9.4 EXERCÍCIOS

1. Seja $\alpha = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ uma base de V, um espaço vetorial real com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$.

$$[\mathbf{u}]_\alpha = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [\mathbf{v}]_\alpha = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Se $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 2$, a base α é ortonormal?

2. Ache valores para x e y tais que $\begin{bmatrix} x & y \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ seja uma matriz ortogonal.

3. Sejam $\alpha = \{(1, 1), (2, 0)\}$ e $\beta = \{(-1, 0), (2, 1)\}$. A partir das bases α e β construa bases ortonormais, usando o método de Gram-Schmidt. Se estas novas bases forem α' e β' respectivamente, mostre que a matriz de mudança de base $[I]^{\alpha'}_{\beta'}$ é ortogonal.

4. Dada uma matriz **A** cujas colunas são vetores ortonormais, prove que A é ortogonal.

5. Seja $T(x, y, z) = (2x + y, x + y + z, y - 3z)$ de $\mathbf{R}^3$ em $\mathbf{R}^3$ com produto interno canônico.
   a) Mostre que T é um operador auto-adjunto mas não ortogonal.
   b) Se $\mathbf{v} = (2, -1, 5)$ e $\mathbf{w} = (3, 0, 1)$, verifique que $\langle T\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, T\mathbf{w} \rangle$.
   c) Exiba uma base de autovetores de T e verifique que é uma base ortogonal. A partir desta base, escreva uma base ortonormal.

6. Dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{bmatrix}$.
   a) Mostre que os autovalores são: a, $b + c$ e $b - c$.
   b) Ache uma base de autovetores.

7. Seja o operador linear $T: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ cuja matriz em relação à base canônica é

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & -5 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Exiba uma base ortonormal de autovetores.

8. Mostre que uma transformação ortogonal do plano no plano deixa invariante a distância entre dois pontos, isto é, dados u e v vetores quaisquer do plano,

$$\|T(\mathbf{u}) - T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

(Sugestão: use o teorema 9.3.3 (*d*).)

9. *a*) Mostre que se T é uma transformação ortogonal do plano no plano, sua matriz em relação à base canônica só pode ser da forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

ou da forma

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\,\alpha \\ \text{sen}\,\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$$

(Sugestão: 9.3.3 (*d*).)

b) Observe que se a matriz de T for da forma dada por **A**, T será uma rotação de um ângulo α (veja 5.2.4.). Mostre que $\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}$ onde $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. (**J** é a matriz em relação à base canônica de reflexão no eixo-x. Veja 5.2.2. Conclua finalmente, usando composição de funções, que se a transformação T for dada por **B**, T será uma reflexão através de uma reta do plano que passa pela origem.

10. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n, com produto interno $\langle\, , \rangle$ e $T: V \to V$ um operador linear auto-adjunto. Se α for uma base ortonormal de V, chamemos de **A** a matriz $[T]^{\alpha}_{\alpha}$. Consideremos a transformação linear $T_{\mathbf{A}}: \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ dada por

$$T_{\mathbf{A}}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

onde $x_i \in \mathbf{C}$ (**C** = conjunto dos números complexos) e o produto interno canônico em $\mathbf{C}^n$, dado por

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle_{\mathbf{C}} = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_n\bar{y}_n$$

$$[v]_\beta = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

então
$$Q(v) = [y_1 \ \ y_2] \begin{bmatrix} 1-\sqrt{34} & 0 \\ 0 & 1+\sqrt{34} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

isto é,
$$Q(v) = (1-\sqrt{34})y_1^2 + (1+\sqrt{34})y_2^2$$

Esta diagonalização das formas quadráticas (forma normal) tem muitas aplicações e uma delas será vista na classificação das cônicas, que apresentaremos no próximo capítulo.

10.7 EXERCÍCIOS

1. Seja f uma forma linear de $\mathbf{R}^2$ em $\mathbf{R}$ tal que

$$f(x, y) = -x + 2y$$

Sejam $\alpha = \{(1, -1), (2, 0)\}$ e $\beta = \{-1\}$ bases de $\mathbf{R}^2$ e $\mathbf{R}$ respectivamente. Se $[v]_\alpha = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$, calcule $[f(v)]_\beta$.

2. Verifique se as aplicações abaixo são formas bilineares.
   a) $B: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $B((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 + y_2$
   b) $B: V \times V \to \mathbf{R}$ definida por $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

3. Em 2*b*) você deve ter mostrado que todo produto interno é uma forma bilinear. A recíproca é verdadeira?

4. Se $M = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, ache a forma bilinear $B: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ associada à matriz M. Esta forma bilinear é simétrica?

5. Qual é a matriz $M_{2\times 2}$ associada à forma bilinear de $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ que dá o produto interno usual de $\mathbf{R}^2$?

6. *a*) Seja $A: \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ definida por $A((x, y, z), (x', y', z')) = xy' + xz' - yx' - zy' + zz'$. Ache a matriz de A em relação às bases *i*) canônica *ii*) $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 0)\}$.
   b) Seja $A: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por $A((x, y), (x', y')) = xy' - yx'$ e $\alpha = \{(1, 1), (-1, 1)\}$. Ache $[A]_\alpha^\alpha$.

