Inducción Matemática

Adriana Dávila Santos

11 de julio de 2021

• Objetivo particular

El alumno demostrará proposiciones acerca de los números naturales por medio de inducción matemática.

Los Postulados de Peano: el principio de inducción

- $1 \in \mathbb{N}$
- $\forall\ n \in \mathbb{N}, \exists$ un único n' : denominado **sucesor de n** $(n + 1 = n')$
- $\forall\ n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n' \neq 1$ (1 no es sucesor en los naturales)
- $Si\ m, n \in \mathbb{N}\ \&\ m' = n' \rightarrow m = n$
- Sea $S \subseteq \mathbb{N} : 1 \in S\ \&\ \forall\ k \in \mathbb{S}\ \exists\ k' \rightarrow S = \mathbb{N}$

Al último postulado se le conoce como **Principio de inducción**

Inducción Matemática

La inducción matemática es un método de demostración muy útil para probar propiedades, principalmente en los números enteros, así como probar algunas simplificaciones para series de números. De manera general este método consta de 3 pasos:

- **Caso base**
  Debemos partir de un valor para el que se cumpla la propiedad o serie que queremos demostrar, por lo general empezamos con $n = 1$
- **n = k**
  Ya que probamos que se cumple para un caso base, asumimos que se cumple para cualquier $k \in \mathbb{N}$,
- **n = k+1**
  Sólo queda por demostrar que la propiedad se cumple para $n = k + 1$

Ejemplo

Determine si la siguiente igualdad es verdadera por el método de inducción:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- *Paso 1*
  Demostramos que se cumpla para $n = 1$

  $$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

- *Paso 2*
  Se cumple para el caso base, así que asumimos que se cumple para $n = k$

  $$1 + 2 + 3 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

Ejemplo

- *Paso 3*
  Sólo queda por demostrar que se cumpla para $n = k + 1$*, es decir, verificar la siguiente igualdad*

$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}$$

$$\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\frac{k^2+3k+2}{2} = \frac{k^2+3k+2}{2} \quad Q \ E \ D$$

NOTA: Lo más formal es sólo operar el lado derecho y pasarlo a la forma del lado izquierdo, sin embargo en estos ejemplos operaremos de ambos lados de la igualdad, simplificando y usando las propiedades que nos convengan pues es igual de válida la demostración.

Inducción Matemática

Ejemplo

Determine si la siguiente igualdad es verdadera por el método de inducción:

$$8 + 11 + 14 + ... + (3n + 5) = \frac{n(3n+13)}{2}$$

- *Paso 1*
  Demostramos que se cumpla para $n = 1$

  $$(3 \cdot 1 + 5) = \frac{1(3 \cdot 1 + 13)}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

- *Paso 2*
  Se cumple para el caso base, así que asumimos que se cumple para $n = k$

  $$8 + 11 + 14 + ... + (3k + 5) = \frac{k(3k+13)}{2}$$

Ejemplo

- *Paso 3*
  Sólo queda por demostrar que se cumpla para $n = k + 1$, *es decir, verificar la siguiente igualdad*

$$\frac{k(3k+13)}{2} + [3(k+1)+5] = \frac{(k+1)[3(k+1)+13]}{2}$$

$$\frac{k(3k+13)+2(3k+8)}{2} = \frac{(k+1)(3k+16)}{2}$$

$$\frac{3k^2+19k+16}{2} = \frac{3k^2+19k+16}{2} \quad Q \;\; E \;\; D$$

Ejemplo

Determine si la siguiente igualdad es verdadera por el método de inducción:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- *Paso 1*
  Demostramos que se cumpla para $n = 1$

  $$1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

- *Paso 2*
  Se cumple para el caso base, así que asumimos que se cumple para $n = k$

  $$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

Ejemplo

- *Paso 3*
  Sólo queda por demostrar que se cumpla para $n = k + 1$, es decir, verificar la siguiente igualdad

$$\frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \frac{(k+1)[(k+1)+1][2(k+1)+1]}{6}$$

$$\frac{(k^2+k)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

$$\frac{2k^3+3k^2+k+6(k^2+2k+1)}{6} = \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6}$$

$$\frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6} = \frac{2k^3+9k^2+13k+6}{6} \quad Q\ E\ D$$

Ejercicio

Determine si la siguiente igualdad es verdadera por el método de inducción:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n - 1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$