SI LV2 Linjär Algebra

Gustav Örtenberg | gusort@student.chalmers.se

2017-11-07

1

Låt $\vec{u} = \begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$ och $\vec{v} = \begin{bmatrix}2\\5\end{bmatrix}$. Beräkna följande:

a) $\vec{u} + \vec{v}$.

b) $\vec{u} - \vec{v}$.

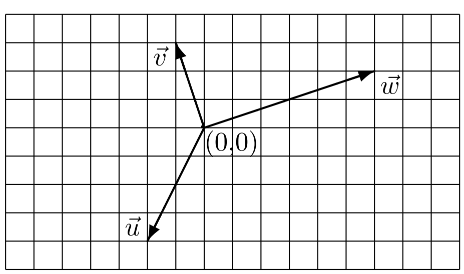
c) $3 \cdot \vec{u} + \vec{v}$.

d) $2 \cdot (\vec{v} - 2 \cdot \vec{u})$

e) $4 \cdot \vec{u} - 2 \cdot (\vec{u} - 3 \cdot \vec{v})$

2

Skriv vektorerna $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ på koordinatform.



a) Beräkna och rita ut $\vec{w} + \vec{v}$. Vad kallas $\vec{w} + \vec{v}$ för?

b) Beräkna och rita ut $\vec{w} - \vec{v}$.

c) Beräkna och rita ut $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

d) Mät längden på samtliga vektorer och verifiera att de stämmer igenom att även beräkna längderna.

e) Beräkna vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{u}$.

f) Vad innebär det att två vektorer är ortogonala? Är några av vektorerna i koordinatsystemet ortogonala? Kan ni bevisa det?

3

Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

a) Undersök om $\vec{v}$ och $\vec{u}$ är enhetsvektorer.

b) Beräkna $||4 \cdot \vec{v}||$ och $||(-2) \cdot \vec{u}||$.

c) Låt $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$, bestäm $\vec{x}$ och $||\vec{x}||$.

d) Vad är vinkeln mellan $\vec{u}$ och $\vec{v}$?

e) Inför ett koordinatsystem i planet samt definiera lämplig bas och origo. Rita $\vec{u}$, $\vec{v}$ och $\vec{x}$. Verifiera sedan svaren i de tidigare deluppgifterna igenom mätning.

4

Antag att ni befinner er i en luftballong påväg mot nordpolen. Under vindstilla förhållanden färdas ni med en hastighet av 30 km/h. Antag att det blåser en vind från väst som ger ballongen ett bidrag med en hastighet av 10 km/h.

a) Vad blir er fardt och hur mycket avviker er kurs rakt norrut?

b) Antag att vinden istället är nordvästlig. Vad blir er fart och hur mycket avviker er kurs rakt norrut?

c) Antag återigen att vinden är västlig. För att inte hamna ur kurs, krascha, och gå samma öde till mötes som Salomon August Andrées polarexpedition måste ni korrigera er kurs! Hur mycket måste ni ändra er riktning för att återigen flyga rakt norrut? Vad blir då er verkliga hastighet?

5

Låt $e_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ och $e_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ vara en ON-bas i rummet (R^3).

a) Vilka egenskaper har en ON-bas och vad innebär det för vektorerna ovan?

b) Verifiera dessa egenskaper.

Låt $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ och $\vec{u} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$.

c) Skriv $\vec{v}$ och $\vec{u}$ som linjärkombinationer av e_x, e_y och e_z.

d) Beräkna $\vec{v} + \vec{u}$.

6

Antag att ni har vektorerna $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ och $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$.

a) Vad blir $\vec{v} + \vec{u}$?

b) Vad blir $\vec{v} - \vec{u}$?

c) Vad blir vinkeln mellan $\vec{v}$ och $\vec{u}$?

d) Vad kallas det vektorrum som $\vec{v}$ tillhör? Hint: Hur många dimensioner har $\vec{v}$?

