Determinantes

Adriana Dávila Santos

16 de agosto de 2021

• Objetivo particular:

El alumno establecerá el determinante de una matriz, identificará las propiedades de los determinantes, los calculará aplicando sus propiedades y los utilizará para calcular inversas de matrices y resolver sistemas de ecuaciones.

Definición

A cada matriz cuadrada A se le asocia un escalar particular denominado **determinante** *de A, denotado por $|A|$ o por $\det(A)$. Este escalar permite caracterizar algunas propiedades de la matriz.*

Cálculo de determinantes:

- El determinante de una matriz A de orden 1 es el elemento a_{11}, es decir, $det(A) = a_{11}$
- El determinante de una matriz A de orden 2 es: $det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$
- El determinante de una matriz A de orden 3 es: $det(A) = a_{33}a_{22}a_{11} + a_{32}a_{21}a_{13} + a_{23}a_{12}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$

Ejemplo

Calcula el determinante de las siguientes matrices:

- $A = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \to det(A) = 10$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \to det(B) = (3)(1) - (2)(2) = -1$
- $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$
  $\to det(C) = (8)(-1)(1) + (3)(0)(4) + (1)(2)(2) - (4)(-1)(2) - (1)(3)(1) - (2)(0)(8) = 1$

Definición

Se le llama **menor** *al determinante de una submatriz de una matriz A obtenida al eliminar una o más filas o columnas. Lo denotaremos como M_{ij}*

En nuestro caso obtendremos el menor (i, j) al eliminar la fila y columna donde se encuentre el elemento a_{ij}

Ejemplo

Obten los menores indicados dada la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

- M_{11}

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow M_{11} = -8 - 3 = -11$$

- M_{13}

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow M_{13} = 2 + 4 = 6$$

- M_{22}

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow M_{22} = 8 - 8 = 0$$

Definición

Sea una matriz cuadrada A, el **cofactor** *del elemento a_{ij} denotado como c_{ij} se obtiene de la siguiente forma:*

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Ejemplo

Continuando con el ejemplo anterior de menores, obtenga los siguientes cofactores:

- $c_{11} = (-1)^{1+1}(-11) = -11$
- $c_{13} = (-1)^{1+3}(6) = 6$
- $c_{22} = (-1)^{2+2}(0) = 0$

Ya vimos como obtener el determinante de una matriz de orden 1,2 y 3. El siguiente método sirve para obtener determinantes de orden n, $\forall n \in \mathbb{N}$.
Para obtener el valor de un determinante utilizando cofactores, se procede como se indica a continuación.

- Se escoge cualquier fila o cualquier columna
- Se calcula el cofactor c_{ij} de cada elemento de la fila o columna escogida
- Se multiplican cada elemento de la fila o columna por su respectivo cofactor de la siguiente forma: $a_{ij}c_{ij}$.
- Se suman los productos obtenidos en el punto anterior y el resultado obtenido es el valor del determinante.

Ejemplo

Calcule el determinante de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -2 & 4 \\ -6 & 2 & 10 & 0 \\ 5 & 8 & -5 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Una consideración importante es usar el renglón o columna que contenga más ceros en sus elementos, pues al ser una multiplicación, podemos evitar el cálculo de cofactores que al final se van a anular.
Así que por conveniencia podemos escoger la tercer columna de o el tercer renglón indistintamente, en nuestro caso usaremos la tercer fila.

Ejemplo

Ya que decidimos la fila a trabajar, definimos la siguiente fórmula:

$$det(A) = (-1)^{4+1}(a_{41})(c_{41}) + (-1)^{4+2}(a_{42})(c_{42}) + (-1)^{4+3}(a_{43})(c_{43}) + (-1)^{4+4}(a_{44})(c_{44})$$

$$det(A) = (-1)^5(0)(c_{41}) + (-1)^6(-2)(c_{42}) + (-1)^7(1)(c_{43}) + (-1)^8(0)(c_{44})$$

$$det(A) = (-2)(c_{42}) - (1)(c_{43}) = -2c_{42} - c_{43}$$

Ahora que ya simplificamos la expresión vemos que sólo debemos encontrar dos cofactores, que en este caso son dos determinantes de una matriz de orden 3.

Ejemplo

$$M_{42} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -6 & 10 & 0 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -104 \ \rightarrow c_{42} = (-1)^{4+2}(-104) = -104$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 4 \\ -6 & 2 & 0 \\ 5 & 8 & 2 \end{vmatrix} = -184 \ \rightarrow c_{43} = (-1)^{4+3}(-184) = 184$$

$$\therefore det(A) = -2(-104) + 184 = 392$$

Definición

Se dice que una matriz cuadrada A es **triangular** *si los elementos por debajo o por arriba de la diagonal principal son todos cero, es* **triangular superior** *si están por debajo y es* **triangular inferior** *si están por arriba.*

Definición

Una matriz cuadrada A es una **matriz diagonal** *si es tanto triangular superior como inferior, es decir, todos los elementos fuera de la diagonal principal son cero.*

Calcular el determinante de una matriz triangular o de una matriz diagonal es una tarea sumamente sencilla, ya que el determinante es la multiplicación de los elementos de la diagonal.

