Ache os autovalores e autovetores correspondentes das transformações lineares dadas:

2. $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (2y, x)$

3. $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tal que $T(x, y) = (x + y, 2x + y)$

4. $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $(x, y, z) \mapsto (x + y, x - y + 2z, 2x + y - z)$

5. $T: P_2 \to P_2$ tal que $T(ax^2 + bx + c) = ax^2 + cx + b$

6. $T: M_2 \to M_2$ tal que $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{A}'$ (Isto é, T é a transformação que leva uma matriz na sua transposta.)

7. $T: \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ tal que $T(x, y, z, w) = (x, x + y, x + y + z, x + y + z + w)$

8. Encontre a transformação linear $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, tal que T tenha autovalores -2 e 3 associados aos autovetores $(3y, y)$ e $(-2y, y)$ respectivamente.

Ache os autovalores e autovetores correspondentes das matrizes:

9. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

11. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

13. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

14. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

16. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 14 \\ 2 & -7 & 14 \\ 2 & -4 & 11 \end{bmatrix}$

18. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 12 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

19. Seja $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Quais são os autovalores e autovetores de **A** de um espaço vetorial:

   a) Real *b*) Complexo

20. Se λ é autovalor da transformação linear $T: V \to V$ e **v** é um autovetor associado a ele, mostre que

   a) $k\mathbf{v}$ é outro autovetor associado a λ se $k \neq 0$.

   b) O conjunto formado pelos autovetores associados a λ e o vetor nulo é subespaço de V.

21. Suponha que λ_1 e λ_2 sejam autovalores distintos e diferentes de zero de $T: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$. Mostre que

   a) Os autovetores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ correspondentes são LI.

   b) $T(\mathbf{v}_1)$ e $T(\mathbf{v}_2)$ são LI.

22. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

   a) Ache os autovalores de **A** e de $\mathbf{A}^{-1}$.

   b) Quais são os autovetores correspondentes?

23. Suponha que λ seja autovalor de $T: V \to V$ com autovetor **v** e α um número não nulo. Ache os autovalores e autovetores de αT.

24. Suponha que $\mathbf{v} \in V$ seja autovetor de $T: V \to V$ e $S: V \to V$, ao mesmo tempo com autovalores λ_1 e λ_2 respectivamente. Ache autovetores e autovalores de

   a) $S + T$. *b*) $S \circ T$.

25. Seja $T: V \to V$ linear

   a) Se $\lambda = 0$ é autovalor de T, mostre que T não é injetora.

   b) A recíproca é verdadeira? Ou seja, se T não é injetora, $\lambda = 0$ é autovalor de T?

26. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ matrizes inversíveis.

   a) Calcule **AB** e **BA** e observe que estes produtos são distintos.

   b) Encontre os autovalores de **AB** e os de **BA**. O que você observa?

c) Encontre os
d) Motivado pel
versíveis de
Mostre mais
λ_1 é autoval
autovalor de
autovetor Aw

6.3.1 Respos

3. $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2},$
5. $\lambda = 1$, $\mathbf{v} = ax^2$
7. $\lambda = 1$, $\mathbf{v} = (0,$
8. $T(x, y) = (-6y,$
9. $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_1 = (x$
11. $\lambda = 1$, $\mathbf{v} = (x,$
13. $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_1 = (-$
16. $\lambda_1 = 4$, $\mathbf{v}_1 = ($
$\mathbf{v}_1 = (y, y, 0);$
17. $\lambda_1 = -3$, $\mathbf{v}_1 = ($
18. $\lambda_1 = 1$, $\mathbf{v}_1 = (($
$\mathbf{v}_3 = (x, 0, 4x,$
19. *a*) $\lambda = -2$, $\mathbf{v} =$
b) $\lambda_1 = -2$, $\mathbf{v}_1$
$\lambda_3 = -i$, $\mathbf{v}_3$
22. *a*) Os de **A** são
b) Os de **B** são
23. Autovalor $\alpha\lambda$

A demonstração deste fato é um tópico especial que deve fazer parte de um estudo mais avançado de Álgebra Linear[3].

