Como vimos, $[\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

onde $y_1 = x_1 \cos\theta + x_2 \operatorname{sen}\theta = -2 \cos\frac{\pi}{3} + 3 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$

$y_2 = -x_1 \operatorname{sen}\theta + x_2 \cos\theta = 2 \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} + 3 \cos\frac{\pi}{3}$

donde $[\mathbf{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} \dfrac{-2 + 3\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$

ou seja, $\mathbf{v} = \left(\dfrac{-2 + 3\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{f}_1 + \left(\dfrac{3 + 2\sqrt{3}}{2}\right)\mathbf{f}_2$

4.8 EXERCÍCIOS

1. *a*) Seja V o espaço vetorial $\mathbf{R}^n$, definido no Exemplo 2 de 4.2.2. Qual é o vetor nulo de V e o que é $-(x_1, x_2, \ldots, x_n)$? *b*) Seja $\mathbf{W} = M(2, 2)$ (veja 4.2.2 Exemplo 3 *i*)) descreva o vetor nulo e vetor oposto.

2. Mostre que os seguintes subconjuntos de $\mathbf{R}^4$ são subespaços

   a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$

   b) $U = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid 2x + y - t = 0 \text{ e } z = 0\}$

3. Responda se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2, 2)$. Em caso afirmativo exiba geradores

   a) $V = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ e } b = c\right\}$

   b) $W = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ com } a, b, c, d \in \mathbf{R} \text{ e } b = c + 1\right\}$

4. Considere dois vetores (a, b) e (c, d) no plano. Se $ad - bc = 0$, mostre que eles são LD. Se $ad - bc \neq 0$, mostre que eles são LI.

5. Verifique se os conjuntos abaixo são espaço vetoriais reais, com as operações usuais. No caso afirmativo, exiba uma base e dê a dimensão.

   a) Matrizes diagonais $n \times n$

   b) Matrizes escalares $n \times n$

c) $\left\{\begin{bmatrix} a & a+b \\ a & b \end{bmatrix} : a,\ b \in \mathbf{R}\right\}$

d) $V = \{(a, a, ..., a) \in \mathbf{R}^n : a \in \mathbf{R}\}$

e) $\{(1, a, b): a, b \in \mathbf{R}\}$

f) A reta $\{(x, x + 3): x \in \mathbf{R}\}$

g) $\{(a, 2a, 3a): a \in \mathbf{R}\}$

6. Considere o subespaço de $\mathbf{R}^4$

$$S = [(1, 1, -2, 4), (1, 1, -1, 2), (1, 4, -4, 8)]$$

a) O vetor $(\frac{2}{3}, 1, -1, 2)$ pertence a S?

b) O vetor $(0, 0, 1, 1)$ pertence a S?

7. Seja W o subespaço de $M(2, 2)$ definido por

$$W = \left\{\begin{bmatrix} 2a & a+2b \\ 0 & a-b \end{bmatrix} : a,\ b \in \mathbf{R}\right\}$$

a) $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$? b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \in W$?

8. Seja W o subespaço de $M(3, 2)$ gerado por

$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. O vetor $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ pertence a W?

9. Mostre que

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

é base de $M(2, 2)$.

10. Escreva uma base para o espaço vetorial das matrizes $n \times n$. Qual a dimensão deste espaço?

11. Quais são as coordenadas de $x = (1, 0, 0)$ em relação à base $\beta = \{(1, 1, 1), (-1, 1, 0), (1, 0, -1)\}$?

12. Qual seria uma base "natural" para P_n? (Veja o Exemplo 4 de 4.2.2). Dê a dimensão deste espaço vetorial.

13. Mostre que os polinômios $1 - t^3$, $(1 - t)^2$, $1 - t$ e 1 geram o espaço dos polinômios de grau $\leqslant 3$.

14. Considere $[-a, a]$ um intervalo simétrico e $C^1[-a, a]$ o conjunto das funções reais definidas no intervalo $[-a, a]$ que possuem derivadas contínuas no intervalo. Sejam ainda os subconjuntos $V_1 = \{f(x) \in C^1[-a, a] \mid f(-x) = f(x), \forall x \in [-a, a]\}$ e $V_2 = \{f(x) \in C^1[-a, a] \mid f(-x) = -f(x), \forall x \in [-a, a]\}$.

   a) Mostre que $C^1[-a, a]$ é um espaço vetorial real.
   b) Mostre que V_1 e V_2 são subespaços de $C^1[-a, a]$.
   c) Mostre que $V_1 \oplus V_2 = C^1[-a, a]$.

