



MA-0501 Análisis Numérico I
TAREA 3

Fecha de entrega: Viernes 08 de noviembre, 11:59pm.

Instrucciones:

- La entrega de la tarea debe realizarse en la plataforma de Mediación Virtual, antes de la fecha y hora establecida.
- Debe subir dos archivos:
 - Un archivo en formato pdf con la resolución de los ejercicios y la discusión de los resultados. El documento debe llamarse `ApellidosNombre.pdf`
 - Un archivo MATLAB (`ApellidosNombre.m` o `ApellidosNombre.mlx`) con todos los códigos implementados, debidamente documentados y listos para ser ejecutados.
- Recuerde que *una imagen dice más que mil palabras*. Al mostrar resultados, presente gráficos claros debidamente rotulados, con escalas y leyendas adecuadas.
- El trabajo se puede realizar individualmente o en parejas. Si aplica, debe citar cualquier colaboración o referencia utilizada. En caso de ser en parejas, incluir en el nombre de los archivos `Apellido1Nombre1_Apellido2Nombre2.m`. Basta subir una entrega por pareja.
- Se evaluará sobre un total de 100 puntos (de 115 posibles); en caso de obtener un mayor puntaje, dichos puntos no serán acumulables ni transferibles.

Desarrollo

1. [MATLAB] Considere los siguientes tres algoritmos para obtener la factorización QR de una matriz A :

Data: Matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Result: Matriz unitaria $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y triangular superior $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que $A = QR$

for $j = 1 : n$ **do**

$\mathbf{v}_j = \mathbf{a}_j$;

for $i = 1 : j - 1$ **do**

$r_{ij} = \mathbf{q}_i^T \mathbf{a}_j$;

$\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j - r_{ij} \mathbf{q}_i$;

end

$r_{jj} = \|\mathbf{v}_j\|_2$;

$\mathbf{q}_j = \mathbf{v}_j / r_{jj}$;

end

Algoritmo 1: Ortogonalización de Gram-Schmidt (inestable)

Data: Matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Result: Matriz unitaria $Q \in \mathbb{R}^{m \times n}$ y triangular superior $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tales que $A = QR$
 $V = A$;

```
for i = 1 : n do
    rii = ||vi||2;
    qi = vi/rii;
    for j = i + 1 : n do
        rij = qiT vj;
        vj = vj - rij qi;
    end
end
```

Algoritmo 2: Ortogonalización de Gram-Schmidt (estable)

Data: Matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$

Result: Matriz unitaria $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y triangular superior $R \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tales que $A = QR$
 $R = A$;

$M = I$;

```
for j = 1 : n do
    x = Rj:m,j % vector de valores entre filas j y m de la columna j;
    vj = sign(x1) ||x||2 e1 + x;
    vj = vj / ||vj||2;
    Rj:m,j:n = Rj:m,j:n - 2vj (vjT Rj:m,j:n);
    Mj:m,: : = Mj:m,: : - 2vj (vjT Mj:m,: :);
end
Q = MT;
```

23 pts

Algoritmo 3: Triangularización de Householder

- (5 puntos) Implemente una función $[Q,R] = \text{qr1}(A)$ que implemente el Algoritmo 1.
 - (5 puntos) Implemente una función $[Q,R] = \text{qr2}(A)$ que implemente el Algoritmo 2.
 - (5 puntos) Implemente una función $[Q,R] = \text{qr3}(A)$ que implemente el Algoritmo 3.
 - (4 puntos) Tome $m = n = 20$. Genere una matriz aleatoria $A = \text{rand}(m)$. Calcule las tres factorizaciones QR con las tres funciones **qr1**, **qr2**, **qr3**. Para cada caso, calcule $\|A - QR\|_2$, $\|QQ^T - I\|_2$. ¿Se cumple que $A = QR$? ¿Se cumple que Q es ortogonal? Determine si algún algoritmo es *mejor* que otro.
 - (4 puntos) Tome ahora $m = n = 20$. Defina $A = \text{hilb}(m)$ como la matriz de Hilbert de tamaño $m \times m$. Repita el inciso anterior. Determine si algún algoritmo es *mejor* que otro. Compare con el algoritmo **qr** de MATLAB.
2. [MATLAB] En esta pregunta se deben usar los comandos de factorización propios de MATLAB (**qr(A)**, **lu(A)**, **svd(A)**, **chol(A)**). Defina $m=12$, $x = \text{ones}(m,1)$, $A = \text{hilb}(m)$, $b = A*x$.

18 pts

Buscamos resolver el sistema de ecuaciones $Ax = b$ mediante estas factorizaciones. Note que la solución exacta es $x = [1, \dots, 1]^T$ y denotamos por \hat{x} la solución aproximada numéricamente.

