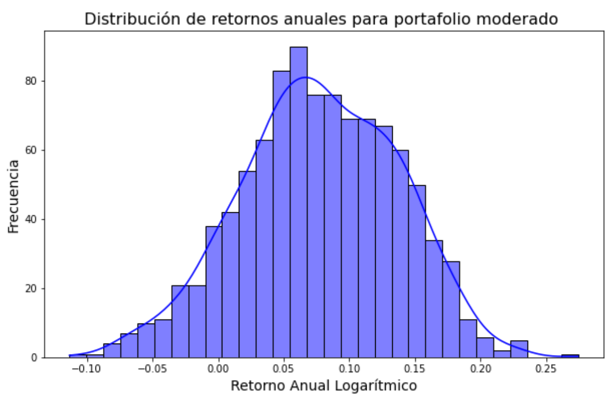

Figure 3: Distribución de retornos anuales del portafolio moderado

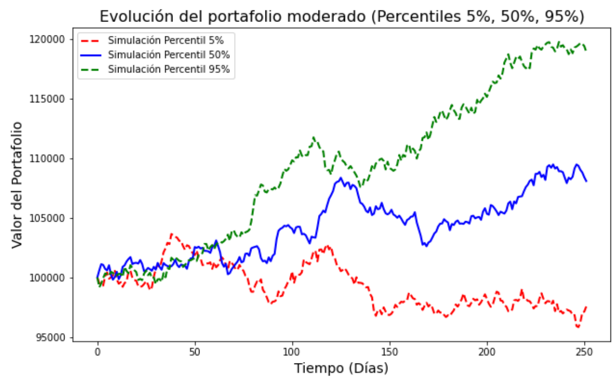

Figure 4: Evolución del portafolio moderado, según percentiles

Los resultados obtenidos reflejan claramente cómo los portafolios están diseñados para ajustarse a diferentes perfiles de riesgo: conservador, moderado y agresivo. Primeramente, con respecto a la distribución de los retornos, observe que el conservador presenta una distribución más estrecha, con una baja volatilidad, por lo que minimiza tanto el riesgo de pérdidas como las oportunidades de grandes ganancias. El moderado en cambio, muestra una distribución más amplia, lo que indica un equilibrio entre la seguridad y el rendimiento. Por último, el agresivo tiene la distribución más amplia, lo que sugiere alta volatilidad; esto demuestra una mayor probabilidad de obtener resultados extremos (tanto positivos como negativos).

Ahora bien, con respecto a la evolución del precio del portafolio se hizo un análisis de percentiles de precio, para demostrar tanto un escenario pesimista como uno optimista. En el conservador, la trayectoria del percentil 5% muestra caídas mínimas, destacando su estabilidad en escenarios adversos. Además, su crecimiento en el percentil 50% es modesto y el percentil 95% refleja un máximo moderado. En cambio, el moderado en su percentil 5% tiene caídas mayores, pero su trayectoria en el percentil 50% muestra un crecimiento intermedio. El percentil 95% alcanza valores significativos, mostrando una buena relación entre riesgo y retorno. Por último, en el portafolio agresivo, el percentil 5% experimenta pérdidas marcadas, mientras que el percentil 50% crece más que en los otros portafolios. El percentil 95% alcanza el valor más alto, destacando el potencial de este portafolio para obtener los máximos rendimientos.