7.5 EXERCÍCIOS

1. Entre os operadores dos exercícios 2 a 8 da secção 6.3 verifique quais são diagonalizáveis.

2. Dizemos que uma matriz $\mathbf{A}_{n \times n}$ é *diagonalizável* se seu operador associado $T_{\mathbf{A}} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ for diagonalizável, ou seja, **A** é diagonalizável se, e somente se **A** admitir n autovetores LI. Baseado nisto, verifique quais das matrizes dos Exercícios 9 a 18 da secção 6.3 são diagonalizáveis.

3. Dada a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) **A** é diagonalizável (use a definição do exercício anterior).
b) Encontre seu polinômio minimal.

4. Seja **A** uma matriz 3 × 3 triangular superior, com todos os seus elementos acima da diagonal distintos e não nulos.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$$

a) Quais são os autovalores e autovetores de **A**?
b) Qual é o polinômio minimal de **A**?

5. Para quais valores de a as matrizes abaixo são diagonalizáveis?

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ *b*) $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

---

[3]Para detalhes consulte Lipschutz, S. *Álgebra Linear*, Mc Graw-Hill do Brasil Ltda., Rio de Janeiro, 1971; ou Hoffman, K. e Kunze, R. *Álgebra Linear*, Editora Polígono, São Paulo, 1971; ou Gelfond, I. M.; *Lectures in Linear Algebra*; Interscience Publishers, New York, 1961.

6. Sejam $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ linear, $\alpha = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, a base canônica de $\mathbf{R}^3$, $\beta = \{(0, 1, 1), (0, -1, 1), (1, 0, 1)\}$ e

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

a) Encontre o polinômio característico de T, os autovalores de T e os autovetores correspondentes.

b) Ache $[T]_\beta^\beta$ e o polinômio característico. Que observação você faz a este respeito?

c) Encontre uma base γ de $\mathbf{R}^3$, se for possível, tal que $[T]_\gamma^\gamma$ seja diagonal.

7. *a*) Sejam $T: V \to V$ um operador linear (V de dimensão finita) e α e β bases distintas de T. Mostre que

$$\det\, [T]_\alpha^\alpha = \det\, [T]_\beta^\beta$$

(Sugestão: veja a relação entre $[T]_\alpha^\alpha$ e $[T]_\beta^\beta$ no Capítulo 6).

b) Se $\mathbf{A}_{n \times m}$ é diagonalizável, mostre que o determinante de $\mathbf{A}$ é o produto de seus autovalores.
(Sugestão: considere $T_\mathbf{A} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, observando que a matriz de $T_\mathbf{A}$ na base canônica é exatamente $\mathbf{A}$. Use então o resultado do item (*a*) considerando como α a base canônica e β a base de autovetores.

8. Mostre que a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ é semelhante à matriz $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

9. *a*) Mostre que um operador linear T (num espaço de dimensão finita) que comuta com qualquer operador linear diagonalizável é diagonalizável.

b) Nas condições do item (*a*) mostre que na verdade T é um múltiplo escalar do operador identidade, isto é, existe um número r tal que $T = r \cdot I$.

10. Diz-se que um operador linear $T: V \to V$ é ***nilpotente*** se existir um número inteiro positivo n, tal que $T^n = 0$ (isto é, $T \circ T \circ T \circ T \circ T \circ T \circ \ldots \circ T(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$) para todo $\mathbf{v} \in V$).

a) Seja T nilpotente. Encontre seus autovalores.

b) Encontre uma matriz $\mathbf{A}_{2 \times 2} \neq 0$ tal que $T_\mathbf{A} : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ seja nilpotente.

c) Mostre que um operador linear nilpotente, não nulo, não é diagonalizável.

11. Diz-se que um operador linear $T: V \to V$ é *idempotente* se $T^2 = T$ (isto é, se $T \circ T(\mathrm{v}) = T(\mathrm{v})$ para todo $\mathrm{v} \in V$).
a) Seja T idempotente. Ache seus autovalores.
b) Encontre uma matriz $\mathbf{A}_{2 \times 2} \neq \mathbf{0}$ tal que $T_{\mathbf{A}}: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ seja idempotente.
c) Mostre que um operador linear idempotente é diagonalizável.