7

Tenta IT, 2015 april, uppg. 5
Antag att $G = (\vec{g_1},\ \vec{g_2},\ \vec{g_3})$ är en bas där $||\vec{g_1}|| = 1,\ ||\vec{g_2}|| = \sqrt{2},\ ||\vec{g_3}|| = 2$ och vinkeln $\angle\vec{g_1}\vec{g_2}$ är $\pi/4$, vinkeln $\angle\vec{g_1}\vec{g_3}$ är $\pi/3$ och vinkeln $\angle\vec{g_2}\vec{g_3}$ är $\pi/2$. Låt $\vec{u}$ och $\vec{v}$ vara de vektorer som i basen G har koordinater

$$\vec{u_G} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \vec{v_G} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Beräkna vinkeln $\angle\vec{u}\vec{v}$ mellan dessa vektorer $\vec{u}$ och $\vec{v}$.

Facit

1

a) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ 3+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

b) $\vec{u} - \vec{v} = \begin{bmatrix} 1-2 \\ 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{-1} \\ \text{-2} \end{bmatrix}$

c) $3\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} 3*1+2 \\ 3*3+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 14 \end{bmatrix}$

d) $2(\vec{v} - 2\vec{u}) = \begin{bmatrix} 2*(2-2*1) \\ 2*(5-2*3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \text{-2} \end{bmatrix}$

e) $4\vec{u} - 2(\vec{u} - 3\vec{v}) = \begin{bmatrix} 4*1-2*(1-3*2) \\ 4*3-2*(3-3*5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 36 \end{bmatrix}$

2

a) $w + v = \begin{bmatrix} 6+\text{(-1)} \\ 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$ Linjärkombination

b) $w - v = \begin{bmatrix} 6-\text{(-1)} \\ 2-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ \text{-1} \end{bmatrix}$

c) $u + v + w = \begin{bmatrix} \text{-2}+6+\text{(-1)} \\ \text{-4}+2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

d) $||v|| = \sqrt{10}, ||w|| = \sqrt{40}, ||u|| = \sqrt{20}$

e) Använd cosinussatsen $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot cos\theta$. C är avståndet mellan ändpunkterna på $\vec{u}$ och $\vec{v}$. Lös ut θ med hjälp av arccos-funktionen.

f) När skalärprodukten är 0 vilket visar att de är 90° från varandra. Sann för $\vec{v}$, $\vec{w}$. Alternativt använd cosinussatsen och se att den blir noll, dvs vinkeln är 90 grader.

3

1. Kallas för enhetsvektor som längden är ett
2. $||4u|| = \sqrt{16^2 + 4^2} = \sqrt{272}$, $||\text{-}2v|| = \sqrt{\text{(-4)}^2 + \text{(-2)}^2} = \sqrt{20}$
3. $x = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, ||x|| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2 \cdot \sqrt{2}$
4. Cosinussatsen ger att $\theta = 26.6$ grader.
5. Rita och se att det stämmer.

4

a) Trigonometri ger att $\cos\theta = \frac{||\vec{v}||}{||\vec{u}+\vec{v}||}$. Det ger $\theta = 18,4$ grader. Farten är längden av vektorn.

b) Lös på samma vis som a).

c) Vi vill motverka 10 i västlig riktning, resterande av vektorn vill vi ha i nordlig riktning så $\sqrt{30^2 - 10^2} = 20\sqrt{2}$ (nordligt bidrag), ressulterande vektor $\begin{bmatrix} \text{-10} \\ 20\sqrt{2} \end{bmatrix}$. Ni har nu $\vec{u} + \vec{v}$. Vinkeln löser ni ut igenom att måla upp allt och använda trigonometri, det ger att $\alpha = 19,5$ grader.

5

1. Ortonormerad bas. Dvs alla vectorer är ortogonala från varandra med längd 1. De vektorerna är 1 i längd i x, y respektive z riktningarna.
2. Finn att skalärprodukterna för alla kombinationer av dessa vektorer är 0.
3. $v = 3e_x + 5e_y - e_z,\ u = \text{-}2e_x + 7e_y + e_z$
4. $u + v = \begin{bmatrix} 1 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix}$

6

a) $\vec{v} + \vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 1 \\ 8 \\ 5 \end{bmatrix}$

b) $\vec{v} - \vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

c) $\alpha = \arccos \frac{||\vec{u}||\cdot||\vec{v}||}{\vec{u}\cdot\vec{v}} = \arccos \frac{\sqrt{55}}{17} = 1.18°$

d) $\vec{v} \in \mathbf{R}^5$