15. Seja V o espaço das matrizes 2×2 sobre **R**, e seja W o subespaço gerado por

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -5 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -7 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Encontre uma base, e a dimensão de W.

16. Seja P o conjunto de todos os polinômios (de qualquer grau) com coeficientes reais. Existe uma base finita para este espaço? Encontre uma "base" para P e justifique então por que P é conhecido como um espaço de dimensão infinita.

17. *a*) Dada uma matriz **A** de ordem $m \times n$, você pode considerar as m linhas como vetores do $\mathbf{R}^n$ e o subespaço V, de $\mathbf{R}^n$, gerado por estes m vetores. Da mesma forma para a matriz **B**, linha reduzida à forma escada de **A**, podemos considerar o subespaço W gerado pelos m vetores, dados por suas linhas. Observando que cada linha de **B** é obtida por combinação linear das linhas de **A** e vice-versa (basta reverter as operações com as linhas), justifique que $V = W$.
   b) Mostre, ainda, que os vetores dados pelas linhas não nulas de uma matriz-linha reduzida à forma escada são LI.

18. Considere o subespaço de $\mathbf{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 0, 1, 1)$, $v_3 = (-2, 2, 1, 1)$ e $v_4 = (1, 0, 0, 0)$.

   a) O vetor $(2, -3, 2, 2) \in [v_1, v_2, v_3, v_4]$? Justifique.
   b) Exiba uma base para $[v_1, v_2, v_3, v_4]$. Qual é a dimensão?
   c) $[v_1, v_2, v_3, v_4] = \mathbf{R}^4$? Por quê?

19. Considere o subespaço de $\mathbf{R}^3$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, -1, 1)$ e $v_3 = (1, 1, 1)$. $[v_1, v_2, v_3] = \mathbf{R}^3$? Por quê?

20. Use o exercício 17 para exibir uma base para o subespaço S, definido no Exercício 6. Qual é a dimensão de S?

21. Considere o sistema linear

$$(\S)\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 = a \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = b \\ 6x_2 - 14x_3 = c \end{cases}$$

Seja $W = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 : (x_1, x_2, x_3)$ é solução de $(\S)\}$. Isto é, W é o conjunto-solução do sistema.

a) Que condições devemos impor a a, b e c para que W seja subespaço vetorial de $\mathbf{R}^3$?
b) Nas condições determinadas em *a*) encontre uma base para W.
c) Que relação existe entre a dimensão de W e o grau de liberdade do sistema? Seria este resultado válido para quaisquer sistemas homogêneos?

22. Seja U o subespaço de $\mathbf{R}^3$, gerado por $(1, 0, 0)$ e W o subespaço de $\mathbf{R}^3$, gerado por $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$. Mostre que $\mathbf{R}^3 = U \oplus W$.

23 Demonstre o teorema 4.3.5, isto é, mostre que, dados $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W_1 + W_2$ e $\mathbf{v} = \mathbf{w}_1' + \mathbf{w}_2' \in W_1 + W_2$ (onde $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1' \in W_1$ e $\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2' \in W_2$), então $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W_1 + W_2$ e $k\mathbf{u} \in W_1 + W_2$ para todo $k \in \mathbf{R}$.

24. Mostre que, se $V = W_1 \oplus W_2$ e $\alpha = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k\}$ é a base de W_1, $\beta = \{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_r\}$ é a base de W_2 então $\gamma = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_r\}$ é base de V.
Mostre com um exemplo que o resultado não continua verdadeiro se a soma de subespaços não for uma soma direta.

