UFMG/ICEx/DCC	DCC216 – Matemática Discreta
	Trabalho Prático
Ciências Exatas & Engenharias	2º Semestre 2024

Observações:

1. Comece a fazer este trabalho imediatamente. Você nunca terá tanto tempo para resolvê-lo quanto agora!
2. **Data de entrega**: 6 de dezembro de 2024, até **às 23:59 horas**, ou antes.
3. **Submissão**: Faça a submissão deste trabalho no Moodle, conforme instruções postadas lá.
4. **Plataforma computacional**: O seu trabalho deve ser executado em alguma máquina do ambiente computacional do Departamento de Ciência da Computação da UFMG, onde os monitores irão avaliá-lo.
5. **Linguagem**: Você deve escrever o seu programa obrigatoriamente na linguagem de programação C.
6. **Documentação**:
   - Uma documentação que explique cada uma das cinco partes descritas neste documento. Em particular, descreva as fases de especificação, projeto e implementação dos algoritmos deste TP.
   - Um arquivo `leiame.txt`, a ser incluído no arquivo zip, como informações sobre o ambiente computacional para executar o seu TP bem como todas as instruções necessárias.
7. **Testes**: O seu programa será avaliado conforme descrito no Moodle da disciplina.

Fractais

O que são fractais?

Um fractal é uma forma ou padrão geométrico que exibe auto-semelhança em diferentes escalas ou ampliações. Em outras palavras, ao ampliar um fractal, você verá os mesmos padrões ou padrões semelhantes repetidos em escalas cada vez menores. Os fractais são muitas vezes formas complexas e irregulares que são criadas através de processos iterativos ou recursivos, o que significa que a mesma fórmula matemática ou algoritmo é aplicado repetidamente para gerar a forma.

Os fractais são encontrados em muitos objetos naturais e artificiais, como flocos de neve, litorais, raios e até tendências do mercado de ações. Eles também têm sido usados em uma variedade de áreas, incluindo matemática, física, ciência da computação, arte e design. Um exemplo famoso de fractal é o conjunto de Mandelbrot[1], que é um conjunto de números complexos que é gerado por meio de um processo iterativo específico e produz um padrão fractal surpreendentemente intrincado e detalhado.

Fractais que geram uma cadeia de polígonos simples

Existem algoritmos fractais que geram uma cadeia de polígonos simples, ou seja, polígonos que não possuem cruzamentos ou interseções, que serão o foco deste trabalho prático. Por exemplo, algoritmos nos chamados L-sistemas (Sistema de Lindenmayer)[2] ou sistemas de reescrita de cadeias (fractais determinísticos) e fractais de movimento brownianos (fractais aleatórios). Os L-sistemas são um tipo especial de gramática de reescrita de strings. Esses sistemas reescrevem uma determinada cadeia de caracteres, i.e., strings que representam uma sequência de símbolos, de acordo com uma gramática, que é um conjunto de regras (veja os exemplos abaixo).

Sistemas de reescrita de strings podem ser usados para gerar curvas fractais clássicas, como o floco de neve clássico de von Koch e as curvas de preenchimento de espaço de Peano e Hilbert. Esses fractais podem ser gerados fornecendo:

- o axioma—uma sequência de caracteres (cada um com um significado) que é usado para iniciar a geração do fractal e um ângulo θ,
- as regras de produção—indicam como cada caractere do axioma pode ser substituído, e
- o número de ciclos ou estágios—indicam o nível de recursividade.

Basicamente, os caracteres (símbolos) que aparecem no axioma e nas regras de produção são:

`F`:	desenha uma linha para a frente, na direção onde a “caneta” se encontra
`+`:	vire à direita em θ graus a direção da “caneta”
`-`:	vire à esquerda em θ graus a direção da “caneta”

Para desenhar todos os fractais deste trabalho, podemos imaginar que a “caneta” que fará o desenho está posicionada inicialmente sobre uma linha horizontal e está direcionada para a direita, ou seja, faz um ângulo de 0° com essa linha.