- (2 puntos) Calcule el número de condición de A . ¿Qué nos indica este número? Sugerencia: utilice el comando `cond(A)`.
 - (3 puntos) Calcule la factorización $PA = LU$ y resuelva el sistema¹. Determine $\|x - \hat{x}\|_2$.
 - (3 puntos) Calcule la factorización $A = QR$ y resuelva el sistema. Determine $\|x - \hat{x}\|_2$.
 - (3 puntos) Calcule la factorización $A = LL^T$ y resuelva el sistema. Determine $\|x - \hat{x}\|_2$.
 - (3 puntos) Calcule la factorización $A = USV^T$ y resuelva el sistema. Determine $\|x - \hat{x}\|_2$.
 - (1 punto) Determine si algún método brinda alguna solución aceptable en términos del error.
 - (3 puntos) Utilizando la factorización en valores singulares de A , obtenga la aproximación de rango $\nu = 9$ dada por $A_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \sigma_i u_i v_i^T$. Resuelva el sistema $A_\nu x = b$ y determine $\|x - \hat{x}\|_2$. Justifique sus resultados.
3. Para graficar una función en dos variables $z = f(x, y)$, se puede generar una malla (matriz) de puntos `xx,yy` en las cuales se evalúa f . De esta forma, $\mathbf{zz} = \mathbf{f}(\mathbf{xx}, \mathbf{yy})$ es una matriz del mismo tamaño de `xx` y `yy`.

12 pts

- (2 puntos) [MATLAB] Defina los vectores

$$\mathbf{x} = \text{linspace}(0,1,100), \mathbf{y} = \text{linspace}(0,2,200).$$

La malla de puntos equidistantes en el dominio $D = [0, 1] \times [0, 2]$ se genera mediante el comando `[xx,yy]=meshgrid(x,y)` (note que `xx` y `yy` son matrices). Grafique la función

$$f(x, y) = \sin(2\pi(x + y)) \sin(\pi(x - y))$$

en esta malla del dominio D . Sugerencia: utilice el comando `surf(xx,yy,f(xx,yy))` y revise opciones de visualización como `view`, `colorbar`, `shading`.

- (4 puntos) [MATLAB] Defina $\mathbf{zz} = \mathbf{f}(\mathbf{xx}, \mathbf{yy})$, donde f es la función del inciso anterior. Calcule la descomposición en valores singulares de \mathbf{zz} . Mediante el comando `subplot`, grafique en una misma ventana las mejores aproximaciones de rango 1,2,3 y 4. En una nueva ventana, grafique el error absoluto para cada una de las cuatro aproximaciones. ¿Qué observa?
- (2 puntos) [MATLAB] ¿Cuáles son los valores singulares y el rango de \mathbf{zz} ?

¹Para resolver sistemas triangulares superiores o inferiores $Ly = b$ o $Uz = b$, basta ejecutar `y=L\b` o `z=U\b`, pues el comando `\` chequea si las matrices son triangulares y realiza sustitución hacia adelante o atrás. De esta forma, realmente no se está invirtiendo ninguna matriz.

- d) (4 puntos) Demuestre (a mano) que la matriz tiene el rango y los valores singulares correspondientes. Sugerencia: recuerde fórmulas para $\sin(x \pm y)$.

4. Sea

$$p(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_{n-1}x^{n-1}, \quad x \in [0, 1].$$

Considere el problema de minimizar

$$E(c_0, \dots, c_{n-1}) := \|f - p\|_2^2 = \int_0^1 |f(x) - p(x)|^2 dx \rightarrow \min.$$

- (a) (5 puntos) Obtenga las derivadas parciales $\partial E(c_0, \dots, c_{n-1}) / \partial c_k$ ($k = 0, \dots, n-1$). Para obtener el punto crítico, exprese el resultado como un sistema de n ecuaciones con n incógnitas, $M\mathbf{c} = \mathbf{b}$. ¿Qué problema tiene este sistema?
- (b) (5 puntos) [MATLAB] Resuelva el sistema correspondiente para $n = 10$, $f(x) = \cos(4\pi x)$. Dibuje en un mismo gráfico f y p . ¿Cuál es el valor de $\|f - p\|_2^2$? Sugerencia: puede utilizar el comando `integral(f,0,1)`.
- (c) (5 puntos) [MATLAB] Para obtener una mejor aproximación, considere la base de polinomios ortogonales de Legendre $\{\phi_j\}_{j \geq 0}$. La proyección de f sobre el espacio de polinomios de grado $n-1$ viene dada por

$$p(x) = \beta_0 + \beta_1\phi_1(x) + \dots + \beta_{n-1}\phi_{n-1}(x),$$

donde

$$\beta_k = \frac{\langle f, \phi_k \rangle}{\langle \phi_k, \phi_k \rangle}.$$

Calcule p para $n = 10$, $f(x) = \cos(4\pi x)$. Compare con los resultados del apartado anterior. Dibuje en la misma gráfica la nueva aproximación y calcule la 2-norma del error.

5. Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, la matriz $A = I + \mathbf{u}\mathbf{v}^T$ es llamada *perturbación de rango uno de la identidad*.

- (a) (4 puntos) Muestre que si A es invertible, entonces su inversa tiene la forma $A^{-1} = I + \alpha\mathbf{u}\mathbf{v}^T$ con $\alpha \in \mathbb{R}$. Encuentre el valor de α explícitamente.
- (b) (4 puntos) ¿Para qué valores de \mathbf{u} y \mathbf{v} es A singular? En este caso, determine el núcleo de A .

6. (6 puntos) Dada $A = U\Sigma V^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una descomposición en valores singulares de A , defina su pseudoinversa como $A^+ = V\Sigma^+U^T$, donde Σ^+ se obtiene de Σ al invertir sus entradas no nulas; esto es $(\Sigma^+)_{ii} = 1/\sigma_{ii}$ si $\sigma_{ii} > 0$. Demuestre que si \mathbf{x} está en el espacio fila de A y $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ entonces $\mathbf{x} = A^+\mathbf{y}$.

7. Considere un conjunto de mediciones $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$. En este ejercicio deseamos resolver el problema de mínimos cuadrados, donde la función buscada $f(x, \mathbf{c})$ no depende linealmente de los coeficientes $\mathbf{c} = [c_1, \dots, c_n]^T \in \mathbb{R}^n$ (en clase analizaremos el caso donde f es un polinomio). De esta forma, deseamos hallar \mathbf{c} tal que

$$\sum_{i=1}^m |f(x_i, \mathbf{c}) - y_i|^2 \rightarrow \text{mín.}$$

Para x_i fijo y f con derivadas continuas (con respecto a c_1, \dots, c_n), considere la aproximación de primer orden con centro $\mathbf{c}^{(k)}$ dada por

$$f(x_i, \mathbf{c}) \approx f(x_i, \mathbf{c}^{(k)}) + J_f(x_i, \mathbf{c}^{(k)})(\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(k)}),$$

donde

$$J_f(x_i, \mathbf{c}) = \nabla_{\mathbf{c}} f(x_i, \mathbf{c}) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$$

es el Jacobiano de f con derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial c_j}$ evaluado en x_i .

De esta forma, deseamos que

$$J_f(x_i, \mathbf{c}^{(k)})(\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(k)}) \approx y_i - f(x_i, \mathbf{c}^{(k)}) \quad \forall i = 1, \dots, m. \quad (1)$$

Defina la matriz $J(\mathbf{c}^{(k)}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ donde su fila i viene dada por $J_f(x_i, \mathbf{c}^{(k)})$. Defina además

$$\mathbf{y} := [y_1, \dots, y_m]^T \in \mathbb{R}^m,$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{c}) := [f(x_1, \mathbf{c}), \dots, f(x_m, \mathbf{c})]^T \in \mathbb{R}^m.$$

Podemos escribir así las ecuaciones dadas en (1) de forma matricial. Si sabemos que $\mathbf{c}^{(k)}$ es cercano a \mathbf{c} , buscamos encontrar \mathbf{c} tal que

$$J(\mathbf{c}^{(k)})(\mathbf{c} - \mathbf{c}^{(k)}) \approx \mathbf{y} - \mathbf{g}(\mathbf{c}^{(k)}). \quad (2)$$

Para tal efecto, consideramos el siguiente algoritmo:

- Considere $\mathbf{c}^{(0)}$ dado.
- Para $k = 0, 1, 2, \dots$
 - Obtenga $\Delta \mathbf{c}^{(k)}$ tal que $\|J(\mathbf{c}^{(k)})\Delta \mathbf{c}^{(k)} - (\mathbf{y} - \mathbf{g}(\mathbf{c}^{(k)}))\|_2 \rightarrow \text{mín}$ (por ejemplo, mediante el uso de las ecuaciones normales).
 - Defina $\mathbf{c}^{(k+1)} = \mathbf{c}^{(k)} + \Delta \mathbf{c}^{(k)}$.

