# Operaciones con Matrices

Adriana Dávila Santos

8 de agosto de 2021

## • Objetivo particular:

El alumno realizará sumas y productos de matrices e identificará las propiedades de estas operaciones, determinará la transpuesta de una matriz y obtendrá, en caso de que exista, la inversa de una matriz por medio de operaciones elementales.

## Definición

*Sea $M$ el conjunto de matrices de orden $mxn$ : $m, n \in \mathbb{N}$, definimos a la operación binaria* **suma** $(+)$ *bajo este conjunto para dos matrices cualesquiera $A$ y $B$ si se cumple que son del mismo orden. El resultado será una mtriz $C$ del mismo orden que $A$ y $B$ dónde los elementos se calculan de la siguiente forma:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

## Ejemplo

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 13 & 6 \end{pmatrix}$

## Definición

*Sea $k$ una constante y la matriz $A$ de orden mxn, definimos el* **producto por un escalar** *a la multiplicación de la constante $k$ por la matriz $A$, dando como resultado una matriz $kA = B$ de orden mxn donde sus elementos se calculan de la siguiente forma:*

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij}$$

## Ejemplo

$$k = 2,\ \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ \mathbf{2A} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

**Propiedades de la suma:**

- Conmutatividad
- Asociatividad
- Según el conjunto bajo el que se trabaje, existe el neutro único
- Según el conjunto bajo el que se trabaje, existe el inverso

**Propiedades del producto por un escalar:**
En este caso trabajamos con elementos de dos conjuntos diferentes por lo que no definimos propiedades como en una operación binaria donde todos los elementos pertenecen al mismo conjunto.

## Definición

*Sea $A$ una matriz de orden mxn, decimos que su* **transpuesta** *será la matriz $A^T$ de orden nxm cuyos elementos se calculan de la siguiente forma:*

$$a_{ij}^T = a_{ji}$$

## Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 5 & 7 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$$

## Definición

*Sea $A$ una matriz de orden $n$, se dice que $A$ es* **simétrica** *si y sólo si $A = A^T$. Es fácil ver que para ser simétrica debe ser cuadrada.*

## Ejemplo

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Propiedades de la transpuesta:**

- Si la matriz A es cuadrada y diagonal, $A = A^T$
- La transpuesta de la transpuesta de A es A: $(A^T)^T = A$
- La transpuesta de la suma de matrices es $(A + B)^T = A^T + B^T$
- La transpuesta del producto de un escalar $\alpha$ por una matriz A es $(\alpha \cdot A)^T = \alpha \cdot A^T$
- La transpuesta del producto de matrices es $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

**Ejercicio**

*Demuestre las propiedades anteriores a excepción de la última*

## Definición

*La matriz* **transpuesta conjugada** *de una matriz A de orden mxn es la matriz resultante de obtener todos los conjugados para* $a_{ij}$ *y después transponer esa matriz o viceversa. Esto solo tiene sentido si los coeficientes* $a_{ij}$ *son números complejos donde su parte imaginaria es diferente de 0.*

## Ejemplo

*Una matriz* $A = \begin{pmatrix} 2i & 6-i \\ 3+i & 4 \end{pmatrix}$ *tiene el transpuesto conjugado*

$$A^* = \begin{pmatrix} -2i & 3-i \\ 6+i & 4 \end{pmatrix}$$

## Definición

*Una matriz* **hermitiana** *es una matriz cuadrada A de elementos complejos que tiene la característica de ser igual a su transpuesta conjugada $A^*$.*

## Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix} = A^* = \begin{bmatrix} 3 & 2+i \\ 2-i & 1 \end{bmatrix}$$

## Definición

*Sean las matrices A de orden mxn y B de orden nxp, el producto AB será una matriz C de orden mxp cuyos elementos se calculan de la siguiente forma:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

## Ejemplo

$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$,

$AB = C = \begin{pmatrix} 18 & 28 \\ 17 & 27 \end{pmatrix}$

## Definición

*Sea la matriz $A$ de orden $n$, se dice que es una matriz* **invertible** *o* **regular** *si existe otra matriz cuadrada del mismo orden llamada* **inversa** *de $A$ y denotada como $A^{-1}$ de modo que se cumpla que $AA^{-1} = I_n$ (matriz identidad de orden $n$)*

## Ejemplo

*La primer matriz será $A$, por lo tanto la segunda será $A^{-1}$, ya que se cumple que su producto es igual a la matriz identidad de orden 2.*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Este tipo de matrices se usa para resolver ecuaciones con matrices o para resolver sistemas de ecuaciones lineales, de ahí su importancia.

Para que una matriz A tenga inversa debe ser cuadrada de orden n, $n \in \mathbb{N}$ y el rango de A, $\mathrm{r(A)} = 0$.

Vamos a explicar el proceso para obtener la matriz inversa por medio de operaciones elementales por rengón, para ello usaremos un ejemplo.

Obtenga la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

Lo primero que vamos a hacer es aumentar la matriz del lado derecho, colocando una equivalente a $I_n$, es decir, una matriz identidad de orden 3 en este caso.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ahora lo que sigue es aplciar operaciones elementales por rengón de modo que del lado izquierdo tengamos la matriz $I_3$ y la matriz que quede del lado derecho será la inversa de A.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] R_2 \to R_2 - 2R_1 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] R_3 - 4R_1 \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] R_3 + R_2 \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 1 & 1 \end{array}\right] -R_2, -R_3 \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right] R_2 - R_3 \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right] R_1 - 2R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -11 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

Como podemos observar, del lado izquiero tenemos la matriz $I_3$ por lo que detenemos el proceso y conlcuimos que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Comprobamos de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$