[1] Veja em `https://pt.wikipedia.org/wiki/Conjunto_de_Mandelbrot` para mais informações

[2] Veja em `https://en.wikipedia.org/wiki/L-system` e em `https://wwwuser.gwdg.de/~groimp/grogra.de/grammars/lsystems.html` para mais informações

Exemplo de um desenho

O fractal de floco de neve clássico de von Koch pode ser definido pelo seguinte L-sistema (axioma, valor de θ, regras de produção e estágios—neste caso, o valor será fornecido como uma entrada):

Axioma:	`F`
	$\theta = \frac{\pi}{3}$
Regra:	`F` $\rightarrow$ `F-F++F-F`

O axioma indica a regra de geração do fractal. Neste caso, o axioma indica apenas um segmento desenhado na horizontal a partir de uma posição inicial. O ângulo vale $\frac{\pi}{3}$ ou 60°, que é o valor da rotação para a direita (`+`) ou esquerda (`-`). A regra mostra que a ocorrência do símbolo `F` deve ser substituída pelo sequência de símbolos `F-F++F-F` na geração dos próximos estágios.

A Figura 1 ilustra os primeiros estágios do fractal de floco de neve clássico de von Koch. A Figura 1(a) mostra o axioma desse fractal, que se resume a aplicar a regra `F`. Observe que o primeiro estágio recursivo é obtido aplicando a regra que diz que o símbolo `F` deve ser substituído pela sequência `F-F++F-F`, como ilustrado na Figura 1(b). Os outros estágios aplicam a mesma regra: toda ocorrência de `F` deve ser substituída por `F-F++F-F`.

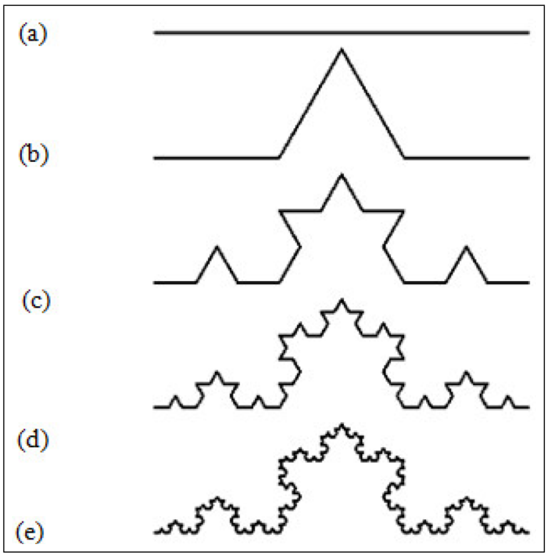
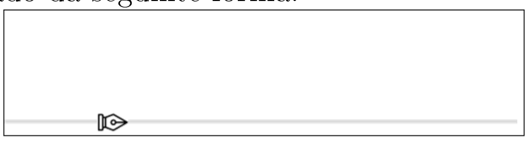


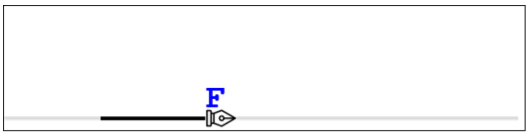
Figura 1: Primeiros estágios do fractal de floco de neve clássico de von Koch

O primeiro estágio do fractal de floco de neve clássico de von Koch, que deve gerar o polígono definido pela sequência de símbolos `F-F++F-F`, é desenhado da seguinte forma:

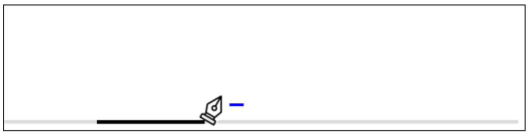
(a) Inicialmente, a "caneta" se encontra sobre uma linha horizontal e está direcionada para a direita, como mencionado anteriormente.



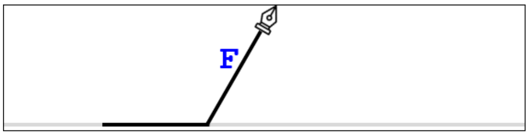
(b) `F-F++F-F` O primeiro símbolo é `F` e um segmento é desenhado nessa direção.



