

JORGE DOMÍNGUEZ DOMÍNGUEZ  
EDUARDO CASTAÑO TOSTADO

# Diseño de Experimentos



ESTRATEGIAS Y ANÁLISIS EN CIENCIAS E INGENIERÍA



 Alfaomega



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE QUERÉTARO

M. en A. Raúl Iturralde Olvera  
Rector

Dr. Guillermo Cabrera López  
Secretario Académico

Rest. en Arte Roberto González García  
Secretario de Extensión Universitaria

Q.B. Magali Aguilar Ortiz  
Directora de la Facultad de Química

M. en H. Sergio Rivera Guerrero  
Coordinador de Publicaciones

CENTRO DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICAS, A. C.

Dr. Oscar Adolfo Sánchez Valenzuela  
Director General

Dr. Daniel Hernández Hernández  
Coordinador del Área de Probabilidad y Estadística

María Laura Rincón Gallardo Andrade  
Directora de Planeación e Información

L.D.G. Odalmira Elvira Soto Alvarado  
Diseño Gráfico

D.R.© Universidad Autónoma de Querétaro,  
Centro Universitario, Cerro de las Campanas s/n,  
Código Postal 76010, Querétaro, Qro., México

ISBN: 978-607-7740-56-8

Primera edición, Diciembre de 2010.  
Hecho en México  
*Made in Mexico*

# Diseño de Experimentos: Estrategias y Análisis en Ciencia y Tecnología

Eduardo Castaño Tostado<sup>(1)</sup>   Jorge Domínguez Domínguez<sup>(2)</sup>

<sup>(1)</sup>Universidad Autónoma de Querétaro, Facultad de Química, Posgrado  
Centro Universitario Querétaro, Querétaro, México 76010  
e-mail: ecastano@uaq.mx

<sup>(2)</sup>Centro de Investigación en Matemáticas  
Callejón de Jalisco s/n Valenciana, Guanajuato, México 36027  
e-mail: jorge@cimat.mx



# Contenido

<b>Prefacio</b>	<b>vii</b>
<b>1 Planeación de un diseño experimental</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción . . . . .	1
1.2 Propósito del diseño experimental . . . . .	1
1.3 Estructuras del diseño experimental . . . . .	3
1.4 Estrategia del plan experimental . . . . .	10
1.5 El razonamiento estadístico de contraste de hipótesis . . . . .	14
1.6 Inferencia estadística y práctica . . . . .	16
1.7 Exactitud de técnicas experimentales . . . . .	17
1.8 Ejercicios . . . . .	17
<b>2 Diseño con un factor</b>	<b>21</b>
2.1 Factor con dos niveles . . . . .	21
2.2 Un factor con $k \geq 2$ niveles . . . . .	26
2.2.1 Análisis de varianza . . . . .	27
2.2.2 Modelo estadístico . . . . .	32
2.2.3 Formalización del ANDEVA . . . . .	33
2.3 Validación del modelo estadístico . . . . .	36
2.3.1 Análisis de Residuales . . . . .	36
2.3.2 Verificación del supuesto de homogeneidad de varianzas . . . . .	40
2.3.3 Transformaciones . . . . .	42
2.3.4 Determinación del número de réplicas . . . . .	43
2.4 Manejo de estructuras de diseño . . . . .	45
2.4.1 Restricciones a la aleatorización . . . . .	45
2.5 Análisis de Covarianza . . . . .	52
2.5.1 Caso general del análisis de covarianza . . . . .	56
2.6 Ejercicios . . . . .	59

<b>3</b>	<b>Comparaciones múltiples</b>	<b>73</b>
3.1	Recomendaciones iniciales . . . . .	73
3.2	Intervalos de confianza: diferencia de tratamientos . . . . .	74
3.3	Comparaciones planeadas entre dos medias . . . . .	75
3.3.1	Prueba de Tukey . . . . .	75
3.3.2	Prueba de Dunnett: comparaciones con un control . . . . .	77
3.3.3	Comparaciones múltiples con el mejor . . . . .	78
3.4	El estadístico de prueba de Scheffé . . . . .	83
3.4.1	Contrastes ortogonales . . . . .	85
3.5	Formalización estadística de la pruebas . . . . .	86
3.5.1	Prueba de Tukey . . . . .	86
3.5.2	Prueba de Dunnett . . . . .	88
3.5.3	Intervalos de confianza de Scheffé para contrastes . . . . .	89
3.6	Ejercicios . . . . .	91
<b>4</b>	<b>Estructura de tratamientos factorial</b>	<b>95</b>
4.1	Análisis con un solo factor . . . . .	95
4.2	Diseños con más de un factor . . . . .	98
4.3	Factorial $2^2$ . . . . .	100
4.3.1	Cálculo de efectos . . . . .	100
4.3.2	Inferencia estadística . . . . .	105
4.4	Factorial $2^3$ . . . . .	107
4.4.1	Cálculo de efectos . . . . .	107
4.4.2	Inferencia estadística . . . . .	109
4.5	Factorial general de dos factores . . . . .	120
4.5.1	El análisis de varianza para dos factores . . . . .	121
4.5.2	Modelo estadístico . . . . .	125
4.6	Ejercicios . . . . .	127
<b>5</b>	<b>Estructura factorial fraccionada</b>	<b>139</b>
5.1	Conceptos básicos . . . . .	139
5.2	Factorial $2^3$ fraccionado . . . . .	140
5.3	Alias y resolución . . . . .	144
5.4	Factorial $2^4$ fraccionado . . . . .	146
5.5	Fracciones más pequeñas . . . . .	149
5.6	Criterio de aberrancia mínima . . . . .	152
5.7	Análisis de efectos confundidos . . . . .	153
5.7.1	Adición de corridas . . . . .	153
5.7.2	Técnica de desdoble . . . . .	158
5.8	Generadores de fracciones en diseños $2^k$ . . . . .	163
5.9	Diseños de Plackett y Burman . . . . .	164

5.9.1	Construcción del diseño PB . . . . .	164
5.10	Contribuciones de Taguchi . . . . .	166
5.10.1	Cocientes señal a ruido . . . . .	167
5.10.2	Diseño robusto de parámetros . . . . .	168
5.10.3	Arreglos ortogonales . . . . .	169
5.10.4	Doble arreglo ortogonal . . . . .	171
5.10.5	Un arreglo ortogonal combinado . . . . .	174
5.10.6	Sistemas de señal - respuesta . . . . .	175
5.11	Ejercicios . . . . .	187
<b>6</b>	<b>Estructura de tratamientos factoriales <math>3^k</math></b>	<b>201</b>
6.1	Diseño factorial $3^k$ y su análisis estadístico . . . . .	201
6.2	Factorial $3^k$ fraccionado . . . . .	209
6.2.1	Fracción un tercio del factorial $3^3$ . . . . .	209
6.2.2	Fracción de un $3^k$ por medio del cuadrado latino . . . . .	212
6.2.3	Diseño Plackett - Burman para factoriales $3^k$ . . . . .	214
6.3	Ejercicios . . . . .	216
<b>7</b>	<b>Algunos diseños especiales</b>	<b>225</b>
7.1	Diseño en parcelas divididas . . . . .	225
7.1.1	Estimación de varianzas con aleatorización en dos etapas . . . . .	227
7.1.2	¿Cuándo debe aplicarse este tipo de diseño? . . . . .	231
7.2	Experimentos con mediciones repetidas en el tiempo . . . . .	234
7.3	Diseños que involucran anidamiento . . . . .	240
7.4	Sobre errores de restricción en la aleatorización . . . . .	247
7.5	Ejercicios . . . . .	249
<b>8</b>	<b>El modelo de análisis de regresión</b>	<b>257</b>
8.1	Introducción . . . . .	257
8.2	Modelos de primer y segundo orden . . . . .	259
8.3	Estimación de los Parámetros del Modelo . . . . .	262
8.4	Significancia global de un modelo ajustado . . . . .	274
8.5	La verificación de falta de ajuste . . . . .	277
8.6	Tipos de diseños para optimización . . . . .	281
8.6.1	Diseños de primer orden . . . . .	282
8.6.2	Diseños de segundo orden . . . . .	282
8.7	Ejercicios . . . . .	290

<b>9 Optimización estadística del proceso</b>	<b>303</b>
9.1 Introducción . . . . .	303
9.2 Ubicando a la región óptima . . . . .	304
9.3 Procedimiento de optimización . . . . .	316
9.4 Caracterización del punto estacionario . . . . .	319
9.5 Análisis de lomas . . . . .	321
9.6 Optimización de varias respuestas . . . . .	324
9.6.1 Método de superposición de curvas de nivel . . . . .	324
9.6.2 Funciones de deseabilidad . . . . .	326
9.7 Optimización aplicada al diseño robusto . . . . .	334
9.7.1 Optimización en función de factores de ruido . . . . .	335
9.7.2 Esperanza de $(y - T)^2$ . . . . .	338
9.8 Ejercicios . . . . .	338
<b>10 Diseños de experimentos con mezclas</b>	<b>357</b>
10.1 Introducción . . . . .	357
10.2 Definición del problema . . . . .	358
10.3 Diseños . . . . .	359
10.3.1 Diseño simplex reticular (látice) . . . . .	359
10.3.2 Diseños simplex centroide . . . . .	361
10.3.3 Diseños axiales . . . . .	361
10.4 Análisis de experimentos con mezclas: el polinomio canónico . . . . .	361
10.5 Diseños con restricciones factoriales . . . . .	366
10.6 Preguntas en un experimento con mezclas . . . . .	369
10.7 Factores de proceso . . . . .	370
10.8 Otros análisis para diseños con mezclas . . . . .	370
10.8.1 Coeficientes polinomiales . . . . .	370
10.8.2 Estimación de parámetros en los polinomios $\{q, m\}$ . . . . .	372
10.8.3 Verificar el grado del modelo ajustado . . . . .	375
10.8.4 Carencia de Ajuste . . . . .	377
10.9 Ejercicios . . . . .	384
<b>Apéndices técnicos</b>	<b>391</b>
10.10 Apéndice Técnico D . . . . .	401
<b>Referencias</b>	<b>405</b>
<b>Tablas</b>	<b>411</b>



# Prefacio

*...Pues las causas me andan cercando  
cotidianas, invisibles.  
Y el azar se me viene enredando  
poderoso, invencible.  
Silvio Rodríguez*

La planeación es una actividad que permite eficacia, eficiencia y efectividad en el trabajo. En la investigación experimental, la planeación implica diseñar el experimento. Pretendemos que al estudiar este libro, el estudiante adquiera habilidades básicas pero esenciales en el diseño de experimentos y en el análisis estadístico de los resultados generados.

Este libro surge de la experiencia de los autores tanto a nivel de enseñanza de la materia propia del texto, como de la experiencia práctica en el diseño de experimentos en la investigación experimental tanto a nivel industrial como a nivel de ciencia y tecnología. Esto último se ve reflejado en algunos ejemplos y ejercicios. Está dirigido a usuarios de Estadística y no a estudiantes de alguna ciencia matemática. Por ello, el nivel matemático recomendado en general para estudiar este libro es el de un estudiante típico de ingeniería o de ciencias químico biológicas, después de haber tomado cursos de álgebra y de cálculo. En el texto principal no hay derivaciones matemáticas, algunas de ellas se presentan en el apéndice técnico. Por otra parte, no se presentan enfoques matemáticos alternativos en el manejo de los datos; sólo se presenta la mejor alternativa según la experiencia de los autores.

El énfasis es en los conceptos, objetivos por lograr y suposiciones, así como en la interpretación de resultados.

El contenido del texto está dividido en diez capítulos, para un curso de 120 horas. El primer capítulo desarrolla ideas y presenta conceptos importantes en la práctica de diseñar experimentos reales. El segundo y tercer capítulos presentan

diseños adecuados cuando se estudia un solo factor, considerando o no restricciones en la aleatorización de tratamientos, así como el manejo de covariables. Los capítulos del cuatro al seis, presentan la teoría sobre los diseños factoriales, de manera esencial, factoriales con factores de dos y tres niveles y el uso de fracciones correspondientes, así también se presentan los elementos de lo que se conoce como diseño robusto de parámetros. En el capítulo siete, se presentan tres diseños de mucha importancia práctica, como el diseño en parcelas divididas, experimentos con mediciones repetidas en el tiempo y básicos de diseños anidados. En el capítulo ocho se da una introducción básica al importante tema del modelo de análisis de regresión, que servirá como herramienta en el capítulo nueve donde se presenta los elementos esenciales de la metodología de superficie de respuesta. Finalmente en el capítulo diez se presentan elementos básicos del tema importante de diseño en experimentos con mezclas.

Como todo trabajo, este texto resulta de la unión de esfuerzos; agradecemos a todos aquellos que aportaron a este modesto texto, que pretende difundir más sobre una de las herramientas más poderosas desarrollada por la comunidad estadística a lo largo de su historia. A nosotros nos toca agradecer a nuestros maestros, tanto en la UNAM como en el IPN, que nos formaron. Agradecemos el valioso aporte de nuestros estudiantes de la Maestría en Ciencia y Tecnología de Alimentos, del Programa de Posgrado de Alimentos del Centro de la República Mexicana (PROPAC) con sede en la Universidad Autónoma de Querétaro y de la maestría en Ingeniería de Calidad de la Universidad Iberoamericana campus León.

Agradecemos a los experimentadores y empresas que han pensado como útil nuestra asesoría.

Finalmente, pero no por último, agradecemos profundamente a nuestros centros de trabajo, la Universidad Autónoma de Querétaro y el Centro de Investigación en Matemáticas, por dar el espacio para la escritura del presente texto.

Eduardo Castaño Tostado  
Jorge Domínguez Domínguez

# Capítulo 1

## Planeación de un diseño experimental

*La experiencia es la única fuente de la verdad: sólo ella puede enseñarnos algo nuevo; sólo ella puede darnos la certeza.*

*H. Poincaré*

### 1.1 Introducción

La planeación es una actividad que permite eficacia, eficiencia y efectividad en el trabajo. En la investigación experimental, la planeación implica diseñar el experimento. El diseño estadístico de un experimento da la posibilidad de que éste sea realizado de una manera eficiente, es decir, con el mínimo de recursos materiales y tiempo. El diseño estadístico de experimentos se debe usar como una metodología que permite plantear distintas estrategias para seleccionar, controlar, analizar e interpretar diferentes condiciones de estudio en un fenómeno de una manera objetiva y sistemática.

### 1.2 Propósito del diseño experimental

En el trabajo experimental se tiene en general una doble tarea; en primer lugar se deben diseñar e interpretar los experimentos propios; en segundo lugar es necesario evaluar de manera crítica la información ya generada en trabajos experimentales ajenos al propio. Así, para esta doble tarea resulta esencial saber si un experimento es propiamente concebido, controlado de la forma correcta, adecuadamente analizado y correctamente interpretado.

Un buen diseño experimental es uno en el que los efectos de las condiciones seleccionadas y manipuladas en el sistema experimental pueden ser cuantificados

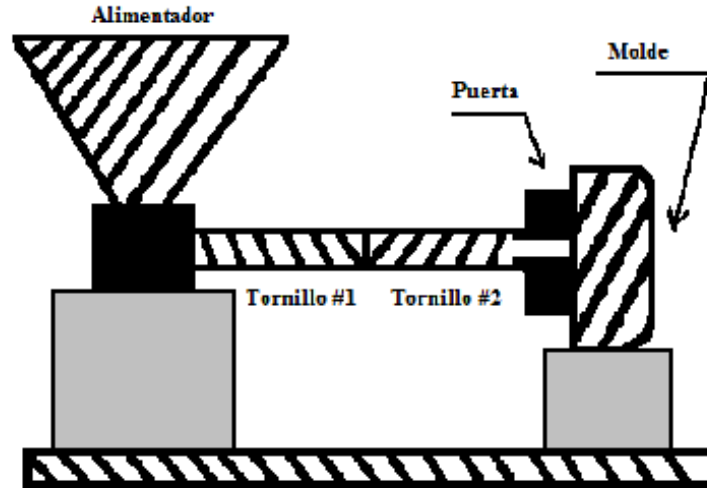


Fig. 1.1: Esquema simplificado de un extrusor

y entendidos sin confusión con efectos ruidosos operando en el sistema experimental.

Con el fin de motivar algunos conceptos, se considera como ejemplo al proceso de extrusión, que en la actualidad se emplea en industrias como la de alimentos, de plásticos y de la construcción, entre otras. Varios científicos e ingenieros utilizan este proceso a nivel de laboratorio para el desarrollo de nuevos productos. En la Fig. 1.1 se puede observar el esquema de un extrusor; un producto extrudido sufre alteraciones en sus características de calidad de acuerdo a las condiciones de operación del extrusor; entre las condiciones de operación se puede mencionar la temperatura de cocción, la velocidad de los tornillos sin fin, la cantidad del producto que entra al extrusor, el tipo o variedad del producto, el tiempo de operación, la forma de la placa de salida, el tipo de materia prima utilizada, el operador y las condiciones ambientales.

Todos estas condiciones y otras aún no consideradas debido al estado actual del conocimiento tecnológico del proceso, dan lugar a mediciones de ciertas características denominadas variables respuesta. Por ejemplo, en un producto extrudido alimenticio, las respuestas podrían ser un coeficiente de textura, una cantidad de proteína, un porcentaje de humedad, todas medidas en el producto final de la extrusión. En este punto se plantea la necesidad de evaluar las condiciones de operación que tienen un efecto significativo en alguna de las respuestas de interés. La variabilidad en las características del producto bajo producción, y

por lo tanto su calidad, es así dependiente de esas condiciones de operación, y se requiere cuantificar tal dependencia.

Una estrategia eficiente para seleccionar, manipular e identificar las condiciones de operación que tengan efectos en las características de calidad del producto requiere del diseño experimental.

## 1.3 Estructuras del diseño experimental

### Estructura de Tratamiento

**Factor.** Una variable de interés controlada hasta cierto punto por el experimentador, de la que se desea estudiar sus efectos en una o varias respuestas. Ejemplo: se desea medir la dimensión de un cilindro para evaluar su efecto sobre la fricción en un sistema mecánico. Los factores pueden ser concebidos como cualitativos o cuantitativos.

**Nivel.** Modalidad específica dentro de un factor. Ejemplo: si el factor es el tiempo de operación, el interés puede ser estudiar la respuesta del proceso durante tres periodos diferentes, a saber 10, 30 y 50 seg. En este caso se dice que el factor tiene tres niveles.

**Tratamiento.** Se refiere a cada una de las combinaciones de los niveles de varios factores aplicados conjuntamente a las unidades experimentales.

*Estructura de tratamientos de un diseño experimental:* Consiste en el conjunto de tratamientos que el experimentador ha seleccionado para estudiar y/o comparar. Puede haber estructuras con un factor (OFAT) o varios factores; pueden considerarse todos los tratamientos (diseño factorial) o un subconjunto del total de tratamientos según el interés (diseño factorial incompleto).

**Efecto Principal.** Indica la contribución que cada factor tiene sobre las variables respuesta. Ésta se mide evaluando el cambio que se produce en la respuesta al modificar los niveles del factor. Los efectos se pueden clasificar en efectos de localización (sobre la media de una variable respuesta) y efectos de dispersión (sobre la variabilidad de una variable respuesta). Si en el sistema experimental se tiene un factor que tenga efectos de localización pero no de dispersión, se le llama factor de ajuste.

**Interacción.** Considerando los efectos sobre las variables respuesta bajo estudio, la interacción implica una relación o dependencia entre los efectos de dos o más factores; por ejemplo para el caso de dos factores, si hay interacción entre éstos, el efecto sobre la respuesta de uno de ellos dependerá del nivel del segundo factor.

Ahora revisemos algunas definiciones y conceptos respecto a la estructura de diseño.

### Estructura de Diseño: manejo de ruido experimental

En términos generales siempre hay ruidos circundantes al sistema experimental; el ruido se refleja en la respuesta variante de lo que se conoce como unidad experimental. Unidad Experimental (UE): individuo, objeto o unidad de material a la que se le aplica de manera independiente un tratamiento, a ésta se le miden las variables respuesta bajo estudio.

Conceptualmente el ruido se compone de tres fuentes: *el error experimental*, *el error de medición* y *el error ambiental*.

*El error experimental* es aquel que cada unidad experimental aporta de manera natural en un estudio. Este error experimental, inherente a cada unidad experimental, no es observable, pero se manifiesta claramente al comparar unidades experimentales igualmente tratadas, ya que éstas mostrarán diferencias en sus respuestas.

*El error de medición* también siempre presente, se caracteriza y acota mediante buenas prácticas de evaluación de sistemas de medición (ver por ejemplo Burdick et al., 2003). Validado el sistema de medición requerido en el estudio, al error de medición se le considera entonces como parte del error experimental.

Si se piensa que *el ruido ambiental* es sólo error experimental, sus efectos no deseados se pueden evitar mediante lo que se conoce como aleatorización de tratamientos.

**Aleatorización de tratamientos.** Experimentar tiene como finalidad entender causas de por qué un fenómeno varía. La aleatorización es la base para establecer si las variaciones observadas se deben al error experimental o a efectos debidos potencialmente a factores de control en un sistema experimental. Si no hay aleatorización en un experimento, se corre el riesgo de que las interpretaciones de las variaciones no sean correctas. Dado que en todo sistema experimental existen efectos potenciales de factores de control y efectos del error experimental, y se desea entender prioritariamente cómo los factores de control afectan, se debe tener cuidado de no confundir efectos debidos al error con efectos de los factores de control. Una forma de enfrentar esta confusión es mediante lo que se conoce como aleatorización, es decir la asignación aleatoria (“objetiva”) de los niveles de factores de control (cada tratamiento) a cada unidad experimental.

Si se piensa que en el sistema experimental opera ruido ambiental importante más allá del error experimental, es necesario su manejo eficiente. En general hay dos formas de manejar el ruido ambiental:

- Acotar sus efectos no deseados, formando grupos de unidades experimentales (bloqueo) o midiendo covariables.
- Utilizarlo para propósitos de robustificación / generalización de los efectos de factores de interés.

**Bloqueo** Si el ruido ambiental tiene potencialmente efectos importantes en el sistema experimental la aleatorización no podría garantizar la validez experimental, por lo que hay que acotar efectos nocivos del ruido formando grupos de UE, cada grupo de UE con el mismo nivel de ruido ambiental antes de la aleatorización de tratamientos. Ya formados los grupos aplicar los tratamientos de manera aleatoria dentro de cada grupo. En este caso se dice que se realiza una aleatorización con restricciones (dentro de los grupos homogéneos de UE). Así, la estructura de diseño debe buscar el agrupamiento de UE, de tal manera que las condiciones bajo las que los diferentes tratamientos se asignen, sean lo más uniforme posible para permitir que sólo las diferencias (potenciales) entre tratamientos se perciban con facilidad. Lo ideal es que todas las UE sean homogéneas antes de aplicarles el tratamiento. Alejándose de este ideal la estructura de diseño tenderá a complicarse para evitar que el ruido oscurezca las comparaciones entre tratamientos de interés. Para ello se debe utilizar todo el conocimiento disponible del ruido circundante a las UE. A esta estrategia de acotamiento del ruido experimental se le denomina bloqueo.

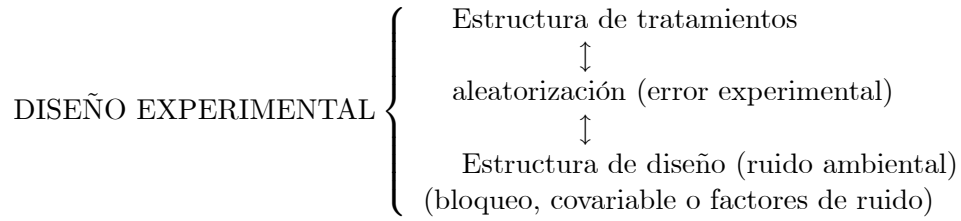
Bloqueo: agrupación de unidades experimentales de acuerdo al nivel del ruido ambiental que reciben y por ende con relativa homogeneidad en su respuesta antes de ser tratadas.

Dos suposiciones importantes de la agrupación (bloquear) de UE son: primera, se considera que los criterios para formar bloques de UE son tales que éstos se consideran provenientes de una población hipotética de bloques, y por ende potencialmente los efectos de bloques son aleatorios. Es decir, no le interesan al experimentador estos efectos por sí mismos. Segunda suposición: no hay interacción entre los criterios para formar bloques y los tratamientos. Es decir, se supone que las diferencias potenciales entre los tratamientos serán consistentes de grupo a grupo (salvo variación aleatoria).

**Covariables** La formación de bloques representa una manera de acotar los efectos del ruido circundante. Una alternativa para la formación de bloques, es medir el ruido ambiental durante el experimento, siguiendo un enfoque denominado análisis de covarianza, donde se miden variables (denominadas en general covariables) que covarían con la variable respuesta de las unidades experimentales antes de ser tratadas.

**Robustificación** Si componentes del ruido ambiental no son sólo medidos sino son manipulados durante el experimento para poder cuantificar sus efectos, se les estará dando un carácter de factores, así denominados "factores de ruido"; en el capítulo cinco se presentan diseños experimentales que involucran factores de ruido. Dados factores de ruido en el sistema experimental, las interacciones se

pueden presentar entre factores de control, o entre factores de control y factores de ruido, o entre factores de ruido, orden de importancia decreciente, respectivamente. Las interacciones entre factores de control se consideran ya sea para entenderlas o para determinar la mejor combinación de niveles de los factores de control involucrados. La consideración de las interacciones entre factores de control y factores de ruido es ya sea para entender cómo afectan los factores de ruido en los efectos de factores de control, o para seleccionar la mejor condición de control a pesar de los efectos de los factores de ruido. Esto constituye una estrategia de robustificación.



La Tabla 1.1 muestra una breve clasificación de los diseños experimentales de acuerdo a sus estructuras, los cuales serán definidos y analizados a lo largo del libro.

Estructura de tratamiento	Estructura de diseño
un factor : ( $k$ niveles)	completamente aleatorizado
arreglo factorial : (dos o más factores)	bloques completamente aleatorizado
arreglo factorial fraccionado	cuadro latino, grecolatino
arreglo factorial en parcelas divididas	bloques incompletos
arreglo factorial anidado	parcelas divididas

Tabla 1.1 Diseños Experimentales de acuerdo a sus estructuras

### Variación experimental

Supongamos el caso de una variable respuesta denotada por  $y$  y que el experimento tiene como objetivo comparar  $k$  tratamientos en sus efectos sobre la media de la variable respuesta. Para determinar si tales tratamientos son estadísticamente diferentes entre sí, es decir verificar si la media de la variable respuesta cambia al cambiar el tratamiento, se realizaría un experimento:  $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n_1}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n_2}, \dots, y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kn_k}$ , donde  $y_{ij}$  denota la respuesta en el tratamiento  $i$  en la UE  $j$  que la recibió. Supongamos inicialmente que las UE son homogéneas en su respuesta antes de ser tratadas. A continuación se escriben cuatro expresiones estadísticas útiles.



Promedio del tratamiento  $i$ :

$$\bar{y}_{i\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n_i}, i = 1, \dots, k$$

Desviación estándar del tratamiento  $i$  :

$$S_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2}{n_i - 1}}, \quad i = 1, \dots, k$$

Promedio total:

$$\bar{y}_{\bullet\bullet} = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{\sum_{i=1}^k n_i}$$

Desviación estándar combinada total:

$$S_p = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)}}$$

Así las diferencias de interés por analizar serían de la forma  $(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Numéricamente hablando los  $k$  tratamientos se consideran iguales en sus efectos sobre la variable respuesta, si sus diferencias versus el promedio total  $\bar{y}_{\bullet\bullet}$  son iguales. Sin embargo que sean exactamente iguales no es posible en experimentación, por ello la pregunta relevante para el experimentador es:

*Más allá del error experimental, ¿hasta dónde considerar que las diferencias  $(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})$ ,  $i = 1, \dots, k$ , indican diferencias entre tratamientos?*

Para responder a esta pregunta se usan modelos estadísticos. Uno muy útil es el modelo estadístico lineal

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij} \tag{1.1}$$

para modelar a la variación en  $y_{11}, y_{12}, \dots, y_{1n_1}, y_{21}, y_{22}, \dots, y_{2n_2}, \dots, y_{k1}, y_{k2}, \dots, y_{kn_k}$ , donde  $\mu_i$  representa el valor medio de  $y$  en el tratamiento  $i$  y  $\varepsilon_{ij}$  representa

un error experimental correspondiente a la UE  $j$  que recibió aleatoriamente el tratamiento  $i$ . Note que el componente  $\mu$  representa los factores a ser manipulados en el experimento representando así el componente sistemático de  $y$ ; mientras que el componente  $\varepsilon$  representa la parte no sistemática, natural, pero no importante de  $y$ . Con este modelo, la pregunta anterior se plantea contrastando la hipótesis

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

con los datos. Es decir, observando qué tanto apoyan los datos a la hipótesis de que las respuestas medias de los  $k$  tratamientos son iguales (la llamada hipótesis nula).

Para realizar tal contraste exitosamente, se debe manejar adecuadamente al ruido ambiental. Si el diseño identifica factores de control y de ruido pertinentes en el sistema experimental a través de  $\mu_i$ , el término  $\varepsilon_{ij}$  representa al error experimental y entonces es una perturbación pequeña y con variación independiente del tratamiento aplicado o del ruido del ambiente circundante. Con ello es plausible suponer  $\varepsilon_{ij}$  es una variable aleatoria con media 0 y varianza  $\sigma^2$  constante.

En el modelo (1.1) lo que no se reconozca como parte de  $\mu_i$  irá a  $\varepsilon_{ij}$ . Este trabajo de reconocimiento y uso de fuentes de variación es la esencia de un buen diseño experimental. Así, si tal reconocimiento de fuentes de variación es exitoso,

$$V(\bar{y}_{i\bullet}) = \frac{\sigma^2}{n_i}, i = 1, \dots, k. \quad (1.2)$$

Es decir, la variabilidad de cada promedio sólo dependerá de la variabilidad del error experimental y del número de réplicas del tratamiento correspondiente. Si en el experimento por realizar la identificación de fuentes de variación importantes no es exitoso, la estimación de (1.2) por medio de los datos experimentales será inflada, con consecuencias en la precisión para detectar diferencias entre tratamientos.

Entonces, a la vista de  $V(\bar{y}_{i\bullet})$ , un buen diseño experimental debe primordialmente controlar la variación experimental por medio de la estimación eficiente de  $\sigma^2$  a través del reconocimiento a priori, y de manera adecuada, de las fuentes de variación presentes en el experimento, materia sobre la que versa este texto.

En segundo lugar un diseño experimental controlará la variación experimental a partir del número de réplicas. **Una réplica** consiste en la aplicación repetida e independiente de un tratamiento a distintas UE's. Contar con réplicas da las siguientes ventajas:

- El experimentador tiene una estimación de  $\sigma^2$ , necesaria para realizar contrastes de hipótesis y construir intervalos de confianza para comparar sus tratamientos.

- Permite reducir la variabilidad de los promedios, ya que, como se vio en (1.2), la varianza de  $\bar{y}_{i\bullet}$  depende del número de replicaciones  $n_i$ .
- Puede incrementar el rango de inferencia del experimento, seleccionando y usando apropiadamente UE menos homogéneas, o no controlando condiciones ruidosas circundantes. Este aspecto es clave en la diferencia entre un experimento científico básico y uno tecnológico o ingenieril.
- Posibilita ejercer control sobre la variabilidad del error, ya que la réplica nos impone restricciones que nos llevan a agrupar UE de acuerdo a su respuesta esperada en ausencia de tratamiento y así asignar la variación total entre UE de tal manera que sea maximizada la variabilidad entre grupos y simultáneamente minimizada dentro de grupos.

Las condiciones que determinan el número de réplicas son:

- La precisión requerida en el experimento, es decir, qué tan pequeñas son las diferencias entre medias que se desea detectar por medio de éste. Entre menor sea la desviación de la hipótesis nula a ser medida o detectada, mayor el número de réplicas requeridas.
- Respecto al material que compone a las unidades experimentales, la variabilidad en algunos materiales es mayor que en otros. Entre más variable, más replicaciones, y viceversa. Por ejemplo, experimentos con materiales vivos requerirán en general el uso de un mayor número de réplicas.
- El número de tratamientos afecta la precisión de un experimento. Si el número de tratamientos aumenta y el número de réplicas por tratamiento se mantiene constante, de cualquier manera incrementa el tamaño del experimento, así como los grados de libertad para estimar  $\sigma^2$ . En este caso la precisión del estimador mejora.
- Si la precisión alcanza un grado más alto del requerido, se puede bajar el número de réplicas. Si el número de tratamientos aumenta pero se mantiene constante el tamaño del experimento, es decir el mismo número de réplicas a repartirse entre los diferentes tratamientos, habrá obviamente menos por tratamiento y menos grados de libertad para el estimador de  $\sigma^2$ , con lo que la precisión será más pobre.
- El diseño experimental también puede afectar la precisión de un experimento y el número de réplicas requeridas. Dependiendo del diseño se puede disminuir o aumentar el número de réplicas.

En el Capítulo 2 se dará un método para el cálculo del número de réplicas. Desafortunadamente el número de réplicas está en muchos casos determinado por consideraciones económicas y de tiempo para llevar a cabo el experimento. Sin embargo, no tiene caso realizar un experimento si la precisión requerida no es obtenible con los recursos a la mano. La solución es posponerlo hasta reunir los fondos necesarios, o reducir el número de tratamientos de tal forma que suficientes replicaciones (precisión) estén disponibles para los tratamientos restantes. El número práctico de replicaciones es cuando el costo del material no es compensado por el incremento en la información ganada. De cualquier manera, más adelante también se presentará una forma de analizar experimentos sin réplicas de tratamientos.

Muchas veces los investigadores usan muestras duplicadas o partidas para generar réplicas, cuando en realidad son submuestras o mediciones repetidas. Por ejemplo, comparando la capacidad de tres conservadores para inhibir el crecimiento de hongos sobre cierto tipo de pastel, el investigador prepara un pastel mezclado con cada conservador. Después de 9 días de almacenamiento, el número de esporas de hongo por  $\text{cm}^3$  de pastel es medido. El investigador requiere de 10 réplicas por lo que pudiera partir el pastel en 10 partes. Sin embargo estas 10 mediciones no son resultado de 10 aplicaciones independientes del conservador, reflejando sólo la variabilidad dentro de cada pastel. Para tener 10 réplicas (y captar así la variación entre pasteles con el mismo tratamiento), el investigador necesita cocinar 10 pasteles con cada conservador, cada uno mezclado de manera independiente del resto. Una forma de determinar la diferencia entre una submuestra y una réplica: si el experimentador pudiera obtener más “replicaciones” sólo particionando más a una UE, entonces lo que se tiene son submuestras y no réplicas verdaderas.

Es muy importante distinguir entre replicaciones y submuestras ya que, observando (1.2), si  $n_i$  representara al número de submuestras, la varianza de cualquier promedio sería subestimada, con lo que se diría, erróneamente, que la precisión de  $\bar{y}_{i\bullet}$  aumentó. Esto tendría consecuencias en el proceso de determinar diferencias estadísticamente. A las submuestras también se les conoce como pseudoreplicaciones.

## 1.4 Estrategia del plan experimental

La ausencia de diseño estadístico es una consecuencia de una planeación experimental descuidada o ausente, no sólo de la ignorancia de métodos estadísticos. Vivimos en una cultura que, a la fecha, no ve con buenos ojos los procesos de planeación. Las razones que se argumentan son variadas: lo impredecible del medio circundante muy cambiante en que vivimos, las políticas inestables del

gobierno, cambios repentinos de clientes, proveedores, etcétera.

Sin embargo, y quizás paradójicamente, planear es en un sentido amplio, generar de una manera ordenada alternativas ante la incertidumbre de los futuros acontecimientos; de esta manera ante mayor incertidumbre, es necesario un esfuerzo eficiente y eficaz de planeación.

Estos problemas culturales se traducen en la práctica científica y/o tecnológica en un pobre, si no ausente, esfuerzo de diseño experimental.