25. Sejam $W_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y = 0 \text{ e } z - t = 0\}$ e
$W_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x - y - z + t = 0\}$
subespaços de $\mathbf{R}^4$.

a) Determine $W_1 \cap W_2$.
b) Exiba uma base para $W_1 \cap W_2$.
c) Determine $W_1 + W_2$.
d) $W_1 + W_2$ é soma direta? Justifique.
e) $W_1 + W_2 = \mathbf{R}^4$?

26. **Sejam** $W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ tais que } a = d \text{ e } b = c \right\}$

e $W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ tais que } a = c \text{ e } b = d \right\}$

subespaços de $M(2, 2)$

a) Determine $W_1 \cap W_2$ e exiba uma base.
b) Determine $W_1 + W_2$. É soma direta? $W_1 + W_2 = M(2, 2)$?

27. *a*) Dado o subespaço $V_1 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ ache um subespaço V_2 tal que $\mathbf{R}^3 = V_1 \oplus V_2$.
b) Dê exemplos de dois subespaços de dimensão dois de $\mathbf{R}^3$ tais que $V_1 + V_2 = \mathbf{R}^3$. A soma é direta?

28. Ilustre com um exemplo a proposição: "Se U e W são subespaços de um espaço vetorial V que tem dimensão finita, então:
$\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$."

29. Sejam $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$, $\beta_1 = \{(-1, 1), (1, 1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$ e $\beta_3 = \{(2, 0), (0, 2)\}$ bases ordenadas de $\mathbf{R}^2$.

a) Ache as matrizes de mudaça de base:
i) $[I]^{\beta_1}_{\beta}$ *ii*) $[I]^{\beta}_{\beta_1}$ *iii*) $[I]^{\beta}_{\beta_2}$ *iv*) $[I]^{\beta}_{\beta_3}$

b) Quais são as coordenadas do vetor $\mathbf{v} = (3, -2)$ em relação à base:
i) β *ii*) β_1 *iii*) β_2 *iv*) β_3

c) As coordenadas de um vetor $\mathbf{v}$ em relação à base β_1 são dadas por

$$[\mathbf{v}]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Quais são as coordenadas de $\mathbf{v}$ em relação à base:
i) β *ii*) β_2 *iii*) β_3

30. Se

$$[I]^{\alpha'}_{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ache

a) $[\mathbf{v}]_{\alpha}$ onde $[\mathbf{v}]_{\alpha'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ *b*) $[\mathbf{v}]_{\alpha'}$ onde $[\mathbf{v}]_{\alpha} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

31. Se β' é obtida de β, a base canônica de $\mathbf{R}^2$, pela rotação por um ângulo $-\frac{\pi}{3}$, ache

a) $[I]_{\beta}^{\beta'}$ *b)* $[I]_{\beta'}^{\beta}$

32. Sejam $\beta_1 = \{(1, 0), (0, 2)\}$, $\beta_2 = \{(-1, 0), (1, 1)\}$ e $\beta_3 = \{(-1, -1), (0, -1)\}$ três bases ordenadas de $\mathbf{R}^2$.

a) Ache

i) $[I]_{\beta_1}^{\beta_2}$ *ii)* $[I]_{\beta_2}^{\beta_3}$ *iii)* $[I]_{\beta_1}^{\beta_3}$ *iv)* $[I]_{\beta_1}^{\beta_2} \cdot [I]_{\beta_2}^{\beta_3}$

b) Se for possível, dê uma relação entre estas matrizes de mudança de base.

33. Seja V o espaço vetorial de matrizes 2×2 triangulares superiores. Sejam

$$\beta = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$\text{e } \beta_1 = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

duas bases de V. Ache $[I]_{\beta}^{\beta_1}$

34. Volte a 4.7.2 e mostre efetivamente que $([I]_{\beta}^{\beta'})^{-1} = [I]_{\beta'}^{\beta}$

35. Se α é base de um espaço vetorial, qual é a matriz de mudança de base $[I]_{\alpha}^{\alpha}$?