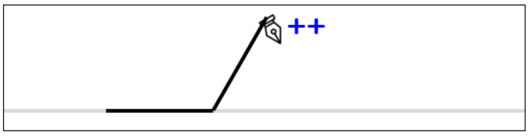
(c) `F-F++F-F` O próximo símbolo ($2^{\underline{o}}$) é `-` e a "caneta" é girada de 60° para a esquerda.



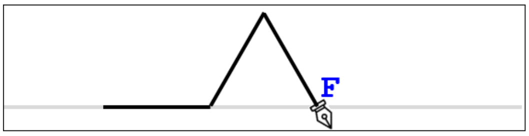
(d) F-F++F-F O próximo símbolo (3º) é F e um segmento é desenhado nessa direção.



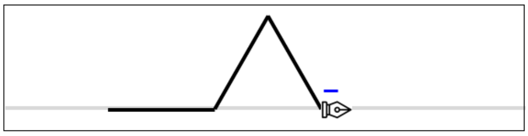
(e) F-F++F-F Os próximos dois símbolos (4º e 5º) são + e a “caneta” é girada de 120° ($2 \times 60°$) para a direita.



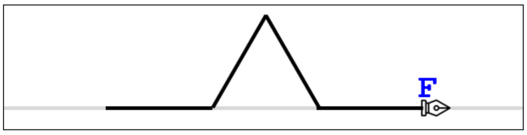
(f) F-F++F-F O próximo símbolo (6º) é F e um segmento é desenhado nessa direção.



(g) F-F++F-F O próximo símbolo (7º) é - e a “caneta” é girada de 60° para a esquerda.



(h) F-F++F-F O próximo e último símbolo (8º) é F e um segmento é desenhado nessa direção.



A Tabela 1 mostra a sequência de caracteres (string) dos estágios iniciais do fractal de floco de neve clássico de von Koch. Com os símbolos de cada sequência é possível desenhar esse estágio do fractal como ilustrado na Figura 1.

Estágio	Sequência de caracteres
1	F-F++F-F
2	F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F
3	F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++ F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F -F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F
4	F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++ F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F -F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F-F-F+ +F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F+ +F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F ++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F- F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F++F- F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F -F-F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F-F- F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F -F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F-F -F++F-F-F-F++F-F++F-F++F-F-F-F++F-F

Tabela 1: Sequência de caracteres (string) dos primeiros estágios do fractal de floco de neve clássico de von Koch

O número total de segmentos `F` gerados em n etapas completas é:

$$\#\texttt{F} = 4^n.$$

A Tabela 2 lista a quantidade de segmentos e símbolos para os primeiros estágios do fractal de floco de neve clássico de von Koch.

n	#F	#Símbolos
1	4	8
2	16	36
3	64	145
4	256	585
⋮	⋮	⋮

Tabela 2: Quantidade de segmentos e símbolos para os primeiros estágios do fractal de floco de neve clássico de von Koch

Exemplos de fractais que geram uma cadeia simples

A seguir, são apresentadas as definições de vários fractais que geram uma cadeia simples usando o L-sistema. Veja a literatura para vários outros fractais como o ilustrado na Figura 2.

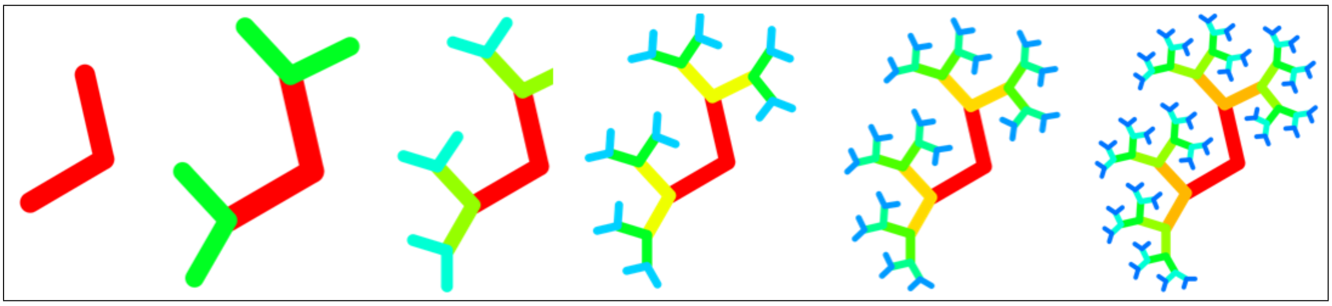


Figura 2: Exemplo de outro fractal

1. Floco de neve clássico de von Koch

Axioma:	`F`
	$\theta = \frac{\pi}{3}$
Regra:	`F` $\rightarrow$ `F-F++F-F`

2. Floco de neve onda quadrada de von Koch

Veja Figura 3.