Un enfoque sistemático para planear y realizar un experimento consta de los siguientes pasos:

- Reconocimiento y/o planteamiento del problema.
- Selección de los factores de estudio y determinación de los niveles.
- Selección de la variable de respuesta.
- Plantear y efectuar el diseño experimental.
- Análisis de datos.
- Conclusiones y recomendaciones.

Los primeros tres pasos constituyen la etapa de planeación previa al experimento. Para el diseño eficiente de experimentos es recomendable tener clara explícitamente, mediante el diálogo en un equipo de trabajo multidisciplinario, la siguiente información por escrito en el protocolo experimental:

1. Título del experimento: en donde se exprese de manera sintética el cuerpo sustancial de la experimentación.
2. Objetivos: búsqueda de consensos claros y operables. Esto es más difícil de lo que parece inicialmente. Los objetivos deben reunir ciertas características, entre éstas se citan las siguientes: deben ser establecidos a partir de perspectivas diversas, para que cuando los datos sean generados, hablen por sí mismos. Deben ser específicos y medibles, es decir, deben ser claros y operables. Deben tener consecuencias prácticas, esto es, que algo se podrá llevar a cabo de manera diferente como consecuencia de los resultados experimentales. Es decir un experimento es un gasto de recursos para algo. Por ejemplo, un mal objetivo se describe mediante la siguiente situación: mostrar que el catalizador z14 trabaja mejor que el catalizador z12, si el operador ajusta el voltaje del electrodo exactamente. Un mejor objetivo consiste en cuantificar la diferencia en eficiencia A, entre el catalizador z14 y el catalizador z12 con voltajes de electrodos 7, 8 y 9 en el proceso de

conversión  $X$ , y evaluar el significado estadístico (al 95%) y el significado práctico ( $A > 3\%$ ), quizás justificando económicamente un catalizador sobre otro.

3. Apoyos relevantes para los objetivos: estos se refieren a la información de experimentos previos, datos rutinariamente recolectados, información sobre leyes físicas o información proveniente de opiniones de expertos. Estos tipos de información son útiles para establecer un contexto y entender qué conocimiento y/o tecnología nuevos pueden ser adquiridos. Además permitirá motivar un diálogo acerca del conocimiento del área que pueda cambiar consensos previos y así posiblemente cambiar el experimento.
4. Consideraciones sobre la variable respuesta: reconociendo los objetivos de la experimentación. Estudie e identifique los mecanismos fundamentales que afecten a los objetivos. Finalmente seleccione las respuestas que incrementen la posibilidad de entender los mecanismos. De ser bien seleccionada la variable respuesta, se tendrán mayores posibilidades de que la relación con los factores bajo estudio sea simple y de orden bajo, posibilitando que la información obtenida por el experimento, sea clara respecto a los efectos principales a través de métodos simples de análisis. En general se recomienda que la variable respuesta sea:

- Numérica, ya que aporta mayor información.
- Completa, en el sentido que provea toda la información requerida para entender los mecanismos básicos que conlleven al cumplimiento de las metas del experimento.

Por ejemplo, si el problema es eliminar el bajo peso de barras de jabón producidas en un proceso, si se selecciona al peso de las barras como respuesta, no se identificará a los mecanismos y leyes físicas para controlar el peso de la barra durante su producción. El peso es el producto de la densidad y el tamaño; la densidad se debe al proceso de mezclado con aire y el tamaño se debe a las coordenadas  $x$ - $y$ - $z$  que impone el instrumento de corte del lote de jabón. Las variables respuesta adecuadas son entonces la densidad y las dimensiones  $x$ - $y$ - $z$  de las barras de jabón, y no el peso.

- Práctica, en el sentido que sea fácil de medir con una frecuencia razonable.
- Elemental, es decir, que no tenga fuerte influencia de condiciones que se encuentren fuera del sistema experimental especificado.
- Independiente de valores impuestos, es decir, si no está confundida con cualquier valor que no sea inherente a la física del sistema. Dos ejemplos

de esta situación son: 1. Valores objetivos de acuerdo a especificaciones del producto requeridos por el comprador. 2. Como respuesta el tomar % de defectuosos depende de especificaciones sobre qué es un defectuoso. Variables respuesta dependientes en su cómputo de condiciones ajenas al sistema experimental especificado, pueden provocar la presencia de interacciones y de curvatura espuria en la relación de la respuesta con los factores en juego en el experimento.

5. Consideraciones sobre factores. En general es importante diferenciar entre dos diferentes tipos de factores. Un factor se considera de un cierto tipo atendiendo a la magnitud de su influencia sobre la variable respuesta y a su grado de controlabilidad en la práctica real. Podemos hablar en general de dos tipos de factores:
  - Factores de control: aquellos de los que se piensa que son muy influyentes en la variable respuesta y son controlables en la práctica; son los factores que interesa manipular explícitamente en el experimento en regiones experimentales de utilidad al experimentador.
  - Factores de ruido: factores que son influyentes, pero que no pueden ser controlados en la vida real. Es decir, están en el ambiente pero son considerados a lo largo del experimento, ya sea para bloquear sus efectos, o para explícitamente cuantificarlos (covariables). También son considerados para aprovechar sus efectos de interacción con factores de control en una estrategia de robustificación, esto es, para ubicar a los factores de control en donde el efecto del ruido se vea aminorado.
6. Consideraciones sobre interacciones. Las siguientes preguntas son útiles:
  - En general, dos factores interactúan, si los efectos de uno sobre la variable respuesta dependen de los niveles del otro.
  - ¿Hay interacciones que están justificadamente ausentes en el experimento?
  - ¿Hay interacciones que deban ser estimadas sin confusiones con efectos principales?
  - ¿Existen ciertos niveles de los factores de control en los que el efecto en la respuesta de los factores de ruido es reducido?
7. Restricciones sobre el experimento. Preocupaciones sobre: facilidad de cambios en factores de control (“hard to change factors”), métodos de medición / adquisición de datos, materiales, número de pruebas, tipo de unidad experimental, regiones experimentales “ilegales” o irrelevantes, límites a la

aleatorización, orden de las pruebas, costos asociados a cambios en los factores de control durante el experimento, etc.

8. En función de las estructuras de tratamiento y diseño se escoge un esquema experimental. Considere si por algún criterio existen preferencias en los diseños estadísticos y sus razones. Por ejemplo, en el área de experimentación con animales de granja es muy utilizado el diseño de bloques en parcelas divididas.
9. Una vez revisado lo anterior se procede a generar una propuesta de análisis y técnicas de presentación de datos.
10. Responsable del experimento.
11. Pruebas iniciales o piloto, si las habrá o no y sus razones. Generalmente se utilizan para estimar de manera preliminar la varianza del error experimental y/o afinar el uso de técnicas experimentales.
12. Experimento. Se realiza el trabajo experimental y con ello se obtienen los datos.
13. Análisis de datos e inferencia estadística / científica / tecnológica a partir de datos.
14. Conclusiones y recomendaciones. Como producto del análisis, no es difícil imaginar que nuevas cuestiones pueden surgir, por lo que, se puede plantear la necesidad de realizar nuevas investigaciones.

## 1.5 El razonamiento estadístico de contraste de hipótesis

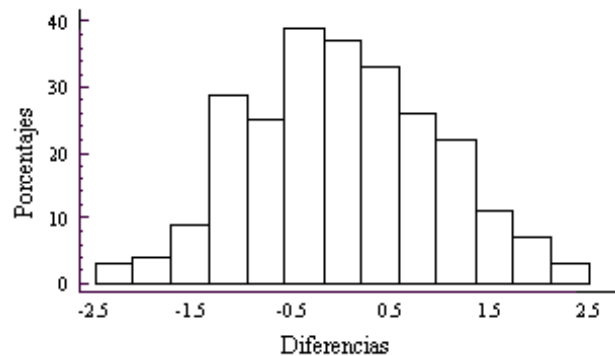
Es de suma importancia entender el razonamiento estadístico para poder realizar inferencia estadística. Un procedimiento confiable en la estadística inferencial es el llamado contraste de hipótesis. Un investigador está interesado en la diferencia entre la respuesta producida por un sistema intacto y la respuesta del mismo sistema pero modificado en algún sentido de interés. Él necesita saber si tal diferencia observada se debe al error experimental o si es debida a la modificación realizada. Así, de manera retrospectiva, si se recolecta la información de experimentos realizados

- En sistemas análogos.
- Con la misma modificación.



- En los que se sepa que tal modificación no produjo diferencias.

Con esta información se podría construir un histograma de referencia como el que se muestra en la Fig. 1.2. Ante este histograma la diferencia observada por el investigador puede ser comparada: si es muy chica o muy grande, esto es evidencia de que en el experimento actual la diferencia es diferente de cero. Por ejemplo, si la diferencia observada actualmente fuera 3, sería indicativo de una diferencia real (diferencia de cero estadísticamente), entre el sistema intacto y el sistema modificado, ya que en un contexto experimental un valor de 3 es muy poco frecuente en el conjunto de datos de referencia. Pero si ésta es 0.3 sería indicativo, comparando con el histograma, de que la modificación actual no produjo una diferencia significativamente diferente de cero.



Histograma de porcentajes del conjunto de experimentos de referencia en los que la modificación no implica diferencia importante (no significativa)

En este sentido, el contar con un histograma de referencia con tales características, daría la posibilidad de que se pueda conducir un experimento y de que raramente se falle al juzgar su resultado, al compararse con tal histograma, como estadísticamente significativo o no. Hablando de manera realista, el conseguir tales histogramas de referencia es impráctico por las siguientes razones:

- Se requiere que tal conjunto tenga un gran número de experimentos similares, en general más de 30.
- La obtención de tal conjunto es retrospectiva, es decir que muchos de los experimentos en tal conjunto habrán sido generados bajo condiciones no totalmente comparables con el experimento actual, por lo que podrían sesgar las conclusiones.
- En muchos casos no existen experimentos previos similares.

Suponiendo aleatorización en el experimento, y con base en la teoría de la probabilidad, matemáticos destacados han ideado leyes de probabilidad que sirven para construir “histogramas” de referencia válidos prospectivamente para una gran variedad de tipos de experimentos. Tales son, por ejemplo, las leyes de probabilidad *Normal* de Gauss, *t* de Student y *F* de Fisher. Estas leyes, entre otras disponibles, sirven entonces para determinar, según las condiciones experimentales, si un resultado es estadísticamente significativo o no, y permiten además cuantificar una probabilidad de ocurrencia de tal resultado bajo la hipótesis de nulidad de efecto de la modificación del sistema, tarea que es parte de lo que se conoce como inferencia estadística.

## 1.6 Inferencia estadística y práctica

Existen dos tipos de inferencias (generalizaciones) necesarias en todo trabajo experimental, la inferencia estadística y la inferencia práctica (tecnológica / científica) en el contexto. Para explicar estos dos tipos de inferencias consideremos las siguientes definiciones:

Población o proceso objetivo: población o proceso sobre el que se quieren generalizar las conclusiones del experimento.

Población o proceso bajo estudio: población o proceso sobre el que se pueden generalizar estadísticamente los resultados de un experimento.

Por ejemplo, en un estudio de desarrollo tecnológico de optimización de una aleación de latón para recubrimientos de interés para varias empresas, se sabe en teoría que en tal aleación se deben contemplar las proporciones adecuadas entre sus componentes (proceso objetivo); sin embargo, si sólo se puede trabajar con un proceso de aleación en particular, debido a la gran gama de dificultades para estudiar tales procesos en diferentes empresas, el proceso bajo estudio es el de la empresa en la que se realicen los experimentos. La inferencia estadística se circunscribirá a las condiciones de tal proceso particular ya que este proceso difícilmente será una muestra representativa de todos los procesos de todas las empresas interesadas. Entonces la inferencia estadística (inductiva) sólo podrá hacer afirmaciones sobre el tipo de proceso particular. La inferencia estadística se apoya en la aleatorización que permite construir un contexto probabilístico de referencia para juzgar los resultados experimentales en relación a una hipótesis. Como ya se mencionó, por fortuna, tales contextos de referencia son bien aproximados por distribuciones de probabilidad conocidas en el campo estadístico.

Por otro lado, la inferencia práctica es aquella que intentará generalizar los re-

sultados del proceso bajo estudio a todos los procesos de las empresas interesadas del ramo. Por supuesto esta generalización, que en principio no es estadística, tendrá que considerar aspectos que estén fuera de la estandarización propia del proceso originalmente estudiado.

## 1.7 Exactitud de técnicas experimentales

Las técnicas en un experimento deben ser cuidadosamente estandarizadas antes de realizar cualquier experimento. Ningún análisis estadístico o de otro tipo puede mejorar los datos obtenidos de un experimento pobremente realizado.

En general, la variación proveniente de técnicas descuidadas, no obedece leyes aleatorias en las que la inferencia estadística está basada. Este tipo de variación puede llamarse inexactitud, en contraste con una carencia de precisión (o sensibilidad).

Es recomendable observar sobre la técnica experimental lo siguiente:

- Que sea aplicada de manera estandarizada.
- Que se ejerza control sobre influencias ambientales de tal manera que todos los tratamientos produzcan sus efectos bajo condiciones comparables y deseables.
- Que esté basada en un sistema de medición confiable.
  - Error de medición acotado y controlado.
  - Errores gruesos sistemáticos poco probables.

Por ello, a pesar de que con la aleatorización se garantiza la validez de las pruebas estadísticas, para efectos prácticos hay que asegurarse de que la técnica experimental y el sistema de medición estén correctamente aplicados durante el experimento.

## 1.8 Ejercicios

**Ejercicio 1.1** En una empresa de 50 empleados, un gerente tiene interés en aumentar el rendimiento de trabajo de los éstos. Para lograr este objetivo, se establece un programa de capacitación por dos meses. La evaluación del éxito de ésta se consigue comparando los rendimientos antes y después del programa. La evaluación del rendimiento se obtiene mediante la aplicación de un cuestionario apropiado para las actividades que se desarrollan en la empresa; en éste también se considera la eficiencia. La variable de respuesta es el número de puntos alcanzados en el cuestionario, y se califica de 0 a 100.

1. Señale dos estrategias experimentales que le permitan evaluar el éxito del programa.
2. ¿Cuál es la hipótesis estadística que permite evaluar la eficiencia del programa? ¿La hipótesis es la misma en ambos casos? Interprete su planteamiento.
3. ¿Qué procedimiento seguiría para contrastar la hipótesis? ¿Es el mismo en ambos casos?

**Ejercicio 1.2** A continuación se da una serie de planteamientos donde interviene alguna cuestión experimental. Indique la estrategia experimental que usaría para los siguientes cinco casos, dé sus razones, observen características especiales en estos ejemplos:

1. En un estudio de ausentismo en una fábrica, los tratamientos son los tres cambios de turno.
2. Para estudiar la productividad de los empleados en una compañía grande, los tratamientos son aplicados a grupos de 10 de un gran número de éstos.
3. Se estudia los retiros anticipados como préstamos de salario mensual, los tratamientos son cuatro planes de préstamo para los empleados.
4. En el estudio del desgaste de las 16 llantas de un camión, los tratamientos son cuatro marcas de llantas aplicados a 4 seleccionadas de éstas al azar.
5. Supóngase que una compañía tiene interés en ahorrar consumo de energía eléctrica.

**Ejercicio 1.3** Proponga una situación considerando el área de trabajo o de interés que requiera la utilización de un procedimiento experimental con la finalidad de resolver un problema. Ilustre su procedimiento, siguiendo los primeros 9 pasos descritos en la sección 1.4.

**Ejercicio 1.4** Busque en una revista de su área de trabajo algún artículo donde describan la realización de un experimento. Verifique los siguientes puntos.

1. ¿Se define y plantea el problema a estudiar?
2. ¿Es clara la hipótesis de investigación?
3. ¿Se puede percibir con claridad el diseño experimental?

4. ¿Se describe la unidad experimental, señala el proceso de aleatorización y el número de replicaciones?
5. ¿Se muestra con claridad el procedimiento de análisis estadístico?
6. Haga un comentario general sobre el artículo.

**Ejercicio 1.5** Redacte con sus propias palabras los elementos que se deben considerar para realizar un buen experimento.

**Ejercicio 1.6** (Hinkelmann y Kempthorne, 1994) Se desea realizar un experimento exploratorio con el propósito de estudiar y comparar el efecto de cuatro contaminantes en arbolitos de pino. Un contaminante de carbón ( $C_1$ ) se usó como control, además se incluyeron los siguientes contaminantes: ozono ( $C_2$ ), dióxido de sulfuro ( $C_3$ ) y dióxido de nitrógeno ( $C_4$ ). Se cuenta con 16 arbolitos y se asignarán 4 a cada contaminante. Suponga que los arbolitos tienen la misma edad, una altura uniforme y se les fumiga con una misma cantidad, razonable, de contaminante. Proponga algunos diseños experimentales que resulten adecuados para evaluar ese efecto.

**Ejercicio 1.7** Un ingeniero industrial desea conocer el efecto que tienen en la preferencia del público consumidor cinco procedimientos para elaborar helado. La variable de respuesta es un valor numérico que se obtiene a través de una evaluación sensorial. A partir de este planteamiento proponga varios diseños experimentales, según los factores que puedan ser importantes. Argumente sus respuestas.

**Ejercicio 1.8** En el tratamiento del cáncer de pecho, ¿cuál es el tratamiento preferido para cáncer de pecho que es detectado tempranamente? El tratamiento más común fue alguna vez la mastectomía (removerlo del pecho). Ahora lo usual es remover el tumor y nodos linfáticos cercanos, seguido por radiación. Para estudiar cualquiera de estos tratamientos que difieren en su efectividad, un grupo médico examina los registros de 25 hospitales grandes y compara los tiempos de sobrevivencia después de que todas las mujeres hayan recibido algún tratamiento.

1. ¿Cuáles son los factores y la variable respuesta?
2. Explique cuidadosamente, ¿por qué este estudio no es un experimento?
3. ¿Piensa que este estudio mostrará si la mastectomía causa un promedio de vida más grande? Explique su respuesta cuidadosamente.

**Ejercicio 1.9** ¿Mejor maíz? Nuevas variedades de maíz con contenido de aminoácido alterado pueden tener un valor nutricional más alto que el maíz estándar, el cual es bajo en aminoácido. Un experimento compara dos nuevas variedades, llamadas *opaque-2* y *floury-2*, con maíz normal. Los investigadores mezclan dietas con maíz, usando cada tipo de éste en tres niveles de proteína: 12% proteína, 16% proteína y 20% proteína. Ellos dan cada dieta a 10 pollos machos y recogen sus pesos después de 21 días. El peso del pollo es una medida del valor nutricional de su dieta.

1. ¿Cuáles son las unidades experimentales y las variables respuesta en este experimento?
2. ¿Cuántos factores son?, ¿cuántos tratamientos? Use un diagrama para describir los tratamientos.
3. ¿Cuántas unidades experimentales requiere el experimento?

## Capítulo 2

# Diseño con un factor

*Lo conocido es finito, lo desconocido infinito; desde el punto de vista intelectual estamos en una pequeña isla en medio de un océano ilimitable de inexplicabilidad. Nuestra tarea en cada generación es recuperar algo más de tierra.*

*T.H. Huxley*

El objetivo principal en este capítulo es plantear diseños experimentales y su correspondiente análisis estadístico, cuando se tiene una situación en donde se considera estudiar los efectos que sobre una variable respuesta tienen los niveles de un solo factor. Esta estructura unifactorial presenta una variedad de posibilidades de diseños experimentales atendiendo a la estructura de diseño apropiada.

### 2.1 Factor con dos niveles

El primer diseño experimental que discutiremos atiende a una estructura de diseño en la que se supone que durante el experimento por realizar no habrá influencias importantes del ruido experimental, más allá del error experimental, que hagan necesario el agrupamiento de UE o medición de covariables. Con esto se considerará en este diseño que las UE se pueden tener en cuenta como un solo grupo homogéneo, por lo que no será necesario sujetar la aleatorización de los tratamientos (en este caso los niveles del factor) a restricciones, es decir, se llevaría a cabo la aleatorización sin restricciones en la forma de asignar los tratamientos a las UE. A este tipo de diseño se le denomina unifactorial completamente aleatorizado.

**Ejemplo 2.1**

Debido a la importancia de las propiedades que tiene un plástico para conservar alimentos, una compañía alimentaria tiene interés en disminuir la transferencia de humedad entre el alimento y el ambiente en función del plástico. Se propone a nivel de laboratorio estudiar un nuevo plástico elaborado con zeínas. Entonces se puede plantear la siguiente hipótesis:

El nuevo plástico disminuirá la transferencia de humedad en comparación con el plástico actualmente utilizado.

La permeabilidad al vapor de agua (pva) es la variable respuesta que caracteriza a la transferencia de humedad; por consideraciones tecnológicas pva debe tener un valor lo más bajo posible. Suponga que en promedio el plástico actual tiene un pva de  $\mu_1$ ; pensemos que el nuevo plástico tenga un pva en promedio de  $\mu_2$ . Se requiere entonces determinar empíricamente si la diferencia de medias  $\mu_1 - \mu_2$  es igual a cero o no. El planteamiento estadístico correspondiente es contrastar las siguientes hipótesis:

Hipótesis Nula (no hay efectos diferentes de los dos tratamientos)

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 (= \mu) \text{ (o equivalentemente, } \mu_1 - \mu_2 = 0) \quad (2.1)$$

Hipótesis Alternativa (los dos tratamientos producen diferentes medias)

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2. \quad (2.2)$$

En el ejemplo se puede observar que el factor de control es el tipo de plástico, e interesa comparar el plástico actual y el propuesto en relación al pva; en general se desea estudiar una variable respuesta en relación al efecto de dos niveles de un factor.

La estrategia experimental en esta situación es sencilla, consiste en elaborar diferentes películas de plástico considerando el tratamiento actual y el propuesto de manera independiente. Con cada uno de ellos se realizan aleatoriamente 14 muestras de películas. Las 14 mediciones de pva que se generaron en los dos tratamientos se presentan en la Tabla 2.1, donde  $y_{ij}$  representa la pva medida en la  $j$ -ésima UE del tratamiento  $i$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, \dots, 14$ .

Después de realizar el experimento, un resumen estadístico de los datos que se obtuvieron se muestra en la Tabla 2.2; con esta información se podrá probar



estadísticamente si existe diferencia significativa entre los dos tratamientos.

Plástico actual		Plástico nuevo	
$y_{11} = 32$	$y_{18} = 31$	$y_{21} = 22$	$y_{28} = 30$
$y_{12} = 31$	$y_{19} = 39$	$y_{22} = 21$	$y_{29} = 24$
$y_{13} = 31$	$y_{1,10} = 43$	$y_{23} = 25$	$y_{2,10} = 29$
$y_{14} = 38$	$y_{1,11} = 37$	$y_{24} = 36$	$y_{2,11} = 34$
$y_{15} = 43$	$y_{1,12} = 34$	$y_{25} = 34$	$y_{2,12} = 25$
$y_{16} = 41$	$y_{1,13} = 34$	$y_{26} = 30$	$y_{2,13} = 36$
$y_{17} = 28$	$y_{1,14} = 32$	$y_{27} = 15$	$y_{2,14} = 31$

Tabla 2.1 pva con plástico actual y plástico nuevo

	Plástico actual	Plástico nuevo
$n_i$	14.00	14.00
$\bar{y}_{i.}$	35.29	28.00
$S_i^2$	23.76	38.92
$S_i$	4.87	6.24

Tabla 2.2 Resumen estadístico

Para contrastar la hipótesis (2.1) vs (2.2), es necesario hacer algunos supuestos, sobre los cuales se construye el estadístico de prueba. Los supuestos son:

- La variable respuesta (pva) correspondiente a cada uno de los dos tratamientos tiene medias  $\mu_1$  y  $\mu_2$  respectivamente, potencialmente diferentes.
- Si  $y_i$  representa a la respuesta ante el tratamiento  $i$ , se supone un modelo tal que

$$y_i = \mu_i + \varepsilon, \quad i = 1, 2$$

$\mu_i$  representa la parte sistemática del modelo, y  $\varepsilon$  el llamado error experimental.

- Así se supone de  $\varepsilon$  que:
  - Tiene media igual a 0.
  - Su varianza en cualquier tratamiento es constante, digamos igual a  $\sigma^2$  (homogeneidad de varianzas).
  - Como variable aleatoria es descrita adecuadamente por la función de densidad Normal. Bajo los supuestos anteriores, ya con los datos, se tendrá el modelo

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, \dots, n_i.$$

Otro supuesto adicional es entonces que los  $\varepsilon_{ij}$  son mutuamente independientes. Esto equivale a decir que cómo se manifiesta el error experimental en una UE, no tiene que ver con cómo se manifiesta en otra UE.

A partir de los supuestos anteriores se ha podido desarrollar el procedimiento de prueba de hipótesis. El estadístico de prueba de  $H_0$  versus  $H_1$ , evalúa la diferencia de promedios  $\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}$  (la diferencia entre tratamientos). Como estudiamos en el capítulo anterior, la variabilidad debida al error experimental, denotada por  $\sigma^2$ , es la variabilidad que no es posible explicar; así  $\sigma^2$  denota a la variación mínima de referencia para evaluar la importancia de la variación debida a las diferencias entre tratamientos ( $\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}$ ).

Si  $(\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet})$  es grande relativamente a  $\sigma^2$ , entonces tendremos bases para afirmar que los tratamientos no tienen efectos iguales sobre la respuesta. Como los errores experimentales  $\varepsilon_{ij}$ 's no pueden medirse directamente,  $\sigma^2$  se estima mediante las diferencias observadas en la respuesta de UE tratadas de la misma manera, es decir mediante  $S_p^2$ , en este caso

$$\hat{\sigma}^2 = S_p^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{(n_1 + n_2 - 2)} \quad (2.3)$$

Así tiene sentido intuitivo comparar la variabilidad debida a los tratamientos con la variabilidad estimada del error experimental, mediante

$$t_c = \frac{\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{n_1^{-1} + n_2^{-1}}} \quad (2.4)$$

Si los datos satisfacen las suposiciones antes mencionadas, y asumiendo que se cumple la hipótesis  $H_0$ ,  $t_c$  se distribuye como una variable aleatoria con distribución  $t$  de Student con  $n_1 + n_2 - 2$  grados de libertad. Resumiendo, por medio del cociente  $t_c$  se compara la diferencia debida a la posible diferencia entre los dos tratamientos con la variación estimada del error experimental.

La conclusión estadística da evidencia para rechazar la hipótesis nula  $H_0$ , si

$$|t_c| > t(n_1 + n_2 - 2, 1 - \alpha/2)$$

donde  $t(n_1 + n_2 - 2, 1 - \alpha/2)$ , es el cuantil de orden  $1 - \alpha/2$  de la distribución de probabilidad  $t$  de Student con  $n_1 + n_2 - 2$  grados de libertad. Donde  $\alpha$  es el nivel de significancia, y es el riesgo aceptable por el investigador para obtener una conclusión equivocada. Se interpreta como la probabilidad de que el experimentador infiera de manera errónea, diciendo que existe efecto de tratamiento cuando realmente no es así. Por lo general, en la práctica se proponen valores de  $\alpha = 0.05$ ,  $\alpha = 0.01$  o  $\alpha = 0.005$ .

Para el ejemplo 2.1, los cálculos son los siguientes:

$$t_c = \frac{\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}}{S_p \sqrt{n_1^{-1} + n_2^{-1}}} = \frac{35.29 - 28.0}{5.6 \sqrt{\frac{1}{14} + \frac{1}{14}}} = \frac{7.29}{2.12} = 3.44$$

donde

$$S_p = \sqrt{\frac{(14-1)23.76 + (14-1)38.92}{14 + 14 - 2}} = \sqrt{31.34} = 5.60$$

Por otro lado, se propone un nivel  $\alpha = 0.05$ , entonces el valor del cuantil de orden  $1 - \alpha/2$  es

$$t(n_1 + n_2 - 2, 1 - \alpha/2) = t(14 + 14 - 2, 0.975) = t(26, 0.975) = 2.06.$$

Una vez realizados los cálculos y con base en la conclusión estadística, se comparan los valores de  $t_c$  y  $t(n_1 + n_2 - 2, 1 - \alpha/2)$ , se observa que:

$$t_c = 3.44 > 2.06.$$

Esto indica rechazar estadísticamente la hipótesis nula  $H_0$  a un nivel  $1 - \alpha$  de confianza.

La probabilidad  $P_{H_0}(t \geq 3.44) = 0.002$ , se conoce como el nivel de significancia descriptivo o valor  $p$ , este valor muestra que la diferencia observada entre los tratamientos es muy poco probable bajo  $H_0$ , evidencia para rechazar  $H_0$ . Entre más pequeño sea este valor, mayor evidencia de diferencia.

La interpretación de estos resultados en el contexto del Ejemplo 2.1, indican que la permeabilidad al vapor de agua es mayor en el plástico actual, lo que implica que el nuevo plástico tiene mejores propiedades. Con esta conclusión se da lugar a consideraciones que permitan tomar decisiones prácticas. Por otro lado, es importante considerar que este resultado se obtuvo en el laboratorio, así que si se desea llevarlo a nivel industrial es necesario escalar / robustificar los resultados. Dentro de la estadística existen métodos que permiten llevar los resultados de laboratorio a la industria.

En este ejemplo se ha considerado una sencilla comparación de dos plásticos en sus efectos sobre la variable respuesta que representa una característica especial de interés; en general en muchas áreas de trabajo ya sea a nivel de laboratorio o industrial se requiere comparar dos tratamientos, estos pueden incluir, entre otras, las siguientes situaciones:

- Obtener nuevas formulaciones para mejorar la vida de anaquel de un producto entre otras características.
- Practicar nuevos métodos de trabajo con la finalidad de incrementar la productividad,

- estudiar diferentes materias primas para elevar la capacidad nutritiva de producto alimenticio.
- Evaluar programas de capacitación de operadores.
- Observar si existe un mayor rendimiento en nuevos equipos de trabajo.
- Investigar a nivel de laboratorio diferentes procesos naturales.

Existen muchas situaciones similares a las mencionadas. La característica principal en este planteamiento es que sólo se tiene un factor de control (por ejemplo, formulaciones, métodos de trabajo, materia prima, operadores, equipos de trabajo).

## 2.2 Un factor con $k \geq 2$ niveles

En muchos casos puede existir el interés por contrastar más de dos tratamientos. Veamos algunos ejemplos.

### Ejemplo 2.2

Una compañía decide cambiar las formulaciones para aumentar la resistencia de un papel para envolver caramelos. Las nuevas formulaciones se basan en el uso de un sólido al cual se le agregan alternativamente cuatro diferentes concentraciones (en %), de una sustancia química; se consideraron cuatro porcentajes. La tensión del papel es la respuesta y se mide en unidades psi.

Factor: La formulación.

Niveles: Las cuatro concentraciones de sustancias.

Respuesta: Tensión del papel.

El objetivo es evaluar el efecto de las nuevas concentraciones sobre la resistencia del papel.

### Ejemplo 2.3

El objetivo es evaluar el efecto que la temperatura de fundición tiene sobre la soldadura en un circuito electrónico montado en una tarjeta. En el ensamble final, un ingeniero evalúa la efectividad de la soldadura considerando el número de falsos contactos en cada circuito.

Factor: Temperatura (diferentes temperaturas)

Niveles: ( $120^{\circ}C$ ,  $140^{\circ}C$ ,  $180^{\circ}C$ )

Respuesta: Número de falsos contactos

Como se puede notar del planteamiento de los ejemplos 2.2 y 2.3, la comparación se puede extender a más de dos tratamientos, es decir, considerar un factor con dos o más niveles, si así se considera que un factor influye en la respuesta de una característica de interés para el producto.

### 2.2.1 Análisis de varianza

En este subapartado, se presentará el procedimiento del análisis estadístico denominado análisis de la varianza (análisis de las diferencias entre medias de tratamientos) que permite probar la hipótesis que se plantea en un diseño de un factor con dos o más niveles.

Cuando un factor tiene  $k$  niveles, el problema de comparación de los  $k$  efectos se plantea como el contraste de dos hipótesis:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k (= \mu) \quad (2.5)$$

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_{i'} \quad \text{para al menos un par } i \neq i'$$

en donde  $\mu$  representa la respuesta media antes de cualquier tratamiento, suponiendo que  $\mu_i = \mu + \delta_i$ , donde  $\delta_i$  es entonces lo que añade el tratamiento  $i$  a la  $\mu$ . Note así que  $\delta_i = \mu_i - \mu$ , el llamado efecto del  $i$ -ésimo nivel.

En el caso de dos niveles el objetivo principal al desarrollar un diseño experimental fue evaluar estadísticamente la diferencia de promedios, tal como se mostró en (2.1). En el caso de  $k$  niveles, en lugar de considerar la comparación entre todos los contrastes  $(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{i'\bullet})$ ,  $i \neq i'$ , se puede pensar como más eficiente el analizar sólo diferencias

$$\hat{\delta}_i = (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}), i = 1, \dots, k, \quad (2.6)$$

donde  $\bar{y}_{\bullet\bullet}$  es un estimador de  $\mu$ , en lugar de los  $\binom{k}{2}$  pares de diferencias, sin perder información ya que

$$(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{i'\bullet}) = (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}) - (\bar{y}_{i'\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})$$

Definamos el efecto estimado del  $i$ -ésimo nivel del factor como

$$\hat{\delta}_i = (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}) \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Si  $\hat{\delta}_i$  es pequeña se dirá que el efecto es bajo. Así si todas las  $\hat{\delta}_i$ 's son cercanas a cero, se apoyaría a la hipótesis  $H_0$ . Tomando en cuenta la posibilidad de que las  $\hat{\delta}_i$ 's se cancelen entre sí positivas con negativas, la variación debida a las

diferencias entre tratamientos se cuantifica mediante el llamado Cuadrado Medio de tratamientos:

$$CM_{trat} = \frac{\sum_{i=1}^k n_i \hat{\delta}_i^2}{k-1} \quad (2.7)$$

Si  $CM_{trat}$  es grande implica que las  $\hat{\delta}_i$  's son considerablemente diferentes de cero; el punto es saber desde qué valor de  $CM_{trat}$  se puede considerar que tales diferencias no son sólo producto del error experimental. Para ello es necesario tener un estimador de  $\sigma^2$ . Tenga presente que para el caso de dos niveles, la expresión (2.3) es un estimador de la varianza  $\sigma^2$ , la varianza del error experimental que, como se recordará, se estima mediante las diferencias en respuesta de UE tratadas de la misma manera, es decir mediante las  $S_i^2$  's; entonces análogamente en el caso de  $k$  niveles,  $\sigma^2$  es estimada mediante:

$$CM_{error} = \frac{\sum_{i=1}^k (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^k (n_i - 1)} = S_p^2 \quad (2.8)$$

el así llamado Cuadrado Medio del Error.

Si  $n_i$  es igual en cada tratamiento se dice que el diseño es balanceado, en caso contrario, se dice que el diseño está desbalanceado; en el caso de que los niveles del factor se desbalanceen no habrá consecuencias de importancia.

Como se verá más adelante, las cantidades  $CM_{trat}$  y  $CM_{error}$  desempeñan un papel importante para inferir sobre la significancia de los  $\delta_i$  's. Para realizar la inferencia estadística con sentido, los supuestos requeridos son fundamentalmente los mismos que en el caso  $k = 2$  :

- Si  $y_i$  representa a la respuesta ante el tratamiento  $i$ , se supone que

$$y_i = \mu_i + \varepsilon, \quad i = 1, \dots, k,$$

donde  $\varepsilon$  representa el error experimental; respuestas medias ante cada tratamiento denotadas por  $\mu_1, \dots, \mu_k$ , potencialmente diferentes.

- Del término de error se supone que:
  - $\varepsilon$  tiene media igual a 0.
  - La varianza de  $\varepsilon$  en cualquier tratamiento es constante, digamos igual a  $\sigma^2$  (homogeneidad de varianzas).
- $\varepsilon$  como variable aleatoria es descrita adecuadamente por la función de densidad Normal. Bajo los supuestos anteriores, ya con los datos, se tendrá entonces que

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad i = 1, \dots, k; \quad j = 1, 2, \dots, n_i$$

Otro supuesto adicional es entonces que los  $\varepsilon_{ij}$  son mutuamente independientes. Esto equivale a decir que cómo se manifiesta el error experimental en una UE no tiene que ver con cómo se manifiesta en otra UE.

