DISTÂNCIA COSSENO

Doscente: Thelmo Pontes de Araújo

Discentes: Ivanildo Moreira das Neves Neto
Gustavo César Venâncio Monteiro

Universidade Estadual do Ceará

DEFINIÇÃO

Distancia Cosseno = 1 - Similaridade do Cosseno

ou

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1 - \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|}$$

é o produto escalar entre os vetores u e v

é o produto das normas dos vetores u e v

A faixa de Distância do Cosseno é de 0 a 2.

0 – vetores idênticos

1 – sem correlação

2 – absolutamente diferentes

Para mostrarmos que a Distancia Cosseno é uma métrica, é preciso satisfazer quatro propriedades:

1) Não negatividade

2) Identidade dos Indiscerníveis

3) Simetria

4) Desigualdade Triangular

DEMONSTRAÇÃO

1) NÃO NEGATIVIDADE

Matematicamente, esta condição é definida como:

$$d(x, y) \geq 0$$

Ou seja, não pode assumir valores negativos.

Por definição, a Distancia Cosseno só assume valores entre 0 a 2 na sua faixa de distância.

Logo, satisfaz a condição.

DEMONSTRAÇÃO

3) SIMETRIA

Matematicamente, essa condição é definida como:

$$d(x,\ y) = d(y,\ x), \text{ para todos x e y}$$

A Distância Cosseno de a e b é dada por:

$$d(a,\ b) = 1 - \frac{\langle a, b \rangle}{||a|| \times ||b||}$$

Para mostrar a simetria, vamos calcular d(b, a), é dada por:

$$d(b,\ a) = 1 - \frac{\langle b, a \rangle}{||b|| \times ||a||}$$

DEMONSTRAÇÃO

3) SIMETRIA

Observe que, produto escalar $\langle a,\ b\rangle$ é comutativo (ou seja, $b{\cdot}a\ =\ a{\cdot}b$), então podemos substituir

$$d(b,\ a) = 1 - \frac{\langle a, b\rangle}{\|b\| \times \|a\|}$$

O que é exatamente igual a $d(a,\ b)$. Logo, $d(a,\ b) = d(b,\ a)$. ■

DEMONSTRAÇÃO

2) IDENTIDADE DOS INDISCERNÍVEIS

Como a Distância Cosseno não satisfaz essa condição, veremos um contraexemplo:

Matematicamente, esta condição é definida como:

Se $d(x,\ y) = 0, \quad então\ x = y$

Tomando $x = (1,\ 1)\ e\ y = (2,\ 2)$, **calculando a d(x, y), temos**

$$d(x,\ y) = 1 - \frac{(1\times2)+(1\times2)}{\sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{2^2+2^2}} = 1 - \frac{4}{\sqrt{2}\times\sqrt{8}} =$$

$$= 1 - \frac{4}{\sqrt{16}} = 1 - \frac{4}{4} = 1 - 1 = 0$$

Porém, $(1,\ 1) \neq (2,\ 2)$. ■

DEMONSTRAÇÃO

4) DESIGUALDADE TRIANGULAR

Como a Distância Cosseno não satisfaz essa condição, veremos um contraexemplo:

Matematicamente, esta condição é definida como:

$$d(x,\ y) = d(x,\ z) + d(y,\ z)$$

Tomando $x = (1,\ 0),\ y = (0,\ 1)$ **e** $z = (1,\ 1)$**,**

Vamos verificar a desigualdade $d(x,\ y) \leq d(x,\ z) + d(y,\ z)$

$$d(x,\ y) = 1 - \frac{(1\times0)+(0\times1)}{\sqrt{1^2+0^2}\times\sqrt{0^2+1^2}} = 1 - \frac{0+0}{\sqrt{1}\times\sqrt{1}} = 1 - \frac{0}{\sqrt{1}} = 1 - 0 = 1$$

$$d(x,\ z) = 1 - \frac{(1\times1)+(0\times1)}{\sqrt{1^2+0^2}\times\sqrt{1^2+1^2}} = 1 - \frac{1+0}{\sqrt{1}\times\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - 0,7 = 0,3$$

DEMONSTRAÇÃO

4) DESIGUALDADE TRIANGULAR

$$d(y,\ z) = 1 - \frac{(0\times1)+(1\times1)}{\sqrt{0^2+1^2}\times\sqrt{1^2+1^2}} = 1 - \frac{0+1}{\sqrt{1}\times\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - 0,7 = 0,3$$

$$(x,\ y) \leq d(x,\ z) + d(y,\ z) \rightarrow 1 \leq 0,3 + 0,3 \rightarrow 1 \leq 0,6$$

O que é um absurdo.

Logo a propriedade não é satisfeita. ■

OBRIGADO!