Axioma:	`F`
	$\theta = \frac{\pi}{2}$
Regra:	`F` $\rightarrow$ `F-F+F+FF-F-F+F`

3. Floco de neve onda senoidal 1 de von Koch Veja Figura 4.

Axioma:	`F`
	$\theta = \frac{\pi}{3}$
Regra:	`F` $\rightarrow$ `F++FF--F+F`

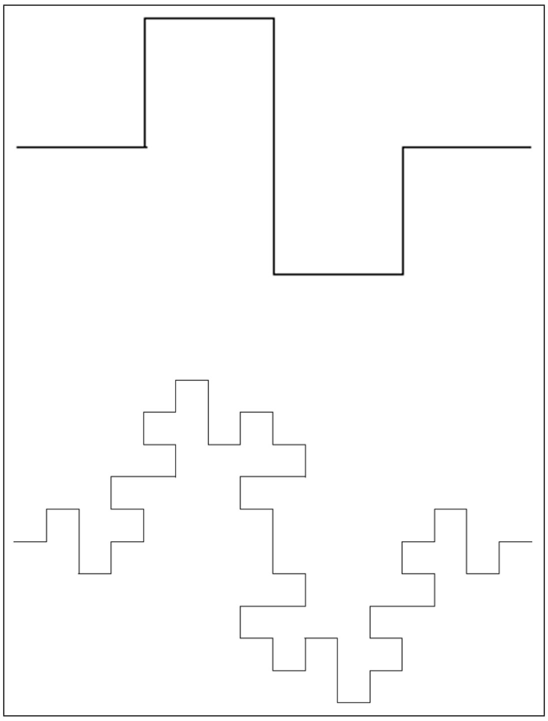


Figura 3: Dois primeiros estágios do fractal floco de neve onda quadrada de von Koch

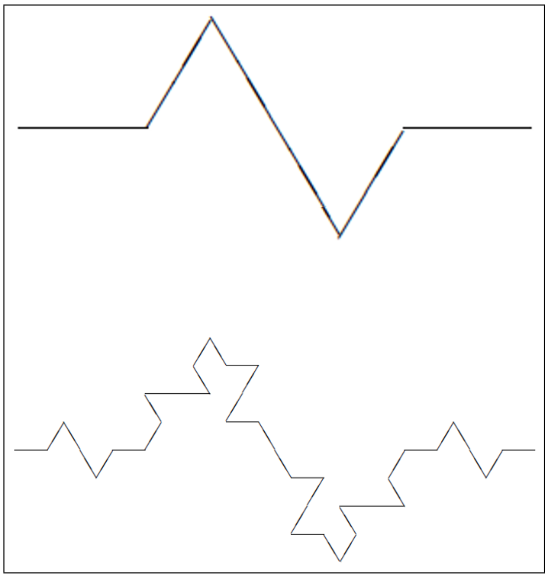


Figura 4: Dois primeiros estágios do fractal floco de neve onda senoidal 1 de von Koch

4. Floco de neve onda senoidal 2 de von Koch Veja Figura 5.

Axioma:	`F`
	$\theta = \frac{\pi}{3}$
Regra:	`F` $\rightarrow$ `F-F+F+FF-F-F+F`

5. Ilha de Koch Veja Figura 6.

Axioma:	`F+F+F+F`
	$\theta = \frac{\pi}{2}$
Regra:	`F` $\rightarrow$ `F+F-F-FFF+F+F-F`

6. Preenchimento de espaço de Hilbert Veja Figura 7.

Axioma:	`X`
	$\theta = \frac{\pi}{2}$
Regras:	`X` $\rightarrow$ `-YF+XFX+FY-`
	`Y` $\rightarrow$ `+XF-YFY-FX+`

