

SI LV4 Facit Linjär Algebra

Niklas Gustafsson | Gustav Örtenberg
niklgus@student.chalmers.se | gusort@student.chalmers.se

2017-02-10

Repetition

- a) -4
- b) 4
- c) -4
- d) -8

1

a) $\vec{v} + \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $\vec{v} - \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

c) $\alpha = \arccos \frac{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}{\vec{u} \cdot \vec{v}} = \arccos \frac{\sqrt{55}}{17} = 1.18^\circ$

d) $\vec{v} \in \mathbf{R}^5$

2

$\begin{bmatrix} 4 & -8 & 8 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 16 \\ 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ Lösning saknas, linjerna korsar ej varandra.

3

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 8 \\ -2 & 4 & -1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 38 \\ 0 & 1 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Oändligt antal lösningar. Sätt $z = t$ och erhåll $x = 19 - t/2$, $y = 10$, $z = t$

4

Ställ upp som ekvationsystem och Gausseliminera. Värdena skall bli:

Kaffe: 7kr

Te: 5kr

Körsbärspaj: 8kr

Choklad: 12kr

Kanelbulle: 7kr

5

Vi har att $\cos \pi/4 = 1/\sqrt{2}$ så enligt definitionen av skalärprodukt så har vi

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{v}|| ||\vec{w}||} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{3 ||\vec{w}||} \iff \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{||\vec{w}||}$$

Man kan ansätta en godtycklig vektor $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ och sätta in i ekvationen.

Det finns oändligt många lösningar och man kan t ex välja att sätta $w_3 = 0$ och får då ekvationen

$$w_1^2 + w_2^2 - 16w_1w_2 = 0 \iff (w_1 - 8w_2)^2 = (\sqrt{63}w_2)^2 \iff w_1 = (8 \pm \sqrt{63})w_2$$

så en möjlig lösning är

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} 8 \pm \sqrt{63} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ett annat alternativ är att först bestämma en vektor \vec{x} som är ortogonal mot \vec{v} och har samma längd. En vektor med sökta egenskapen är då $\vec{w} = \vec{v} + \vec{x}$ (eftersom \vec{w} blir diagonalen i kvadraten som spänns upp av \vec{v} och \vec{x}). Man kan t ex ta

$$\vec{x} = \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ så att } \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{3}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 + 3/\sqrt{2} \\ 2 - 3/\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ytterligare en möjlighet är att bestämma matrisen A för en linjär avbildning som roterar kring en axel som är ortogonal mot \vec{v} . Svaret blir då t ex $\vec{w} = A\vec{v}$.

6

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & -2 & 11 \\ 12 & -14 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & 25 \\ -2 & 2 & -2 & 11 \\ 0 & -2 & -9 & 67 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & 25 \\ -2 & 0 & -8 & 61 \\ 0 & 0 & -3 & 17 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 & 25 \\ 1 & 0 & 4 & -\frac{61}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{3} \end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & 0 & -\frac{47}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{17}{3} \end{bmatrix} \text{ De tre linjerna möts i punkten } (x = -\frac{47}{6}, y = -8, z = -\frac{17}{3})$$

7

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 & -3 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 11 & -5 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 & -3 \\ -1 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 11 & -5 & -3 \\ -1 & 0 & -\frac{2}{11} & -\frac{10}{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sätt $x_3 = s$, $x_4 = t$ och erhåll

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \cdot \begin{bmatrix} -\frac{2}{11} \\ \frac{5}{11} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} -\frac{10}{11} \\ \frac{3}{11} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Geometrisk tolkning är ett plan i \mathbb{R}^4 som skär i origo.