Ahora,

$$F_c = \frac{CM_{trat}}{CM_{error}} \quad (2.9)$$

compara  $CM_{trat}$ , la variabilidad aportada por las diferencias entre tratamientos, con  $CM_{error}$ , la variabilidad aportada por el error experimental. Bajo los supuestos antes mencionados,  $F_c$  ( el cociente  $F$ ), resulta ser un estadístico cuya ley de probabilidad es manejable como distribución de referencia para contrastar  $H_0$  (expresión (2.5)) versus  $H_1$ , ya que  $F_c$ , como variable aleatoria, sigue una distribución  $F$  con  $(k - 1)$  y  $\sum_{i=1}^k (n_i - 1)$  grados de libertad respectivamente.

En términos de los  $\delta_i$  's para probar que hay efecto de tratamiento, una propuesta hipotética equivalente a la planteada por la expresión (2.5) es:  $H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_k = 0$ , versus  $H_1 : \delta_i \neq 0$ , para alguna  $i$ , donde  $\hat{\delta}_i$  's son los efectos teóricos.

Con los datos del experimento del ejemplo 2.1,  $k = 2$ , se tienen los siguientes resultados:

$$\hat{\delta}_1 = \bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet} = (35.26 - 31.64)$$

$$\hat{\delta}_2 = \bar{y}_{2\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet} = (28.0 - 31.64)$$

$$CM_{trat} = \frac{14 [(35.29 - 31.64)^2 + (28.0 - 31.64)^2]}{1} = 371.57$$

$$CM_{error} = \frac{814.86}{26} = 31.34$$

$$F_c = \frac{371.57}{31.34} = 11.86$$

Buscando en tablas de una distribución  $F$  con 1 y 26 grados de libertad y  $\alpha = 0.05$ , se tiene  $F(1, 26, 0.95) = 4.23$ ,  $F_c > 4.23$ , la conclusión es la misma.  $F_c$  desempeña el papel del estadístico  $t_c$  en la expresión (2.4) con  $k = 2$ , pero permite el análisis para el caso de  $k \geq 2$ . Note que  $t^2(\sum_{i=1}^k (n_i - 1))$  es igual a  $F(1, \sum_{i=1}^k (n_i - 1))$ . Alternativamente, el valor  $p = P(F \geq 11.856) = 0.002$  se compara con el valor del nivel de significancia  $\alpha$ . Si  $p < \alpha$ , se rechaza la hipótesis nula  $H_0$ , y si  $p > \alpha$ , no se rechaza  $H_0$ . Esta última es la referencia que reportan los paquetes estadísticos.

#### Ejemplo 2.4

En un proceso de refinación se tiene el interés en mejorar la viscosidad de un aceite, durante la manufactura se tiene que la temperatura en la torre de destilación afecta la viscosidad. Como existe la posibilidad de controlar la temperatura

a nivel del proceso, el ingeniero químico encargado de la operación propone cuatro temperaturas. Se plantean diez días en el primer turno de trabajo para evaluar la viscosidad del aceite considerando las diferentes temperaturas. La hipótesis es:

Es posible mejorar la viscosidad del aceite al cambiar la temperatura del proceso.

La hipótesis nula plantea que las cuatro poblaciones tienen la misma media, lo que se interpreta diciendo que las temperaturas producen la misma viscosidad. Esto es:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4; \quad (2.10)$$

La hipótesis alternativa indica que al menos una temperatura produce una viscosidad diferente a las demás, es decir:

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j \text{ para alguna } i \neq j \quad (2.11)$$

Hay que asignar los tratamientos  $T_1, T_2, T_3$ , y  $T_4$  de temperatura al material a procesarse en la torre de destilación. Esto se puede realizar en los diez días, por lo que se toman aleatoriamente temperaturas para cada uno de éstos. El procedimiento es como sigue: para el día uno se toma al azar un número (suponga que sale el 3) entonces ese día se controla la torre a la temperatura  $T_3$ , se procesa y se muestrea el aceite y se anota la viscosidad; luego para el día dos, si aparece el 2, la temperatura de la torre es  $T_2$ , nuevamente se mide la viscosidad de la muestra de ese día. Así sucesivamente se van seleccionando los números hasta completar los diez días. Se supone que las mediciones no se ven afectadas al cambiar de día. Las viscosidades obtenidas durante los diez días se reportan en la Tabla 2.3.

Temperatura			
$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
80	71	71	88
78	77	73	86
82		72	

Tabla 2.3 Resultados del experimento de temperaturas y viscosidad

De la Tabla 2.3 se calcula la media general de las diez observaciones, el promedio y la varianza dentro de tratamientos. Los resultados aparecen en la Tabla



2.4.

Temperatura				
$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$	
80	71	71	88	
78	77	73	86	
82		72		
$\bar{y}_{1\bullet} = 80$	$\bar{y}_{2\bullet} = 74$	$\bar{y}_{3\bullet} = 72$	$\bar{y}_{4\bullet} = 87$	$\bar{y}_{\bullet\bullet} = 77.8$
$S_1^2 = 4$	$S_2^2 = 18$	$S_3^2 = 1$	$S_4^2 = 2$	

Tabla 2.4 Cálculos de promedios y varianzas

Así los valores del  $CM_{trat}$  y  $CM_{error}$ , véase expresiones (2.7) y (2.8), y a partir de la Tabla 2.4, son:

$$CM_{trat} = \frac{3(80 - 77.8)^2 + 2(74 - 77.8)^2 + 3(72 - 77.8)^2 + 2(87 - 77.8)^2}{4 - 1} = 104.5$$

$$S_p^2 = \frac{2(4) + 1(18) + 2(1) + 1(2)}{3 + 2 + 3 + 2 - 4} = \frac{30}{6} = 5$$

El estadístico de prueba para contrastar las hipótesis (2.10),

$$F_c = \frac{104.5}{5} = 20.9 > F(3, 6, 0.05) = 4.76$$

que indica que al menos una de las temperaturas influye de manera diferente en la viscosidad del aceite.

En general, los resultados del análisis se presentan en forma resumida en una tabla de análisis de la varianza (ANDEVA). En la Tabla 2.5 se muestra la distribución de la tabla del ANDEVA, observe que la cuarta columna contiene las expresiones (2.7) y (2.8).

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
Tratamientos	$k - 1$	$\sum_{i=1}^k n_i \hat{\delta}_i^2$	$\frac{SC_{trat}}{k-1}$	$\frac{CM_{trat}}{CM_{error}}$	$p$
Error	$N - k$	$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2$	$\frac{SC_{error}}{N-k}$		
Total	$N - 1$	$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$			

Tabla 2.5 Descripción general del análisis de la varianza

En la Tabla 2.5  $N = \sum_{i=1}^k n_i$ , y  $p$  es el valor  $p$  del contraste de hipótesis. El tercer renglón de esta tabla corresponde a la variabilidad (total) respecto a  $\bar{y}_{..}$  de todas las  $y_{ij}$ 's.

Los resultados que se calcularon para el Ejemplo 2.3 se muestran para su análisis en la Tabla 2.6.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrado	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
Tratamiento	3	313.6	104.53	20.91	0.0014
Error	6	30.0	5.0		
Total	9	343.6			

Tabla 2.6 ANDEVA del Ejemplo 2.4

El valor  $p$  muestra lo improbable que es la observación de  $F_c = 20.91$  bajo la hipótesis nula, lo que lleva a inclinarse por rechazar  $H_0$ .

### 2.2.2 Modelo estadístico

En el experimento y análisis de los ejemplos anteriores se han considerado  $k \geq 2$  tratamientos; dentro de cada tratamiento se tienen  $n_i$  réplicas, cada réplica resulta en una medición denotada por  $y_{ij}$ , donde  $i$  es el índice que identifica al tratamiento y  $j$  el que representa la réplicas de cada tratamiento,  $i = 1, 2, \dots, k$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_i$ . El modelo estadístico que describe a las  $y_{ij}$ , con sus suposiciones es:

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \quad (2.12)$$

$$i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, n_i; \quad \{\varepsilon_{ij}\} \text{ independientes}$$

Recuerde que asumimos que  $\mu_i = \mu + \delta_i$ , dado que  $\mu$  denota a una media general de la respuesta  $y$  antes de la aplicación de cualquier tratamiento y  $\delta_i$  el efecto esperado del tratamiento  $i$ ; así

$$\delta_i = \mu_i - \mu \quad (2.13)$$

Despejando  $\mu_i$  en (2.13) y sustituyendo en (2.12), el modelo se puede expresar en términos de la media general  $\mu$  y del efecto  $\delta_i$ , es decir:

$$y_{ij} = \mu + \delta_i + \varepsilon_{ij} \quad (2.14)$$

Así, los parámetros  $\mu, \mu_i$  y  $\delta_i$  caracterizan el diseño unifactorial completamente al azar; para comparar los tratamientos, es necesario estimarlos. El criterio

de minimizar la suma de los errores cuadrados  $\sum \varepsilon_{ij}^2$  es el utilizado para estimar estos parámetros; este procedimiento se ilustra en el apéndice técnico A al final del libro. Los estimadores óptimos bajo este criterio, de estos parámetros, son (imponiendo que  $\sum_i \hat{\delta}_i = 0$ )

$$\begin{aligned}\hat{\mu} &= \bar{y}_{\bullet\bullet} \\ \hat{\mu}_i &= \bar{y}_{i\bullet} \\ \hat{\delta}_i &= \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}\end{aligned}\tag{2.15}$$

Con estos valores estimados, los datos estimados bajo el modelo (2.14) son:

$$\hat{y}_{ij} = \bar{y}_{i\bullet}$$

### 2.2.3 Formalización del ANDEVA

Cuando un factor tiene  $k$  niveles, el problema de comparación es confrontar dos hipótesis:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k \tag{2.16}$$

o equivalentemente

$$H_0 : \delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_k = 0$$

versus

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_{i'}, \text{ para al menos un par } i \neq i'$$

o equivalentemente

$$H_1 : \delta_i \neq 0 \text{ para al menos un } i$$

Con el propósito de formalizar matemáticamente la tabla de análisis de la varianza correspondiente, se sustituye (2.13) en (2.14),

$$y_{ij} = \mu + (\mu_i - \mu) + \varepsilon_{ij} \tag{2.17}$$

De la ecuación (2.12) se puede observar que  $\varepsilon_{ij}$  es la diferencia entre el valor observado  $y_{ij}$  y el promedio  $\mu_i$ , así (2.17) se puede escribir como:

$$y_{ij} = \mu + (\mu_i - \mu) + (y_{ij} - \mu_i) \tag{2.18}$$

Esta última expresión se puede reescribir como:

$$(y_{ij} - \mu) = (\mu_i - \mu) + (y_{ij} - \mu_i) \tag{2.19}$$

Así la diferencia  $(y_{ij} - \mu)$  que es la desviación de las observaciones con respecto a la media total, se puede descomponer en dos términos como se muestra en la expresión anterior. Si se sustituyen los estimadores (2.15) en (2.19) se tiene que

$$(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}) = (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}) + (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})$$

De esta última expresión se puede obtener la tabla del ANDEVA; para ello se elevan al cuadrado ambos lados y se suman todos los valores dentro y entre tratamientos. Se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_i^k \sum_j^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = & \sum_i^k n_i (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_i^k \sum_j^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2 \\ & + 2 \sum_i^k \sum_j^{n_i} (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}) (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}) \end{aligned}$$

El último término de la expresión anterior es cero, de esta manera la suma de cuadrados del total ( $SC_{total}$ ) se descompone en dos partes, la suma de cuadrados entre tratamientos (diferencia entre tratamientos) y la suma de cuadrados dentro de tratamientos (variación estimada del error experimental), es decir:

$$\sum_i^k \sum_j^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_i^k \sum_j^{n_i} (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 + \sum_i^k \sum_j^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2 \quad (2.20)$$

Se puede observar que la suma de cuadrados del primer miembro de la ecuación (2.20), se ha descompuesto en dos términos y describe la variación total de los datos alrededor de  $\bar{y}_{\bullet\bullet}$ . Los elementos de (2.20) son los elementos que componen la columna de la suma de cuadrados de la Tabla 2.6, los grados de libertad para  $k$  tratamientos son  $gl_{trat} = k - 1$ , los grados de libertad para el total de observaciones es  $gl_{total} = N - 1$ . Los grados de libertad correspondientes a la suma de cuadrados del error se obtienen por diferencia

$$gl_{error} = gl_{total} - gl_{trat} = (N - 1) - (k - 1) = N - k$$

Note que (2.20) es equivalente a la siguiente expresión de acuerdo a la notación manejada anteriormente.

$$SC_{total} = \sum_i^k \sum_j^{n_i} (y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = \sum_i^k \sum_j^{n_i} \hat{\delta}_i^2 + \sum_i^k \sum_j^{n_i} e_{ij}^2 = SC_{trat} + SC_{error}, \quad (2.21)$$

donde  $e_{ij} = (y_{ij} - \hat{y}_{ij}) = (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})$  son los denominados residuales; residuales porque representan la parte residual que no es explicable por los efectos de los tratamientos (en general, un residual es la parte del dato que no es explicada por el modelo especificado).

### Ejemplo 2.5

Un ingeniero industrial realizó un estudio para determinar el tiempo de cocción de una variedad de frijol. El procedimiento consistió en poner a remojar siete lotes de frijol durante diez horas, donde el agua de remojo contenía una de cuatro

diferentes cantidades de cloruro de sodio NaCl (% PV). Siete réplicas (lotes) por cada uno de cuatro tratamientos (cantidades de sal) fueron utilizadas. Después de diez horas se enjuagó a los frijoles y con agua libre de sal se pusieron a cocer. El tiempo de cocimiento se registró como se muestra en la Tabla 2.8. El experimento fue realizado asumiendo un diseño de un factor completamente aleatorizado. El objetivo del experimentador es lograr un menor tiempo de cocción para reducir el consumo de gas.

	Tratamientos				$\bar{y}_{\bullet\bullet}$
	1	2	3	4	
NaCl	0	1.0	2.0	3.0	
	108	84	76	57	
	109	82	85	67	
	99	85	74	64	
	103	92	78	61	
	107	87	82	63	
	95	78	75	55	
	102	90	82	63	
$\bar{y}_{i\bullet}$	103.29	85.43	78.86	61.43	82.25
$S_i^2$	26.24	22.62	17.48	17.29	
efecto $\hat{\delta}_i = \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}$	21.04	3.18	-3.39	-20.82	

Tabla 2.8 Tiempo de cocción del frijol

La hipótesis resulta ser que es posible reducir el tiempo de cocción a través de la adición juiciosa de cloruro de sodio. La estadística traduce la pregunta en un planteamiento hipotético como sigue:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$$

¿Son iguales los tiempos de cocción medios para los cuatro tratamientos?

La hipótesis alternativa es:

$$H_1 : \mu_i \neq \mu_j \text{ para alguna } i \neq j$$

¿Al menos uno de los tratamientos provoca un tiempo de cocción diferente de los demás?

Utilizando (2.21) se obtiene el ANDEVA mostrado en la Tabla 2.9. Comparando el valor de la razón  $F_c = 100.19$  (ver Tabla 2.9) con un cuantil de la distribución de probabilidad  $F$  con 3 gl para el numerador y 24 gl para el denominador con un nivel  $1 - \alpha = 0.95$ , es decir,  $F(3, 24, 0.95) = 3.009$  se rechaza  $H_0$ , esto significa que alguno de los tratamientos es diferente.

Equivalentemente, el nivel de significancia descriptivo (o valor  $p$ ) es cero hasta la cuarta cifra decimal, así  $p < \alpha$ .

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
Tratamiento	3	6283.54	2094.51	100.19	0.0000
Error	24	501.71	20.91		
Total	27	6785.25			

Tabla 2.9 ANDEVA para el tiempo de cocción

## 2.3 Validación del modelo estadístico

Las suposiciones implicadas por el modelo (2.12) no deben ser rutinariamente aceptadas; la verificación de éstas se traduce en la validación del modelo estadístico. Este modelo representa al diseño de un factor en  $k$  niveles completamente aleatorizados. Así el modelo (2.12) indica que la  $j$ -ésima observación del tratamiento  $i$  está alrededor de la media  $\mu_i$  más el error  $\varepsilon_{ij}$  que constituye la parte aleatoria de la  $y_{ij}$ , y se expresa por ende como  $\varepsilon_{ij} = y_{ij} - \mu_i$ .

### 2.3.1 Análisis de Residuales

Como todo modelo, (2.12) es sólo una aproximación a lo real y como tal siempre debe diagnosticarse el ajuste de los datos al modelo; para el diagnóstico de manera esencial se computan los residuales

$$e_{ij} = y_{ij} - \hat{y}_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}, i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n_i \quad (2.22)$$

Los residuales  $e_{ij}$  representan buenas estimaciones de los errores  $\varepsilon_{ij}$  si el modelo (2.12) se ajusta a los datos observados experimentalmente. Entonces se analizan los residuales para observar si se parecen o no a los errores teóricos, o dicho de otra manera, para comprobar si los supuestos en el modelo se cumplen de manera adecuada.

En general mediante el análisis de residuales se busca detectar:

1. Si existen dentro del conjunto de datos valores atípicos (valores muy pequeños o muy grandes) respecto al patrón general sugerido por el modelo.
2. Si la variabilidad de los errores se muestra no constante.
3. Si hay evidencia de que la distribución de los errores se desvíe con respecto a la normalidad.

## 4. Otras suposiciones.

El enfoque actual dominante para el análisis de residuales es por medio de gráficas ad hoc.

**Histograma de residuales**

El histograma es una herramienta sencilla para representar de manera gráfica los residuales (2.22). Con un número grande de observaciones, el histograma de residuales permite indagar si no hay desviaciones de una apariencia que distinga a una distribución normal centrada en cero. Con el histograma se podrían detectar también residuales atípicos respecto al grupo principal. Los residuales en el Ejemplo 2.5 se muestran en la Tabla 2.10, y en la Fig. 2.1 su gráfica.

	Tratamientos			
	1	2	3	4
NaCl	0	1	2	3
	4.71	-1.43	-2.85	-4.42
	5.71	-3.42	6.14	5.57
	-4.28	-0.42	-4.85	2.57
	-0.28	6.57	-0.85	-0.43
	3.71	1.57	3.14	1.57
	-8.28	-7.42	-3.85	-6.42
	-1.28	4.57	3.14	1.57

Tabla 2.10 Residuales en el Ejemplo 2.5

**Gráfica de probabilidad Normal de los residuales**

Si la variable  $E$  es una variable cuyo comportamiento es bien descrito por la distribución  $N(\mu, \sigma^2)$ , sabemos que

$$Z = \frac{E - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Por medio de la distribución acumulativa de probabilidad de  $Z$ , se define a sus cuantiles, denotados por  $z_q$  como función de  $q$ :  $z_q$  es el cuantil de orden  $q$  para  $Z$  si

$$\Phi(z_q) \equiv P(Z < z_q) = q$$

Estos cuantiles se pueden encontrar en las tablas de la distribución Normal o a través de múltiples programas de cómputo estadístico. A partir de  $z_q$  se puede encontrar el cuantil teórico correspondiente en la escala original de  $e$ , como

$$E_q = \mu + z_q \sigma$$

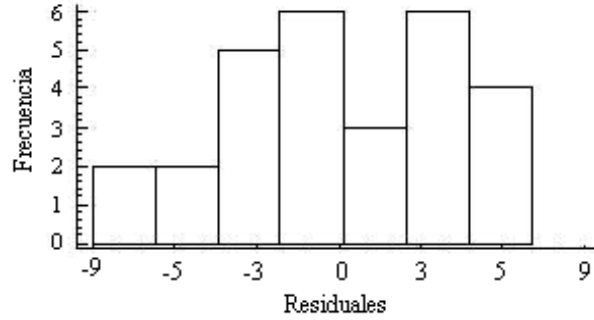


Fig. 2.1: Histograma que describe los residuales del Ejemplo 2.5

Es claro así que si se cree que un conjunto de datos  $e_q$ 's proviene de  $E$ , al graficar el conjunto de  $e_q$ 's versus  $z_q = \Phi^{-1}(q)$ 's resultará una línea recta; a tal graficado se le llama gráfica probabilística Normal.

Aplicado este tipo de gráfica a los residuales  $e_{ij}$ , servirá para verificar el supuesto de Normalidad de los errores del modelo (2.12). Así, a este gráfico lo constituyen dos ejes perpendiculares: el eje de las ordenadas corresponde a los residuales, y el eje de las abcisas tiene la escala correspondiente a  $Z_q = \Phi^{-1}(\hat{q})$  donde  $\hat{q}$  es la proporción de residuales ordenados de menor a mayor. Estos ejes trazados de tal forma, mostrarán un patrón rectilíneo aproximado si los  $\{e_{ij}\}$  son normales.

A continuación se enumeran los pasos que se deben seguir para graficar los residuales en un gráfico de probabilidad normal:

1. Ordenar residuales de menor a mayor.
2. Calcular para el  $l$ -ésimo residual ordenado su  $\hat{q}_l = \frac{l-0.5}{N}$ .
3. Obtener  $\Phi^{-1}(\hat{q}_l)$ .
4. Graficar  $\Phi^{-1}(\hat{q}_l)$  versus el correspondiente residual.

En la Fig. 2.2 se muestra un gráfico probabilístico Normal para los residuales del Ejemplo 2.5. En este caso no se aprecia una desviación marcada de lo rectilíneo, por lo que no hay evidencia marcada para dudar de la suposición de normalidad de los errores.

#### **Graficar $\{e_{ij}\}$ versus $\{\hat{y}_{ij} = \bar{y}_{i\bullet}\}$**

Si al graficar cada pareja de puntos  $(e_{ij}, \hat{y}_{ij})$ , aparecen sin algún patrón y claramente dispersos, se puede inferir de manera intuitiva que no existe incumplimiento



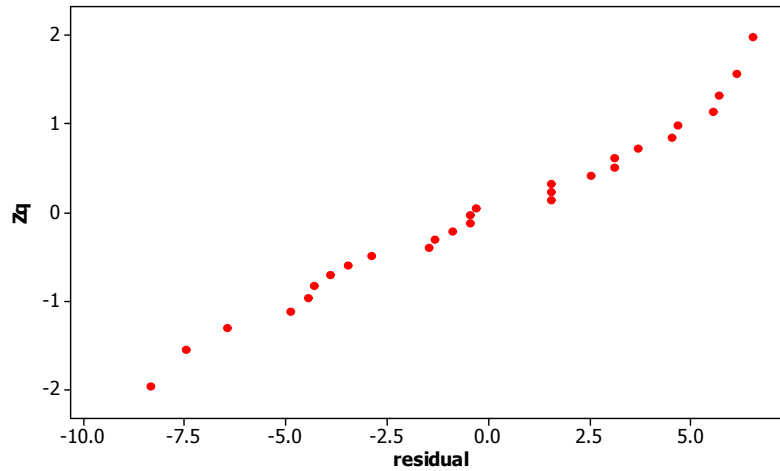


Fig. 2.2: Gráfica probabilística Normal de residuales del Ejemplo 2.5

de los supuestos del modelo (2.12). Sin embargo, si los puntos muestran algún patrón entonces existe la posibilidad de una falla en alguno de los supuestos. En la Fig. 2.3 se muestra la gráfica correspondiente al Ejemplo 2.5, de la que no se aprecian desviaciones de los supuestos.

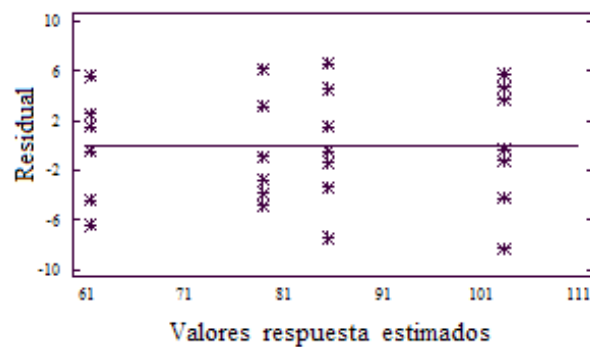


Fig. 2.3: Valores respuesta estimados versus residuales en el ejemplo 2.5

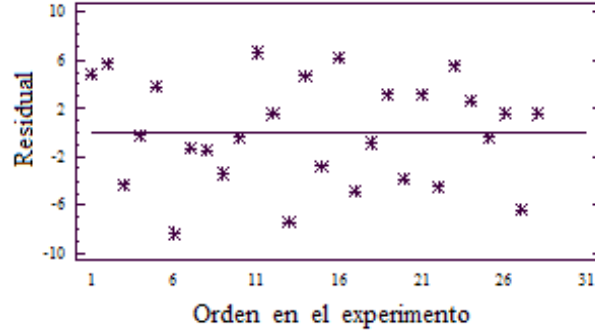


Fig. 2.4: Residuales en el orden de experimentación del Ejemplo 2.5

### Graficar los residuales en el orden de experimentación

Si a medida que se realiza el experimento existen sesgos a pesar de la aleatorización, es posible que éstos se reflejen en los datos generados. Es por ello importante graficar a los residuales en el orden en el que experimentalmente fueron producidos. Si se aprecia que los residuales en ese orden muestran asociaciones alejadas de lo aleatorio, entonces estaríamos potencialmente ante la desviación del supuesto de que los errores son mutuamente independientes. Esta violación es grave y requiere de métodos estadísticos más complejos. En la Fig. 2.4 se muestran los residuales en el orden de generación del Ejemplo 2.5, no apreciándose patrones de preocupación.

### 2.3.2 Verificación del supuesto de homogeneidad de varianzas

#### Prueba de Hartley

Para probar de manera formal la hipótesis de igualdad de varianzas existen varios estadísticos propuestos; primero se presentará el estudiado por Hartley. Este tema de homogeneidad es importante porque frecuentemente en la naturaleza o en los procesos, aparecen datos que tiene el error experimental con una variabilidad no homogénea entre tratamientos. Ante la presencia de heterogeneidad algunos ajustes a los datos, o la aplicación de otros procedimientos, se deben emplear para su análisis. El planteamiento estadístico es realizar la prueba de hipótesis sobre la igualdad de varianzas, esto es:

$$H_o : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_k^2 = \sigma^2. \quad (2.23)$$

$$H_1 : \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2, \text{ para alguna } i \neq j.$$

El estadístico propuesto por Hartley es el siguiente:

$$H = \frac{\max(S_1^2 S_2^2 \dots S_k^2)}{\min(S_1^2 S_2^2 \dots S_k^2)}$$

La decisión es rechazar  $H_0$  si  $H > H_{tablas}$  para algún valor establecido de  $\alpha$ , considerando el número de tratamientos y los grados de libertad para el error. Los valores de  $H$  aparecen en la tabla generada por Hartley, se anexa al final del libro. Considerando los datos de cocción del frijol (véase Tabla 2.8),

$$H = \frac{26.24}{17.29} = 1.5176$$

Si  $\alpha = 0.05$ , este valor de  $H$  es menor que el valor  $H_{tablas}(4, 24, 0.95) \simeq 3.2$  por lo que se concluye que los datos no dan evidencia para rechazar  $H_0$ , se considera que hay homogeneidad en las varianzas.

### Prueba de Bartlett

La estadística de prueba para este procedimiento debido a Bartlett, es la siguiente:

$$B = 2.3026 \frac{(\sum_{i=1}^k \nu_i) \log_{10}(S_p^2) - \sum_{i=1}^k \nu_i \log_{10} S_i^2}{1 + \{\sum_{i=1}^k (1/\nu_i) - 1/\sum_{i=1}^k \nu_i\} / \{3(k-1)\}}$$

donde  $\nu_i = n_i - 1$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Así, si  $B$  evaluado con los datos generados resulta que:

$$B > \chi^2(k-1, 1-\alpha)$$

Se rechaza la hipótesis de homogeneidad de las varianzas.

Para los datos de la Tabla 2.8 sobre el tiempo de cocción de frijol para diferentes tratamientos,  $B = 0.354 < \chi^2(3, 0.95) = 7.81$ ; de hecho el nivel de significancia descriptivo para este conjunto de datos es  $p = 0.949$ , habiendo así fuerte evidencia a favor de la hipótesis de homogeneidad de varianzas. Esta prueba es poco útil dado que en muchos casos leves desviaciones del supuesto de normalidad en los errores, lleva a rechazar la hipótesis (2.23), a pesar de que haya homogeneidad en los tratamientos.

### Prueba de Levene

Esta prueba es recomendable cuando se parte de que los términos de error en el modelo pudieran no seguir tan fielmente una distribución Normal, siendo una alternativa más robusta que la prueba de Bartlett. Los cálculos requeridos

para esta prueba consideran las distancias de las observaciones dentro de cada tratamiento con respecto a su mediana muestral. Su estadística de prueba es:

$$L = \frac{(\sum_{i=1}^k \nu_i) \sum_{i=1}^k n_i (\bar{l}_{i\bullet} - \bar{l}_{\bullet\bullet})^2}{(k-1) \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} (l_{ij} - \bar{l}_{i\bullet})^2}$$

donde  $l_{ij} = |y_{ij} - \tilde{y}_i|$ ,  $\tilde{y}_i$  representando la mediana de las observaciones en el tratamiento  $i$ ,  $i = 1, \dots, k$ ,  $\nu_i = n_i - 1$ , y  $\sum_{i=1}^k \nu_i$  grados de libertad del error. Si con los datos observados,  $L > F(k-1, \sum \nu_i, 1-\alpha)$ , se rechaza la hipótesis de homogeneidad de varianzas. Con los datos del ejemplo de la Tabla 2.8,  $L = 0.159$ , consultando en tablas de la distribución  $F$ , se llega a la conclusión de no rechazar la hipótesis de homogeneidad de varianzas.

El lector interesado en conocer más sobre los estudios de investigación estadística sobre la homogeneidad de las varianzas, puede consultar a Conover, Johnson y Johnson (1981).

### 2.3.3 Transformaciones

Puede haber casos en que se sepa de antemano que la distribución de probabilidad asociada a la variable respuesta  $y$  no es Normal; algunos ejemplos de esta situación son:

- Si  $y$  representa a números enteros pequeños, por ejemplo al número de colonias de bacterias en un plato, de insectos o plantas de una especie específica en un área, o de defectos por unidad.
- Si  $y$  representa una variable positiva con sesgo importante, por ejemplo cuando se tienen datos de una prueba de vida en estudios de confiabilidad.
- Si  $y$  representa a fracciones de un fenómeno binario con probabilidad fija de “éxito”.

Transformaciones útiles correspondientes, para acercarse, respectivamente, a la normalidad, son las siguientes:

$$y \text{ conteos} \mapsto \sqrt{y} \text{ o } \sqrt{1+y}$$

$$y \text{ tiempo de vida} \mapsto \log(y)$$

$$y \text{ fracciones binarias} \mapsto \text{sen}^{-1}(\sqrt{y})$$

Por otra parte, si de antemano no se sabe si se cumple con la Normalidad u otro supuesto del modelo, pero a través del análisis de los residuales de éste

se detecta una desviación en ese sentido, una estrategia útil es también una transformación a los datos originales con el fin de remediar la violación a los supuestos. Por ejemplo, si hay evidencia de que hay relación funcional entre las medias y las varianzas de los tratamientos, en el sentido de, supongamos a mayor respuesta media mayor variabilidad o viceversa, y por ende presencia de heterogeneidad en las varianzas, si se aplica logaritmo a los datos observados, es posible que se corrija la desviación de tal supuesto.

Si  $y$  es no negativa, una familia de transformaciones que resulta de mucha utilidad ante la violación de supuestos es la propuesta por Box y Cox (1964); ésta se expresa por

$$y^{(\lambda)} = \begin{cases} \frac{y^\lambda - 1}{\lambda \dot{y}}, & \lambda \neq 0 \\ \dot{y} \ln y, & \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

donde  $\dot{y} = \ln^{-1}(\frac{1}{n} \sum \ln y)$ ; la  $\lambda$  a escoger es aquella que minimiza la  $SC_{error}(\lambda)$ . En Haaland (1989, Cap. 6) se describe un ejemplo interesante de la aplicación de transformaciones Box - Cox en diseño de experimentos. Hay que notar que para que una transformación tenga efecto en un conjunto de datos, cuando  $y$  tiene un cero natural, se debe tener que:

$$\frac{y_{\max}}{y_{\min}} > 3$$

o que:

$$\frac{y_{\max} - \text{frontera natural}}{y_{\min} - \text{frontera natural}} > 3$$

Para mayor información sobre el uso de transformaciones en modelos lineales estadísticos se puede consultar, por ejemplo, a Atkinson y Riani (2000).

### 2.3.4 Determinación del número de réplicas

Formalmente, las condiciones que determinan el número de réplicas son:

- El número de tratamientos  $k$ .
- Un estimador de  $\sigma^2$ .
- El tamaño de la diferencia mínima a ser detectada  $\Delta$ .
- La confianza para detectar tal diferencia, medida en función de la potencia  $(1 - \beta)$ . Ésta es la probabilidad de que un investigador concluya rechazando  $H_0$  de manera correcta bajo una hipótesis alternativa cierta.

- El nivel de significancia  $\alpha$  a ser usado en el experimento real.
- Si importa el signo de las diferencias entre efectos promedio de tratamientos (una o dos colas).

En la Tabla 2.11 se enlistan diferentes números de tratamientos  $k$  en la primera columna, la otra entrada en la tabla depende de la diferencia  $\Delta$  en los tratamientos que un investigador desee detectar y de  $\sigma$ , es decir, por  $\Theta = \frac{\Delta}{\sigma}$ . La entrada correspondiente en la Tabla 2.11 indica el número de réplicas que se requiere para realizar un diseño completamente al azar balanceado ( $n_1 = n_2 = \dots = n_k$ ); esta tabla está construida considerando un  $\alpha = 0.05$  y una potencia  $(1 - \beta)$  de al menos 0.90. El procedimiento es como sigue:

1. Determine la menor diferencia entre la media más chica y la media más grande que se desea detectar,  $\Delta$ . Procure no sobreestimar  $\Delta$  ya que un  $\Delta$  grande produce un número de replicaciones pequeño.
2. Estime  $\sigma$  mediante una de las siguientes propuestas:
  - Haciendo un análisis de la varianza a través de un estudio inicial.
  - Tomando una muestra aleatoria del proceso.
  - Usando el conocimiento previo del proceso.

Esto debe realizarse con mucho cuidado con el propósito de no inflar el número de réplicas, lo que da lugar a hacer gastos innecesarios.

	$\Theta = \frac{\Delta}{\sigma}$								
$k$	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00	2.50	3.00
2	85	39	22	15	11	8	7	5	4
3	103	46	27	18	13	10	8	6	5
4	115	52	30	20	14	11	9	6	5
5	125	56	32	21	15	12	9	6	5
6	133	60	34	22	16	12	10	7	5
7	141	63	36	24	17	13	10	7	5
8	147	66	38	25	18	13	11	7	6
9	154	69	39	26	18	14	11	8	6
10	160	72	41	27	19	14	11	8	6
11	165	74	42	28	20	15	12	8	6
12	171	77	44	28	20	15	12	8	6

Tabla 2.11 Número de replicaciones para un diseño completamente al azar

Por ejemplo, si se desea detectar una diferencia mínima de  $\Delta = 12.5$  y se tiene una varianza estimada de  $\hat{\sigma} = 4.5$ , entonces  $\Theta = 2.78$ , se aproxima a 2.75. Si  $k = 5$ , será necesario realizar el experimento con  $n = 6$  o  $n = 5$  replicaciones.

## 2.4 Manejo de estructuras de diseño

Como se mencionó en el primer capítulo, un diseño experimental comprende la estructura de tratamientos y la estructura de las UE o de diseño. Si por la presencia de ruido experimental se espera que las UE no sean homogéneas en su respuesta antes de ser tratadas, se tienen en general dos estrategias experimentales para acotar los efectos de ruido. Una primera estrategia es imponer restricciones a la aleatorización, que equivale a formar bloques o grupos de unidades experimentales para controlar de manera explícita (cuantificable) la variabilidad ruidosa aportada. La otra estrategia no forma bloques de UE's, sino que se circunscribe a medir características, las llamadas covariables, a las unidades experimentales; tales covariables consideradas como factores de ruido por el investigador, cuantifican características que potencialmente diferencian de manera importante a las unidades experimentales.