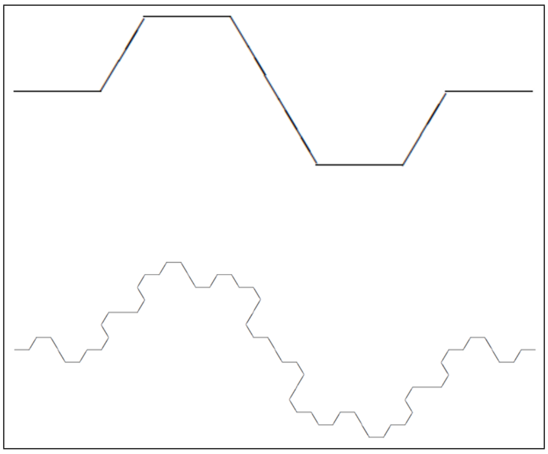


Figura 5: Dois primeiros estágios do fractal floco de neve onda senoidal 2 de von Koch

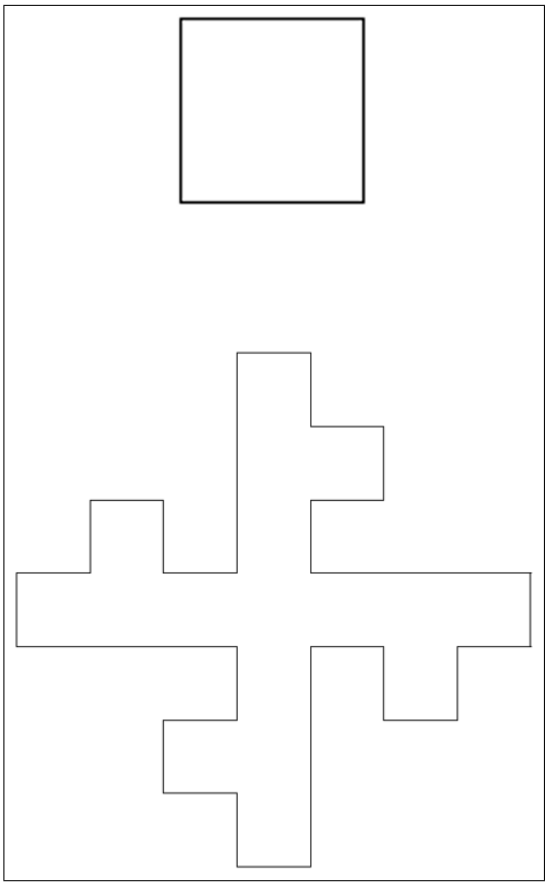


Figura 6: Dois primeiros estágios do fractal ilha de Koch

7. Preenchimento de espaço de Peano Veja Figura 8.

Axioma:	`X`
	$\theta = \frac{\pi}{2}$
Regras:	`X` $\rightarrow$ `XFYFX+F+YFXFY-F-XFYFX`
	`Y` $\rightarrow$ `YFXFY-F-XFYFX+F+YFXFY`

No caso dos fractais preenchimento de espaço de Hilbert e de Peano, temos os símbolos `X` e `Y`, os quais são usados na definição recursiva. No entanto, ao final do n-ésimo passo recursivo, esses dois símbolos devem ser removidos e a sequência de caracteres resultante terá apenas os símbolos `F`, `-` e `+`. Por exemplo, suponha que desejamos gerar a sequência de símbolos do primeiro estágio do fractal preenchimento do espaço de Peano. Temos os seguintes passos:

1. O axioma é definido pelo símbolo `X`.

2. Substituímos o símbolo `X` pela regra correspondente, para gerarmos o primeiro estágio desse fractal. Assim, temos
   `XFYFX+F+YFXFY-F-XFYFX`

3. Como desejamos gerar apenas a sequência de símbolos do primeiro estágio desse fractal, o processo recursivo está finalizado e devemos eliminar todas as ocorrências dos símbolos `X` e `Y`. Assim, temos