*12. Mostre que $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável. No entanto, se $\mathbf{A}$ representar, numa certa base, um operador linear $T: V \to V$, onde V é um *espaço vetorial complexo*, então T é diagonalizável. Verifique este fato ou, equivalentemente, que existe uma matriz com elementos complexos $\mathbf{P}_{3 \times 3}$, inversível, tal que

$$\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}$$

*13. Problema-pesquisa:
Seja

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} M & a & a & \ldots\ldots & a & a \\ a & M & a & \ldots\ldots & a & a \\ a & a & M & \ldots\ldots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \ldots\ldots & M & a \\ a & a & a & \ldots\ldots & a & M \end{bmatrix}_{n \times n}$$

onde M e $a \neq 0$ são números reais. Mostre que
a) Os autovalores de $\mathbf{A}$ são
$\lambda = M - a$ com multiplicidade $n - 1$
e $u = M + (n - 1)a$
b) $\det \mathbf{A} = (M - a)^{n-1} \cdot [M + (n - 1)a]$

(Este é um caso particular da situação estudada no artigo "sobre uma classe de matrizes cujo problema de autovalores é facilmente solucionável" de Odelar Leite Linhares, publicado na revista Ciência e Cultura (SBPC) volume 29, número 8, de agosto de 1.977.)

14. Utilize a forma diagonal para encontrar $\mathbf{A}^n$ nos seguintes casos (n natural):

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ *b*) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$

Você pode generalizar o seu procedimento para o caso de uma matriz quadrada qualquer? Quais são as condições?

Compare este resultado com o do Exemplo anterior. Qual deles você acha melhor? Por quê?

Em geral sempre que temos uma proposta para aproximarmos uma tabela por uma função não linear fazemos certas modificações para obter uma situação linear, e então usamos 8.8.5.

Uma palavra final deve ser dada com relação à nomenclatura. Os estatísticos ao utilizarem o método dos mínimos quadrados chamam-no de *análise de regressão*. Assim, fazer *regressão linear, quadrática* ou *exponencial* significa aproximar os dados de uma tabela por uma função do tipo $a + bx$, $a + bx + cx^2$ ou $a \cdot e^{bx}$, respectivamente, utilizando o método dos mínimos quadrados (8.8.5).

8.9 EXERCÍCIOS

1. Comprove que as funções definidas nos exemplos do parágrafo 8.1 são produtos internos.

2. Seja $V = \mathbf{R}^2$. Sejam $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$. Se $f(v_1, v_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$, mostre que f é um produto interno.

3. Mostre a desigualdade triangular. (Veja 8.3.2 - *iv*) (Sugestão: $\|v + w\|^2 = \langle v + w, v + w \rangle$; desenvolva e use a desigualdade de Schwarz - 8.3.2 - *iii*).

4. Seja $\beta = \{(1, 2), (2, 1)\}$. Use o processo de Gram-Schmidt para achar uma base ortonormal β' de $\mathbf{R}^2$ em relação ao produto interno usual.

5. Seja $\beta = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 2, 0)\}$. Ache uma base ortonormal β' de $\mathbf{R}^3$, em relação ao produto interno usual.

6. Seja $\beta = \{(-1, 1), (1, 1)\}$. Ache uma base ortonormal β' de $\mathbf{R}^2$, em relação ao produto interno definido no Exercício 2.

7. Determine uma base ortonormal (em relação ao produto interno canônico) para o seguinte subespaço de $\mathbf{R}^3$:

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3;\ x - y + z = 0\}$$

8. Seja $W \subset \mathbf{R}^3$ o subespaço gerado por $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$.
   a) Considere $W^\perp$ em relação ao produto interno canônico. Encontre uma base para $W^\perp$.
   b) A mesma pergunta anterior se $W^\perp$ é considerado em relação ao produto interno $\langle (x, y, z), (x', y', z') \rangle = 2x \cdot x' + y \cdot y' + z \cdot z'$.

9. Seja $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (z, x - y, -z)$ e seja $W = ker\ T$.
   a) Encontre uma base ortonormal para $W^{\perp}$ (em relação ao produto interno canônico de $\mathbf{R}^3$).
   b) O mesmo em relação ao produto interno

$$<(x, y, z), (x', y', z')> = 2x \cdot x' + y \cdot y' + 4z \cdot z'$$

10. Considere o subespaço W de $\mathbf{R}^3$ gerado por $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (1, -1, -1)$. Sendo $<, >$ o produto interno canônico (*a*) Ache $W^{\perp}$; (*b*) Exiba uma transformação linear T: $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ tal que $Im(T) = W$ e $ker(T) = W^{\perp}$.