7. Mostre o resultado afirmado em 10.4.2 e use este fato para dar exemplos de formas bilineares simétricas $B:\mathbb{R}^5 \times \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$.

8. *a*) Seja $A((x, y), (x', y')) = 3xx' - yy'$. Ache a forma quadrática $Q:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ associada a A.
   b) Seja $Q(x, y) = 2x^2 + 4xy - y^2$. Ache a matriz da forma bilinear associada.

9. Seja $Q(x, y) = x^2 + 12xy - 4y^2$. Determine uma base β tal que

$$[\text{v}]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad Q(\text{v}) = \text{a}x_1^2 + \text{b}y_1^2$$

10. Se A é uma forma bilinear simétrica e Q a forma quadrática associada a ela, mostre que

$$A(\text{v}, \text{w}) = \frac{1}{4}\, Q(\text{v} + \text{w}) - \frac{1}{4}\, Q(\text{v} - \text{w})$$

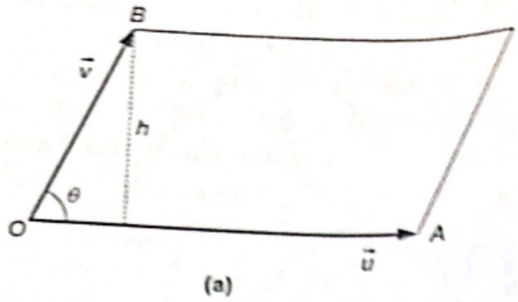
11. Uma forma quadrática Q é chamada *positiva definida*, se para todo $\text{v} \neq \mathbf{0}$, $Q(\text{v}) > 0$.
   a) Como devem ser os autovalores da matriz de uma forma quadrática positiva definida? (Pense na matriz diagonalizada.)
   b) A forma quadrática $Q:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ dada pela matriz (em relação à base canônica)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

   é *positiva definida*?

12. Mostre que se $B(\text{v}, \text{w})$ é uma forma bilinear simétrica cuja forma quadrática associada é positiva definida, então $B(\text{v}, \text{w})$ é um produto interno. Compare com o Exercício 3.

13. Considere o conjunto V^*, formado por todas as formas lineares $T:V \to \mathbb{R}$, onde V é um espaço vetorial de dimensão n, e V^* é chamado de *espaço dual* de V.
   a) Mostre que V^* é um espaço vetorial.
   b) Mostre que, dada uma base $v_1, \ldots, v_n$ de V_1 as formas $T_i : V \to \mathbb{R}$ definidas por $T_i(v_j) = 0$, se $i \neq j$ e $T_i(v_j) = 1$, se $i = j$, formam uma base de V^*.
   c) Conclua finalmente que V e V^* são espaços vetoriais isomorfos.



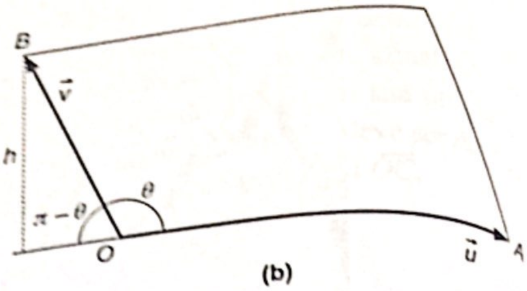


Figura 11-2

(d) Vimos no Capítulo 9 que $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$. Não vá pensar, por uma falsa analogia, que $\vec{u}\wedge\vec{v}$ é igual a $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\text{sen}\theta$. *Trata-se de erro grave*, pois $\vec{u}\wedge\vec{v}$ é vetor, e $\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\,\text{sen}\theta$ é número. De acordo com (b_1) (Definição 11-1), esse número é igual, isto sim, à *norma* de $\vec{u}\wedge\vec{v}$. Lembre-se:

Produto escalar de dois vetores é número real. Produto vetorial de dois vetores é vetor.

Exercícios

11-1 A medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é 30°, e suas normas, 2 e 3. Calcule $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$.

11-2 Sabendo que $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 7$ e $\text{ang}(\vec{u},\vec{v}) = \pi/6$ rd, calcule $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$ e $\|4\vec{u}\wedge 9\vec{v}\|$.

11-3 O triângulo ABC tem área 4. Sendo $B = A + \vec{u}$ e $C = A + \vec{v}$, calcule $\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|$.

11-4 (a) Seja h a altura do triângulo ABC relativa ao lado AB. Prove que

$$h = \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

(b) Escreva expressões análogas à do item (a) para as outras duas alturas.

(c) Sejam A, B e C pontos quaisquer tais que $A \neq B$. Baseando-se no item (a), obtenha uma fórmula para calcular a distância de C à reta r determinada por A e B.

11-5 Seja E uma base ortonormal. A medida angular entre os vetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é 30° e $\vec{u}\wedge\vec{v}$ e $(2,2,1)_E$ são de mesmo sentido. Determine a tripla de coordenadas de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ na base E.