En este ejercicio asumimos que f tiene la forma

$$f(x, \mathbf{c}) = c_1 e^{-c_2 x} \sin(c_3 x + c_4), x \in [0, 10],$$

donde $\mathbf{c} = [c_1, c_2, c_3, c_4]^T \in \mathbb{R}^4$ es el vector de coeficientes que debemos de encontrar (los cuales corresponden a la amplitud, el decaimiento, el periodo y la fase de f , respectivamente). Para obtener cotas del error, asumiremos que la solución exacta viene dada por el vector

$$\mathbf{c}_{\text{exact}} = [1, 1/2, 2, 0]^T.$$

14 pts

- (1 punto) Utilice el comando `load data` para cargar los datos guardados en el archivo `data.dat` suministrado. Este archivo incluye los valores $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ para $m = 100$, guardados en dos vectores \mathbf{x} y \mathbf{y} .
- (5 puntos) Implemente un programa que ejecute el algoritmo descrito. Para detener la iteración, utilice la condición $\|\Delta \mathbf{c}^{(k)}\|_{\infty} < 10^{-8}$.
- (4 puntos) Corra su programa para $\mathbf{c}_0 = [1.1; 0.4; 2.1; 0.2]$. Reporte el número de iteraciones requeridas. Grafique los nodos $\{x_i, y_i\}_{i=1}^m$, la función exacta $f(x, \mathbf{c}_{\text{exact}})$ y la función aproximada $f(x, \mathbf{c}^{(k)})$. Grafique además $\|\Delta \mathbf{c}^{(k)}\|_{\infty}$ en función de k . ¿Qué puede deducir sobre la velocidad de convergencia?
- (2 puntos) Para el valor inicial del inciso anterior, grafique el número de condición $\kappa(J(\mathbf{c}^{(k)}))$ en función de k . ¿Qué nos indica este gráfico? Sugerencia: utilice la función `cond(J)`.
- (2 puntos) Ahora considere $\mathbf{c}_0 = [1, 1, 1, 1]^T$. ¿Qué ocurre en este caso?

8. Considere un conjunto de $m + 1$ puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^m$, donde

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = 1$$

es una partición del intervalo $[0, 1]$ (no necesariamente con puntos equidistantes). En particular asumiremos que $y_0 = y_m$ pues consideraremos funciones periódicas. Deseamos construir una función $s_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

- s_2 es periódica con periodo 1; esto es, $s_2(x + 1) = s_2(x) \forall x \in \mathbb{R}$.
- $s_2 \in C^1(\mathbb{R})$; esto es, s_2 tiene derivada continua.
- s_2 interpola los valores del conjunto de puntos; esto es, $s_2(x_i) = y_i \forall i = 0, 1, \dots, m$.
- la restricción de s_2 a cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, m - 1$) es un polinomio cuadrático.

Es claro que basta construir s_2 en el intervalo $[0, 1]$ al ser periódica.

20pts

- (a) (7 puntos) Escriba un sistema de ecuaciones que permita determinar $s_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (Sugerencia: puede seguir la construcción de los splines cúbicos naturales del Capítulo 7; en este caso defina $\sigma_i = s'_2(x_i)$, $i = 0, 1, \dots, m$ y genere un sistema para encontrar los σ_i . Otra idea es escribir la restricción de $s_2(x)$ en cada subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$ de la forma $s_2(x) = \alpha_i + \sigma_i(x - x_i) + \beta_i(x - x_i)^2$. Recuerde además que s_2 debe ser periódica).
- (b) [MATLAB] (4 puntos) Fije $m = 15$ y tome $f(x) := \cos(2\pi x)$. Defina $\mathbf{x} = [x_0, \dots, x_m]^T$ utilizando valores aleatorios con la función `rand` y calcule $y_i = f(x_i) \forall i = 0, 1, \dots, m$. Construya s_2 para este conjunto de datos. Grafique f , s_2 y los puntos $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^m$ en un mismo gráfico. Grafique además el error absoluto $|f(x) - s_2(x)|$ y estime $\|f - s_2\|_{L^\infty([0,1])}$.
- (c) [MATLAB] (3 puntos) Repita el ejercicio anterior para $\mathbf{x} = \text{linspace}(0, 1, m+1)'$. Compare con los resultados del inciso anterior y comente sus resultados.
- (d) [MATLAB] (6 puntos) Uno puede aproximar $f'(x)$ mediante $s'_2(x)$. Utilizando s_2 tal como se calculó en el inciso anterior, escriba un programa que calcule $s'_2(x)$. Grafique f' y s'_2 en el mismo gráfico. Grafique además el error absoluto $|f'(x) - s'_2(x)|$ y estime $\|f' - s'_2\|_{L^\infty([0,1])}$. Note que s'_2 es diferenciable a trozos. ¿Cómo podría aproximar f' por una función s de manera tal que s'' sea continua?