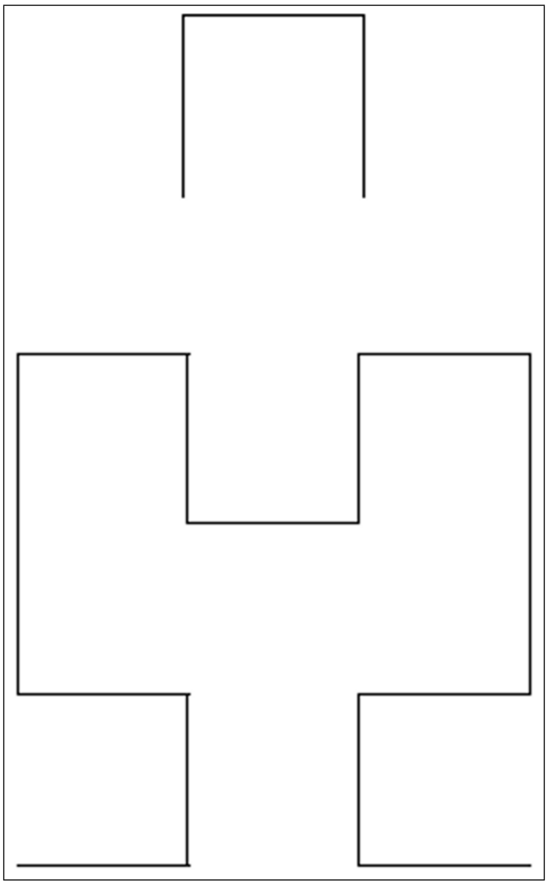


Figura 7: Dois primeiros estágios do fractal espaço de Hilbert

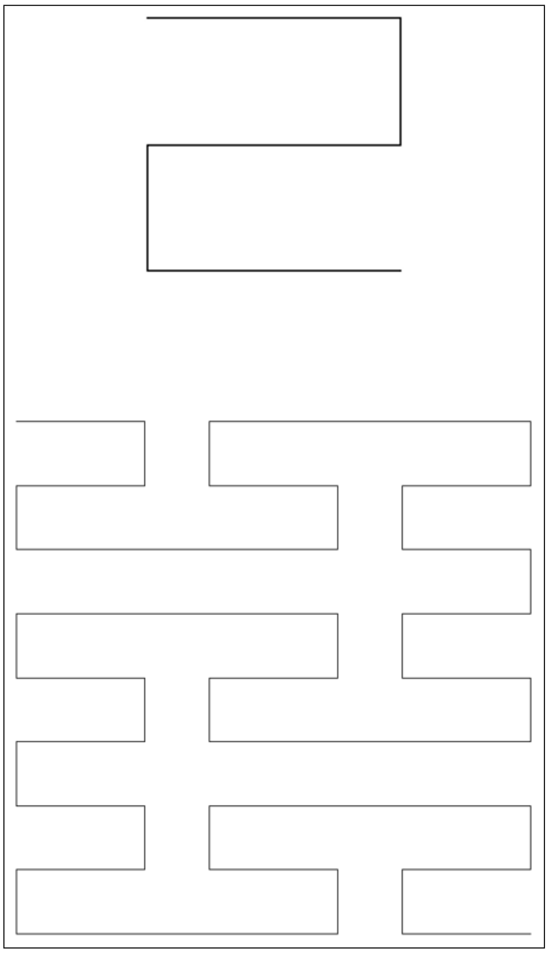


Figura 8: Dois primeiros estágios do fractal espaço de Peano

`XFYFX+F+YFXFY-F-XFYFX`: sequência do primeiro estágio com os símbolos `X` e `Y`
` F F +F+ F F -F- F F `: sequência após a eliminação dos símbolos `X` e `Y`
`FF+F+FF-F-FF` : sequência sem os espaços em branco (não devem aparecer)

Observe que a sequência resultante (`FF+F+FF-F-FF`) desenha o primeiro estágio do fractal espaço de Peano, como ilustrado na Figura 9, o qual possui oito símbolos `F` e um total de 12 símbolos.