Ejemplo

Calcule el determinante de las siguientes matrices:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow det(A) = 1 \cdot 2 \cdot (-5) \cdot 8 = -80$
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow det(B) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 9 = 135$

Ejemplo

- $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow det(C) = 1 \cdot 12 \cdot (-5) \cdot 1 = -60$

Vemos que la matriz A es un ejemplo de matriz triangular superior, B es una matriz triangular inferior y C es una matriz diagonal.

Propiedades de los determinantes

Propiedades:

- Una matriz cuadrada con una fila o una columna en la que todos los elementos son nulos tiene un determinante igual a cero.
- El determinante de una matriz con dos filas o dos columnas iguales es nulo.
- Cuando dos filas o dos columnas de una matriz son proporcionales entre sí (una se puede obtener multiplicando la otra por un factor), su determinante es cero.
- Al intercambiar dos filas o dos columnas de una matriz, su determinante cambia de signo.
- Al multiplicar todos los elementos de una fila o una columna de una matriz por un número, el determinante de la matriz resultante es igual al de la original multiplicado por ese mismo número.
- Cuando a una fila (o columna) de una matriz se le suma o resta una combinación lineal de otras filas (o columnas), el valor de su determinante no se altera.

Con todos los conceptos y propiedades vistas hasta ahora, podemos ver que otra forma de calcular determinantes de una matriz es aplicarle operaciones elementales por renglón para llevarlo a una forma escalonada, recordemos que la forma escalonada es una matriz triangular superior, por lo que su determinante será el producto de los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo

Calcula el determinante de la siguiente matriz usando operaciones elementales por renglón

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} R_2 \to R_2 - 2R_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} R_3 - 4R_1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} R_3 + R_2 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\therefore d(A) = 1$

Definición

Dada una matriz cuadrada A, la matriz **adjunta** *denotada como* **adj(A)** *es una matriz del mismo orden que A y se obtiene al sustituir los elementos a_{ij} por su cofactor correspondientes c_{ij}.*

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

- $M_{11} = 3 \rightarrow c_{11} = 3$
- $M_{12} = -1 \rightarrow c_{12} = 1$
- $M_{21} = 2 \rightarrow c_{21} = -2$
- $M_{22} = 1 \rightarrow c_{22} = 1$

Con anterioridad ya hemos definido una matriz inversa, ahora veremos que existe un método para obtenerla usando la matriz adjunta mediante la siguiente fórmula:

$$\text{Sea la matriz A, entonces } A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A^{T})$$

Aquí es fácil notar que si det(A) $= 0$, entonces $A^{-1} \nexists$

Ejemplo

Siguiendo el ejemplo anterior dónde:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, adj(A) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow adj(A^T) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = (3)(1) - (-1)(2) = 5$$

$$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A^T) = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Ejercicio

Demostrar que $adj(A^T) = adj(A)^T$

Ya hemos visto que las matrices son muy útiles para resolver sistemas de ecuaciones, ahora veremos una nueva forma de resolver estos sistemas con ayuda de la matriz inversa. Lo explicaremos siguiendo el ejemplo anterior:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Suponiendo que A es la matriz asociada a un sistema de ecuaciones lineales cuyos términos independientes del lado derecho de la ecuación son 15 y 5 respectivamente, de dos incógnitas y dos ecuaciones, sabemos que tenemos la siguiente igualdad: $Ax = b$, donde x es la matriz de incógnitas y b la matriz de términos independientes. Podemos replantearla de la siguiente forma:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \rightarrow I_2x = A^{-1}b$$
$$\therefore x = A^{-1}b$$

Así que para encontrar los valores de la matriz x basta con multiplicar a la inversa por la matriz de términos independientes.

$$x = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$\therefore x_1 = 7, \; x_2 = 4$

Ahora conocemos otra forma de resolver sistemas de ecuaciones lineales cuya matriz asociada sea cuadrada.

Anteriormente vimos cómo calcular determinantes de matrices de diferentes modos, la regla o método de Cramer usa ese concepto para resolver sistemas de ecuaciones lineales cuya matriz de coeficientes asociada sea cuadrada. El método es bastante sencillo y nos da la siguiente igualdad:

- $x_i = \frac{D_{x_i}}{D}$

Donde D es el determinante de la matriz asociada y D_{x_i} es el determinante de la matriz resultante de cambiar el vector de valores de la variable x_i por el vector de valores independientes b

Ejemplo

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones lineales por regla de Cramer:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 1x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Sean las siguientes matrices asociadas al sistema:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \; b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$det(A) = D = 4 + 1 - 18 - 4 - 6 + 3 = -20$$

Ejemplo

Ahora diremos que A_i será la matriz resultante de cambiar los valores de la columna i por los valores del vector columna b:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$det(A_i) = D_{x_i}$

- $D_{x_1} = 2 + 2 + 0 - 8 - 3 - 0 = -7$
- $D_{x_2} = 0 + 1 - 12 - 0 - 4 + 3 = -12$
- $D_{x_3} = -8 + 9 + 0 + 2 - 0 - 6 = -3$

Ejemplo

- $x_1 = \frac{-7}{-20} = \frac{7}{20}$
- $x_2 = \frac{-12}{-20} = \frac{3}{5}$
- $x_3 = \frac{-3}{-20} = \frac{3}{20}$

De este modo es cómo resolvemos sistemas de ecuaciones lineales por regla de Cramer.