### 2.4.1 Restricciones a la aleatorización

#### Diseño en bloques completamente al azar

El diseño en bloques completamente al azar es un concepto muy importante dentro de la estrategia experimental, porque permite tener una mayor homogeneidad de las UE a las que se les aplican los tratamientos. En el Ejemplo 2.5 se estudió el tiempo de cocción del frijol bajo cuatro tratamientos diferentes; los lotes de frijol utilizados pueden ocasionar una variabilidad grande en el tiempo de cocción. También los aparatos de medición para determinar el grado de cocción, así como las personas involucradas en la medición, pueden influir en los resultados al comparar los tratamientos. Cada uno de los aspectos mencionados se puede considerar como parte del ruido experimental, y por ende no se tendría propiamente interés en sus efectos, sino más bien en evitar que sus efectos dificulten el análisis y las interpretaciones de los efectos de las diferentes cantidades de sal, cuya comparación es la razón del experimento.

El diseño en bloques se construye de la siguiente manera:

- Suponga que tiene un número de UE múltiplo del número de tratamientos  $k$ , digamos  $n \times k$ .
- Forme  $n$  grupos de  $k$  UE cada uno.

- Aplique de manera aleatoria los  $k$  tratamientos a las  $k$  UE de cada bloque.

¿Por qué formar bloques antes de aplicar en orden aleatorio los tratamientos (la restricción a la aleatorización)? Para evitar que efectos de ruido hagan poco clara la comparación de medias de respuesta ante tratamientos. Por ello el ruido hay que manipularlo mediante la formación de bloques de UE, ya que al aplicar en cada bloque todos los tratamientos, el ruido presente se supone que afectará de la misma forma a todas las UE del mismo bloque sin dar una ventaja o desventaja a ningún tratamiento. Así podemos pensar que cada bloque corresponde a un nivel de ruido presente en el experimento. Tantos bloques como niveles de ruido en el experimento.

Dado lo anterior, para la formación juiciosa de bloques primero hay que identificar previo al experimento, qué ruidos habrá en éste, cuáles de éstos son de mayor importancia respecto a la variable respuesta, a criterio del experimentador; si estos ruidos de mayor importancia se pueden pensar y aglutinar como niveles de un factor de ruido, entonces forme tantos bloques como el número de niveles.

Supóngase que en el contexto del Ejemplo 2.5 se tienen tres personas que miden el tiempo de cocción del frijol. El objetivo es por supuesto determinar si existe diferencia entre los efectos de las cantidades de sal (tratamientos), sobre el tiempo de cocción del frijol, sin embargo se cree que al cambiar de persona puede haber cambios (ruidos) que afecten la respuesta antes de tratamiento; en este caso el factor persona sería de ruido con tres niveles, personas 1, 2 y 3. Las UE manipuladas por cada persona se conforman como un grupo o bloque, con lo que se conformarían tres bloques de UE (correspondiendo a las tres personas). Así los tratamientos en el bloque uno recibirán el mismo nivel de ruido (la manipulación de la persona 1), etcétera.

Cada uno de los tratamientos se aleatoriza en cada persona, por ejemplo, por cuestiones de azar, la persona 1 realiza los tratamientos  $T_3, T_2, T_4, T_1$ , otros órdenes aleatorios para las otras dos personas. Los resultados y el esquema del diseño de bloque se muestran en la Tabla 2.12.

Bloques ( $B$ )	Tratamientos ( $T$ )				$\widehat{\delta}_{B_j} =$	
	0	1.0	2.0	3.0	$\bar{y}_{\bullet j}$	$\bar{y}_{\bullet j} - \bar{y}_{\bullet\bullet}$
persona 1	213	76	57	84	107.5	-0.59
persona 2	207	82	67	85	110.25	2.17
persona 3	200	75	61	90	106.5	-1.59
$\bar{y}_{i\bullet}$	206.67	77.67	61.67	86.33	$\bar{y}_{\bullet\bullet} = 108.08$	
$\widehat{\delta}_{T_i} = \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}$	98.59	-30.41	-46.41	-21.75		

Tabla 2.12 Esquema del diseño de bloques



En la Tabla 2.12  $\hat{\delta}_{T_i} = \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}$  y  $\hat{\delta}_{B_j} = \bar{y}_{\bullet j} - \bar{y}_{\bullet\bullet}$  representan los efectos de tratamiento  $i$  y bloque  $j$ , respectivamente, en este caso  $i = 4$  y  $j = 3$ .

El modelo matemático correspondiente al diseño de bloques completamente al azar es:

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \mu + \delta_{T_i} + \delta_{B_j} + \varepsilon_{ij}^*, & \varepsilon_{ij}^* &\sim N(0, \sigma^{2*}) \text{ e independientes,} \\ i &= 1, \dots, k; & j &= 1, \dots, b, \end{aligned} \quad (2.25)$$

Note que este modelo es la extensión del modelo (2.14) pero donde, de haber efectos por los bloques, se tiene  $\sigma^{2*} \leq \sigma^2$ .

Los bloques formados contienen tantas UE como tratamientos, y cada UE recibió sólo uno de éstos; por ello a estos bloques se les denomina bloques completos.

Por otra parte, note también que no están los términos  $\delta_{TB_{ij}}$  de interacción, los cuales en este diseño se consideran nulos. Es importante señalar que esto es debido a la suposición en este modelo (diseño) de que no hay interacción entre el bloque y el factor de control. De haber interacción las pruebas estadísticas se verían invalidadas. Si hubiera duda sobre esta suposición deberá usarse el diseño conocido como de bloques generalizados, en donde cada tratamiento se repite al menos en una ocasión dentro de cada bloque; por lo que entonces sería posible estudiar interacciones entre el bloque y el factor de control.

Enfatizamos de nuevo que las hipótesis a contrastar son iguales a las contrastadas cuando se tiene un factor sin restricciones en la aleatorización, presentadas en (2.10) y (2.11). Lo adicional e importante estriba en la estimación de la varianza del error de una manera más fina al sustraerle los efectos potenciales de bloques.

El procedimiento para construir la tabla ANDEVA correspondiente a este diseño en bloques (completos) completamente al azar, ilustrado con los datos del Ejemplo 2.5, es el siguiente:

1. La diferencia de cada tratamiento con respecto a la media general es  $\hat{\delta}_{T_i} = \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}$ . La suma de cuadrados de tratamientos ( $SC_{trat}$ ) con  $k - 1$  grados de libertad es:

$$\begin{aligned} SC_{trat} &= \sum_{i=1}^k b \hat{\delta}_{T_i}^2 = 3((98.59)^2 + (-30.41)^2 + (-46.41)^2 + (-21.75)^2) \\ &= 39815.12 \end{aligned}$$

$$CM_{trat} = \frac{39815.12}{3} = 13271.71$$

2. La suma de cuadrados para el bloque ( $SC_{bloq}$ ) con  $b - 1$  grados de libertad es:

$$SC_{bloq} = \sum_{j=1}^b k \hat{\delta}_{B_j}^2 = 4((-0.59)^2 + (2.16)^2 + (-1.58)^2) = 30.22$$

$$CM_{bloq} = \frac{30.22}{2} = 15.08$$

3. La suma de cuadrados total  $SC_{total}$  con  $kb - 1$  grados de libertad es

$$SC_{total} = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^b (y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = 39998.9$$

4. La suma de cuadrados del error con  $kb - 1 - a + 1 - b + 1 = (k - 1)(b - 1)$  grados de libertad es:

$$SC_{error} = SC_{total} - SC_{trat} - SC_{bloq} = 153.56$$

5. La tabla del ANDEVA queda indicada en la Tabla 2.13.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
Tratamientos	3	39814.25	13271.42	515.39	0.000
Bloque (per.)	2	30.17	15.08		
Error	6	154.5	25.75		
Total	11	39998.92			

Tabla 2.13 Análisis de varianza para el diseño en bloques

6. Puesto que el valor  $p$  es muy pequeño se concluye que al menos uno de los tratamientos es distinto del resto.

### Cuadrado latino

El diseño en cuadrado latino es una extensión del modelo anterior de bloques completamente aleatorizados. Suponga que se tiene interés en un solo factor de control con  $p$  niveles (cambiamos por conveniencia la notación en este diseño de  $k$  a  $p$ ). En el caso de bloques, sólo se tiene conceptualizado un tipo de ruido y, por ende, una restricción a la aleatorización de tratamientos. El diseño en cuadrado latino se construye de la siguiente manera:

- Piense en un arreglo de  $p$  renglones y  $p$  columnas. Con ello se tendrá  $p^2$  celdas en tal arreglo.
- $p^2$  UE se pueden distribuir una en cada una de las  $p^2$  celdas, de tal forma que se puede considerar que las UE de una misma fila reciben el mismo nivel del primer tipo de ruido, y las UE de una misma columna reciben el mismo nivel del segundo tipo de ruido.
- Formado este arreglo de  $p^2$  UE, proceda a la aplicación aleatoria de tratamientos, pero atendiendo a dos restricciones:
  - Aleatorice los  $p$  tratamientos en cada fila (primera restricción).
  - Aleatorice los  $p$  tratamientos en cada columna pero de tal manera que en cada fila y en cada columna sólo aparezca una sola vez cada tratamiento.

¿Este diseño a qué circunstancias corresponde?

- Cuando se pueden agrupar a priori los ruidos en el experimento en dos tipos, en el mismo espíritu del diseño en bloques, y sus efectos indeseables sobre la respuesta antes de tratamientos se pueden evitar al agrupar las UE según ambos tipos de ruido identificados en el experimento.
- El número de niveles identificados para los dos factores de ruido son ambos iguales al número de tratamientos  $p$ . Con ello se tendrán  $p^2$  celdas y una UE en cada uno de esos cruces.

Por ejemplo, en una parcela de terreno las UE podrían agruparse por altitud en el terreno pero también por su latitud en el mismo, si se piensa que tanto la altitud como la latitud ejercen efectos sobre la respuesta de las parcelas previamente a la aplicación de fertilizantes. Otro ejemplo sería: en un auto para comparar llantas de  $p = 2$  diferentes marcas, factor de control; podría pensarse que si hay un efecto de posición, trasera o delantera ( $p = 2$ ) y derecha o izquierda ( $p = 2$ ), debería evitarse su efecto ruidoso antes de considerar cuál marca es mejor.

Así las restricciones en la aleatorización para este diseño son tales que un tratamiento deberá aplicarse una sola vez en cada tipo de ruido identificado.

En los casos más simples  $p = 2$  y  $3$ , posibles resultados de aleatorización serían:

r1/r2	1	2
1	1	2
2	2	1

r1\r2	1	2	3
1	1	2	3
2	2	3	1
3	3	1	2

donde cada fila correspondería a un nivel de ruido del primer tipo y cada columna correspondería a un nivel de ruido del tipo dos.

Note que el objetivo experimental sigue siendo comparar los niveles de un factor de control pero ahora con un esquema de aleatorización que permite el filtrado de dos tipos de ruido, cualquier cosa que estos dos tipos de ruido signifiquen en el contexto de aplicación.

Las ventajas del diseño de cuadro latino son las siguientes:

- Requiere de pocas unidades experimentales.
- Reduce de manera sistemática el sesgo de los tratamientos mediante su asignación balanceada.
- Permite estimar con más exactitud la varianza del error experimental, debido al doble bloqueo.

En este caso la variable respuesta estará representada por  $y_{ijl}$ , que reproduce la respuesta al tratamiento  $i$ , en el nivel  $j$  del primer factor de ruido y en el nivel  $l$  del segundo factor de ruido,  $i, j, l = 1, \dots, p$ . El modelo estadístico respectivo es:

$$y_{ijl} = \mu + \delta_{T_i} + \delta_{A_j} + \delta_{L_l} + \varepsilon_{ijl}, \varepsilon_{ijl} \sim N(0, \sigma^2) \text{ independientes,}$$

donde  $\delta_{T_i}$ ,  $\delta_{A_j}$  y  $\delta_{L_l}$  son respectivamente los efectos del nivel  $i$  del factor de control, del nivel  $j$  del primer factor de ruido y  $l$  nivel del segundo factor de ruido. Análogamente al caso de bloques la identificación de dos tipos de ruido implica cuantificar sus efectos  $\hat{\delta}_{A_j}$  y  $\hat{\delta}_{L_l}$ , respectivamente, estimados por:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{A_j} &= (\bar{y}_{\bullet j \bullet} - \bar{y}_{\bullet \bullet \bullet}), \quad j = 1, \dots, p, \\ \hat{\delta}_{L_l} &= (\bar{y}_{\bullet \bullet l} - \bar{y}_{\bullet \bullet \bullet}), \quad l = 1, \dots, p \end{aligned}$$

Los efectos de tratamientos se estiman como se hizo en los procedimientos anteriores.

De nuevo es importante señalar que este diseño no supone efectos de interacción entre cualesquier par formado con un tipo de ruido y el factor de control bajo estudio. Una discusión muy amplia sobre los cuadrados latinos se puede encontrar en Preece (1983).

### Ejemplo 2.6

Un ingeniero industrial está probando cuatro formulaciones en un proceso de mezclado con la finalidad de estudiar la dureza de un producto que fabrica su empresa. Las fórmulas representan cuatro tratamientos que denotaremos  $A, B, C$  y  $D$  respectivamente. El objetivo es contrastar las formulaciones para conocer si

hay alguna diferencia en la dureza del producto si utilizamos un tratamiento en particular. Pueden existir otras condiciones, tales como proveedor, días de producción, etc., que hagan que la homogeneidad en las UE se vea afectada. Dado que los tratamientos son comprados indistintamente a cuatro proveedores, pero que por lo pronto no interesa evaluar a éstos, se considera que los proveedores ( $P$ ) son un factor de ruido para la comparación de tratamientos. Otro factor de ruido que se considera importante es el operador ( $O$ ) que aplique los tratamientos. De esta manera el arreglo experimental que se siguió para una comparación precisa entre formulaciones, evitando sobreestimar la varianza del error con la variabilidad debida a proveedores y a operadores, fue un cuadrado latino de  $4 \times 4$  con los datos resultantes en la Tabla 2.14.

Proveedor	P1	P2	P3	P4	$y_{\bullet j \bullet}$	$\bar{y}_{\bullet j \bullet}$	$\hat{\delta}_{A_j}$
Operador							$(\bar{y}_{\bullet j \bullet} - \bar{y}_{\bullet \bullet \bullet})$
O1	26, A	24, B	16, C	18, D	84	21	7
O2	3, B	4, C	9, D	12, A	28	7	-7
O3	3, C	8, D	11, A	6, B	28	7	-7
O4	21, D	28, A	12, B	23, C	84	21	7
$y_{\bullet \bullet l}$	53	64	48	59			
$\bar{y}_{\bullet \bullet l}$	13.25	16	12	14.75			
$\hat{\delta}_{L_l} =$							
$(\bar{y}_{\bullet \bullet l} - \bar{y}_{\bullet \bullet \bullet})$	-0.75	2	-2	0.75		$\bar{y}_{\bullet \bullet \bullet} = 14$	
efecto de tratamiento							
$\hat{\delta}_{T_1} = (\bar{y}_{1 \bullet \bullet} - \bar{y}_{\bullet \bullet \bullet}) = 5.25$							
$\hat{\delta}_{T_2} = (\bar{y}_{2 \bullet \bullet} - \bar{y}_{\bullet \bullet \bullet}) = -2.75$							
$\hat{\delta}_{T_3} = (\bar{y}_{3 \bullet \bullet} - \bar{y}_{\bullet \bullet \bullet}) = -2.5$							
$\hat{\delta}_{T_4} = (\bar{y}_{4 \bullet \bullet} - \bar{y}_{\bullet \bullet \bullet}) = 0$							

Tabla 2.14 Cuadrado latino: datos y efectos estimados

Así:

$$CM_{form} = \frac{\sum_{i=1}^p p \hat{\delta}_{T_i}^2}{p-1} = \frac{4(5.25^2 + (-2.75)^2 + (-2.5)^2 + 0^2)}{4-1} = \frac{165.5}{3} = 55.17$$

$$CM_{oper} = \frac{\sum_{j=1}^p p \hat{\delta}_{A_j}^2}{p-1} = \frac{4(7^2 + (-7)^2 + (-7)^2 + (7)^2)}{4-1} = \frac{4(196)}{3} = 261.33$$

$$CM_{prov} = \frac{\sum_{l=1}^p p\hat{\delta}_{L_k}^2}{p-1} = \frac{4((-0.75)^2 + (2)^2 + (-2)^2 + (0.75)^2)}{4-1} = \frac{36.5}{3} = 12.17$$

cada uno con  $p-1$  grados de libertad respectivamente. La suma de cuadrados del error, con  $p^2 - 1 - 3(p-1) = (p-2)(p-1)$  grados de libertad se obtiene por:

$$SC_{error} = SC_{total} - SC_{\delta_T} - SC_{\delta_A} - SC_{\delta_L} = 88$$

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
Fórmula (tratamientos)	3	165.5	55.17	3.76	0.079
Bloque oper.(altitud)	3	784.0	261.33		
Bloque prov.(latitud)	3	36.5	12.17		
Error	6	88.0	14.66		
Total	15	1074.0			

Tabla 2.15 ANDEVA del cuadrado latino del ejemplo 2.6

Encuentre el valor correspondiente de la distribución  $F$  y a partir de la Tabla 2.15, obtenga sus conclusiones.

## 2.5 Análisis de Covarianza

En el mismo sentido de identificar el error experimental de manera fidedigna y así incrementar la precisión experimental para detectar diferencias de medias de tratamientos, el análisis de covarianza es una estrategia alternativa o complementaria a la restricción de aleatorización de tratamientos.

La diferencia estriba en que hay que identificar una(s) variable(s)  $x$ , denominada covariable, que se presume tiene un efecto sobre la variabilidad en la variable respuesta distinta a los efectos aportados por los tratamientos y por el error experimental, pero que no es controlable sino sólo medible durante el experimento y que no depende de alguno de los tratamientos. Así, la observación en el experimento consiste en una terna de valores  $(y, x, i)$  en cada UE, donde  $y$  es la variable de interés en el experimento y  $x$  es la covariable en un tratamiento particular  $i$ . La covariable corresponde a una influencia de ruido que hace diferente a la UE particular, por lo que la comparación entre tratamientos, sin tomar en cuenta a  $x$ , sería potencialmente inválida.

### Ejemplo 2.7

Un investigador está estudiando tres técnicas diferentes de deshidratación con el propósito de industrializar una fruta. Utiliza un diseño completamente al azar

para evaluar el índice de recuperación del agua en cada fruta tratada. Debido a que el tamaño del fruto estudiado varía, se pesa cada uno de ellos al asignarlo al tratamiento porque se piensa que el peso cambia el índice de recuperación del agua de por sí. Así en este caso el peso es una covariable en el proceso. De esta forma, el factor de control es la técnica de deshidratación con niveles denotados por  $i$ , la respuesta  $y$  representa el índice de rehidratación y la covariable  $x$  el peso de la fruta antes de ser tratada. Los datos que resultaron al realizar el experimento se reproducen en la Tabla 2.16.

$i$	$y_{ij}$	$x_{ij}$	$i$	$y_{ij}$	$x_{ij}$	$i$	$y_{ij}$	$x_{ij}$
1	57.00	11.50	2	77.00	15.50	3	58.00	14.50
1	60.00	13.00	2	89.00	16.50	3	64.00	15.00
1	69.00	15.00	2	90.00	18.00	3	73.00	18.00
1	71.00	14.00	2	92.00	19.50	3	75.00	17.50
1	81.00	17.00	2	104.00	23.00	3	78.00	19.00
1	83.00	18.50	2	101.00	22.50	3	80.00	20.00
<i>medias</i>	70.17	14.83		92.17	19.17		71.33	17.33
$P_{xy}$	132.17			141.33			90.83	
$P_{xx}$	33.35			47.85			23.85	
$P_{yy}$	560.85			462.85			367.35	
$S_{XY}$	237.70			317.43			82.08	
$SC_{Xtotal}$	161.78			$SC_{Ytotal}$	3229.79			

Tabla 2.16 Resultados del Ejemplo 2.7

donde  $P_{xy} = \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet})(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}) = 364.33$ ,  $P_{xx} = \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet})^2 = 105.05$ ,  $P_{yy} = \sum_{i,j} (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2 = 1390.05$ ,  $SC_{XY} = \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_{\bullet\bullet})(y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet}) = 637.21$ ,  $SC_{Xtotal} = \sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_{\bullet\bullet})^2$ ,  $SC_{Ytotal} = \sum_{i,j} (y_{ij} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$ .

Los datos de la Tabla 2.16 se muestran en la Fig. 2.5. Los números en la gráfica corresponden a observaciones bajo los tres distintos tratamientos; observe que dentro de un mismo tratamiento hay una tendencia lineal de  $y$  en  $x$ , lo que provoca que una media de  $y$  independiente de  $x$  no tenga sentido ya que en realidad la media de  $y$  cambia dependiendo del valor de  $x$ . Sin embargo, como el interés sigue siendo comparar medias, si se lograra tener medias ajustadas por la variabilidad en  $x$ , entonces se podrían comparar entre sí.

Denote por  $\bar{x}_{\bullet\bullet}$  :

$$\sum_{i,j} \frac{x_{ij}}{n_{\bullet\bullet}}$$

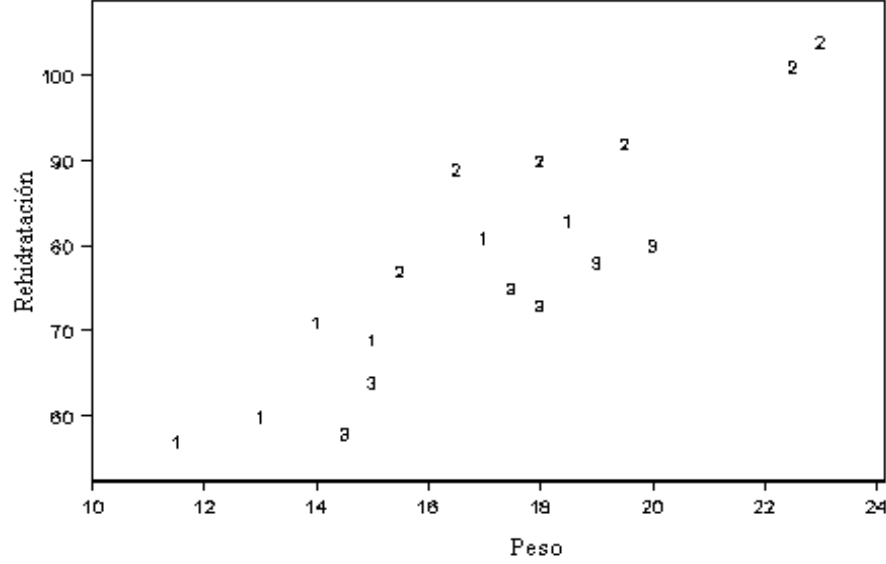


Fig. 2.5: Gráfico de dispersión entre el peso y la hidratación, con tres técnicas de deshidratación.

el promedio global de todos los valores  $x_{ij}$  medidos en el experimento, donde:

$$n_{\bullet\bullet} = \sum_{i,j} n_{ij}$$

y a  $\bar{x}_{i\bullet}$ :

$$\bar{x}_{i\bullet} = \sum_j \frac{n_{ij} x_{ij}}{n_i}$$

el promedio de las  $x_{ij}$  en el tratamiento  $i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Se puede demostrar que los promedios (ajustados) a ser utilizados en la comparación de medias de tratamientos serán, usando la covariable  $x$ :

$$\bar{y}_{i\bullet(\text{ajustado})} = \bar{y}_{i\bullet} - \hat{\beta}(\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet\bullet}), \quad i = 1, \dots, k \quad (2.26)$$

donde:

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet})(y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})}{\sum_{i,j} (x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet})^2} \quad (2.27)$$

Intuitivamente estos promedios son plausibles, ya que son promedios de cada tratamiento pero ajustados por una cantidad que es proporcional a la diferencia



$\bar{x}_{i\bullet} - \bar{x}_{\bullet\bullet}$ , la variabilidad aportada por  $x$  dentro del tratamiento  $i, i = 1, \dots, k$ . Así el modelo es:

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \mu + \delta_i + \beta x_{ij} + \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &\sim N(0, \sigma^2) \text{ independientes} \end{aligned}$$

Para contrastar las hipótesis (2.10) y (2.11), se requiere de las siguientes cantidades:

$$S_{error} = P_{yy} - \frac{(P_{xy})^2}{P_{xx}}$$

con  $N - k - 1$  grados de libertad,

$$S'_{error} = SCY_{total} - \frac{(SC_{XY})^2}{SC_{Xtotal}}$$

con  $N - 2$  grados de libertad. De este modo, se puede demostrar que el criterio para rechazar la hipótesis (2.5) es mediante la comparación del valor de

$$F_c = \frac{(S'_{error} - S_{error})/(k - 1)}{S_{error}/(N - k - 1)} \quad (2.28)$$

con  $F_c > F(k, N - k - 1, \alpha)$ . Todo esto descrito en una tabla de análisis de varianza resulta como en la Tabla 2.17.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios
Tratamiento	$k - 1$	$S_{trat} = S'_{error} - S_{error}$	$\frac{S_{trat}}{k-1}$
Error	$N - k - 1$	$S_{error}$	$\frac{S_{error}}{N-k-1}$

Tabla 2.17 Descripción del análisis de covarianza (ancova)

El valor estimado de  $\beta$  para el Ejemplo 2.7 se obtiene mediante la expresión (2.27),

$$\hat{\beta} = 3.47$$

Los promedios sin y con ajuste son, mediante (2.26):

$$\begin{array}{llll} \bar{y}_{i\bullet} & 70.17 & 92.17 & 71.33 \\ \bar{y}_{i\bullet(ajustado)} & 78.07 & 85.03 & 70.56 \end{array}$$

Así para contrastar la hipótesis de igualdad de efectos de tratamientos, mediante (2.28), se tiene que:

$$F_c = 32.53$$

Como ejercicio construya la parte numérica que corresponde a la Tabla 2.17. El análisis de covarianza se puede generalizar a más de una covariable, a relaciones de segundo orden entre la covariable y la respuesta; estas ideas se presentarán en los ejercicios del Capítulo 8. El ancova se puede aplicar a cualquier diseño de experimentos, de manera similar a la discutida en este subapartado.

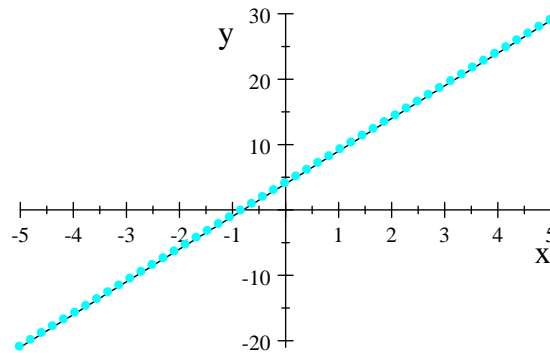
### 2.5.1 Caso general del análisis de covarianza

Se analizará el modelo de un factor con una covariable y cada tratamiento con  $n$  replicaciones. El modelo general es:

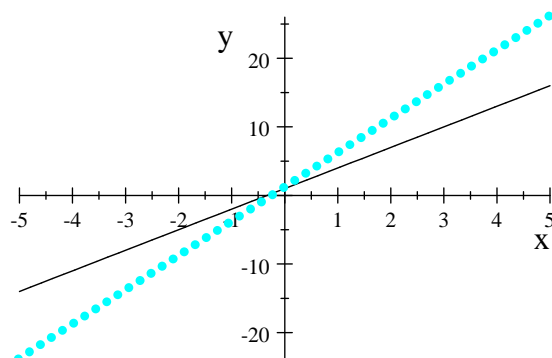
$$\begin{aligned} y_{ij} &= \mu + \delta_i + \beta_i x_{ij} + \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &\sim N(0, \sigma^2) \text{ independientes} \end{aligned}$$

La parte del modelo que corresponde a  $\mu + \delta_i$  se refiere al análisis de varianza que se realiza comúnmente (ANDEVA). La parte  $\beta_i x_{ij}$  corresponde a un análisis de regresión lineal simple, donde  $x_{ij}$  es la covariable. El término  $\beta_i$  puede sugerir interacción de la covariable con el factor de control. Supongamos que  $k = 2$ , entonces podemos tener los siguientes cuatro casos:

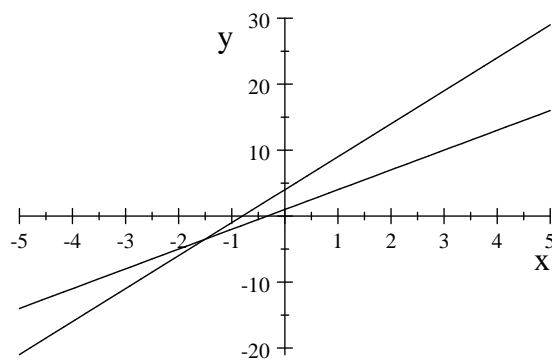
- No hay interacción y no hay efectos de tratamiento ( $\delta_1 = \delta_2$  y  $\beta_1 = \beta_2$ )



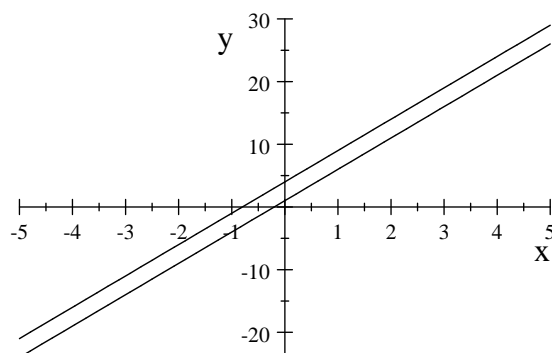
- No hay efectos de tratamiento en  $x_{ij} = 0$ ,  $\delta_1 = \delta_2$  pero  $\beta_1 \neq \beta_2$



- $\delta_1 \neq \delta_2$      y      $\beta_1 \neq \beta_2$



- $\delta_1 \neq \delta_2$      y      $\beta_1 = \beta_2$



A este último caso se le conoce como el análisis de covarianza típico.

Partiendo del modelo general  $y_{ij} = \mu + \delta_i + \beta_i x_{ij} + \varepsilon_{ij}$  podemos hacer la minimización de los errores al cuadrado vía mínimos cuadrados como sigue:

$$\min_{\alpha_i, \beta_i, \mu} \sum \varepsilon_{ij}^2 = \min_{\alpha_i, \beta_i, \mu} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \delta_i - \beta_i x_{ij})^2$$

Si a  $\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \mu - \delta_i - \beta_i x_{ij})^2$  le llamamos  $s$ , obtenemos el sistema de ecuaciones normales igualando las derivadas parciales con respecto a cada parámetro a cero.

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \mu} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\delta}_i - \hat{\beta}_i x_{ij}) = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial \alpha_i} &= \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\delta}_i - \hat{\beta}_i x_{ij}) = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial \beta_i} &= \sum_{j=1}^n x_{ij} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\delta}_i - \hat{\beta}_i x_{ij}) = 0 \end{aligned}$$

Suponiendo  $\hat{\mu} = 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \alpha_i} &= \sum_{j=1}^n (y_{ij} - \hat{\delta}_i - \hat{\beta}_i x_{ij}) = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial \beta_i} &= \sum_{j=1}^n x_{ij} (y_{ij} - \hat{\delta}_i - \hat{\beta}_i x_{ij}) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_i &= \bar{y}_{i.} - \hat{\beta}_i \bar{x}_{i.} & i = 1, \dots, k \\ \hat{\beta}_i &= \frac{[P_{xy}]_i}{[P_{xx}]_i} & i = 1, \dots, k \end{aligned}$$

Sustituyendo los valores en  $s$  tenemos

$$\begin{aligned}
s_{\min} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \left( y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet} + \hat{\beta}_i \bar{x}_{i\bullet} - \hat{\beta}_i x_{ij} \right)^2 \\
&= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \left[ (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}) - \hat{\beta}_i (x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet}) \right]^2 \\
&= \sum_{i=1}^k \left[ \sum_{j=1}^r (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}) - \hat{\beta}_i^2 \sum_{j=1}^r (x_{ij} - \bar{x}_{i\bullet})^2 \right] \\
&= \sum_{i=1}^k \left[ [P_{yy}]_i - \hat{\beta}_i^2 [P_{xx}]_i \right]
\end{aligned}$$

Luego entonces

$$\begin{aligned}
E([s_{\min}]_i) &= \sigma^2(n-2) \implies \\
E[s_{\min}] &= \sum E([s_{\min}]_i) = \sigma^2 k(n-2)
\end{aligned}$$

Y por lo tanto  $\frac{s_{\min}}{k(n-2)}$  es un estimador insesgado de  $\sigma^2$ .

Teniendo este análisis podemos comparar los diferentes modelos que se pueden usar dependiendo de los cuatro casos anteriores, y así juzgar cuál debemos utilizar, usando la suma de cuadrados de residuales del modelo completo como línea base para hacer las pruebas correspondientes.

## 2.6 Ejercicios

**Ejercicio 2.1** Un ingeniero está estimando el tiempo de falla de un equipo eléctrico de dos marcas diferentes, este equipo se somete a una prueba de esfuerzo. El tiempo de falla medido en horas se muestran a continuación:

equipos	$\bar{y}_{i\bullet}$ $S_i^2$ gl				
equipo 1	83	58	83	65	67
	66	59	81	75	70
equipo 2	73	66	67	59	84
	55	68	79	82	74

1. Pruebe la hipótesis de igualdad de dos varianzas. Use  $\alpha=0.05$ .

- Con los resultados en el punto anterior pruebe la hipótesis de que el tiempo de falla en ambos equipos es el mismo.
- Analice la suposición de normalidad.

**Ejercicio 2.2** Una compañía desea estudiar la potencia de un recolector solar, y por ello prueban dos configuraciones diferentes de éste; se prueba en seis ocasiones cada configuración. Los resultados se presentan a continuación. La cantidad medida fue la energía en (Watts).

Configuración	$\bar{y}$ $S^2$ $gl$					
A	13.7	14.1	13.4	14.2	15.6	14.4
B	13.5	14.0	13.2	13.7	13.3	13.1

Los datos fueron recolectados en doce diferentes períodos (comparables) de tiempo.

- Indique cómo realizaría usted este experimento.
- ¿Cuál es su hipótesis estadística? ¿Cuál es su estadístico de prueba?
- ¿Existe alguna diferencia entre las configuraciones para generar energía?
- ¿Es aceptable el supuesto de normalidad para hacer la prueba?

**Ejercicio 2.3** La ductilidad de una barra de metal es una propiedad muy importante de la materia prima que se emplea en las compañías que manufacturan por extrusión, tal como la fabricación de cables eléctricos. Es de importancia que el metal no sea muy ni poco dúctil. Dos proveedores prueban su materia prima en una compañía. Una muestra de diez barras se toma del almacén de cada proveedor, los valores de las diez ductibilidades se muestran en la tabla de abajo.

Proveedor										
1	2.72	3.01	2.71	2.56	2.37	2.93	3.34	2.85	2.67	3.02
2	2.51	2.73	3.22	3.17	2.98	3.14	2.95	3.17	3.08	3.23

- Indique el proceso que seguiría para seleccionar la muestra de cada proveedor.
- Se requiere averiguar si existe diferencia en la ductibilidad de los productos para ambos proveedores.

- Plantear la hipótesis estadística que le permitiría probar esa diferencia.
- ¿Cuál es el estadístico de prueba que usaría para verificar la hipótesis?
- Mencione los supuestos estadísticos que se deben satisfacer para probar la hipótesis, bosqueje gráficamente estas ideas.
- Realice la prueba e indique su conclusión.

**Ejercicio 2.4** Una compañía desea probar el efecto de venta de un nuevo producto empacado en cuatro diferentes presentaciones. Para el estudio se seleccionan doce tiendas con igual volumen de ventas mensual. Cada tienda se asigna aleatoriamente a cada una de las presentaciones, tal como se muestra en los datos descritos abajo. Otras variables que son relevantes para el estudio son: el precio, la localización y cantidad de productos en el estante, y esfuerzos de especiales de promoción. La variable de respuesta fue el volumen de ventas en el periodo de estudio.