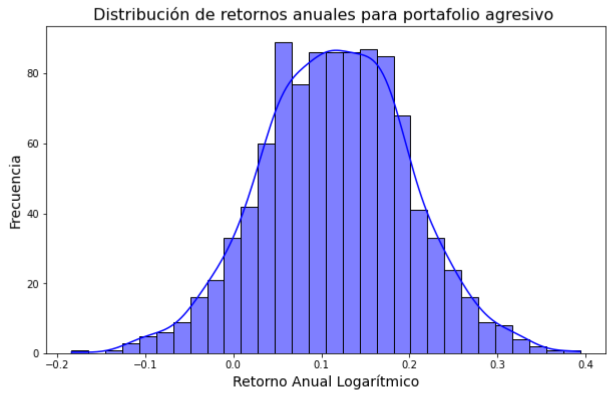

Figure 5: Distribución de retornos anuales del portafolio agresivo

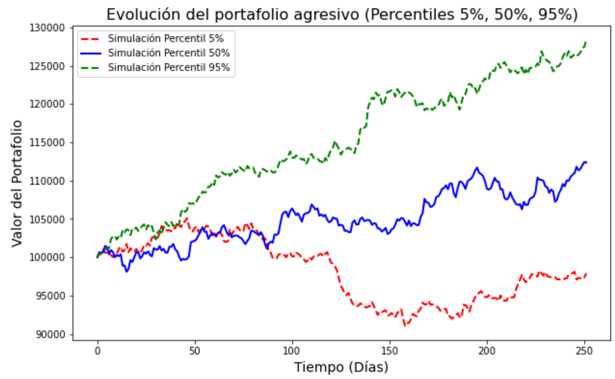

Figure 6: Evolución del portafolio agresivo, según percentiles

Métricas

Métrica	**Sharpe**	**Roy's Safety First**	**Sortino**	**Treynor**	**Jensen's Alpha**
Conservador	0.0062572	0.00368	0.62450	0.11432	0.00690
Moderado	0.0062572	0.00169	1.35883	0.24874	0.01503
Agresivo	0.0094771	0.01342	2.82857	0.51778	0.05705

Table 3: Métricas para portafolios conservador, moderado y agresivo.

Las métricas presentadas muestras indicadores de desempeño de los tres portafolios que se establecieron con perfiles conservador, moderado y agresivo. En general, en las 5 métricas, el portafolio del perfil agresivo tuvo mejores resultados. El Sharpe Ratio indica que el portafolio agresivo presenta un mejor rendimiento ajustado por riesgo incurrido. El Roy's Safety First Ratio demuestra que el agresivo presenta una menor probabilidad de rendimientos por debajo de un nivel mínimo aceptable, el cual en este caso fue el rendimiento esperado menos un 1%. Asimismo, el Sortino Ratio, que cuantifica el rendimiento ajustado por riesgos de incurrir en pérdidas, fue mejor para el portafolio agresivo. También, el Treynor Ratio reflejó que el portafolio agresivo tiene una mejor relación de rendimiento con respecto al riesgo sistemático. Finalmente, el Jensen's Alpha es positivo para todos los portafolios, lo cual muestra que todos tuvieron un rendimiento mayor al esperado por el Capital Asset Pricing Model.

Sin embargo, el hecho de que estas métricas en general indican que los rendimientos del portafolio agresivo con respecto al riesgo, no indica que esta estrategia de inversión es la mejor en todos los casos. Siempre se tiene que tomar en cuenta el nivel de riesgo en que se quiere incurrir y el objetivo de la inversión.

5 Conclusiones y recomendaciones

Los resultados de los portafolios conservador y moderado reflejan las condiciones actuales del mercado, donde una elevada tasa libre de riesgo ofrece una oportunidad para alcanzar retornos deseados con una exposición limitada a activos de alto rendimiento, como los ETF del sector tecnológico. Esta estrategia combina seguridad con un toque de diversificación hacia sectores con potencial de crecimiento.

Los resultados del portafolio agresivo presentan una estrategia particular en la asignación del capital. Esta se caracteriza por aprovechar una tasa libre de riesgo considerablemente alta, combinada con ventas en corto de activos con rendimientos históricos bajos, para maximizar la inversión en este instrumento que ofrece una ganancia asegurada. Las posibles razones detrás de este comportamiento incluyen:

- Una tasa libre de riesgo superior a los rendimientos históricos de varios ETF considerados en la optimización.
- La alta volatilidad de los activos con mayores rendimientos, lo que incentiva la asignación de capital hacia la tasa libre de riesgo para minimizar la varianza del portafolio.
- La ausencia de costos transaccionales asociados a las ventas en corto, lo que hace que esta estrategia de apalancamiento sea más favorable en comparación con otras alternativas como tomar préstamos.
- La preferencia por la venta en corto de ETF con rendimientos históricamente bajos, al considerarse menos atractivos en términos de retorno ajustado por riesgo.

Esta asignación de capital refleja las condiciones particulares del mercado y las premisas del modelo utilizado.