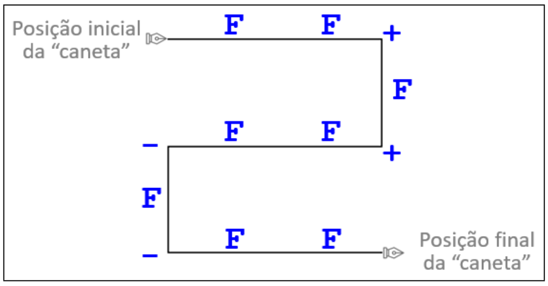


Figura 9: Primeiro estágio do fractal espaço de Peano com os símbolos associados, sendo que $\theta = 90°$

O que deve ser feito?

Este TP é constituído de cinco partes, como descrito abaixo. Leia com atenção o que deve ser feito.

1. Fazer três programas, um para cada fractal como indicado a seguir:

   (i) Um fractal dentre os seguintes:

   - Floco de neve onda quadrada de von Koch ($\sum$ algs. n$^{\underline{o}}$ matrícula mod $4 = 0$)
   - Floco de neve onda senoidal 1 de von Koch ($\sum$ algs. n$^{\underline{o}}$ matrícula mod $4 = 1$)
   - Floco de neve onda senoidal 2 de von Koch ($\sum$ algs. n$^{\underline{o}}$ matrícula mod $4 = 2$)
   - Ilha de Koch ($\sum$ algs. n$^{\underline{o}}$ matrícula mod $4 = 3$)

   Para definir o fractal que você deve implementar, pegue o seu número de matrícula (10 dígitos), some esses algarismos e calcule o resto da divisão inteira por 4. O resto será um valor entre 0 e 3, que deve ser usado para identificar o fractal a ser implementado, como definido acima. Por exemplo, para o n$^{\underline{o}}$ de matrícula 2022012345, a soma dos algarismos vale 21 e o resto da divisão inteira por 4 é 1. Assim, o fractal a ser implementado é o floco de neve onda senoidal 1 de von Koch.

   (ii) Um fractal dentre os seguintes:

   - Preenchimento de espaço de Hilbert (n$^{\underline{o}}$ de matrícula par)
   - Preenchimento de espaço de Peano (n$^{\underline{o}}$ de matrícula ímpar)

   Para o exemplo de n$^{\underline{o}}$ de matrícula anterior, o fractal a ser implementado é o preenchimento de espaço de Peano (n$^{\underline{o}}$ de matrícula ímpar).

   (iii) Um fractal definido por você que gere uma cadeia de polígonos simples que tenha pelo menos duas regras como as curvas de preenchimento de espaço de Peano e Hilbert.

2. Claramente há pelo menos duas estratégias para implementar esses fractais:

   (a) Uma versão iterativa onde os caracteres de um estágio intermediário são gravados em um arquivo, lidos e processados para gerar um outro arquivo para o próximo estágio, até se chegar ao estágio desejado.

   (b) Uma versão recursiva que gera os caracteres do estágio desejado.

   Discuta essas duas estratégias e outras que você considerou, analisando pontos positivos e negativos de cada uma.

3. Para cada um dos fractais implementados, apresente a equação de recorrência para calcular a quantidade de segmentos `F` gerados e a quantidade de símbolos existentes em cada estágio. Para o fractal de floco de neve clássico de von Koch, esses valores são apresentados na Tabela 2, mas não as equações de recorrência que levam a esses valores, o que deve ser feito aqui.

   Sugestão: para os fractais das letras (ii) e (iii) acima, para o caso da quantidade de símbolos, tente fazer as equações de recorrência considerando tudo (símbolos `F`, `-`, `+`, `X` e `Y`) e depois sem os símbolos `F`.

4. Apresente a complexidade de seus algoritmos considerando a notação assintótica mais precisa possível.

5. Investigue as opções de software (preferencialmente grátis) para desenhar os fractais gerados e discuta brevemente aqui. Apresente uma figura com os primeiros quatro estágios de pelo menos o fractal que você propôs na letra (iii) acima.

   Sugestão: tente usar algum software para desenhar os fractais.

Entrada para o TP

Será definida assim que o monitor da disciplina for alocado. No entanto, comece a fazer este trabalho imediatamente pois a solução não depende dessa entrada.

O formato da entrada será postado no Moodle da disciplina e avisado em sala de aula.

Saída do TP

Idem.