Presentación	1	2	3	4
	12	14	19	24
	18	12	17	30
	16	13	21	28
Total				
$n$				
Media				
Varianza				

1. Repase la estrategia experimental.
2. ¿Cuál es la hipótesis que se prueba?
3. Construya la tabla del ANDEVA y pruebe la hipótesis.
4. Calcule los residuales y haga una gráfica de los  $e_i$  versus  $\hat{y}_{ij}$ . ¿Qué concluye?

**Ejercicio 2.5** Para comparar la viscosidad de cuatro diferentes marcas de aceite casero se realizaron las pruebas de evaluación en un laboratorio. Los resultados

registrados en cinco muestras de cada marca son los siguientes:

marca	$m1$	$m2$	$m3$	$m4$
	59	90	77	98
	60	71	66	69
	58	83	64	93
	71	76	75	89
	48	90	80	97
total				
media				
varianza				
$n$				

1. Explique cómo efectuaría este experimento.
2. Plantee la hipótesis que se prueba, construya la tabla del ANDEVA y pruebe la hipótesis.
3. Estime los efectos para cada marca de aceite, describa un diagrama de caja para cada marca de aceite, ¿qué observa?
4. ¿El nivel de viscosidad presente en cada marca es el mismo?
5. Calcule los residuales, trace un gráfico probabilístico Normal para representarlos, y haga una gráfica de los  $e_i$  versus  $\hat{y}_{ij}$ , ¿qué observa?

**Ejercicio 2.6** Una compañía de computadoras somete a tres tipos de esfuerzo a sus equipos. Las computadoras son idénticas tanto en forma como en modelo, pero son sujetas a diferentes grados de fluctuación de voltaje. El gerente desea probar si el tiempo promedio de operación antes que la computadora falle, es el mismo para los tres sistemas de esfuerzo. Los datos que a continuación se proporcionan representan el tiempo (en horas) de falla  $y$  de las computadoras.

tipo de esfuerzo	$A$	$B$	$C$
	115	65	87
	7	48	141
	96	33	185
	214	17	32
	20	4	219
total			
$n$			
media			
varianza			



1. Trace un gráfico probabilístico Normal para representar estos datos, ¿qué observa?
2. Escriba la hipótesis que permita comparar si los tres tipos de fuerza son diferentes.

Nota: Cuando alguno de los supuestos falla, o alguna transformación de la variable de respuesta no resulta adecuada, existen las pruebas llamadas no-paramétricas que permiten llevar a cabo la inferencia sobre la igualdad de tratamientos. En el caso del diseño completamente al azar, el estadístico de prueba Kruskal - Wallis ( $KW$ ) es una alternativa para comparar los tratamientos. El procedimiento consiste en ordenar de menor a mayor todas las observaciones de la variable de respuesta  $y_{ij}$ , luego escribir el valor del orden (rango  $R_{ij}$ ) que le tocó a cada observación en el tratamiento correspondiente. Para tratamientos cuyo tamaño de muestra es cinco o más, el estadístico se expresa por la siguiente fórmula:

$$KW = \left[ \frac{12}{N(N+1)} \sum_{i=1}^k n_i \bar{R}_{i\bullet}^2 \right] - 3(N+1)$$

donde  $\bar{R}_{i\bullet}$  es el promedio de rangos en cada tratamiento y  $N$  es el número total de observaciones. Para saber si los datos apoyan la hipótesis de igualdad de tratamientos, el valor obtenido de  $KW$  se compara con un cuantil de la  $\chi^2$ , con  $k - 1$  grados de libertad.

3. Realice la prueba estadística aplicando este estadístico.

**Ejercicio 2.7** Una empresa fabricante de productos para mejorar la productividad de la agricultura, realiza un estudio experimental para determinar cuál de seis tratamientos es el que muestra mejores resultados en el contenido de nitrógeno en ciertas plantas de interés. El experimento se lleva a cabo en un invernadero, hecho que permite realizarlo con un diseño completamente al azar asignando 5 plantas para cada tratamiento. Los datos obtenidos se muestran a continuación.

tratamiento	1	2	3	4	5	6
1	19.4	17.7	17.0	20.7	14.3	17.3
2	32.6	24.8	19.4	21.0	14.4	19.4
3	27.0	27.9	9.1	20.5	11.8	19.1
4	32.1	25.2	11.9	18.8	11.6	16.9
5	33.0	24.3	15.8	18.6	14.2	20.9
efecto $\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}$						

1. Realice el análisis de varianza correspondiente.

- Realice análisis de residuales. Identifique si existen observaciones atípicas. Si las hay omítalas de una en una y en conjunto del análisis, y vea qué influencia tiene esto en la interpretación de resultados. Tome la decisión de dejarlas en el análisis o de reportarlas de manera separada.

**Ejercicio 2.8** Una compañía farmacéutica está desarrollando un nuevo tipo de sustancia estrogénica: con el objetivo de ir clarificando la dosis terapéutica necesaria para humanos, se realizan experimentos con ratas wistar de laboratorio, utilizando 6 dosis y un control negativo (sin dosis alguna). Para observar el efecto de las diferentes dosis se mide el peso del útero de las ratitas después de ser administradas las dosis por un período de interés. Las condiciones experimentales permiten correr el experimento bajo un diseño completamente aleatorizado, utilizando cuatro ratitas por cada tratamiento. Los datos son los siguientes.

Dosis	0(control)	1	2	3	4	5	6
	89.8	84.4	64.4	75.2	88.4	56.4	65.6
	112.6	116.0	79.8	62.4	90.2	83.2	79.4
	88.4	84.0	88.0	62.4	73.2	90.4	65.6
	93.8	68.6	69.4	73.8	87.8	85.6	70.2
efecto $\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}$							

Realice el análisis de varianza correspondiente y el análisis de residuales. Identifique si existen observaciones atípicas. Si las hay, omítalas de una en una y en conjunto del análisis, y vea qué influencia tiene esto en la interpretación de resultados. En su caso, tome la decisión de dejarlas en el análisis o de reportarlas de manera separada.

**Ejercicio 2.9** En un estudio de vida acelerada, se estudia la duración efectiva de 4 tipos de focos, los cuales se someten a una carga acelerada de 40 *kV*. En la siguiente tabla se muestran los datos que se han obtenido al someter a ese esfuerzo a cuatro tipos de ellos. La variable de respuesta es la duración en horas de los focos.

Tipo de foco	<i>f1</i>	<i>f2</i>	<i>f3</i>	<i>f4</i>
	25.6	22.9	18.4	10.5
	12.9	3.6	12.6	9.6
	10.9	5.3	4.5	20.3
	28.3	11.6	2.5	15.8
	17.8	8.5	10.5	9.7
efecto $\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}$				

- ¿Se puede afirmar que el tiempo de vida promedio de los focos difiere según su tipo?

2. Verifique los supuestos para tal afirmación.

**Ejercicio 2.10** Los siguientes datos se obtuvieron de la calibración en una prueba no destructiva de tensión en seis muestras de cable, realizada por tres diferentes laboratorios, denominados A, B y C. Cada laboratorio repitió dos veces la medición. Las mediciones se recogen en la siguiente tabla:

muestra / laboratorio	A		B		C	
1	48	49	50	51	51	51
2	49	49	50	51	52	53
3	50	52	48	49	50	50
4	52	49	52	53	53	52
5	52	51	51	51	52	52
6	48	48	49	50	50	51

1. Describa a detalle cómo debe realizarse el experimento para que el análisis ayude a averiguar cuándo hay una diferencia apreciable en las medias de las pruebas realizadas por los laboratorios.
2. Construya la tabla del ANDEVA.
3. Escriba la hipótesis y realice la prueba.

**Ejercicio 2.11** Se desea seleccionar un nuevo tipo de llantas de entre cuatro tipos disponibles ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ). Aunque las condiciones de uso pueden ser simuladas en un laboratorio, se desea probar las llantas en condiciones reales de manejo. La variable a ser medida como variable de respuesta es la diferencia de grosor máxima de la llanta después de 20000 kms. Proponga al menos tres diferentes diseños experimentales para realizar el experimento, argumentando razones y posibles ventajas entre los diseños propuestos. Considere que tiene a su disposición cuatro automóviles, y por ende cuatro choferes, así como cuatro llantas para cada tipo.

**Ejercicio 2.12** En un estudio sobre la efectividad de publicidad subliminal, un grupo de sujetos se someten a un estudio en el que se les muestran tres películas con la publicidad subliminal de un producto. Se evalúan en cada sujeto, antes y después de la película, las actitudes u opinión sobre el producto.

1. ¿Cómo realizaría el experimento?
2. Para esta situación, ¿se debería proponer un tratamiento control? Explique su respuesta.
3. ¿Considera que pueden existir otros factores en el estudio?

**Ejercicio 2.13** En Nelson (1982), aparece un estudio de prueba de vida acelerada realizada en un cierto tipo de calentadores. Los tratamientos son cuatro diferentes temperaturas a las que se sometieron esos calentadores para estimar su periodo de vida. Seis de éstos se utilizaron en cada temperatura, y en este caso la variable de respuesta es el número de horas en el que fallaron. Las temperaturas y las respuestas se muestran en la siguiente tabla:

Temperatura	1520	1620	1660	1708
	1953	1190	651	511
	2135	1286	837	651
	2471	1550	848	651
	4727	2125	1038	652
	6134	2557	1361	688
	6314	2845	1543	729
efecto $\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet}$				

1. Usando las técnicas de graficación descritas en este capítulo, diga si se satisfacen los supuestos para realizar el análisis de la varianza.
2. Proponga una transformación para los datos de este diseño y repita el análisis gráfico para verificar los supuestos.

**Ejercicio 2.14** Un médico y un nutriólogo se dedican a investigar qué tipo de dieta produce una reducción en los niveles de colesterol (mg/dl). Ellos suponen que la edad puede ser un factor que ocasione unidades experimentales no homogéneas en sus tres dietas, por lo que consideran quince sujetos divididos en cinco grupos de edad. Miden el nivel de colesterol de las personas al inicio de la investigación y al cabo de seis semanas los resultados (cambios debidos) reportados son:

Dietas	D1	D2	D3
Grupos de edad			
entre 16 y 25	28.6	13.8	6.5
entre 26 y 35	15.5	4.8	5.1
entre 36 y 45	21.5	10.8	6.2
entre 46 y 55	17.8	16.1	8.8
entre 56 y 65	14.5	9.4	7.9

1. ¿Está usted de acuerdo en que la edad deber ser usada como bloque? Argumente su respuesta.
2. Realice el análisis de la varianza.

3. Obtenga los residuales y haga las gráficas correspondientes para verificar los supuestos.
4. Se puede concluir que alguna de las dietas reduce significativamente el colesterol, ¿cuál? Justifique su respuesta.

**Ejercicio 2.15** Se proponen cuatro diferentes tipos de sensores ( $S1$ ,  $S2$ ,  $S3$ ,  $S4$ ) para controlar la temperatura de refrigeradores de uso doméstico. Se desea establecer cuál de estos sensores hacen que un refrigerador haga el tiempo (minutos) de paro en el menor tiempo, y que las condiciones de enfriamiento sean las mismas en todos los casos. En el estudio previo que llevó a cabo el ingeniero del proyecto, identificó dos fuentes de variación: el proveedor y el tipo de refrigerador. La estrategia experimental que se plantea para comparar estos sensores corresponde a un diseño en cuadrado latino. Los datos que le generó el experimento son:

$R \backslash P$	1	2	3	4
1	$S2 : 6.65$	$S4 : 4.63$	$S1 : 9.79$	$S3 : 8.54$
2	$S1 : 8.84$	$S2 : 7.01$	$S3 : 9.05$	$S4 : 5.10$
3	$S3 : 8.36$	$S1 : 9.93$	$S4 : 4.03$	$S2 : 6.47$
4	$S4 : 4.78$	$S3 : 9.13$	$S2 : 6.20$	$S1 : 9.50$

$R$ : Tipo de Refrigerador,  $P$ : Proveedor

1. Indique cómo llevaría a cabo el proceso de aleatorización.
2. Plantee la pruebas de hipótesis estadísticas.
3. Haga un análisis de residuales e interprete las gráficas.
4. Pruebe la hipótesis, interprete y sugiera recomendaciones.

**Ejercicio 2.16** Un ingeniero industrial está probando cuatro formulaciones en un proceso de mezclado con la finalidad de estudiar la dureza de un producto. Las fórmulas representan los tratamientos, éstos se designan con A, B, C, D respectivamente. El objetivo es contrastar los promedios de las formulaciones para conocer la existencia de alguna diferencia en la dureza del producto. El experimento se realizó aleatorizando las formulaciones. Por ejemplo, con la fórmula resultante de la primera aleatorización se lleva a cabo el proceso, se toma una muestra del producto y se mide la dureza; este procedimiento se repitió 16 veces de tal manera que cada uno los tratamientos tuviera cuatro mediciones. Los resultados se presentan en la siguiente tabla.

	A	B	C	D		
	45	23	36	30		
	48	45	24	37		
	31	27	23	28		
	33	32	43	41	$y_{\bullet\bullet}$	$\bar{y}_{\bullet\bullet}$
total $y_{i\bullet}$						
$\bar{y}_{i\bullet}$						
$S_i^2$						
$\hat{\delta}_i$						
$n_i$						
$gl_i$						

Planteamiento estadístico: escriba la hipótesis estadística para corroborar si hay una diferencia entre tratamientos.

$$H_0 :$$

$$H_1 :$$

Desarrolle la prueba de hipótesis, para ello escriba la tabla del ANDEVA.

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Gl	Cuadrados medios	F	Valor $p$
Tratamientos					
Error					
Total					

¿Qué concluye? Calcule el residual  $e_{21}$ .

### Diseño en bloques

El ingeniero observó que los operadores que realizaron la formulación eran un factor de ruido, así que consideró homogenizar las unidades experimentales, para ello decidió que cada operador debía hacer cada una de las fórmulas. El experimento en este caso se realiza aleatorizando los cuatro tratamientos para cada uno de los operadores. Aleatorice tratamientos.

Tratamientos
O1
O2
O3
O4

En términos estadísticos cuando los niveles de un factor se utilizan para homogeneizar las unidades experimentales se refiere como bloques, en este ejemplo

se dice que los operadores desempeñan el papel del bloque. Los resultados de realizar el experimento homogenizando las unidades experimentales en bloques son:

	A	B	C	D	$y_{\bullet\bullet}$	$\bar{y}_{\bullet j}$	$\hat{\delta}_j$
O1	45	45	36	37			
O2	33	23	23	30			
O3	31	27	24	28			
O4	48	32	43	41			
$y_{\bullet\bullet}$							
$\bar{y}_{i\bullet}$							
$\hat{\delta}_i$							

Planteamiento estadístico: escriba la hipótesis estadística para probar la existencia de una diferencia en este experimento.

$$H_0 :$$

$$H_1 :$$

¿En qué radica la diferencia con el experimento anterior?

Desarrollo de la prueba de hipótesis, complete la tabla del ANDEVA.

Fuente de variación	Suma de cuadrados	gl	Cuadrado medio	F	Valor $p$
Tratamientos					
Bloques					
Error					
Total					

¿Qué concluye?

¿Cómo calcula el cuadrado medio de bloques y del error?

Calcule el residual  $e_{21}$ .

### Diseño en Cuadrado latino

Pueden existir otros factores de ruido como proveedores o días. En ese caso es necesario realizar un doble bloqueo con el fin de homogenizar las unidades experimentales (UE). En el caso del ejemplo que se estudia, se considera que los proveedores son otro tipo de ruido. De esta manera el arreglo experimental que se requiere es el siguiente:

	P1	P2	P3	P4
O1	A	B	C	D
O2	B	C	D	A
O3	C	D	A	B
O4	D	A	B	C

	P1	P2	P3	P4
O1	45	45	36	37
O2	23	23	30	33
O3	24	28	31	27
O4	41	48	32	43

El planteamiento estadístico sigue siendo probar la igualdad de tratamientos, ahora bajo este esquema de homogenización de las UE por proveedores y operadores. El cálculo que se agrega a este esquema es el cuadrado medio del segundo bloque o tipo de ruido, que en este caso son los proveedores;  $c$  es el tamaño del bloque 2.

Obtenga el Cuadrado Medio de este bloque. La tabla del análisis de la varianza es:

Fuente de variación	Suma de cuadrados	gl	Cuadrado medio	F	Valor $p$
Tratamientos					
Bloque oper.					
Buque prov.					
Error					
Total					

Obtenga sus conclusiones.

Calcule el residual  $e_{212}$ .

Observe estos resultados en un paquete estadístico.

Proponga un ejemplo en su área de trabajo donde sea de interés un diseño en cuadrado latino.

**Ejercicio 2.17** (Montgomery 1984). Se usan tres máquinas distintas para producir fibras monofilamentares para una compañía textil. Existe interés por determinar si hay diferencia en la resistencia a la ruptura de la fibra producida por las tres máquinas. La resistencia de una fibra depende de su grosor, y se considera que son más resistentes las de mayor grosor. Se realiza un diseño completamente al azar, cada tratamiento tiene cinco UE, donde la unidad experimental es un fragmento de fibra. La variable de respuesta ( $y$ ) es resistencia a la ruptura de una fibra, la covariable ( $x$ ) el grosor de la fibra, independiente del factor tipo de máquina que la produce. Los datos se recogen en la tabla siguiente:



Máquina	1		2		3	
	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$
	36	20	40	22	35	21
	41	25	48	28	37	23
	39	24	39	22	42	26
	42	25	45	30	34	21
	49	32	44	28	32	15

1. Grafique los datos. Bosqueje una línea en cada tratamiento, ¿éstas tienen la misma pendiente?
2. Obtenga la tabla del ancova e interprétela.
3. Obtenga la tabla del ANDEVA sin considerar la covariable, saque sus conclusiones con referencia a la igualdad de máquinas. ¿Qué diferencias puede detectar en ambas tablas?
4. Estime el parámetro (2.27) que representa la pendiente en el modelo.
5. Obtenga las medias para los tratamientos sin considerar la covariable y ajustadas por la covariable, ¿qué observa?
6. Señale algunas ventajas del análisis de covarianza.

**Ejercicio 2.18** En una industria química, un ingeniero aplica tres diferentes concentraciones de un catalizador para aumentar la producción de un proceso. Se cree que una cierta cantidad de impurezas en la materia prima afecta la producción. Se realiza un diseño completamente al azar y en cada unidad experimental se mide la cantidad de impurezas ( $X$ ) y la producción ( $y$ ). El registro de la información se muestra en la siguiente tabla.

Catalizador: $i$	%1		%2		%3	
	$y_{1j}$	$X_{1j}$	$y_{2j}$	$X_{2j}$	$y_{3i}$	$X_{3j}$
	21.5	5.2	20.6	7.7	13.6	3.3
	19.4	4.1	17.5	3.8	14.7	4.6
	18.2	2.6	20.5	7.3	15.8	7.6
	21.8	5.0	17.8	6.4	15.2	5.5
	20.4	3.2	16.3	4.8	16.6	6.7

1. Grafique los datos. Bosqueje una línea en cada tratamiento, ¿éstas tienen la misma pendiente?

2. Obtenga la tabla del ancova e interprétela.
3. Estime el parámetro (2.27) que representa la pendiente en el modelo.
4. Obtenga las medias para los tratamientos sin considerar la covariable y ajustadas por la covariable, ¿qué observa?

**Ejercicio 2.19** En la sección 2.5 se describen cuatro situaciones que pueden ocurrir en el análisis de covarianza, a continuación se presentan cuatro casos que caracterizan esas situaciones. En un proceso donde se manufacturan láminas de hule se tienen dos tratamientos ( $T_1$  y  $T_2$ ) para un sistema de pegado. Como covariable se mide el flujo inyección ( $x$ ) y la variable de respuesta es la resistencia al despegado ( $y$ ). La tabla de datos reporta cuatro situaciones, haga un diagrama de dispersión en cada caso y discuta sus apreciaciones.

Caso 1				Caso 2			
$T_1$		$T_2$		$T_1$		$T_2$	
$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$
30	5	24	5	35	4	26	11
32	12	30	11	31	6	22	12
37	14	16	13	38	7	14	13
27	16	24	16	34	10	23	15

Caso 3				Caso 4			
$T_1$		$T_2$		$T_1$		$T_2$	
$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$	$y$	$x$
26	5	29	10	28	5	38	12
28	7	34	13	24	7	35	14
27	8	33	14	22	8	32	15
32	11	36	16	18	10	30	17

## Capítulo 3

# Comparaciones múltiples

*No debo buscar mi dignidad en el espacio, sino en el gobierno de mi pensamiento. No tendré más aunque posea muchos mundos. Si fuera por el espacio, el universo me rodearía y me tragaría como un átomo; pero por el pensamiento yo abrazo al mundo.*

*Blaise Pascal*

### 3.1 Recomendaciones iniciales

Un objetivo inicial de un experimento fue detectar estadísticamente diferencias globales entre medias de tratamientos. En general, el resultado del ANDEVA si bien es informativo, en aplicaciones no basta, ya que es necesario mayor detalle con el fin de identificar cuál(es) tratamiento(s) es(son) mejor(es) o peor(es). Es por ello necesario realizar pruebas específicas con tal fin.

Los métodos estadísticos son de ayuda para responder de manera eficiente a preguntas relevantes de la experimentación; tales preguntas en una buena investigación deben traducirse, antes de ver los datos, a hipótesis estadísticas para su verificación. A tales hipótesis se les llama planeadas. Una vez fijadas estas preguntas, no será válido, después de ver los datos, el cambiar de parecer para decir que las preguntas de “interés” corresponden a las diferencias observadas más grandes.

Dado lo anterior, en este capítulo presentamos tres pruebas para detallar respuestas a preguntas planeadas sobre los tratamientos: la prueba de Tukey para comparar todos los tratamientos por pares, la prueba de Dunnett para comparar todos los tratamientos versus un control, y una prueba derivada de la Tukey para el caso en que el interés sea identificar al mejor tratamiento en el sentido que corresponda en el experimento. Adicionalmente se presenta la prueba de Scheffé

que es útil cuando ya se han visto los datos generados en el experimento, lo que se llama comparaciones no planeadas, en las que se desea responder a preguntas sugeridas por los datos.

Por otra parte, es recomendable que el número de comparaciones entre medias (hipótesis) por realizar en el experimento, sea reducido, ya que en la medida que este número crezca, además de perder precisión para detectar diferencias pequeñas, se corren mayores riesgos de cometer errores inferenciales (por ejemplo, decir que un tratamiento es mejor que otro cuando no lo es, o viceversa). Recuerde que una prueba estadística de una hipótesis lleva asociada el riesgo de rechazar cuando no se debería, o de no rechazar la hipótesis cuando se debería. Así, para cualquier comparación entre las medias se podría decidir que son diferentes cuando realmente no lo son: el llamado error tipo I. Análogamente, el error tipo II, si se decidiera que las medias no son diferentes cuando lo son.

Si las comparaciones por hacer se conceptualizan como una familia de comparaciones, entonces al error tipo I correspondiente se le denomina error por familia, y se denota su probabilidad por  $\alpha(FC)$ ; si las comparaciones fueran independientes entre sí, se tiene que

$$\alpha(FC) = 1 - (1 - \alpha(PC))^c$$

donde  $\alpha(PC)$  es la probabilidad de cometer el error tipo I en una comparación, y  $c$  es el número de comparaciones ortogonales (independientes).

Un ejemplo numérico de esta situación es el siguiente, suponga que  $c = 6$  y  $\alpha(PC) = 0.05$  con lo que  $\alpha(FC) = 0.265$ , que indica una posibilidad alta de cometer un error inferencial. En el caso de dependencia entre comparaciones se tienen los mismos problemas.

Las pruebas estadísticas presentadas en este capítulo para comparar múltiples medias entre sí tienen la virtud de que fijando una probabilidad de error tipo I  $\alpha(FC)$ , permiten explícitamente realizar todas las comparaciones de interés, sin que crezca el riesgo de cometer un error inferencial.

### 3.2 Intervalos de confianza: diferencia de tratamientos

Hasta ahora hemos usado de manera intensiva el procedimiento estadístico de prueba de hipótesis para contrastar diferentes hipótesis globales sobre respuestas medias de tratamientos; en las comparaciones entre medias de tratamientos, que en este capítulo revisaremos, se utilizará otra de las herramientas fundamentales de la inferencia estadística, los denominados intervalos de confianza.

Un intervalo de confianza, aunque en esencia persigue el mismo objetivo que una prueba de hipótesis, es decir hacer afirmaciones sobre un parámetro de in-

terés, éste permite expresar por medio de un intervalo la incertidumbre sobre el valor del parámetro. Por ejemplo, un parámetro de interés en el diseño experimental es  $\theta = \mu_i - \mu_j$ , es decir la diferencia entre las respuestas medias de dos tratamientos.

En general al construirse un intervalo de confianza para un parámetro  $\theta$ , se afirma que con un nivel de confianza  $100(1 - \alpha)\%$  se espera que  $\theta \in I(\hat{\theta})$ , donde  $I(\hat{\theta})$  representa un intervalo construido a partir de  $\hat{\theta}$ , una estimación de  $\theta$ ; por ejemplo, si  $\theta = \mu_i - \mu_j$ , un estimador respectivo es

$$\hat{\theta} = \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j = \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{j\bullet};$$

Típicamente el intervalo de confianza para  $\theta$  será de la forma

$$\theta \in \hat{\theta} \pm Q(\hat{\theta}, \alpha) \times (ES_{\hat{\theta}}) \quad (3.1)$$

donde  $ES_{\hat{\theta}}$  representa el error estándar estimado de  $\hat{\theta}$ ,  $Q(\hat{\theta}, \alpha)$  representa un cuantil de orden  $\alpha$  de la distribución muestral asociada a  $\hat{\theta}$ , y dependiente del tipo de comparación por realizar.

Debe señalarse que los intervalos representan una cuantificación mínima de la incertidumbre presente en el proceso de realizar afirmaciones sobre los parámetros de interés. Otras incertidumbres en el contexto de experimentación que no hayan sido cuantificadas, obviamente no son consideradas.

Una ayuda visual en los paquetes estadísticos para facilitar la visualización de las diferencias entre medias es el uso de letras como superíndices: si dos promedios tienen letras diferentes denota que son diferentes estadísticamente.

### 3.3 Comparaciones planeadas entre dos medias

#### 3.3.1 Prueba de Tukey

Esta prueba permite comparar dos a dos todos los tratamientos. Potencialmente en total se tendrán  $\binom{k}{2}$  comparaciones.

El estadístico propuesto por Tukey - Kramer se muestra en la expresión (3.2):

$$T = \frac{q(k, f, \alpha)}{\sqrt{2}} \sqrt{CM_{error} \left\{ \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j} \right\}} \quad (3.2)$$

donde  $q(k, f, \alpha)$  es el rango estudentizado que varía para  $k$  tratamientos,  $f$  gl para el error y  $\alpha$  el nivel de significancia. Este valor aparece en la sección de Tabla F al final del libro.  $CM_{error}$  como se recordará, representa al estimador de la varianza del error experimental;  $n_i$  y  $n_j$  son los tamaños de muestra para cada tratamiento.

Así las hipótesis por contrastar son

$$H_o : \mu_i - \mu_j = 0$$

$$H_1 : \mu_i - \mu_j \neq 0$$

Si los datos apoyan a  $H_1$ , se dice que existe diferencia significativa estadísticamente entre tratamientos.

Los intervalos de confianza correspondientes para comparar  $\mu_i$  y  $\mu_j$  resultan ser

$$\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{j\bullet} - T < \mu_i - \mu_j < \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{j\bullet} + T$$

La prueba de Tukey está diseñada para garantizar que todas las comparaciones tengan en global una confianza del  $100(1 - \alpha(FC))\%$ .

### Ejemplo 3.1

Para los datos en el Ejemplo 2.5 los promedios se ordenan de mayor a menor, luego se verifica la hipótesis nula de igualdad de promedios

$$\bar{y}_{1\bullet} = 103.29 \quad \bar{y}_{2\bullet} = 85.43 \quad \bar{y}_{3\bullet} = 78.86 \quad \bar{y}_{4\bullet} = 61.43.$$

El valor del estadístico de Tukey es:

$$T = \left(\frac{3.90}{\sqrt{2}}\right) \sqrt{20.91\left(\frac{2}{7}\right)} = 6.74$$

donde  $q(4, 24, 0.05) = 3.90$  (ver en la tabla de rangos estudentizados, Tabla F en la sección de Tablas).

$$\begin{aligned} (\mu_1 - \mu_4) &\in (35.12, 48.60) \\ (\mu_1 - \mu_3) &\in (17.51, 31.17) \\ (\mu_1 - \mu_2) &\in (11.07, 24.60) \\ (\mu_2 - \mu_3) &\in (-0.17, 13.31) \\ (\mu_2 - \mu_4) &\in (17.26, 30.74) \\ (\mu_3 - \mu_4) &\in (10.68, 24.16) \end{aligned}$$

Se puede observar que las comparaciones del tratamiento 1 con los demás tratamientos no contienen el valor cero, lo que indica que existe una diferencia significativa del tratamiento 1 con los otros tratamientos. Dentro del contexto del Ejemplo 2.5 se ve que el tiempo de cocción cuando no se agregan las soluciones

NaCl crece de manera importante. Otra conclusión en este caso es que los promedios en el tratamiento 2 y 3 son iguales, y diferentes en las otras comparaciones esta situación se representa por:

$$\begin{array}{c} \bar{y}_{4\bullet}^a \\ \bar{y}_{3\bullet}^b \\ \bar{y}_{2\bullet}^b \\ \bar{y}_{1\bullet}^c \end{array}$$

El tratamiento 4 es el que tiene un menor tiempo de cocción.

### 3.3.2 Prueba de Dunnett: comparaciones con un control

En muchos experimentos el interés es comparar con la respuesta media  $\mu_0$  de un tratamiento control. Para estos casos se tiene la prueba de Dunnett. Desafortunadamente esta prueba tiene un potencial grande de abuso, ya que los investigadores al examinar sus datos pueden rápidamente concluir que las diferencias entre el control y los grupos experimentales son las únicas de interés (porque las medias de los grupos experimentales son similares); ello conduce a usar la prueba de Dunnett, alcanzar significancia y publicar sus resultados.

Suponga entonces que las diferencias de interés planeadas son:

$$\mu_i - \mu_0, i = 1, \dots, k - 1$$

es decir en este caso sólo hay  $k - 1$  comparaciones. El cómputo requerido en la prueba de Dunnett es muy parecido al de la prueba de Tukey. En el caso de la prueba de Dunnett computaremos una cantidad denotada por  $D$  como:

$$D = d(k - 1, f, \alpha) \sqrt{CM_{error} \left( \frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_0} \right)}$$

donde el cuantil  $d(k - 1, f, \alpha)$ ,  $f$  es igual a los  $gl$  correspondiente al error y los valores del estadístico se encuentran en la Tabla G, en la sección de tablas. Así si el intervalo  $i$ :

$$\bar{y}_i - \bar{y}_0 \pm D, \quad i = 1, \dots, k - 1$$

contiene el valor cero, se considerará que:

$$\mu_i = \mu_0$$

Estos intervalos de Dunnett permiten que las  $k - 1$  afirmaciones realizadas cuenten de manera simultánea con una confianza de  $100(1 - \alpha(FC))\%$ .

**Ejemplo 3.2**

Para los datos en el Ejemplo 2.5, pero ahora suponiendo que a priori sólo interesa comparar versus el tratamiento 1 como control) sin adición de sal, se tiene que el valor del estadístico de Dunnett es:

$$D = 2.51 \times \sqrt{20.91\left(\frac{2}{7}\right)} = 6.14,$$

y tres comparaciones de interés:

$$\begin{aligned}(\mu_1 - \mu_2) &\in 17.86 \pm 6.14 \\(\mu_1 - \mu_3) &\in 24.43 \pm 6.14 \\(\mu_1 - \mu_4) &\in 41.86 \pm 6.14\end{aligned}$$

Se puede observar que los intervalos para las comparaciones con el tratamiento 1 no contienen el valor cero, lo que indica que existe una diferencia significativa del tratamiento 1 (control) con los otros tratamientos.

Es oportuno señalar que en general es recomendable que el número de replicaciones para el tratamiento control,  $n_0$ , sea mayor que para los tratamientos experimentales. Como regla práctica considere que, si  $n$  representa el promedio de replicaciones por tratamiento, entonces es conveniente que

$$\frac{n_0}{n} = \sqrt{k}.$$

**3.3.3 Comparaciones múltiples con el mejor**

Suponga que el interés planeado es determinar cuál es el mejor tratamiento. El mejor tratamiento, en un contexto numérico, puede ser aquel que produzca la respuesta más grande. Las comparaciones de medias a realizar se pueden representar por:

$$\mu_i - \max_{j \neq i}(\mu_j), \quad i = 1, \dots, k \quad (3.3)$$

Si el mejor tratamiento es aquel que produce la menor respuesta, entonces las comparaciones de interés serían:

$$\mu_i - \min_{j \neq i}(\mu_j), \quad i = 1, \dots, k \quad (3.4)$$

**Caso balanceado**

Cuando el mejor tratamiento es aquel cuya media es más grande, en el caso balanceado, Hsu (1996) mostró que el siguiente conjunto de intervalos simultáneamente logran una confianza al menos de  $1 - \alpha$ :



$$\left[ -(\hat{\mu}_i - \max_{j \neq i}(\hat{\mu}_j) - \Delta)^-, (\hat{\mu}_i - \max_{j \neq i}(\hat{\mu}_j) + \Delta)^+ \right], \quad (3.5)$$

con  $i = 1, \dots, k$ , donde  $\Delta = d\sqrt{\frac{2 \times CM_{error}}{n}}$ ,  $d$  es el valor crítico para la prueba de una cola de Dunnett,  $d(\alpha, k-1, gl \ CM_{error})$  (ver Tabla G), y

$$\begin{aligned} -x^- &= \min\{0, x\} = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}, \\ x^+ &= \max\{0, x\} = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}. \end{aligned}$$

Para el caso entre más pequeño mejor será el tratamiento, el siguiente conjunto de intervalos simultáneamente logran una confianza al menos de  $1 - \alpha$ :

$$\left[ -(\hat{\mu}_i - \min_{j \neq i}(\hat{\mu}_j) - \Delta)^-, (\hat{\mu}_i - \min_{j \neq i}(\hat{\mu}_j) + \Delta)^+ \right] \quad (3.6)$$

donde  $\Delta = d\sqrt{\frac{2 \times CM_{error}}{n}}$ , con  $i = 1, \dots, k$ , que son intervalos correspondientes para

$$(\mu_i - \min_{j \neq i}(\mu_j)) \quad (3.7)$$

Como ya se mencionó, todos estos intervalos simultáneamente garantizan un nivel de confianza de al menos  $(1 - \alpha)100\%$ , es decir serán conservadores.

### Caso desbalanceado

Para el caso desbalanceado ( $n_i \neq n_j$ ), cuando el interés es detectar el tratamiento mejor con mayor media, los intervalos con una confianza simultánea de al menos  $1 - \alpha$ , estarán dados por:

$$[D_i^-, D_i^+], i = 1, \dots, k \quad (3.8)$$

donde:

$$D_i^+ = + \left( \min_{j \neq i} \left\{ \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j + d^i \sqrt{CM_{error}(n_i^{-1} + n_j^{-1})} \right\} \right)^+$$

identifique:

$$G = \{i : D_i^+ > 0\}$$

y con éste compute:

$$D_i^- = \begin{cases} 0 & \text{si } G = \{i\} \\ \min_{j \in G, j \neq i} \left\{ \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j - d^j \sqrt{CM_{error}(n_i^{-1} + n_j^{-1})} \right\} & \text{otro caso} \end{cases}$$

donde  $d^i$  es el valor crítico del método de Dunnett de una cola suponiendo que el tratamiento “control” es el  $i$ -ésimo. El cómputo de estos intervalos es como sigue. Como primer paso identifique a un tratamiento como el control, digamos el  $i$ -ésimo. Obteniendo de la tabla del método de Dunnett para una sola cola a  $d^i$ , compute las cotas superiores para:

$$\mu_i - \max_{j \neq i}(\mu_j), \quad i = 1, \dots, k$$

como

$$\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j + d^i \sqrt{CM_{error}(n_i^{-1} + n_j^{-1})}$$

para toda  $j \neq i$ . Entonces

$$D_i^+ = + \left( \min_{j \neq i} \left\{ \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j + d^i \sqrt{CM_{error}(n_i^{-1} + n_j^{-1})} \right\} \right)^+$$

la parte positiva del mínimo de tales cotas. Si cualquiera de las  $\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j + d^i \sqrt{CM_{error}(n_i^{-1} + n_j^{-1})}$  es negativa, indicará que el  $i$ -ésimo tratamiento no es el mejor, entonces  $D_i^+ = 0$ . Así  $G = \{i : D_i^+ > 0\}$  es el conjunto de tratamientos posibles con la media más grande. Si  $G = \{M\}$ , entonces el  $M$ -ésimo tratamiento sólo es declarado el mejor tratamiento. Así la cota inferior para el  $M$ -ésimo tratamiento es 0 y:

$$D_j^- = \hat{\mu}_j - \hat{\mu}_M - d^M \sqrt{CM_{error}(n_j^{-1} + n_M^{-1})}$$

para el  $j$ -ésimo tratamiento,  $j \neq M$ .