Se recomienda explorar la metodología propuesta del uso de funciones de utilidad, esta permite incorporar preferencias al problema de optimización, además de que a su vez permite agregar de forma sencilla momentos más altos, como la asimetría y la kurtosis. Esto sin duda podría arrojar resultados mucho más realistas y alineados con las expectativas de los inversionistas. Incorporar funciones de utilidad en el modelo no solo mejora la personalización de las estrategias de inversión, sino que también permite evaluar portafolios desde una perspectiva más completa, considerando factores como el sesgo hacia rendimientos extremos y el comportamiento no lineal del riesgo. Esto podría ser especialmente valioso en mercados con alta volatilidad o cuando se gestionan activos con distribuciones no normales.

A su vez, se recomienda obtener una cartera de ETF's más variados, eliminando aquellos con rendimientos históricos bajos. De esta manera, el modelo no se verá impulsado a vender en corto estos activos de bajo rendimiento, lo que podría llevar a una estrategia más equilibrada y realista. Al diversificar la cartera y reducir la exposición a activos con rendimientos bajos, se evitaría que el modelo recurra al apalancamiento excesivo, particularmente en instrumentos de renta variable con alto riesgo y baja rentabilidad histórica. Esta estrategia también disminuiría la dependencia de la tasa libre de riesgo como fuente principal de retorno, favoreciendo una asignación de capital más equilibrada entre activos con diferentes perfiles de riesgo.

6 Anexos

6.1 Modelo de Valoración de Activos Financieros (CAPM)

El modelo de Valoración de Activos Financieros (Capital Asset Pricing Model, CAPM) es un modelo financiero utilizado para medir la relación entre la rentabilidad esperada del activo en función del riesgo que este conlleva. Este modelo considera que la rentabilidad del producto depende solamente del riesgo sistemático, el cual es el asociado directamente con el mercado y no se puede diversificar.

El modelo anterior tiene como sus supuestos bases el hecho de que el mercado es competitivos y eficientes a la hora de recolectar la información; además, se supone que los inversores son racionales y adversos al riesgo. Algunos supuesto adicionales son los siguientes:

- Los inversores pueden prestar y pedir prestado a una misma tasa de interés.
- Los inversores solo se interesan por la rentabilidad esperada y todos tienen expectativas homogéneas, así como la misma información.
- La rentabilidad entre dos activos está relacionada únicamente por la rentabilidad de mercado.

Para calcular la rentabilidad esperada se utiliza la siguiente fórmula

$$\text{Rentabilidad esperada} = R_F + \beta(R_M - R_F)$$

donde se tiene que

- R_F es la tasa libre de riesgo.
- $R_M - R_F$ es la prima de riesgo del mercado, que representa el excedente en el rendimiento que los inversionistas esperan por asumir el riesgo adicional del mercado. Por ende, R_M es el rendimiento esperado del mercado.
- β es la medida de la sensibilidad del rendimiento de un activo en función del rendimiento del mercado. Entre mayor el valor de este parámetro, mayor la volatilidad del activo con respecto al mercado. Para calcular el β del portafolio, se toma un promedio ponderado, de acuerdo a los pesos de cada activo, de los β_i asociados a cada activo i, los cuales se calculan con la pendiente de la regresión lineal entre los rendimientos del activo con los rendimientos del mercado.

7 Referencias

Hull, J. (2022). *Options, Futures, and Other Derivatives.* New York, NY: Pearson.

Investopedia. (2011). *5 Ways to Measure a Money Manager's Performance.* Recuperado de: https://www.investopedia.com/articles/stocks/11/5-ways-to-measure-money-managers.asp

Kempthorne, P. (2013). *Lecture 14: Portfolio Theory* [PowerPoint slides]. Mathematics, Massachusetts Institute of Technology. Recuperado de: https://ocw.mit.edu/courses/18-s096-topics-in-mathematics-with-applica bba02164ba6642f7d516df35347aec01_MIT18_S096F13_lecnote14.pdf#page21

Markowitz, H. (1952). *Portfolio Selection.* The Journal of Finance. https://doi.org/10.2307/2975974

Part I Single-Period Portfolio Choice and Asset Pricing (s.f.). Recuperado de: https://gpennacc.web.illinois.edu/TAP_Aug2020_PartI.pdf

Rollinger, T. N., & Hoffman, S. T. (s.f.). *Sortino: A Sharper Ratio.* Recuperado de: https://www.cmegroup.com/education/files/rr-sortino-a-sharper-ratio.pdf

Yahoo Finance. (2024, octubre 14). *Yahoo Finance.* Yahoo. Recuperado de: https://finance.yahoo.com/