11-6 A medida angular entre os vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é 60°, e suas normas são, respectivamente, 1 e 2. Sendo $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$, calcule a norma de $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

11-7 Calcule $(\sqrt{2}\vec{u} - \sqrt{3}\vec{v} + \vec{w})\wedge(-\sqrt{6}\vec{u} + 3\vec{v} - \sqrt{3}\vec{w})$.

(c) $\vec{u} = (1,-3,1)$, $\vec{v} = (1,1,4)$; (d) $\vec{u} = (2,1,2)$, $\vec{v} = (4,2,4)$.

BASE ORTONORMAL POSITIVA

11-18 Calcule a área do paralelogramo $ABCD$, sendo $\overrightarrow{AB} = (1,1,-1)$ e $\overrightarrow{AD} = (2,1,4)$.

11-19 Calcule a área do triângulo ABC, sendo $\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$ e $\overrightarrow{AC} = (0,1,3)$.

11-20 Na Estática dos Sólidos, é importante levar em conta o ponto de aplicação de uma força. Se S é o sistema formado pelas forças $\vec{f}_1 \ldots \vec{f}_n$, respectivamente aplicadas nos pontos $P_1 \ldots P_n$, a *resultante* de S é a força $\vec{r} = \vec{f}_1 + \ldots + \vec{f}_n$. Fixado o ponto O (*pólo*), o *momento de S em relação a O* é o vetor $\vec{m}_O = \overrightarrow{OP_1} \wedge \vec{f}_1 + \ldots + \overrightarrow{OP_n} \wedge \vec{f}_n$. Se S está em equilíbrio, $\vec{r} = \vec{0}$ e $\vec{m}_O = \vec{0}$. Para os itens (a), (b) e (c), S é formado por uma única força $\vec{f}$, aplicada em P, e s é a reta por P, paralela a $\vec{f}$ (Figura 11-7 (a)).

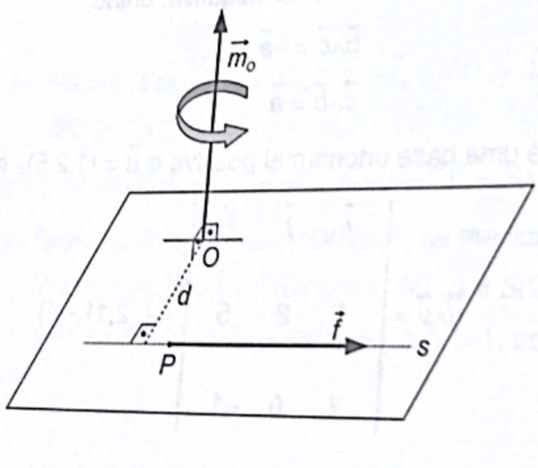
(a) Prove que, se $QO//s$, então $\vec{m}_O = \vec{m}_Q$.

(b) Se $P \neq O$, seja $\vec{h} = \vec{f} - (\text{proj}_{\overrightarrow{OP}}\vec{f})$. Prove que $\vec{m}_O = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{h}$.

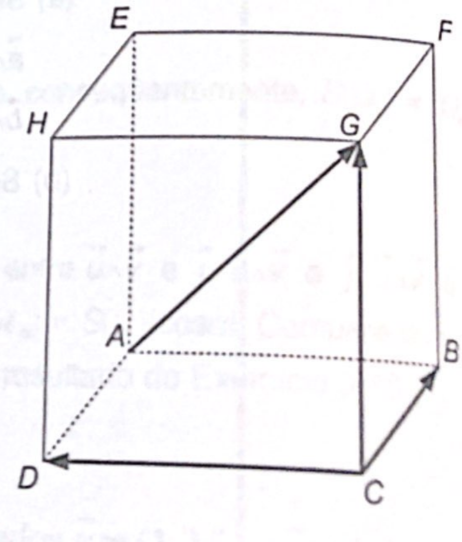
(c) Se $\vec{f} \neq \vec{0}$ e d é a distância de O a s, prove que $\|\vec{m}_O\| = \|\vec{f}\|d$.

(d) Prove a *Fórmula de mudança de pólo*: $\vec{m}_A = \vec{m}_O + \vec{r} \wedge \overrightarrow{OA}$. (Portanto, se $\vec{r} = \vec{0}$, o momento de S não depende do pólo. Em particular, se S está em equilíbrio, é nulo seu momento em relação a qualquer ponto.)

(e) O cubo da Figura 11-7 (b) tem aresta unitária e está submetido às forças aplicadas indicadas. Determine a força adicional que deverá ser exercida sobre ele para que haja equilíbrio e em que ponto ela deve ser aplicada.



(a)



(b)

Figura 11-7

11-6 *Exercício Resolvido*

Sendo $B = (\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ uma base ortonormal positiva, descreva o conjunto-solução da equação dada em cada caso.

(a) $\vec{x} \wedge (\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}) = \vec{0}$