Si  $G$  contiene más de un elemento, entonces compute cotas inferiores usando sólo tratamientos  $j$  que sean candidatos a ser el mejor tratamiento, como:

$$\hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j - d^j \sqrt{CM_{error}(n_i^{-1} + n_j^{-1})}$$

y sea la parte negativa del mínimo de tales cotas:

$$D_i^- = \min_{j \in G, j \neq i} \left\{ \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j - d^j \sqrt{CM_{error}(n_i^{-1} + n_j^{-1})} \right\}$$

la cota inferior de confianza para  $\mu_i - \max_{j \neq i}(\mu_j)$ . Para el caso de que el mejor tratamiento es el más pequeño, donde los parámetros de interés son  $\mu_i - \min_{j \neq i}(\mu_j)$ ,  $i = 1, \dots, k$ , se obtienen análogamente los intervalos a partir de:

$$D_i^- = - \left( \max_{j \neq i} \left\{ \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j - d^j \sqrt{CM_{error}(n_i^{-1} + n_j^{-1})} \right\} \right)^-$$

$$G = \{i : D_i^- < 0\}$$

$$D_i^+ = \begin{cases} 0 & \text{si } G = \{i\} \\ \max_{i \in G, j \neq i} \left\{ \hat{\mu}_i - \hat{\mu}_j + d^j \sqrt{CM_{error}(n_i^{-1} + n_j^{-1})} \right\} & \text{otro caso} \end{cases}$$

### Ejemplo 3.3

Una empresa procesadora de cereales está preocupada por apoyar a sus proveedores agrícolas de cereales; un problema es la presencia de escarabajos de hoja de cereal que producen grandes mermas en la producción. Una forma de combatir la presencia dañina de tales insectos es a través de pizarrones recubiertos de una sustancia pegajosa. Sin embargo existe la duda sobre cuál es el color más atractivo, de cuatro disponibles, para los insectos. En una parcela se distribuyen seis pizarrones para cada color de manera aleatoria durante el mes de julio (en total 24 pizarrones, 6 de cada color). Después de un período de espera razonablemente confiable se obtiene la respuesta; los resultados se muestran en la Tabla 3.1.

Tratamiento(color)	amarillo	blanco	rojo	azul
Niveles	1	2	3	4
	45	21	37	16
	59	12	32	11
	48	14	15	20
	46	17	25	21
	38	13	39	14
	47	17	41	7
$\hat{\mu}_i$	47.17	15.67	31.50	14.83

Tabla 3.1. Insectos atrapados por color

El diseño es de un factor en 4 niveles, y con aleatorización completa de tratamientos. Después de realizar la ANDEVA correspondiente,  $CM_{error} = 46.02$ . En este ejemplo  $k = 4$ ,  $n = 6$ ,  $gl = 20$  y asumimos  $\alpha = 0.01$ . Por ende,

$$\Delta = d \sqrt{\frac{2CM_{error}}{6}} = 2.97 \times 3.917 = 11.633$$

y con ello

$$\begin{array}{llll} \mu_1 - \max_{j \neq 1}(\mu_j)\epsilon & (0, & 27.30) & \text{amarillo} \\ \mu_2 - \max_{j \neq 2}(\mu_j)\epsilon & (-43.13, & 0) & \text{blanco} \\ \mu_3 - \max_{j \neq 3}(\mu_j)\epsilon & (-27.30, & 0) & \text{rojo} \\ \mu_4 - \max_{j \neq 4}(\mu_j)\epsilon & (-43.97, & 0) & \text{azul} \end{array}$$

Estos intervalos tienen simultáneamente una confianza del 99%. Se concluye que el color más atractivo es el color amarillo. Para el primer intervalo, observe que

$$\max_{i \neq j}(\hat{\mu}_j) = \hat{\mu}_3 = 31.50$$

entonces

$$(\hat{\mu}_1 - \max_{i \neq j}(\hat{\mu}_j)) + \Delta = (\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_3) + \Delta = 15.67 + 11.63 = 27.30$$

similarmente para construir los siguientes intervalos.

Para el caso desbalanceado ( $n_i \neq n_j$ ) tenemos el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 3.4

En un estudio de propaganda sobre un producto alimenticio, se está estudiando el grado de positividad para calificarlo después de ver un anuncio publicitario sobre las bondades del mismo. Tres segmentos del mercado objetivo se determinaron sujetos de promoción. Se recolectó de personas de los tres segmentos calificaciones en una escala de positividad (entre más grande, mejor calificado). De modo correspondiente, en el segmento 1  $n_1 = 103$  sujetos, en el segmento 2 con  $n_2 = 31$  y en el segmento 3 con  $n_3 = 122$ . La pregunta es ¿cuál de los tres segmentos calificó mejor al producto después de recibir el mensaje publicitario? Los resultados ya resumidos son los siguientes.

Segmento	1	2	3
$n_i$	103	31	122
$\bar{y}_i$	619	629	575
$S_i$	86	67	83

Por lo tanto,

$$CM_{error} = \frac{102(86)^2 + 30(67)^2 + 121(83)^2}{103 + 31 + 122 - 3} = 6808.818$$

Aplique la expresión (3.8) con ( $\alpha = 0.10$ ), para este nivel de significancia los valores de críticos  $d^j$  son: 1.605, 1.505 y 1.612.

$$\begin{array}{ll}
\mu_1 - \max_{j \neq 1}(\mu_j)\epsilon & (-35.44, \quad 17.14) \\
\mu_2 - \max_{j \neq 2}(\mu_j)\epsilon & (-17.14, \quad 35.44) \\
\mu_3 - \max_{j \neq 3}(\mu_j)\epsilon & (-78.98, \quad 0)
\end{array}$$

El segmento que mejor respondió a la publicidad no es el 3, por otro lado, los segmentos 1 y 2 son estadísticamente igual de positivos acerca del producto promocionado.

Méndez Albores *et al.* (2003) aplicaron los métodos descritos para comparar procesos de nixtamalización de maíz utilizado para la elaboración de tortilla.

### 3.4 El estadístico de prueba de Scheffé

Para poder construir la respuesta específica a las preguntas planteadas, se formulan los contrastes entre las medias de tratamientos; un contraste se define como una combinación lineal de las medias:

$$C = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2 + \dots + c_k \mu_k \quad (3.9)$$

donde los coeficientes de la combinación  $c_1, c_2, \dots, c_k$  son tales que  $\sum_{i=1}^k c_i = 0$ . Note que un contraste de suma importancia y trabajado en la sección anterior es  $\mu_i - \mu_j$ . Sin embargo puede haber otros contrastes de interés.

#### Ejemplo 3.5

En un proceso industrial se usan las maltodextrinas como sustituto de grasas en la elaboración de galletas o en harinas preparadas. Un ingeniero bioquímico produce maltodextrinas a partir de semillas de amaranto y tiene interés en comparar las proteínas que se obtienen de su producto con otros tres productos de maltodextrinas que generan los siguientes tratamientos: (1) comerciales, (2) almidón de maíz, (3) almidón de yuca. El número de UE's en cada tratamiento es igual a tres. El resumen estadístico de su experimento se muestra en la Tabla 3.2.

Las preguntas que se ha hecho el ingeniero sobre el contenido de proteína:

1. ¿Tiene mayor contenido de proteína la maltodextrina elaborada con semilla de amaranto con respecto a las otras tres?
2. ¿La maltodextrina producida con semilla de amaranto contiene mayor proteína que la comercial?

3. ¿La proteína contenida en la maltodextrina elaborada con semilla de amaranto es mayor que la producida con los almidones?

tratamiento	amaranto	comercial	a. maíz	a. yuca
$\hat{\mu}_i = \bar{y}_{i\bullet}$	34.5	30.0	34.0	27.0
$S_i^2$	3.3	9.0	7.0	7.0

Tabla 3.2. Resumen estadístico del contenido de proteína

La tabla del análisis de la varianza se describe en la Tabla 3.3.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
Tratamiento	3	113.06	37.69	5.74	0.0215
Error	8	52.50	6.56		
Total	11	165.56			

Tabla 3.3 ANDEVA para el problema de maltodextrinas

Los contrastes para el ejemplo se plantean mediante:

$$\text{Primera pregunta: } C_1 = \mu_1 - \frac{1}{3}(\mu_2 + \mu_3 + \mu_4) = 0$$

si el efecto del tratamiento 1 es igual al promedio de 2, 3 y 4.

$$\text{Segunda pregunta: } C_2 = \mu_1 - \mu_2 = 0$$

si el tratamiento 1 es igual al 2.

$$\text{Tercera pregunta: } C_3 = \mu_1 - \frac{1}{2}(\mu_3 + \mu_4) = 0$$

si el tratamiento 1 es igual al promedio de los tratamientos 3 y 4.

En el primer caso los coeficientes del contraste son  $c_{1i} = (1, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ , en el segundo  $c_{2i} = (1, -1, 0, 0)$ , finalmente el tercero  $c_{3i} = (1, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ . La idea es responder a las preguntas planteadas, nuevamente mediante un procedimiento estadístico se hace inferencia sobre estos contrastes, construyendo intervalos de confianza o haciendo pruebas de hipótesis sobre ellos.

Para tal fin, se propone un estimador del contraste y se calcula su error estándar, a partir de estos resultados se obtiene la estimación de los intervalos de

confianza y la prueba de hipótesis sobre el contraste. Entonces un estimador del contraste poblacional representado por la ecuación (3.9) es:

$$\hat{C} = \sum_{i=1}^k c_i \bar{y}_{i\bullet} = c_1 \bar{y}_{1\bullet} + c_2 \bar{y}_{2\bullet} + \dots + c_k \bar{y}_{k\bullet} \quad (3.10)$$

### 3.4.1 Contrastes ortogonales

Suponga que tiene dos contrastes como los indicados por la ecuación (3.10), estos son:

$$\hat{C} = \sum_{i=1}^k c_i \bar{y}_{i\bullet} = c_1 \bar{y}_{1\bullet} + c_2 \bar{y}_{2\bullet} + \dots + c_k \bar{y}_{k\bullet}$$

y

$$\hat{D} = \sum_{i=1}^k d_i \bar{y}_{i\bullet} = d_1 \bar{y}_{1\bullet} + d_2 \bar{y}_{2\bullet} + \dots + d_k \bar{y}_{k\bullet}$$

Los contrastes  $\hat{C}$  y  $\hat{D}$  son ortogonales si la suma de los productos de los coeficientes es igual con cero, es decir:

$$\sum_{i=1}^k c_i d_i = c_1 d_1 + c_2 d_2 + \dots + c_k d_k = 0$$

En un experimento se pueden planear  $k - 1$  contrastes ortogonales, que así tienen la propiedad de que la suma de cuadrados entre tratamientos es la suma de las sumas de cuadrados correspondientes a cada uno de estos contrastes. La ortogonalidad indica que la información que genera un contraste es independiente de los otros.

Es importante resaltar que la selección de contrastes en un estudio no debe estar dictada sólo por la ortogonalidad, sino que también éstos se deben seleccionar en función de las preguntas interesantes para el experimentador. Por ejemplo, en el Ejemplo 3.3, los contrastes de interés no son ortogonales. Verifíquelo.

Es conveniente no caer en la tentación de construir contrastes con la finalidad de reportar una diferencia significativa.

También, se pueden construir contrastes entre tratamientos con diferente número de replicaciones.

Scheffé propuso un método para construir intervalos de confianza de todos los posibles contrastes, ortogonales o no; el método opera además garantizando una confianza de  $100(1 - \alpha(FC))\%$ . En consecuencia, el método se considera muy conservador por lo que generalmente se usa en comparaciones no planeadas.

El intervalo de confianza para un contraste (3.9), es entonces:

$$C \in \hat{C} \pm \sqrt{CM_{error}} \sqrt{(k-1)F(k-1, v, \alpha(PC))} \sqrt{\sum_{i=1}^k \frac{c_i^2}{n_i}} \quad (3.11)$$

donde:

$$\hat{C} = \sum_{i=1}^k c_i \bar{y}_{i\bullet} = c_1 \bar{y}_{1\bullet} + c_2 \bar{y}_{2\bullet} + \dots + c_k \bar{y}_{k\bullet} \quad (3.12)$$

y  $F(k-1, v, \alpha(PC))$  es el cuantil de orden  $\alpha(PC)$  de una distribución de probabilidad  $F$  con  $k-1$  y  $\nu = gl$  de  $SC_{error}$  grados de libertad.

En el Ejemplo 3.3 los intervalos de confianza del 95% para los contrastes de interés son:

$$\begin{aligned} C_1 &\in 4.16 \pm 5.96, \\ C_2 &\in 4.50 \pm 7.30, \\ C_3 &\in 4.00 \pm 6.33. \end{aligned}$$

Interprete los intervalos y saque sus conclusiones.

Existen otros métodos estadísticos para realizar comparaciones múltiples, en algunas situaciones, éstos pueden tener alguna ventaja sobre los que hemos presentado en este capítulo. Amplias discusiones teórico estadísticas del uso de estos métodos vienen reportados en Chew (1980), Jones (1984), Carmer y Walter (1985), Saville (1990) y Hsu (1996).

### 3.5 Formalización estadística de la pruebas

En este apartado se verán los detalles técnicos de las pruebas de comparaciones múltiples a partir de Méndez (1976). En este sentido se recomienda al lector verlo como consulta.

#### 3.5.1 Prueba de Tukey

Los cuantiles utilizados corresponden a los de la distribución de lo que se conoce como amplitud estudentizada.

Modelo:

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \mu + \delta_i + \varepsilon_{ij} \\ \varepsilon_{ij} &\sim N(0, \sigma^2) \text{ independientes} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{i'\bullet} &\sim N\left[\delta_i - \delta_{i'}, \frac{2}{n}\sigma^2\right] \\
(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{i'\bullet}) - (\delta_i - \delta_{i'}) &\sim N\left[0, \frac{2}{n}\sigma^2\right] \\
\frac{(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{i'\bullet}) - (\delta_i - \delta_{i'})}{\left[\frac{2}{n}\right]^{1/2}\sigma} &\sim N[0, 1] \\
\frac{n^{1/2}[(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{i'\bullet}) - (\delta_i - \delta_{i'})]}{[2]^{1/2}s} &\sim t_{[gl(s)]}
\end{aligned}$$

Lo que se desea:

$$\begin{aligned}
\frac{|(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{i'\bullet}) - (\delta_i - \delta_{i'})|}{s} &\leq c \quad \forall i, i' \\
\max_{i, i'} \frac{|(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{i'\bullet}) - (\delta_i - \delta_{i'})|}{s} &\leq c \\
\text{Si } x_1, \dots, x_t &\text{ iid } N(0, 1) \\
\frac{\max_i \{x_i\} - \min_i \{x_i\}}{[\chi^2_{(v)}/v]^{1/2}} &\rightarrow \text{amplitud estudentizada}
\end{aligned}$$

Ya se obtuvo su distribución (ver por ejemplo Hsu, 1996) y sus cuantiles, por ende  $q(\alpha|f, v)$ , mostrados en la Tabla F descrita en el anexo de tablas, donde  $\nu = nk - k$ .

$$\begin{aligned}
\bar{y}_{i\bullet} &\sim N\left(\mu + \delta_i, \frac{1}{n}\sigma^2\right) \\
\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\bar{y}_{i\bullet} - \mu - \delta_i) &\sim N(0, 1) \\
\frac{(nk - k)s^2}{\sigma^2} &\sim \chi^2_{(nk-k)}
\end{aligned}$$

Luego entonces:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{n} \left[ \max_i \left\{ \frac{\bar{y}_{i\bullet} - \mu - \delta_i}{\sigma} \right\} - \min_i \left\{ \frac{\bar{y}_{i\bullet} - \mu - \delta_i}{\sigma} \right\} \right]}{\sigma^{-1} \left[ \frac{(nk-k)s^2}{nk-k} \right]^{\frac{1}{2}}} = \\
&\frac{\sqrt{n} \left[ \max_i \{ \bar{y}_{i\bullet} - \mu - \delta_i \} - \min_i \{ \bar{y}_{i\bullet} - \mu - \delta_i \} \right]}{s} \sim q(k, nk - k)
\end{aligned}$$

Bajo  $H_0$  :  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_k$

$$\frac{\sqrt{n} \left[ \max_i \{\bar{y}_{i\bullet} - \mu - \delta_i\} - \min_i \{\bar{y}_{i\bullet} - \mu - \delta_i\} \right]}{s} = \frac{\sqrt{n} \left[ \max_i \{\bar{y}_{i\bullet}\} - \min_i \{\bar{y}_{i\bullet}\} \right]}{s}$$

Por lo tanto:

$$P \left[ \frac{\max_i \{\bar{y}_{i\bullet}\} - \min_i \{\bar{y}_{i\bullet}\}}{s/\sqrt{n}} \geq q_{k,nk-1}^{1-\alpha} \right] = \alpha \implies$$

$$P \left[ \max_i \{\bar{y}_{i\bullet}\} - \min_i \{\bar{y}_{i\bullet}\} \geq \frac{s}{\sqrt{n}} q_{k,nk-1}^{1-\alpha} \right] = \alpha \implies$$

$$P \left[ \max_{i,i'} |\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{i'\bullet}| \geq \frac{s}{\sqrt{n}} q_{k,nk-1}^{1-\alpha} \right] = \alpha$$

La última expresión nos dice entonces que la probabilidad de cometer el error tipo I está fija. Por lo tanto la prueba de Tukey queda como sigue:

Se rechaza  $H_0$  si:

$$|\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{i'\bullet}| \geq \frac{s}{\sqrt{n}} q_{k,nk-1}^{1-\alpha} \quad \text{para } \delta_i \neq \delta_{i'}, \text{ a un nivel } \delta \forall i, i'$$

### 3.5.2 Prueba de Dunnett

La prueba de Dunnett es utilizada para comparaciones múltiples versus un control, por lo tanto se tendrán  $k-1$  comparaciones del tipo  $\mu_i - \mu_0$ ,  $i = 1, 2, \dots, k-1$  donde  $\mu_0$  representa el control. Un intervalo para  $\mu_i - \mu_0$  es:

$$I(\mu_i - \mu_0) \equiv (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{0\bullet}) \pm d^{1-\alpha}(k-1, f) \left[ s^2 \left( \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_0} \right) \right]^{1/2}$$

donde  $d^{1-\alpha}(k-1, f)$  son los cuantiles de una cierta distribución. Si  $I(\mu_i - \mu_0)$  contiene al 0 entonces  $\mu_i = \mu_0$  a un nivel  $\alpha$ . Así la formalización de esta prueba se basa en la distribución de Dunnett, cuyos cuantiles se muestran en la Tabla G en el anexo de tablas.

Sea  $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$  una muestra aleatoria independiente distribuida por una normal cero, uno, luego entonces:

$$\frac{\left| \max_i x_i - x_0 \right|}{\frac{\sqrt{2}}{\left[ \frac{\chi_{(v)}^2}{v} \right]^{1/2}}} \sim \text{distribucion Dunnet}$$

Por lo tanto:

$$P \left[ \frac{\left| \max_i x_i - x_0 \right|}{\frac{\sqrt{2}}{\left[ \frac{\chi^2_{(v)}}{v} \right]^{1/2}}} \geq d_{k-1,v}^{1-\alpha} \right] = \alpha$$

Debido a que:

$$\bar{y}_{i\bullet} \sim N(\mu + \delta_i, \frac{\sigma^2}{n})$$

Además, si hacemos:

$$x_i = \frac{(\bar{y}_{i\bullet} - \mu - \delta_i) \sqrt{n}}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Y sabiendo que:

$$\frac{(nk - k)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{nk-k}^2$$

Llegamos al siguiente resultado:

$$\max_i \left\{ \frac{\left| \bar{y}_{i\bullet} - \mu - \delta_i - \bar{y}_{0\bullet} + \mu + \delta_0 \right|}{\frac{\sqrt{2}}{\left[ \frac{s^2}{n} \right]^{1/2}}} \right\} \sim U \text{ Dunnett}$$

Bajo  $H_0$ :  $\delta_0 = \delta_1 = \dots = \delta_{k-1}$  se tiene que:

$$P \left[ \max_i |\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{0\bullet}| \geq d_{k-1,nk-k}^{1-\alpha} \sqrt{2} \frac{s}{\sqrt{n}} \right] = \alpha$$

Por lo tanto con la Prueba de Dunnett afirmamos que  $\mu_i \neq \mu_0$  si  $|\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{0\bullet}| \geq d_{k-1,nk-k}^{1-\alpha} \left[ \frac{2}{n} \right]^{1/2} s$ ,  $i = 1, \dots, k-1$ .

### 3.5.3 Intervalos de confianza de Scheffé para contrastes

El intervalo de confianza de Scheffé tiene la siguiente forma:

$$\hat{c} \pm [CError]^{1/2} \left[ (k-1) F_{k-1,v}^{1-\alpha} \right]^{1/2} \left[ \frac{\sum c_i^2}{n_i} \right]^{1/2}$$

La justificación de por qué este intervalo es de esta manera, surge de la reparametrización del modelo  $y_{ij} = \mu + \delta_i + \varepsilon_{ij}$ , donde los errores son independientes

distribuidos con media 0 y varianza constante  $\sigma^2$ . La reparametrización deja al modelo con la siguiente forma:

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

En forma matricial tenemos:

$$\mathbf{Y} = X\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{con} \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 I)$$

La solución por mínimos cuadrados es:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (X'X)^{-1}X'Y$$

La distribución muestral del estimador cumple con lo siguiente:

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\beta}} &\sim N(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(X'X)^{-1}) \\ s^2 &= \frac{Y'Y - \hat{\boldsymbol{\beta}}X'Y}{n-p}, \quad \text{donde} \quad E[s^2] = \sigma^2 \\ \frac{(n-p)s^2}{\sigma^2} &\sim \chi_{n-p}^2 \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} \text{ y } s^2 &\text{ independientes} \end{aligned}$$

Sea  $\hat{\gamma}$  un subconjunto de  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ,  $\hat{\gamma} \in R^d, d < p$ , entonces:

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} &\sim N(\gamma, \sigma^2 w^{-1}), w > 0 \implies \\ \hat{\gamma} - \gamma &\sim N(0, \sigma^2 w^{-1}) \implies \\ \frac{1}{\sigma^2} (\hat{\gamma} - \gamma)' w (\hat{\gamma} - \gamma) &\sim \chi_d^2 \implies \\ \frac{(\hat{\gamma} - \gamma)' w (\hat{\gamma} - \gamma)}{ds^2} &\sim F_{\alpha, n-p} \implies \\ P \left[ (\hat{\gamma} - \gamma)' w (\hat{\gamma} - \gamma) \leq ds^2 F_{\alpha, n-p} \right] &= 1 - \alpha \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz extendida

$$\begin{aligned} (\hat{\gamma} - \gamma)' w (\hat{\gamma} - \gamma) &\geq \frac{[u' (\hat{\gamma} - \gamma)]^2}{[u' w u]} \quad \text{para cualquier } u \implies \\ (\hat{\gamma} - \gamma)' w (\hat{\gamma} - \gamma) &= \max_{u \in R^d} \frac{[u' (\hat{\gamma} - \gamma)]^2}{[u' w u]} \end{aligned}$$

Luego entonces:

$$P \left[ \max_{u \in R^d} \frac{[u'(\hat{\gamma} - \gamma)]^2}{[u'wu]} \leq ds^2 F_{d,n-p}^{1-\alpha} \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[ \max_{u \in R^d} \frac{|u'(\hat{\gamma} - \gamma)|}{[u'wu]^{1/2}} \leq s \left[ dF_{d,n-p}^{1-\alpha} \right]^{1/2} \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[ \frac{|u'(\hat{\gamma} - \gamma)|}{[u'wu]^{1/2}} \leq s \left[ dF_{d,n-p}^{1-\alpha} \right]^{1/2}, \forall u \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[ |u'(\hat{\gamma} - \gamma)| \leq s \left[ dF_{d,n-p}^{1-\alpha} u'wu \right]^{1/2}, \forall u \right] = 1 - \alpha$$

$$P \left[ u'\hat{\gamma} - s \left[ dF_{d,n-p}^{1-\alpha} u'wu \right]^{1/2} \leq u'\gamma \leq u'\hat{\gamma} + s \left[ dF_{d,n-p}^{1-\alpha} u'wu \right]^{1/2}, \forall u \right] = 1 - \alpha$$

### 3.6 Ejercicios

**Ejercicio 3.1** Considere el Ejercicio 7 del Capítulo 2. Realice comparaciones múltiples para determinar el mejor tratamiento.

**Ejercicio 3.2** Se compilan los datos de ventas que se realizaron en diferentes establecimientos que producen equipo electrónico, estos permitirán evaluar si existe una mejora en la productividad con respecto al último año, la productividad se mide en una escala de 0 a 100. Se toma una muestra de establecimientos, los cuales se clasifican por su nivel promedio de ventas en los siguientes niveles: bajo, moderado, alto; se ha considerado la información de ventas obtenida en años anteriores.

Establecimiento	bajo(1)	medio(2)	alto(3)
	79	70	87
	82	81	97
	68	95	98
	59	86	78
	67	78	96
	65	79	95
	62	83	86

1. Obtenga los promedios y varianzas, haga un análisis descriptivo.

2. Obtenga la tabla ANDEVA y pruebe la hipótesis correspondiente ¿Cuál es su conclusión?
3. Estime un intervalo de confianza para  $L = \mu_1 + \mu_2 - 2\mu_3$  ( $\alpha = 0.05$ )
4. Grafique los residuales. ¿Qué observa? ¿Se satisfacen los supuestos?
5. Obtenga todas las comparaciones dos a dos de las medias.

**Ejercicio 3.3** Retome el Ejercicio 4 del Capítulo 2. Diga si existen diferencias entre cada una de las presentaciones. Calcule los intervalos de confianza.

**Ejercicio 3.4** Con los resultados del Ejercicio 5 del capítulo anterior, realice las comparaciones múltiples con el mejor.

**Ejercicio 3.5** Determine el efecto de varios métodos de enseñanza en el aprendizaje en matemáticas, 30 alumnos se asignan a cinco tratamientos empleados en diferentes grupos escolares, de cada grupo se seleccionan seis estudiantes. Los tratamientos son como sigue:

Tratamiento	Descripción
1	Libro: cuaderno de trabajo
2	Libro <i>A</i> con maestro
3	Libro <i>A</i> con computadora
4	Libro <i>B</i> con maestro
5	Libro <i>B</i> con computadora

Al finalizar el semestre se registran los siguientes resultados:

Tratamiento	1	2	3	4	5
Totales	120	600	720	240	420

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
Tratamiento		408			
Error					
Total		458			

Tabla del ANDEVA

1. Discuta cómo realizaría el experimento.

2. Complete la tabla ANDEVA y pruebe la hipótesis correspondiente ¿Cuál es su conclusión?
3. Proponga un conjunto de contrastes ortogonales que le parezcan razonables para los tratamientos descritos.
4. Construya el intervalo de confianza para  $\mu_1 - \mu_2$ .
5. Estime el error estándar de  $L = \sum_{i=1}^k c_i \mu_i$  ( $c_i = 4, -1, -1, -1, -1$ ) ¿Qué significa que  $L = 0$ ?

**Ejercicio 3.6** Considere el Ejercicio 8 del Capítulo 2. Con la información disponible sugiera qué tipo de comparaciones múltiples serían adecuadas de realizar y llévelas a cabo.

**Ejercicio 3.7** Dada la creciente necesidad de estudiar la vida de anaquel, un bioquímico planea un experimento en un diseño unifactorial completamente al azar para conocer el tiempo de vida (en días) de un jarabe envasado en una botella de plástico biodegradable. Además del tiempo de vida el bioquímico desea saber el costo por unidad del tiempo de vida. Así que la variable de respuesta es el tiempo de vida por costo de unidad, ésta se obtuvo dividiendo el tiempo de vida por el costo unitario. Él plantea cuatro tratamientos con la característica de que los dos primeros corresponden a un idéntico proceso de elaboración del producto. Los tratamientos tres y cuatro son un nuevo sistema de conservación. Así que su experimento tiene por metas probar las diferencias entre sí de los primeros dos tratamientos, la diferencia entre los últimos dos tratamientos, y la diferencia que existe entre el primero y segundo con respecto al tercero y cuarto tratamientos. Los resultados experimentales son:

1	2	3	4
62	93	45	48
54	79	49	57
52	83	41	48
59	90	38	46

Tiempo de vida por unidad de costo

1. Plantee la hipótesis a probar para los cuatro tratamientos.
2. Calcule la tabla del ANDEVA.

3. Plantee las hipótesis para que el bioquímico verifique sus metas.
4. Describa las hipótesis en términos de contrastes.
5. Verifique si estos son ortogonales.
6. Pruebe las hipótesis del inciso 3, indique en cada caso qué prueba de comparaciones es más adecuada.

**Ejercicio 3.8** (Adaptado de Wu y Hamada, 2000). En una planta productora de papel, la operación de la planta se juzga de acuerdo a la brillantez de la pulpa medida por un medidor de reflectancia. Se tomaron muestras de cada uno de los cuatro operadores que hacían hojas a partir de pulpa sin blanquear. Se realizaron las mediciones de brillantez de cada una de las hojas producidas como se muestra en la tabla siguiente.

operador			
1	2	3	4
59.8	59.8	60.7	61
60.0	60.2	60.7	60.8
60.8	60.4	60.5	60.6
	59.9	60.9	60.5
	60.0		60.5

Uno de los objetivos del experimento era determinar si existían diferencias en brillantez dependiendo del operador, con el fin de identificar capacitadores. Si se considera que entre más brillantez mejor, realice las comparaciones de medias adecuadas y obtenga sus recomendaciones.



## Capítulo 4

# Estructura de tratamientos factorial

*La ciencia se basa en dos actividades: percepción y reflexión. Las dos cosas tienen que ver con la realidad de este mundo y las dos son, en el fondo, dos formas de conversación. La percepción de la realidad empieza por ver, mirar (detener la vista) y observar (detener la mirada), pero suele acabar en algo más comprometido: experimentar. Para experimentar, el investigador provoca a la naturaleza, la naturaleza contesta lo que puede estimular al científico a una nueva provocación, es decir una nueva pregunta, es una conversación genuina en la que cada nuevo experimento depende del resultado anterior. Experimentar es conversar con la naturaleza. La reflexión es la actividad que media entre cada experimento y la creación de un resultado.*

*Jorge Wagensberg*

### 4.1 Análisis con un solo factor

En cualquier proceso de manufactura, en un desarrollo tecnológico o en la explicación de algún fenómeno, es muy común que intervengan dos o más factores de interés. Si el conocimiento del área hace necesario estudiar experimentalmente los efectos que tales factores tienen sobre una o varias variables de respuesta, es

necesario diseñar estrategias eficientes para el estudio de dos o más factores mediante los llamados diseños factoriales. Sin embargo, en muchos casos por falta de conocimiento de estos diseños factoriales el experimentador se siente más seguro con una estrategia conservadora denominada OFAT por las siglas en inglés de “one - factor - at - a - time”. Sobre este conservadurismo en la investigación experimental, R. Fisher comentó: “En exposiciones del uso científico de experimentación es frecuente encontrar un énfasis excesivo sobre la importancia de variar condiciones de una en una. El experimentador interesado en las causas que contribuyen a un cierto efecto supone, por un proceso de abstracción, aislar estas causas en un número de ingredientes elementales, o factores; además supone, al menos para propósitos de exposición, que establecer condiciones controladas en las que estos factores excepto uno puedan ser mantenidos constantes, y entonces estudiar los efectos de este factor, es esencialmente el enfoque científico a una investigación experimental. Esta doctrina ideal parece estar más cercanamente relacionada a exposiciones de teorías físicas elementales que a la práctica laboratorial en cualquier rama de la investigación; en el estado de conocimiento o ignorancia en el que la investigación genuina, con el objetivo de avanzar el conocimiento, es realizada, esta fórmula simple no es muy útil”. Más recientemente, Wu y Hamada (2000) comentan lo siguiente: “Un enfoque comúnmente usado en investigaciones científicas o ingenieriles es: *i.* identificar el factor más importante, *ii.* investigar este factor por sí mismo, ignorando otros factores, *iii.* hacer recomendaciones sobre cambios (o no) de este factor, y *iv.* moverse hacia el siguiente factor más importante y repetir pasos *ii.* y *iii.* Las iteraciones finalizan cuando una solución satisfactoria es encontrada. En la situación más afortunada, puede terminar después de estudiar sólo un factor o puede estudiar varios factores al mismo tiempo”. Por comparación con un diseño factorial, el OFAT tiene las siguientes desventajas:

1. Requiere más corridas (pruebas experimentales) para la misma precisión en la estimación de efectos.
2. No puede estimar interacciones.
3. Las conclusiones de su análisis no son generales.
4. Puede perder condiciones óptimas de factores.

Por medio de un ejemplo ilustremos lo anterior en el contexto de un experimento hipotético sobre un proceso de moldeo por extrusión que está generando un porcentaje inaceptable de productos quemados. Suponga un diseño  $2^3$  en un experimento que estudia a tres factores. Los factores y sus niveles son  $P$ : presión de inyección (1200 - 1400 psi),  $R$ : control de rpm del tornillo (0.3 - 0.6

vueltas contrareloj),  $S$ : velocidad de inyección (lento - rápido). La tabla siguiente muestra el diseño y porcentajes de productos quemados en cada condición.

$P$	$R$	$S$	$y$ % quemado
1200	0.3	lento	11
1200	0.3	rápido	17
1200	0.6	lento	25
1200	0.6	rápido	29
1400	0.3	lento	02
1400	0.3	rápido	09
1400	0.6	lento	37
1400	0.6	rápido	40

Con el fin de ilustrar las cuatro desventajas anteriores, seguimos la versión bien definida del OFAT para propósitos de comparación, descrita en la Fig. 4.1.

*Paso 1.* Factor  $P$  se piensa que es el más importante. Fijando los otros dos factores en condiciones estándar ( $R = 0.6$ ,  $S = \text{rápido}$ ), dos niveles de  $P$  en 1200 y 1400 son comparados. Aquí  $P = 1200$  es seleccionado dado que da un porcentaje menor al de  $P = 1400$ .

*Paso 2.* El siguiente factor más importante se piensa es  $R$ . Fijando  $P = 1200$  del paso 1 y  $S = \text{rápido}$  (condición estándar), los dos niveles de  $R$  0.3 y 0.6 son comparados. Aquí  $R = 0.3$  es mejor que  $R = 0.6$  dado que tiene menor porcentaje de producto quemado.

*Paso 3.* Se siente que puede haber ganancias adicionales si consideramos el factor  $S$ . Los dos niveles de  $S$  son comparados con  $P = 1200$  y  $R = 0.3$  fijados por los dos pasos anteriores. El nivel  $S = \text{lento}$  es seleccionado debido a que muestra un porcentaje menor de quemados que  $S = \text{rápido}$ .