11. Considere em $\mathbf{R}^3$ o produto interno

$$<(x, y, z), (x', y', z')> = x \cdot x' + 5y \cdot y' + 2z \cdot z'$$

   a) Verifique se realmente é um produto interno.
   b) A partir da base $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ache uma base ortonormal.

12. Seja $\mathbf{P}_2$ o espaço das funções polinomiais reais de grau menor ou igual a dois. Definimos em $\mathbf{P}_2$

$$<f, g> = \int_{-1}^{1} f(t) \cdot g(t) dt$$

Considere W o subespaço de $\mathbf{P}_2$ gerado pelos vetores $p(t) = 1$ e $q(t) = 1 - t$.
   a) $<f, g>$ é um produto interno?
   b) Se a resposta de (*a*) for afirmativa determine uma base ortogonal para W.

13. Seja $V = \mathbf{R}^3$ e $S = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)\}$.
   a) Encontre $S^{\perp}$.
   b) Encontre uma base ortogonal para S e $S^{\perp}$.
   c) Se S fosse $[(1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 1)]$, qual seria $S^{\perp}$? Neste caso, encontre uma base ortogonal para S e $S^{\perp}$.

14. Seja $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{n \times n}$ uma matriz quadrada. Definimos o traço de $\mathbf{A}$, $Tr(\mathbf{A})$, por $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

   a) Calcule $Tr \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$
   b) $Tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = Tr(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})$?
   c) $Tr(\mathbf{A}) = Tr(\mathbf{A}^t)$?
   d) $Tr(\mathbf{A}) = (Tr(\mathbf{A}^{-1}))^{-1}$?
   e) $Tr(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = Tr(\mathbf{A}) \cdot Tr(\mathbf{B})$?

15. Sejam A e B matrizes de $M(2, 2)$. Define-se

$$< \mathbf{A}, \mathbf{B} > = Tr(\mathbf{B}^t \cdot \mathbf{A})$$

a) Verifique que $< \mathbf{A}, \mathbf{B} >$ é um produto interno.

b) Exiba uma base ortonormal segundo este produto interno, a partir da base $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

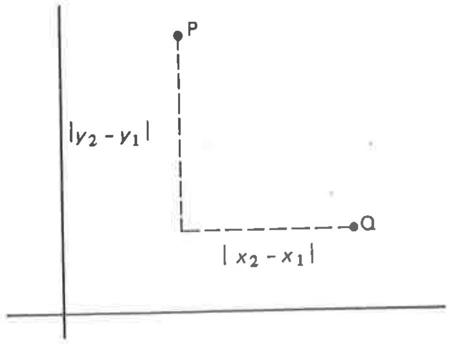
16. Um corpo é deslocado em linha reta do ponto (-1, 3) até o ponto (5, 2) por uma força constante $\mathbf{F} = (3, 2)$. Qual é o trabalho realizado?

17. Podemos definir uma "distância" entre dois pontos $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$ do plano por $d(P, Q) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ (veja a Figura 8.9.1). Verifique se a aplicação dada por

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = d(P, Q)$$

define um produto interno no plano.

Figura 8.9.1



18. Uma partícula percorre a trajetória OABO onde O, A e B são os pontos (0, 0, 0), (1, 1, 0) e (0, 1, 1) respectivamente (a unidade de comprimento é o metro) com velocidade constante de 1 m/seg. Se um campo elétrico induz uma força na partícula dada por

$$\mathbf{f} = \begin{cases} (1, 1, 1) & \text{se} \quad 0 \leqslant t < 1 \\ (1, 1, -1) & \text{se} \quad 1 \leqslant t < 2 \\ (1, -1, 1) & \text{se} \quad 2 \leqslant t < 3 \\ (-1, 1, 1) & \text{se} \quad 3 \leqslant t < 4 \\ (-1, -1, -1) & \text{se} \quad t \geqslant 4 \end{cases}$$

calcule o trabalho realizado para percorrer esta trajetória uma vez.

19. Em relação ao produto interno do Exemplo de 8.3.2 calcule x de modo que o ângulo entre $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & x \end{bmatrix}$ tenha uma medida de 90°.