Para explicar la primera desventaja de OFAT versus el factorial, se puede mostrar que con OFAT se requiere tomar cuatro observaciones en el nivel bajo y en el nivel alto de  $P$  (con  $R = 0.6$ ,  $S = \text{rápido}$ ), para que el efecto de  $P$  tenga la misma precisión (i.e. varianza) que el efecto estimado de  $P$  mediante el diseño factorial. Lo mismo ocurre con las precisiones de los efectos de  $R$  y  $S$  por OFAT respecto a las precisiones logradas por el factorial. Así en total se tendrían 16 observaciones por tomar usando OFAT.

La segunda desventaja del enfoque OFAT se puede apreciar de manera evidente, ya que ninguna de las interacciones se puede estimar de las observaciones obtenidas con este enfoque experimental. Por ejemplo para estimar la interacción de  $P$  con  $R$  se requieren observaciones en (1200,0.3), (1200,0.6), (1400,0.3) y (1400,0.6); no se tendría dato en (1400,0.3) y por lo tanto no es estimable la interacción mencionada. Expertos del área pueden saber a priori cuáles son los

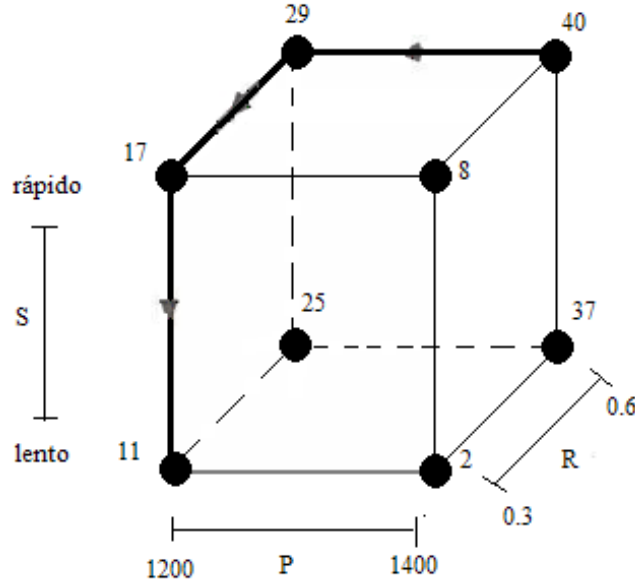


Fig. 4.1: Estrategia para analizar sólo un factor

efectos principales importantes pero difícilmente podrán anticipar interacciones. Los diseños factoriales sí dan la posibilidad de estimarlas.

La región experimental no es explorada de manera completa por la estrategia OFAT; los efectos estimados de un factor en un diseño factorial son promedios en múltiples combinaciones de los otros factores, lo que no sucede en OFAT pues el efecto es estimado con niveles fijos de otros factores de control. Esto último resta generalidad a las conclusiones puesto que es una situación no realista.

Finalmente, en el ejemplo, dado que hay una interacción importante entre  $P$  y  $R$ , la selección vía OFAT no es la óptima ya que la condición  $P = 1400$ ,  $R = 0.3$ ,  $S = \text{lento}$  o  $\text{rápido}$ , da mejores resultados que los obtenidos por OFAT.

## 4.2 Diseños con más de un factor

A continuación se presentan algunos ejemplos en donde es necesario estudiar los efectos de varios factores, ya que los diseños factoriales responden a una estructura de tratamientos producto de todas las combinaciones de los niveles de los factores de interés. En este capítulo se estudiará la forma de estimar efectos y contrastar hipótesis sobre los efectos, partiendo de diseños factoriales. Cabe mencionar que se supondrá, por lo pronto, que la estructura de diseño no contempla la presencia de factores de ruido de importancia. Se presentará material sobre algunos diseños

factoriales considerando factores de ruido en un capítulo posterior.

Por otra parte, se presentarán diseños factoriales balanceados, es decir que cada tratamiento es aplicado aleatoriamente en el mismo número  $n$  de UE.

A continuación se presentan algunos ejemplos en donde es necesario estudiar los efectos de varios factores.

### Ejemplo 4.1

En la producción de tarjetas con circuitos impresos interviene más de un factor, la meta es determinar cuáles de estos factores que conforman el proceso en la máquina soldadora influyen en la aparición de defectos de soldadura.

El grupo de ingenieros del proceso han considerado los siguientes factores: temperatura de la soldadura, temperatura de precalentado, velocidad de la banda transportadora, tipo de fundente, ángulo de la banda transportadora, densidad relativa del fundente.

Ante esta situación, el objetivo es establecer una estrategia experimental con los diferentes factores para averiguar cuáles de ellos tienen una mayor influencia en el porcentaje de puntos de soldadura o en la producción de tarjetas defectuosas.

### Ejemplo 4.2

La adhesividad de un pegamento depende de la presión y de la temperatura al ser aplicado. La presión ( $\text{N/m}^2 \times 10^{-4}$ ) puede ser (174.0, 188.5, 203.0 o 217.5), y la temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ) puede ser (50, 60 o 70). De este modo se tiene un diseño factorial con  $3 \times 4 = 12$  tratamientos.

Se puede observar que el número de tratamientos aumenta cuando se tienen más factores o crece el número de niveles de los factores. Así por ejemplo, con cuatro factores de cuatro niveles cada uno, implicaría  $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$  tratamientos y la aplicación práctica de esta estructura de tratamientos resulta demasiado laboriosa, además de que el gasto económico sería muy alto.

El tipo de diseño factorial que se utilice será muy importante para lograr la precisión deseada al costo mínimo. En etapas iniciales es frecuente que un gran número de factores sean de importancia para el experimentador. En tal caso es recomendable una estrategia experimental que se concentre en determinar económicamente cuáles factores son los más importantes.

Una posible estrategia es experimentar sólo con dos niveles de cada factor. Por supuesto tales niveles deben ser seleccionados de manera que se obtenga la mayor información. Por ejemplo, si un factor es la temperatura, habrá de seleccionar dos temperaturas (dos niveles) que se piense causan efectos diferentes de importancia sobre la respuesta de interés. Denote por  $k$  el número de factores con dos niveles; los diseños que atienden a esta estructura de tratamientos se

denotan por diseños  $2^k$  (“dos a la  $k$ ”). Sea  $N = 2^k$  que representa el número de todas las combinaciones de los  $k$  factores con dos niveles.  $N$  es así el número de tratamientos que se requieren para efectuar el experimento. Por ejemplo si  $k = 4$  se tendrán  $N = 16$  tratamientos.

### 4.3 Factorial $2^2$

#### 4.3.1 Cálculo de efectos

El diseño  $2^2$  es un esquema adecuado para introducir y motivar los principales conceptos estadísticos en los diseños factoriales  $2^k$ . Por medio de un ejemplo se presentan estos conceptos.

#### Ejemplo 4.3

En varias empresas tienen como requerimiento de la normatividad correspondiente, considerar la contaminación que producen. Para tratar esta situación una compañía decide evaluar su contaminación; ésta se mide por el número de partículas emitidas al ambiente, siendo el objetivo reducirlas. Los factores que se consideran importantes para disminuir las partículas son el tipo de combustible y el filtro. El primer factor denotado por  $A$  se refiere a dos tipos de combustible; el factor tipo de filtro consiste en comparar el filtro existente con uno nuevo, a este factor se le denominará  $B$ . La descripción de los factores se muestra a continuación, donde el primer nivel de cada factor se describirá por  $-1$  y el segundo nivel de cada factor por  $1$ .

Factores/Niveles	$-1$	$1$
$A$ : combustible	$A_1$	$A_2$
$B$ : filtro	$B_1$	$B_2$

La estrategia experimental consiste en combinar los dos niveles de los factores  $A$  y  $B$  y realizar las actividades de la compañía bajo esas combinaciones. Esto da lugar a cuatro tratamientos, estos son, combustible 1 con el filtro 1 y 2, y combustible 2 con filtro 1 y 2, donde el filtro 1 es filtro nuevo, la ejecución de cada uno de ellos se hace en forma aleatoria.

Denotemos por  $y_{ijl}$  la medición de la respuesta ante el nivel  $i$  del factor  $A$ ,  $i = 1, 2$ , nivel  $j$  del factor  $B$ ,  $j = 1, 2$  en su replicación  $l$ ,  $l = 1, \dots, n$ . En este ejemplo  $n = 2$ , es decir, cada tratamiento fue aplicado de manera independiente en 2 UE; los resultados se muestran en la Tabla 4.1.

Análogamente como en el Capítulo 2, los niveles de cada factor tienen efectos en la respuesta, computados como

$$\hat{\delta}_{A_i} \equiv (\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}), i = 1, 2, \quad (4.1)$$

$$\hat{\delta}_{B_j} \equiv (\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}), j = 1, 2. \quad (4.2)$$

La diferencia de tales efectos estima el efecto principal del factor  $A$  y el efecto principal del factor  $B$  respectivamente, es decir,

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_A &= \hat{\delta}_{A_2} - \hat{\delta}_{A_1} = (\bar{y}_{2\bullet\bullet} - \bar{y}_{1\bullet\bullet}) \\ \hat{\delta}_B &= \hat{\delta}_{B_2} - \hat{\delta}_{B_1} = (\bar{y}_{\bullet 2\bullet} - \bar{y}_{\bullet 1\bullet}) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Factores		B:					
	Niveles	$B_1$		$B_2$		$\bar{y}_{i\bullet\bullet}$	
A	$A_1$	$y_{111}$	24	$y_{121}$	42		
		$y_{112}$	28	$y_{122}$	46		
		$\bar{y}_{11\bullet}$	26	$\bar{y}_{12\bullet}$	44	$\bar{y}_{1\bullet\bullet}$	35
		$S_{11}^2$	8	$S_{12}^2$	8		
	$A_2$	$y_{211}$	34	$y_{221}$	55		
		$y_{212}$	38	$y_{222}$	59		
		$\bar{y}_{21\bullet}$	36	$\bar{y}_{22\bullet}$	57	$\bar{y}_{2\bullet\bullet}$	46.5
		$S_{21}^2$	8	$S_{22}^2$	8		
$\bar{y}_{\bullet j\bullet}$		$\bar{y}_{\bullet 1\bullet}$	31	$\bar{y}_{\bullet 2\bullet}$	50.5	$\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$	40.75

Tabla 4.1 Resultados del experimento del Ejemplo 4.3

Con los datos del Ejemplo 4.3, se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{A_1} &= 35.00 - 40.75 = -5.75, \\ \hat{\delta}_{A_2} &= 46.50 - 40.75 = 5.75, \\ \hat{\delta}_{B_1} &= 31.00 - 40.75 = -9.75, \\ \hat{\delta}_{B_2} &= 50.50 - 40.75 = 9.75; \end{aligned}$$

Finalmente, los efectos de los factores  $A$  y  $B$  son

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_A &= 5.75 - (-5.75) = 11.5 \\ \hat{\delta}_B &= 9.75 - (-9.75) = 19.5 \end{aligned}$$

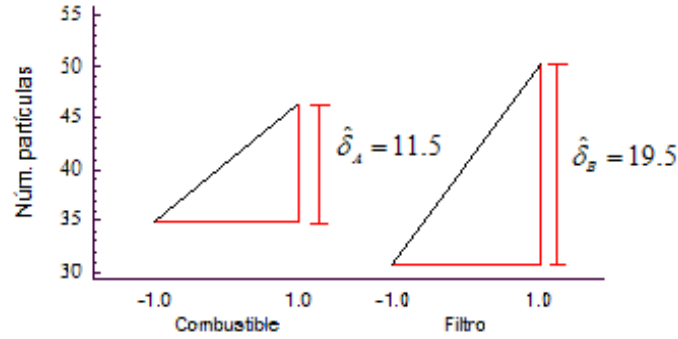


Fig. 4.2: Efectos de combustible y filtro en el Ejemplo 4.3

que se muestran gráficamente en la Fig. 4.2. Observe cómo la respuesta cambia como efecto del cambio del nivel 1 al nivel 2 de cada factor. El cambio en ambos factores es importante pero de manera más marcada con el factor  $B$ .

Por otra parte, cuando se tiene más de un factor y otro tipo de efectos por estimar que son de suma importancia, éstos son los llamados efectos de interacción entre dos o más factores. En particular, la interacción entre dos factores indica que el efecto sobre la respuesta de un primer factor depende de los niveles de otro factor presente en el experimento. Con objeto de comprender intuitivamente el efecto de interacción entre dos factores, siguiendo con el ejemplo de combustible y filtro en su efecto sobre el número de partículas, considere la Fig. 4.3; el eje vertical representa a los valores del número de partículas y el eje horizontal los niveles del factor  $A$  (combustible). Los puntos graficados corresponden a las respuestas promedio a los cuatro tratamientos. Trazando una línea recta que una los puntos correspondientes a un mismo nivel del factor  $B$ , se tienen dos líneas en la gráfica. Fije su atención en el nivel 1 de filtro  $B$ ; observe la diferencia en respuesta de ir del nivel 1 de combustible  $A$  a nivel dos de combustible  $B$ , es decir,

$$\hat{\delta}_{AB_1} = (\bar{y}_{21\bullet} - \bar{y}_{11\bullet}) \quad (4.4)$$

el efecto del combustible (factor  $A$ ), fijo el nivel uno de filtro (nivel 1 del factor  $B$ ). Ahora fije su atención en el nivel 2 de filtro, observe la diferencia de ir de nivel uno a nivel dos de combustible, es:

$$\hat{\delta}_{AB_2} = (\bar{y}_{22\bullet} - \bar{y}_{12\bullet}) \quad (4.5)$$

Intuitivamente si no hubiera interacción entre  $A$  y  $B$ , se debe tener que:



$$\hat{\delta}_{AB_1} \approx \hat{\delta}_{AB_2}$$

Entonces, definimos el efecto de interacción  $AB$  sobre la respuesta como:

$$\hat{\delta}_{AB} \equiv (\hat{\delta}_{AB_2} - \hat{\delta}_{AB_1})/2 \quad (4.6)$$

o,

$$\hat{\delta}_{AB} \equiv (\hat{\delta}_{A_2B} - \hat{\delta}_{A_1B})/2 \quad (4.7)$$

a partir de  $\hat{\delta}_{AB}$ , la pregunta es: ¿ $\delta_{AB}$  es cero? Sustituyendo  $\hat{\delta}_{AB_2}$  y  $\hat{\delta}_{AB_1}$  se tiene

$$\hat{\delta}_{AB} \equiv (\hat{\delta}_{AB_2} - \hat{\delta}_{AB_1})/2 = [(\bar{y}_{22\bullet} - \bar{y}_{12\bullet}) - (\bar{y}_{21\bullet} - \bar{y}_{11\bullet})]/2 \quad (4.8)$$

Para los datos del ejemplo la estimación del efecto de interacción es,

$$\hat{\delta}_{AB} = ((57 - 44) - (36 - 26))/2 = (13 - 10)/2 = 3/2 = 1.5$$

que es pequeña en referencia a  $\hat{\delta}_A$  y  $\hat{\delta}_B$ . Esto equivale a decir que numéricamente el efecto por cambio de combustible no depende del tipo de filtro, esto es, que no hay efecto de interacción entre el tipo de filtro y el tipo de combustible. En resumen el efecto de interacción es:

	$B_1$	$B_2$	
$A_1$	26	44	$\hat{\delta}_{A_1B} = 18$
$A_2$	36	57	$\hat{\delta}_{A_2B} = 21$
	$\hat{\delta}_{AB_1} = 10$	$\hat{\delta}_{AB_2} = 13$	$\hat{\delta}_{AB} = 1.5$

Gráficamente también se puede identificar la presencia de interacciones a través de las pendientes de las dos rectas en la Fig. 4.3. En este caso, la pendiente de la recta que une la respuesta promedio de (combustible 1, filtro 1) a la respuesta promedio de (combustible 1, filtro 2), es casi igual a la pendiente de la recta análoga que une la respuesta promedio de (combustible 2, filtro 1) con la respuesta promedio de (combustible 2, filtro 2).

La Tabla 4.1 muestra la descripción clásica que se emplea para representar el diseño factorial  $2^2$  y sus resultados. Sin embargo, esta presentación se complica cuando el número de factores va en aumento. A continuación se propone la Tabla 4.2 que describe de una manera económica la estructura del diseño y los datos experimentales, esta presentación se hace extensiva a diseños con más de dos factores en dos niveles. Como ya se mencionó, el nivel uno de ambos factores se representa por número  $-1$  y el nivel dos por el  $1$ .

Se ha mostrado que el efecto de los factores se obtiene a través de contrastes de promedios, concepto que no debe perderse de vista. Con las expresiones (4.3)

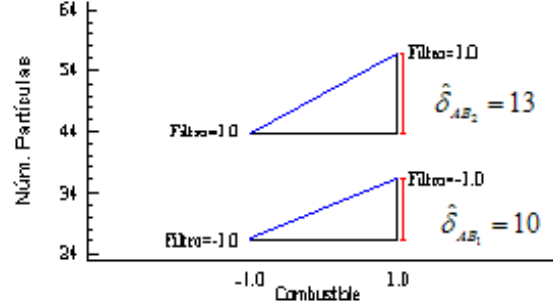


Fig. 4.3: Efecto de Interacción de los factores A y B, para el ejemplo 4.3

se obtiene el efecto de los factores, los cuales se presentan en el último renglón de la Tabla 4.2.

$A$	$B$	$y_{ij1}$	$y_{ij2}$	$\bar{y}_{ij\bullet}$	$S_{ij}^2$
-1	-1	$y_{111}$	$y_{112}$	$\bar{y}_{11\bullet}$	$S_{11}^2$
1	-1	$y_{211}$	$y_{212}$	$\bar{y}_{21\bullet}$	$S_{21}^2$
-1	1	$y_{121}$	$y_{122}$	$\bar{y}_{12\bullet}$	$S_{12}^2$
1	1	$y_{221}$	$y_{222}$	$\bar{y}_{22\bullet}$	$S_{22}^2$
$\bar{y}_{1\bullet\bullet} = (\bar{y}_{11\bullet} + \bar{y}_{12\bullet})/2$		$\bar{y}_{\bullet 1\bullet} = (\bar{y}_{11\bullet} + \bar{y}_{21\bullet})/2$			
$\bar{y}_{2\bullet\bullet} = (\bar{y}_{21\bullet} + \bar{y}_{22\bullet})/2$		$\bar{y}_{\bullet 2\bullet} = (\bar{y}_{12\bullet} + \bar{y}_{22\bullet})/2$			
$\hat{\delta}_A = \bar{y}_{2\bullet\bullet} - \bar{y}_{1\bullet\bullet}$		$\hat{\delta}_B = \bar{y}_{\bullet 2\bullet} - \bar{y}_{\bullet 1\bullet}$			

Tabla 4.2 Resumen estadístico para calcular los efectos de los factores

La interacción se obtiene usando la expresión (4.8) y el siguiente cuadro auxiliar:

	$B_1$	$B_2$	
$A_1$	$\bar{y}_{11\bullet}$	$\bar{y}_{12\bullet}$	$\hat{\delta}_{A_1 B}$
$A_2$	$\bar{y}_{21\bullet}$	$\bar{y}_{22\bullet}$	$\hat{\delta}_{A_2 B}$
	$\hat{\delta}_{AB_1}$	$\hat{\delta}_{AB_2}$	$\hat{\delta}_{AB}$

(4.9)

Es decir :

$$\hat{\delta}_{AB} \equiv (\hat{\delta}_{AB_2} - \hat{\delta}_{AB_1})/2 = [(\bar{y}_{22\bullet} - \bar{y}_{12\bullet}) - (\bar{y}_{21\bullet} - \bar{y}_{11\bullet})]/2$$

Nota: En la Tabla 4.2 cada renglón con valores 1 y -1 están apilados en lo que se conoce como el orden estándar: primera columna alternando signos de uno en uno, segunda columna alternando signos de dos en dos.

### 4.3.2 Inferencia estadística

Una vez computados numéricamente efectos principales y efectos de interacción, en el contexto de inferencia estadística se requiere saber si tales efectos son estadísticamente significativos. Para ello supongamos que las respuestas  $y_{ijl}$  ante cada uno de los tratamientos son descritas adecuadamente por una distribución de probabilidad normal, con media determinada principalmente por el tratamiento  $(i, j)$ , denotada por  $\mu_{ij}$ , y con varianza  $\sigma_{ij}^2$ , es decir  $y_{ijl} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2$ ;  $l = 1, \dots, n$ . Se supondrá además que  $\sigma_{ij}^2 = \sigma^2$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2$ , con  $\sigma^2$  la varianza del error experimental, la llamada homogeneidad de varianzas. Note que suponer este modelo para las  $y_{ijl}$  implica que habrá un manejo físico homogéneo en el experimento, libre de efectos de ruido importantes.

La Tabla 4.3 muestra la descripción general del diseño  $2^2$  con respecto a las medias teóricas por comparar. Los efectos teóricos de los niveles del factor A son  $\delta_{A_1} = \mu_{1\bullet} - \mu$  y  $\delta_{A_2} = \mu_{2\bullet} - \mu$ , donde  $\mu$  es la media general de la respuesta sin tratamiento alguno. Análogamente para el factor B son  $\delta_{B_1} = \mu_{\bullet 1} - \mu$  y  $\delta_{B_2} = \mu_{\bullet 2} - \mu$ . El efecto de interacción se deriva de la comparación entre las diferencias  $\delta_{AB_1} = \mu_{21} - \mu_{11}$  y  $\delta_{AB_2} = \mu_{22} - \mu_{12}$ .

	Niveles	Factor B		media
		uno	dos	marginal
Factor A	uno	$\mu_{11}$	$\mu_{12}$	$\mu_{1\bullet}$
	dos	$\mu_{21}$	$\mu_{22}$	$\mu_{2\bullet}$
media marginal		$\mu_{\bullet 1}$	$\mu_{\bullet 2}$	$\mu_{\bullet\bullet}$ (media global)

Tabla 4.3. Notación para medias del diseño  $2^2$

El siguiente paso es contrastar las siguientes hipótesis con base en los datos generados en el experimento:

$$H_{01} : \delta_{AB_1} = \delta_{AB_2} \quad \text{versus} \quad H_{11} : \delta_{AB_1} \neq \delta_{AB_2}$$

o:

$$H_{01} : \delta_{BA_1} = \delta_{BA_2} \quad \text{versus} \quad H_{11} : \delta_{BA_1} \neq \delta_{BA_2}$$

y:

$$H_{02} : \delta_{A_1} = \delta_{A_2} \quad \text{versus} \quad H_{12} : \delta_{A_1} \neq \delta_{A_2}$$

y:

$$H_{03} : \delta_{B_1} = \delta_{B_2} \quad \text{versus} \quad H_{13} : \delta_{B_1} \neq \delta_{B_2}$$

$H_{01}$  representa la hipótesis de no interacción,  $H_{02}$  la hipótesis de que no hay diferencias de efectos de los niveles del factor  $A$ , y  $H_{03}$  la hipótesis de que no hay diferencias de efectos de los niveles del factor  $B$ .

En general  $H_{01}$  debe estar sujeta a comprobación estadística en primer lugar, porque de rechazarse (es decir, declarar así la presencia de efectos de interacción), no tiene sentido probar  $H_{02}$  o  $H_{03}$ . Así en el caso en que  $H_{01}$  se rechace, lo que procede es contrastar hipótesis de igualdad de efectos de los niveles de un factor, pero fijando un nivel en turno del otro factor (ver para interesantes comentarios Fabian, 1991).

Usando las expresiones (4.3) y (4.8) para construir el ANDEVA correspondiente a un diseño  $2^2$ , se puede demostrar que las sumas de cuadrados son:

$$\begin{aligned} SC_A &= c\hat{\delta}_A^2 \\ SC_B &= c\hat{\delta}_B^2 \\ SC_{AB} &= c\hat{\delta}_{AB}^2 \end{aligned} \tag{4.10}$$

con:

$$c = 2^2 n / 4 = n$$

Estas sumas de cuadrados son estimaciones óptimas de lo que contribuye cada factor y su interacción a la variabilidad total en el experimento.  $SC_A$  y  $SC_B$  tienen  $2-1 = 1$  grados de libertad, mientras que  $SC_{AB}$  tiene  $(2-1) \times (2-1) = 1$  grados de libertad. La obtención del valor  $c$  aparece en el Apéndice C al final del libro. Con los datos del Ejemplo 4.3, estas cantidades resultan ser,

$$\begin{aligned} SC_A &= 2(11.5)^2 = 264.5, \\ SC_B &= 2(19.5)^2 = 760.5, \\ SC_{AB} &= 2(1.5)^2 = 4.5. \end{aligned}$$

De igual manera que en los capítulos anteriores, el tamaño de las sumas de cuadrados, en este caso,  $SC_A, SC_B, SC_{AB}$ , debe ser juzgado contra un estimador de la varianza del error experimental, es decir un valor estimado de  $\sigma^2$ . Partiendo de la misma lógica del Capítulo 2, se tiene que,

$$\hat{\sigma}^2 = CM_{error} = \frac{(n-1)(S_{11}^2 + S_{12}^2 + S_{21}^2 + S_{22}^2)}{2^2(n-1)} = \frac{SC_{error}}{gl_{error}} \tag{4.11}$$

donde:

$$S_{ij}^2 = \frac{\sum_l (y_{ijl} - \bar{y}_{ij\bullet})^2}{n-1}$$

Con los datos del Ejemplo 4.3, se tiene que

$$\hat{\sigma}^2 = CM_{error} = 8$$

La suma de cuadrados total se calcula por,

$$SC_{total} = \sum_i \sum_j \sum_l (y_{ijl} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$$

Así la ANDEVA correspondiente se muestra en la Tabla 4.4.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
$A$	1	$SC_A$	$CM_A$	$\frac{CM_A}{CM_{error}}$	
$B$	1	$SC_B$	$CM_B$	$\frac{CM_B}{CM_{error}}$	
$AB$	1	$SC_{AB}$	$CM_{AB}$	$\frac{CM_{AB}}{CM_{error}}$	
Error	$2^2(n-1)$	$(n-1) \sum_{ij} S_{ij}^2$	$CM_{error}$		
Total	$2^2n-1$	$SC_{total}$			

Tabla 4.4. Tabla ANDEVA general para el diseño  $2^3$

Con los datos del Ejemplo 4.3 la ANDEVA correspondiente se muestra en la Tabla 4.5. Con esto se puede apreciar que los efectos principales de A y de B son importantes en la variabilidad de la respuesta, mientras que su interacción no lo es.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Combustible	1	264.5	264.5	33.06	0.005
Filtro	1	760.5	760.5	95.06	0.001
Comb×Filtro	1	4.5	4.5	0.56	0.495
Error	4	32.0	8		
Total	7	1061.5			

Tabla 4.5. Tabla ANDEVA para el diseño  $2^2$  con los datos del Ejemplo 4.3

## 4.4 Factorial $2^3$

### 4.4.1 Cálculo de efectos

El objetivo en esta sección es analizar un diseño factorial de tres factores con dos niveles; los conceptos y estrategias usadas en el apartado anterior, se extienden de

manera natural. En este caso las observaciones serán denotadas por  $y_{ijlm}$  donde  $i$  denota el nivel  $i$ ,  $i = 1, 2$  del primer factor  $A$ ,  $j$  denota el nivel  $j$ ,  $j = 1, 2$  del segundo factor  $B$ ,  $l$  denota el nivel  $l$ ,  $l = 1, 2$  del tercer factor  $C$  y  $m$  denota la replicación  $m$  de tal combinación de niveles,  $m = 1, \dots, n$ . Los efectos principales y de interacción se estiman como sigue:

Efectos de niveles:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{A_1} &= (\bar{y}_{1\bullet\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet\bullet}), & \hat{\delta}_{A_2} &= (\bar{y}_{2\bullet\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet\bullet}) \\ \hat{\delta}_{B_1} &= (\bar{y}_{\bullet 1 \bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet\bullet}), & \hat{\delta}_{B_2} &= (\bar{y}_{\bullet 2 \bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet\bullet}) \\ \hat{\delta}_{C_1} &= (\bar{y}_{\bullet\bullet 1 \bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet\bullet}), & \hat{\delta}_{C_2} &= (\bar{y}_{\bullet\bullet 2 \bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet\bullet})\end{aligned}\quad (4.12)$$

Efectos principales:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_A &= \hat{\delta}_{A_2} - \hat{\delta}_{A_1} = \bar{y}_{2\bullet\bullet\bullet} - \bar{y}_{1\bullet\bullet\bullet} \\ \hat{\delta}_B &= \hat{\delta}_{B_2} - \hat{\delta}_{B_1} = \bar{y}_{\bullet 2 \bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet 1 \bullet\bullet} \\ \hat{\delta}_C &= \hat{\delta}_{C_2} - \hat{\delta}_{C_1} = \bar{y}_{\bullet\bullet 2 \bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet 1 \bullet}\end{aligned}\quad (4.13)$$

Efectos de  $B$  dado un nivel de  $A$ :

$$\hat{\delta}_{A_1 B} = (\bar{y}_{12\bullet\bullet} - \bar{y}_{11\bullet\bullet}), \quad \hat{\delta}_{A_2 B} = (\bar{y}_{22\bullet\bullet} - \bar{y}_{21\bullet\bullet}) \quad (4.14)$$

Efectos de  $C$  dado un nivel de  $A$ :

$$\hat{\delta}_{A_1 C} = (\bar{y}_{1\bullet 2 \bullet} - \bar{y}_{1\bullet 1 \bullet}), \quad \hat{\delta}_{A_2 C} = (\bar{y}_{2\bullet 2 \bullet} - \bar{y}_{2\bullet 1 \bullet}) \quad (4.15)$$

Efectos de  $C$  dado un nivel de  $B$ :

$$\hat{\delta}_{B_1 C} = (\bar{y}_{\bullet 1 2 \bullet} - \bar{y}_{\bullet 1 1 \bullet}), \quad \hat{\delta}_{B_2 C} = (\bar{y}_{\bullet 2 2 \bullet} - \bar{y}_{\bullet 2 1 \bullet}) \quad (4.16)$$

Efecto de interacción  $AB$ :

$$\hat{\delta}_{AB} = (\hat{\delta}_{A_2 B} - \hat{\delta}_{A_1 B})/2 \quad (4.17)$$

Efecto de interacción  $AC$ :

$$\hat{\delta}_{AC} = (\hat{\delta}_{A_2 C} - \hat{\delta}_{A_1 C})/2 \quad (4.18)$$

Efecto de interacción  $BC$ :

$$\hat{\delta}_{BC} = (\hat{\delta}_{B_2 C} - \hat{\delta}_{B_1 C})/2 \quad (4.19)$$

Efecto de  $B$  en niveles fijos de  $A$  y fijo un nivel de  $C$ :

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{A_1BC_1} &= (\bar{y}_{121\bullet} - \bar{y}_{111\bullet}), & \hat{\delta}_{A_2BC_1} &= (\bar{y}_{221\bullet} - \bar{y}_{211\bullet}) \\ \hat{\delta}_{A_1BC_2} &= (\bar{y}_{122\bullet} - \bar{y}_{112\bullet}), & \hat{\delta}_{A_2BC_2} &= (\bar{y}_{222\bullet} - \bar{y}_{212\bullet})\end{aligned}\quad (4.20)$$

Efecto de interacción  $AB$  fijo un nivel de  $C$ :

$$\hat{\delta}_{ABC_1} = (\hat{\delta}_{A_2BC_1} - \hat{\delta}_{A_1BC_1})/2$$

$$\hat{\delta}_{ABC_2} = (\hat{\delta}_{A_2BC_2} - \hat{\delta}_{A_1BC_2})/2$$

Efecto de interacción  $ABC$ :

$$\hat{\delta}_{ABC} = (\hat{\delta}_{ABC_2} - \hat{\delta}_{ABC_1})/2. \quad (4.21)$$

#### 4.4.2 Inferencia estadística

La tabla ANDEVA, en lo esencial, que corresponde al diseño  $2^3$  se muestra en la Tabla 4.6.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados
$A$	1	$SC_A = (\frac{n\bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_A^2$
$B$	1	$SC_B = (\frac{n\bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_B^2$
$C$	1	$SC_C = (\frac{n\bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_C^2$
$AB$	1	$SC_{AB} = (\frac{n\bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_{AB}^2$
$AC$	1	$SC_{AC} = (\frac{n\bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_{AC}^2$
$BC$	1	$SC_{BC} = (\frac{n\bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_{BC}^2$
$ABC$	1	$SC_{ABC} = (\frac{n\bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_{ABC}^2$
Error	$2^3(n-1)$	$SC_{error} = (n-1)\sum_{ijl} S_{ijl}^2$
Total	$2^3n-1$	$SC_{tot} = \sum_{ijlm} (y_{ijlm} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$

Tabla 4.6 Suma de cuadrados y grados de libertad para el diseño  $2^3$

donde:

$$S_{ijl}^2 = \frac{\sum_m (y_{ijlm} - \bar{y}_{ijl\bullet})^2}{n-1}$$

**Ejemplo 4.4**

En un proceso industrial se tiene interés en extraer aceite de cacahuete, la técnica usada es mediante el dióxido de carbono a presión muy alta. Se consideraron los siguientes factores:  $A$ : temperatura,  $B$ : mezcla de cacahuete y  $C$ : razón de flujo. La finalidad del proyecto es mejorar la producción total de aceite ( $y$ ). Los dos niveles de cada factor se describen en la Tabla 4.7.

Factores\Niveles	-1	1
$A$ :temperatura	$50^{\circ}C$	$90^{\circ}C$
$B$ :mezcla	$10g$	$20g$
$C$ :flujo	$35g/min$	$50g/min$

Tabla 4.7 Producción de aceite de cacahuete del Ejemplo 4.4

Los datos que se obtuvieron al realizar este experimento se muestran en la Tabla 4.8 (en el orden estándar ahora para tres factores). Los efectos correspondientes al experimento se obtienen usando las expresiones (4.13) y (4.21). Las estimaciones de los promedios se muestran en las siguientes tablas.

Factores			Respuesta
$A$	$B$	$C$	
-1	-1	-1	$y_{111} = 65$
1	-1	-1	$y_{211} = 62$
-1	1	-1	$y_{121} = 58$
1	1	-1	$y_{221} = 68$
-1	-1	1	$y_{112} = 64$
1	-1	1	$y_{212} = 79$
-1	1	1	$y_{122} = 62$
1	1	1	$y_{222} = 94$
$\bar{y}_{1\bullet\bullet} = 62.25$	$\bar{y}_{\bullet 1\bullet} = 67.50$	$\bar{y}_{\bullet\bullet 1} = 63.25$	$\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet} = 69$
$\bar{y}_{2\bullet\bullet} = 75.75$	$\bar{y}_{\bullet 2\bullet} = 70.50$	$\bar{y}_{\bullet\bullet 2} = 74.75$	
$\hat{\delta}_A = 13.50$	$\hat{\delta}_B = 3.00$	$\hat{\delta}_C = 11.5$	

Tabla 4.8. Datos de producción de aceite de cacahuete

Observe que se han asignando los números  $-1$  y  $1$  a los dos niveles de los tres factores con el mismo criterio establecido en el ejemplo anterior, es decir, los niveles en el factor  $A$  se alternan uno a uno, en el factor  $B$  dos a dos y en el factor  $C$  cuatro a cuatro. Se realiza el experimento llevando a cabo los tratamientos, éstos se obtienen de hacer todas las combinaciones posibles de los tres niveles de los factores, en este caso resultan 8 tratamientos; por supuesto en la práctica éstos se corren en orden aleatorio.



Los efectos de interacción entre los factores se estiman a continuación:

$AB$			$AC$			$BC$		
	$B_1$	$B_2$		$C_1$	$C_2$		$C_1$	$C_2$
$A_1$	64.5	60	$A_1$	61.5	63	$B_1$	63.5	71.5
$A_2$	70.5	81	$A_2$	65	86.5	$B_2$	63	78

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{AB} &= [(\bar{y}_{22\bullet} - \bar{y}_{12\bullet}) - (\bar{y}_{21\bullet} - \bar{y}_{11\bullet})]/2 = [(81 - 60) - (70.5 - 64.5)]/2 = 7.5 \\ \hat{\delta}_{AC} &= [(\bar{y}_{2\bullet 2} - \bar{y}_{1\bullet 2}) - (\bar{y}_{2\bullet 1} - \bar{y}_{1\bullet 1})]/2 = [(86.5 - 63) - (65 - 61.5)]/2 = 10 \\ \hat{\delta}_{BC} &= [(\bar{y}_{\bullet 22} - \bar{y}_{\bullet 12}) - (\bar{y}_{\bullet 21} - \bar{y}_{\bullet 11})]/2 = [(78 - 71.5) - (63 - 63.5)]/2 = 3.5\end{aligned}$$

Finalmente el efecto de interacción triple se estima por

$ABC$			
$BC_1$			$BC_2$
$A_1$	$(\bar{y}_{121} - \bar{y}_{111}) = 58 - 65 = -7$		$(\bar{y}_{122} - \bar{y}_{112}) = 62 - 64 = -2$
$A_2$	$(\bar{y}_{221} - \bar{y}_{211}) = 68 - 62 = 6$		$(\bar{y}_{222} - \bar{y}_{212}) = 58 - 65 = 15$

$$\hat{\delta}_{ABC} = [(15 - (-2)) - (6 - (-7))]/2 = 1$$

En la Tabla 4.9 se muestran los efectos estimados.

Efecto	Estimación
$A$	$\hat{\delta}_A = 13.5$
$B$	$\hat{\delta}_B = 3.0$
$C$	$\hat{\delta}_C = 11.5$
$AB$	$\hat{\delta}_{AB} = 7.5$
$AC$	$\hat{\delta}_{AC} = 10.0$
$BC$	$\hat{\delta}_{BC} = 3.5$
$ABC$	$\hat{\delta}_{ABC} = 1.0$

Tabla 4.9. Estimación de los efectos de factores e interacciones

Usando los resultados de la Tabla 4.9 se obtiene la tabla ANDEVA correspondiente a este ejemplo, la cual se muestra en la Tabla 4.10.

### Estimación de $\sigma^2$

Note que en este ejemplo cada tratamiento sólo es aplicado en una sola UE, es decir que  $n = 1$ , no habiendo entonces réplicas, con lo que, recordando el Capítulo 1, no se puede estimar  $\sigma^2$ , la varianza del error, ya que la  $SC_{error} = 0$  y sus grados de libertad son cero. Esto siempre ocurre en diseños sin réplicas, lo

que ocasiona que no se puedan obtener razones  $F_c$  para contrastar las hipótesis. Existen algunos remedios para esta situación:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
$A$	1	364.5	364.5		
$B$	1	18.0	18.0		
$C$	1	264.5	264.5		
$AB$	1	112.5	112.5		
$AC$	1	200.0	200.0		
$BC$	1	24.5	24.5		
$ABC$	1	2.0	2.0		
Error	0	0.0			
Total	7	986.0			

Tabla 4.10 Tabla ANDEVA para el Ejemplo 4.4

1. Realizar una vez más el experimento para tener una réplica completa de éste; como se sabe esto ocasiona más trabajo, gasto de material, consume tiempo, y puede inducir variabilidad por no homogeneidad en la conducción física de experimento, haciendo necesario considerar bloques (uno por cada réplica completa de éste).
2. Asumiendo un principio de jerarquía, despreciar el efecto de interacción triple (la interacción más alta) y asignar la suma de cuadrados correspondiente a la suma de cuadrados del error; de este modo se puede construir el cociente de varianza  $F$ . Véase la Tabla 4.11. En este caso se dice que el efecto de interacción triple se confundió con el error. Con la información resumida en la Tabla 4.11, se concluye que el factor  $A$  es significativo con los efectos más importantes sobre producción total de aceite.
3. Tomar en cuenta el porcentaje de contribución a la suma de cuadrados, como se muestra en la Tabla 4.12. Esta alternativa realmente no tiene una fundamentación estadística, sólo permite evaluar en porcentaje la contribución a la explicación de la variación total; arbitrariamente se puede fijar un porcentaje de referencia para decidir qué factores tienen un efecto importante. Por ejemplo, si se fija el 25.0 como nivel de referencia, se puede observar que los factores  $A$  y  $C$  pueden tener un efecto importante en el proceso.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
$A$	1	364.5	364.5	182.25	0.0471
$B$	1	18.0	18.0	9.00	0.2048
$C$	1	264.5	264.5	132.25	0.0552
$AB$	1	112.5	112.5	56.25	0.0844
$AC$	1	200.0	200.0	100.00	0.0635
$BC$	1	24.5	24.5	12.25	0.1772
Error( $ABC$ )	1	2.0	2.0		
Total	7	986.0			

Tabla 4.11 Tabla ANDEVA para el Ejemplo 4.4, confundiendo ABC con el error

Fuente de variación	Suma de cuadrados	porcentaje	
$A$	364.5	36.97	*
$B$	18	1.82	
$C$	264.5	26.82	*
$AB$	112.5	11.41	
$AC$	200	20.28	
$BC$	24.5	2.48	
$ABC$	2	0.20	
total	986		

Tabla 4.12 Cálculo de porcentajes de la suma de cuadrados

4. Uso del gráfico probabilístico Normal o semi Normal: si los efectos, denotados en general como  $\hat{\theta}_i, i = 1, \dots, I$ , que son diferencias de medias de observaciones normales, indicaran que los efectos reales fueran no significativos, se comportarán de manera aproximada como una muestra proveniente de una distribución de probabilidad Normal con media cero.

### Gráfico probabilístico Normal y semi Normal

A cada elemento de una muestra proveniente de una distribución Normal, al ser ordenada de menor a mayor, se le puede asociar el cuantil teórico de la distribución Normal, formando una pareja de valores, esto es  $\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i-0.5}{n_e}\right), \hat{\theta}_{(i)}\right), i = 1, \dots, n_e$ , donde  $\hat{\theta}_{(i)}$ 's representan a los efectos estimados ordenados de menor a mayor y

$$\Phi_{nor}^{-1}(q)$$

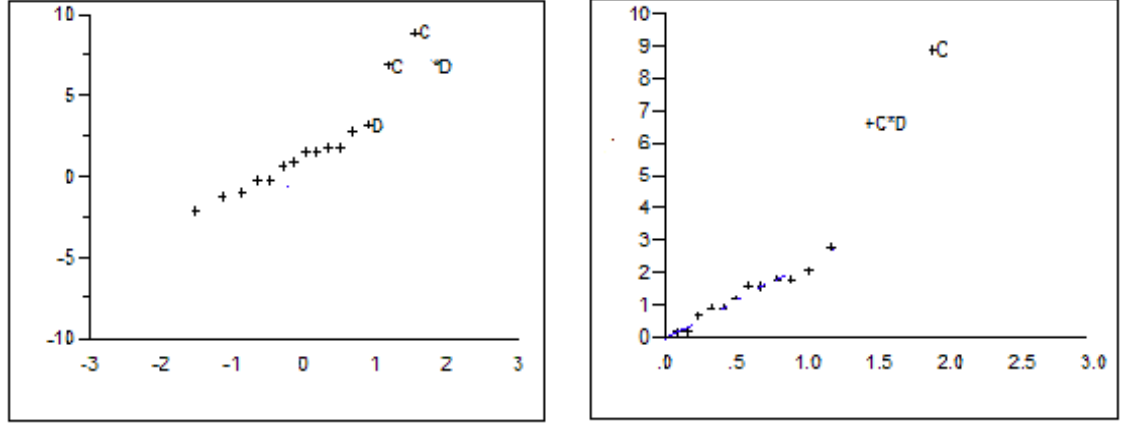


Fig. 4.4: A la izquierda Gráfico Normal de efectos. A la derecha Gráfico Semi-Normal de efectos

es la función que genera cuantiles de una  $Normal(0,1)$  como función de una proporción  $q$ . Estas parejas al graficarse sobre un sistema coordenado producen lo que se conoce como gráfico de probabilidad Normal. Si todos los efectos se ubicaran sobre una recta que pasa por el origen, no habría efectos declarados como significativos; aquellos que salieran de tal patrón rectilíneo serían declarados como significativos.

Si en lugar de ubicar  $\left(\Phi^{-1}\left(\frac{i-0.5}{n_e}\right), \hat{\theta}_{(i)}\right), i = 1, \dots, n_e$ , se ubican

$$\left(\Phi^{-1}\left(0.5 + 0.5 \frac{i-0.5}{n_e}\right), |\hat{\theta}_{(i)}|\right), i = 1, \dots, n_e$$

se produce lo que se conoce como gráfico probabilístico semi Normal (half Normal Plot); este último para la detección de efectos significativos es más eficiente que el gráfico probabilístico Normal. Hay que notar que el número de efectos estimados  $n_e$  es pequeño, hace difícil la interpretación de este tipo de gráficos para detectar significancia.

Al graficar los efectos de todos los factores y todas sus interacciones, se tiene en mente un principio general de parsimonia que dicta que se esperaría que sólo algunos efectos fueran los más importantes; los no importantes entonces se esperaría que se agruparan alrededor de una recta imaginaria que pase por la mayoría de los efectos.

A continuación se presentan en la Fig. 4.4 dos gráficos probabilísticos de efectos de un experimento; el primero es un gráfico Normal, el segundo un gráfico semi Normal. En el caso del gráfico Normal no se ve con claridad qué efectos son los más importantes; en el caso semi Normal es más claro.

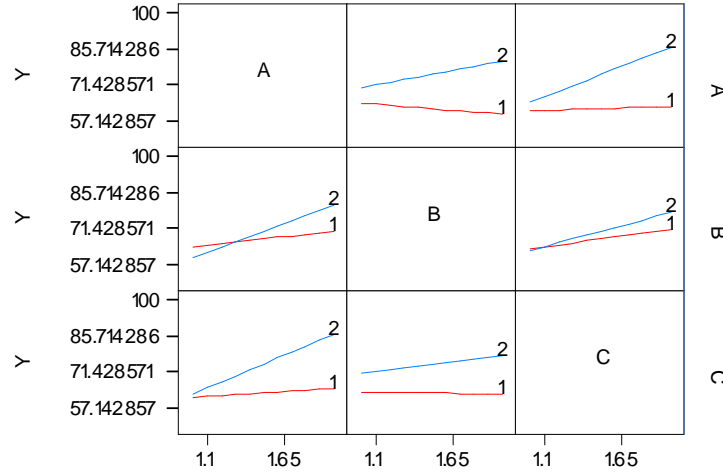


Fig. 4.5: Gráficas que ilustran los efectos de interacción dobles entre los factores A, B y C

En la Fig. 4.5 se pueden apreciar los efectos de interacción correspondientes, especialmente  $AB$  y  $AC$ .

### Método de Lenth

El método de Lenth (1989) y Wu y Hamada (2000) es un método formal de significancia de efectos para experimentos no replicados. Sean  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_I$  los efectos factoriales estimados de  $\theta_1, \dots, \theta_I$ , donde  $I$  denota el número de efectos a ser contrastados. En este método es importante la suposición de que los efectos tienen la misma desviación estándar, denotada por  $\tau$ . Lenth (1989) consideró un estimador robusto de la desviación estándar de  $\hat{\theta}_i$ , el cual fue llamado el pseudo error estándar o  $PSE$

$$PSE = 1.5 \times \text{mediana}_{\{|\hat{\theta}_i| < 2.5S_0\}} |\hat{\theta}_i|$$

donde la mediana es computada entre los  $|\hat{\theta}_i| < 2.5S_0$  con

$$S_0 = 1.5 \times \text{mediana } |\hat{\theta}_i|.$$

El error estándar inicial  $S_0$ , que usa al factor de escala 1.5, es un estimador consistente de la desviación estándar de  $\hat{\theta}$  cuando las  $\theta_i$ s son cero y la distribución subyacente del error es normal (es decir que  $S_0 \rightarrow \tau$  cuando  $n \rightarrow \infty$ ). Ahora, dado que si  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $\Pr[|Z| \geq 2.57] = 0.01$ ,  $\{|\hat{\theta}_i| < 2.5S_0\}$  trunca a cerca del

1% de los  $\hat{\theta}'_i$ s si todos los  $\theta_i$  fueran cero. Entonces  $PSE$  es todavía un estimador consistente. De manera más importante, el truncamiento intenta remover los  $\hat{\theta}'_i$ s asociados con efectos activos o no cero. Usando la mediana en combinación con truncamiento,  $PSE$  es entonces un estimador robusto de la desviación estándar de los  $\hat{\theta}'_i$ s. Aquí un estimador robusto significa que su operación no es sensible a los  $\hat{\theta}'_i$ s que estén asociados con efectos no cero o activos. Con ello, usando

$$t_{PSE,i} = \frac{\hat{\theta}_i}{PSE}$$

$\theta_i$  es declarado significativo si  $|t_{PSE,i}|$  excede un valor crítico de la distribución tabla dada por Lenth (1989) o por Wu y Hamada (2000, apéndice H). En tales tablas se presentan cuantiles atendiendo a si se usa un criterio de tasa de error individual o si se usa una tasa de error por experimento. Se recomienda, en general, el uso del primer criterio de error, dados los objetivos descriptivos de los experimentos factoriales. En el ejemplo anterior

$$S_0 = 1.5(7.5) = 11.25;$$

el valor de truncado es  $2.5 \times S_0 = 28.125$ , con lo que  $PSE = 1.5 \times 7.5 = 11.25$ , con  $\alpha = 0.05$  (tasa de error individual) se tiene un valor en tablas de 2.30, con lo que ningún efecto es declarado estadísticamente significativo. Ver la Fig. 4.6. El método de Lenth alternativamente se puede ver como una forma de estimar la pendiente de la recta de regresión a trazarse en un gráfico probabilístico Normal o seminormal; la recta resultante de la función cuantil de una Normal, es una cuya pendiente es la desviación estándar correspondiente.

Con objeto de ampliar el panorama del análisis en un diseño factorial  $2^3$ , se presenta un ejemplo con réplicas ( $n > 1$ ).

### Ejemplo 4.5

Debido a que en el mercado se produce un nuevo polímero, un ingeniero industrial desea probar si éste mejora la elasticidad del plástico que se obtiene en un proceso de extrusión. Él considera que la cantidad de aditivo y el concentrado de polímero son factores importantes. En resumen, la tabla de factores y niveles es:

Factores\Niveles	-1	1
A: Aditivo	40g	120g
B: Concentrado	30%	45%
C: Tipo de polímero	M1	M2

Cabe observar que el factor  $C$  es cualitativo, mientras los otros factores son cuantitativos; así, el ingeniero plantea llevar a cabo un diseño  $2^3$ , aleatoriza los 8

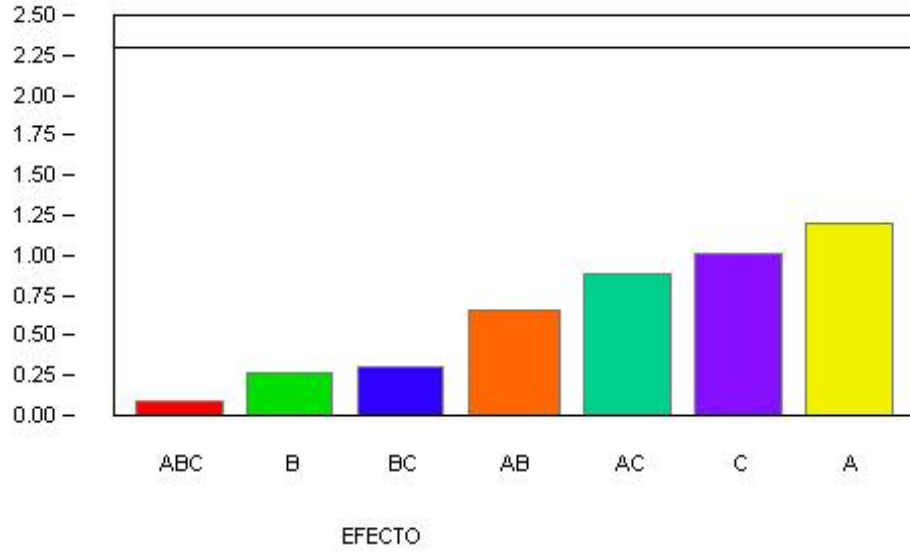


Fig. 4.6: Significancia de efectos por el método de Lenth, ejemplo 4.4

tratamientos y realiza el experimento con dos replicaciones por tratamiento. Al final evalúa la elasticidad del plástico. Los resultados se asientan en la Tabla 4.14. Los efectos de cada factor y sus interacciones se obtienen aplicando nuevamente las expresiones de la (4.12) a la (4.21).

$A$	$B$	$C$	$y_{ijl1}$	$y_{ijl2}$	$\bar{y}_{ijl\bullet}$	$S_{ijl\bullet}^2$
-1	-1	-1	66	62	64.0	8.0
1	-1	-1	68	63	65.5	12.5
-1	1	-1	88	80	84.0	32.0
1	1	-1	63	65	64.0	2.0
-1	-1	1	73	71	72.0	2.0
1	-1	1	37	42	39.5	12.5
-1	1	1	38	39	38.5	0.5
1	1	1	57	48	52.5	40.5

Tabla 4.14. Resultados del experimento del Ejemplo 4.5,  $\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet\bullet} = 60$ 

Estimación de los efectos de los factores  $A$ ,  $B$ , y  $C$  :

$\bar{y}_{1\bullet\bullet\bullet} = 64.63$	$\bar{y}_{\bullet 1\bullet\bullet} = 60.25$	$\bar{y}_{\bullet\bullet 1\bullet} = 69.38$
$\bar{y}_{2\bullet\bullet\bullet} = 55.38$	$\bar{y}_{\bullet 2\bullet\bullet} = 59.75$	$\bar{y}_{\bullet\bullet 2\bullet} = 50.63$
$\hat{\delta}_A = -9.25$	$\hat{\delta}_B = -0.50$	$\hat{\delta}_C = -18.75$

Los efectos de interacción entre los factores se estiman a continuación:

	<i>AB</i>			<i>AC</i>			<i>BC</i>	
	<i>B</i> <sub>1</sub>	<i>B</i> <sub>2</sub>		<i>C</i> <sub>1</sub>	<i>C</i> <sub>2</sub>		<i>C</i> <sub>1</sub>	<i>C</i> <sub>2</sub>
<i>A</i> <sub>1</sub>	68.00	61.25	<i>A</i> <sub>1</sub>	74.00	64.75	<i>B</i> <sub>1</sub>	64.75	55.75
<i>A</i> <sub>2</sub>	52.50	58.25	<i>A</i> <sub>2</sub>	55.25	46.00	<i>B</i> <sub>2</sub>	74.00	45.50

$\hat{\delta}_{AB} = [(\bar{y}_{22\bullet} - \bar{y}_{21\bullet}) - (\bar{y}_{12\bullet} - \bar{y}_{11\bullet})]/2 = [5.75 - (-6.75)]/2 = 6.25$
$\hat{\delta}_{AC} = [(\bar{y}_{2\bullet 2} - \bar{y}_{2\bullet 1}) - (\bar{y}_{1\bullet 2} - \bar{y}_{1\bullet 1})]/2 = [-18.75 - (-18.75)]/2 = 0.00$
$\hat{\delta}_{BC} = [(\bar{y}_{\bullet 22} - \bar{y}_{\bullet 21}) - (\bar{y}_{\bullet 12} - \bar{y}_{\bullet 11})]/2 = [9.25 - (-10.25)]/2 = 9.75$

Finalmente el efecto de interacción triple se estima por

	<i>ABC</i>	
	<i>BC</i> <sub>1</sub>	<i>BC</i> <sub>2</sub>
<i>A</i> <sub>1</sub>	$(\bar{y}_{121\bullet} - \bar{y}_{111\bullet}) = 20$	$(\bar{y}_{122\bullet} - \bar{y}_{112\bullet}) = -33.5$
<i>A</i> <sub>2</sub>	$(\bar{y}_{221\bullet} - \bar{y}_{211\bullet}) = -1.5$	$(\bar{y}_{222\bullet} - \bar{y}_{212\bullet}) = 13$
$\hat{\delta}_{ABC} = [(13 - (-33.5))/2 - (-1.5 - (-20))]/2 = 17$		

Los efectos en resumen son:

Efecto	Estimación		
<i>A</i>	$\hat{\delta}_A$	=	-9.25
<i>B</i>	$\hat{\delta}_B$	=	-0.50
<i>C</i>	$\hat{\delta}_C$	=	-18.75
<i>AB</i>	$\hat{\delta}_{AB}$	=	6.25
<i>AC</i>	$\hat{\delta}_{AC}$	=	0.00
<i>BC</i>	$\hat{\delta}_{BC}$	=	-9.75
<i>ABC</i>	$\hat{\delta}_{ABC}$	=	17.00

A partir de la última columna de la Tabla 4.14 se calcula el cuadrado medio del error, ver expresión 4.11. Es decir:

$$\hat{\sigma}^2 = CM_{error} = \frac{8 + 12.5 + \dots + 40.5}{8} = 13.75$$



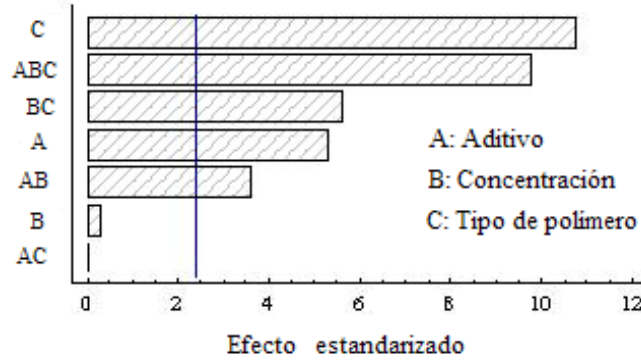


Fig. 4.7: Diagrama de Pareto que describe los efectos e interacciones significativos en el Ejemplo 4.5

Para observar la importancia de los efectos de los factores existen otros métodos gráficos. Por ejemplo, el diagrama de Pareto es una alternativa gráfica que complementa al análisis de varianza, como se puede observar en la Fig. 4.7. Cada barra en el diagrama representa el efecto estandarizado de cada factor, que se obtiene mediante la expresión:

$$\frac{abs(efecto)}{Q}, \text{ y } Q = \left( \sqrt{CM_{error} / (n \bullet 2^{k-2})} \right)$$

donde  $abs()$  denota el valor absoluto,  $n$  es el número de réplicas. Los efectos así estandarizados se ordenan de mayor a menor y se comparan con el valor  $t(gl_{error}, \alpha/2)$ : la línea punteada en la gráfica representa este valor. Para el ejemplo 4.5,  $Q = 1.85$  y  $t(8, 0.025) = 2.31$ . Así por ejemplo, para estimar el efecto estandarizado del factor  $C$  se tiene,  $18.75/1.85 = 10.14$ ; dado que este valor es mayor que 2.31, se concluye que el efecto  $C$  es significativo. Similarmente se obtienen los efectos estandarizados para el resto de los factores e interacciones. La cantidad  $Q$  se conoce como el error estándar del efecto de un factor. Una ventaja de estos cálculos es que a partir de ellos se pueden estimar los intervalos de confianza para los efectos de los factores, es decir:  $\hat{\delta} \mp t(gl_{error}, \alpha/2)Q$ .

Con la estimación de los efectos de los factores y de  $\sigma^2$ , la tabla ANDEVA correspondiente al Ejemplo 4.5 se muestra en la Tabla 4.15.

Los procedimientos aquí descritos se pueden generalizar para diseños factoriales en dos niveles y cualquier número de factores  $k \geq 1$  (diseño  $2^k$ ). La estimación de efectos es análoga a la presentada en secciones anteriores; no se

muestran en detalle los cálculos requeridos, pero se cree que serían fácilmente derivados por el interesado, computando promedios y diferencias adecuadas. Si de las tablas del ANDEVA se observan las expresiones para obtener las sumas de cuadrados correspondientes a los efectos en los diseños  $2^2$  y  $2^3$ , se verá que los efectos se elevan al cuadrado y se multiplican por  $n \bullet 2^k/4$ , esto es:

$$SC_{efecto} = \frac{n}{4} \bullet 2^k \bullet \hat{\delta}_{efecto}^2 \quad (4.22)$$

donde  $n$  es el número de réplicas. Sin embargo actualmente, con la ayuda de paquetes de cómputo estadístico, en general no es necesario preocuparse mucho por los cálculos de efectos si se entienden los supuestos del método y cómo interpretar los resultados estadísticos.

	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
$A$	1	$(\frac{2 \bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_A^2 = 342.25$	342.25	24.89	0.000
$B$	1	$(\frac{2 \bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_B^2 = 1.00$	1.00	0.07	0.794
$C$	1	$(\frac{2 \bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_C^2 = 1406.25$	1406.25	102.27	0.000
$AB$	1	$(\frac{2 \bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_{AB}^2 = 156.25$	156.25	11.36	0.010
$AC$	1	$(\frac{2 \bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_{AC}^2 = 0.00$	0.00	0.00	1.000
$BC$	1	$(\frac{2 \bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_{BC}^2 = 380.25$	380.25	27.65	0.000
$ABC$	1	$(\frac{2 \bullet 2^3}{4})\hat{\delta}_{ABC}^2 = 1156.00$	1156	84.07	0.000
Error	8	$SC_{error} = 110.00$	13.75		
Total	15	3552			

Tabla 4.15 Análisis de la varianza para el Ejemplo 4.5

## 4.5 Factorial general de dos factores

El objetivo en esta parte es obtener los estimadores de los efectos principales e interacción en un diseño con dos factores  $A$  y  $B$ , considerando que los factores  $A$  y  $B$  tienen  $a$  niveles y  $b$  niveles respectivamente. Con las ideas mostradas previamente, se puede notar que ahora se tiene  $ab$  combinaciones, lo que da lugar a tener  $ab$  tratamientos. Como en el caso de los factoriales  $2^k$ , supongamos que las respuestas  $y_{ijl}$  ante cada uno de los tratamientos son descritas adecuadamente por una distribución de probabilidad normal con media determinada principalmente por el tratamiento  $(i, j)$ , denotada por  $\mu_{ij}$ , y con varianza  $\sigma_{ij}^2$ , es decir  $y_{ijl} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)$ ,  $i = 1, \dots, a$ ;  $j = 1, \dots, b$ ;  $l = 1, \dots, n$ . Se supondrá además que  $\sigma_{ij}^2 =$

$\sigma^2$ ,  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2$ , con  $\sigma^2$  la varianza del error experimental, la llamada homogeneidad de varianzas. Note que suponer este modelo para las  $y_{ijl}$ , implica que habrá un manejo físico homogéneo en el experimento libre de efectos de ruido importantes. Derivado de las suposiciones anteriores, los efectos simples de los niveles del factor  $A$  son:

$$\delta_{A_i} = \mu_{i\bullet} - \mu, \quad i = 1, \dots, a$$

Análogamente para el factor  $B$  son:

$$\delta_{B_j} = \mu_{\bullet j} - \mu, \quad j = 1, \dots, b$$

Los efectos teóricos conjuntos del nivel  $i$  de  $A$  y del nivel  $j$  de  $B$  son:

$$\delta_{AB_{ij}} = \mu_{ij} - \mu, \quad i = 1, \dots, a; \quad j = 1, \dots, b$$

Hay que señalar que el efecto principal de un factor con más de dos niveles no es posible conceptualizarlo como se hizo en el caso de un factor con dos niveles.

#### 4.5.1 El análisis de varianza para dos factores

El planteamiento del apartado anterior da lugar a proponer las siguientes hipótesis para establecer si existe efecto de los factores sobre la variable de respuesta o si existe efecto de interacción. Con la finalidad de estudiar la presencia del efecto del factor  $A$  sobre la respuesta, las hipótesis estadísticas son:

$$H_{Ao} : \delta_{A_1} = \delta_{A_2} = \dots = \delta_{A_a}$$

$$H_{Aa} : \text{algún par es diferente al menos}$$

Si los datos no apoyan a la hipótesis nula se dice que existe efecto del factor  $A$ ; análogamente para el factor  $B$  se establece

$$H_{Bo} : \delta_{B_1} = \delta_{B_2} = \dots = \delta_{B_b}$$

$$H_{Ba} : \text{algún par es diferente al menos}$$

Finalmente para el efecto de interacción se tiene:

$$H_{Ao} : \delta_{A_1 B_1} = \delta_{A_1 B_2} = \dots = \delta_{A_a B_b}$$

$$H_{Aa} : \text{alguno es diferente a otro por lo menos}$$

El objetivo es contrastar las hipótesis anteriores. Observe que la discrepancia entre los valores observados  $y_{ijl}$  y el promedio  $\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$  se puede descomponer como:

$$(y_{ijl} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}) = (\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}) + (y_{ijl} - \bar{y}_{ij\bullet})$$

Además observe que  $(\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})$  se puede descomponer en

$$(\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}) = (\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}) + (\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}) + (\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} + \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})$$

Elevando al cuadrado esta expresión y efectuando la suma sobre cada uno de los índices, se puede demostrar que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{l=1}^n (y_{ijl} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 &= bn \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 + \\ &an \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 + n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (\bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} + \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 \\ &+ \sum_{i,j,l} (y_{ijl} - \bar{y}_{ij\bullet})^2 \end{aligned}$$

En la notación manejada anteriormente esta última expresión se reexpresa como

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{l=1}^n (y_{ijl} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2 &= bn \sum_{i=1}^a \hat{\delta}_{A_i}^2 + an \sum_{j=1}^b \hat{\delta}_{B_j}^2 + n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \hat{\delta}_{A_i B_j}^2 \quad (4.23) \\ &+ \sum_{i,j,l} (y_{ijl} - \bar{y}_{ij\bullet})^2 \end{aligned}$$

Donde el efecto de interacción estimado es:  $\hat{\delta}_{A_i B_j} = \bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} + \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$ . La ecuación (4.23) se resume por:

$$SC_{total} = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_{error} \quad (4.24)$$

Con la finalidad de evaluar la significancia de los factores cada una de las sumas de cuadrados correspondientes a la derecha de la ecuación (4.24), se divide por sus grados de libertad, el resultado de esta división da lugar a los cuadrados medios, finalmente el cuadrado medio de cada factor se divide con el cuadrado medio del error, cada uno de estos valores se compara con el valor de una distribución  $F$  considerando un nivel de significancia y los grados de libertad para el numerador

y el denominador de esa división. Estos resultados se resumen en la Tabla 4.16.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$
$A$	$(a - 1)$	$SC_A = bn \sum_{i=1}^a \hat{\delta}_{A_i}^2$	$\frac{SC_A}{a-1}$	$\frac{CM_A}{CM_{error}}$
$B$	$(b - 1)$	$SC_B = an \sum_{j=1}^b \hat{\delta}_{B_j}^2$	$\frac{SC_B}{b-1}$	$\frac{CM_B}{CM_{error}}$
$AB$	$(a - 1)(b - 1)$	$SC_{AB} = n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \hat{\delta}_{A_i B_j}^2$	$\frac{SC_{AB}}{(a-1)(b-1)}$	$\frac{CM_{AB}}{CM_{error}}$
Error	$ab(n - 1)$	$SC_{error} = \sum_{ijl} (y_{ijl} - \bar{y}_{ij\bullet})^2$	$\frac{SC_{error}}{ab(n-1)}$	
Total	$abn - 1$	$SC_{total} = \sum_{ijl} (y_{ijl} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2$		

Tabla 4.16 Resumen del ANDEVA para un factorial general de dos factores

#### Ejemplo 4.6

El teñido es muy importante en la industria textil y en la elaboración de pieles, ellas requieren de cierto tipo de tintes, que a la vez son fabricados por otras industrias químicas. Así, una empresa que fabrica pieles para asientos de automóvil, tiene interés en estudiar la consistencia del teñido en unas muestras de pieles; la evaluación del teñido se hace a nivel de laboratorio usando un equipo apropiado. Para ello se prueba un nuevo tinte y se desea compararlo con el existente, lo que se denominará como factor  $A$ ; también se decide usar como factor  $B$  diferentes contenidos del tinte. Los resultados obtenidos al realizar el experimento con dos replicaciones se muestran en la Tabla 4.17.

Se puede observar que se tienen dos factores de dos y tres niveles respectivamente y dos réplicas, así los índices son  $i = 1, 2$ ,  $j = 1, 2, 3$  y  $r = 1, 2$ . En la Tabla 4.18, se muestra la estimación de los efectos para los diferentes niveles de los factores  $A$ ,  $B$  e interacción, luego se aplican las fórmulas (4.23) y (4.24) para construir la tabla del análisis de la varianza, que se resume en la Tabla 4.19.

$A$	$B$	$y_{ij1}$	$y_{ij2}$	$\bar{y}_{ij\bullet}$	$S_{ij}^2$
-1	-1	5.2	5.4	5.4	0.080
1	-1	5.1	5.4	5.25	0.045
-1	0	12.3	12.1	12.2	0.020
1	0	12.1	11.9	12.0	0.020
-1	1	22.4	22.6	22.5	0.020
1	1	25.2	24.8	25.0	0.080
<hr/>					
$\bar{y}_{\bullet 1\bullet} = 5.33$					
$\bar{y}_{1\bullet\bullet} = 13.37$	$\bar{y}_{\bullet 2\bullet} = 12.10$				
$\bar{y}_{2\bullet\bullet} = 14.08$	$\bar{y}_{\bullet 3\bullet} = 23.75$	$\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet} = 13.73$			

Tabla 4.17. Resultados del experimento en el Ejemplo 4.6

Entonces las sumas de cuadrados considerando los resultados en las Tabla 4.18a y Tabla 4.18b, son:

$$\begin{aligned}
 SC_A &= 3(2)[(-0.358)^2 + (0.358)^2] = 6(0.257) = 1.54 \\
 SC_B &= 2(2)[(-8.4)^2 + (-1.625)^2 + (10.025)^2] = 4(173.70) = 694.80 \\
 SC_{AB} &= (2)[(0.43)^2 + \dots + (0.895)^2] = 2(2.385) = 4.77 \\
 SC_{error} &= (0.08 + 0.02 + 0.02 + 0.045 + 0.02 + 0.08)/6 = 0.27/6 = 0.04.
 \end{aligned}$$

$\hat{\delta}_{A_1} = 13.37 - 13.725 = -0.358$
$\hat{\delta}_{A_2} = 14.04 - 13.725 = 0.358$
<hr/>
$\hat{\delta}_{B_1} = 5.325 - 13.725 = -8.4$
$\hat{\delta}_{B_2} = 12.1 - 13.725 = -1.625$
$\hat{\delta}_{B_3} = 23.75 - 13.725 = 10.025$

Tabla 4.18a Estimación de los efectos en los niveles de los factores del Ejemplo 4.6

$\hat{\delta}_{A_1 B_1} = 5.4 - 13.37 - 5.325 + 13.725 = 0.43$
$\hat{\delta}_{A_1 B_2} = 12.2 - 13.37 - 12.1 + 13.725 = 0.46$
$\hat{\delta}_{A_1 B_3} = 22.5 - 13.37 - 23.75 + 13.725 = -0.90$
$\hat{\delta}_{A_2 B_1} = 5.25 - 14.08 - 5.325 + 13.725 = -0.43$
$\hat{\delta}_{A_2 B_2} = 12.0 - 14.08 - 12.1 + 13.725 = -0.46$
$\hat{\delta}_{A_2 B_3} = 25.0 - 14.08 - 23.75 + 13.725 = 0.90$

Tabla 4.18b Estimación de los efectos en los niveles de los factores del Ejemplo 4.6

Finalmente la tabla del ANDEVA se muestra en la Tabla 4.19.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
$A$	1	1.54	1.54	34.89	0.0010
$B$	2	694.80	347.40	7865.72	0.0000
$AB$	2	4.77	2.39	54.02	0.0001
Error	6	0.27	0.04		
Total	11	701.38			

Tabla 4.19 Tabla ANDEVA del Ejemplo 4.6

Con estos resultados se contrastan las siguientes hipótesis estadísticas:

$$\begin{aligned} H_o: \delta_{A_1} &= \delta_{A_2} \text{ no hay efecto del factor } A. \\ H_1: \delta_{A_1} &\neq \delta_{A_2} \text{ hay efecto del factor } A. \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} H_o: \delta_{B_1} &= \delta_{B_2} = \delta_{B_3} \text{ no hay efecto del factor } B. \\ H_1: \delta_{B_i} &\neq \delta_{B_j} \text{ para algún } i \text{ y } j, \text{ hay efecto del factor } B. \end{aligned} \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} H_o: \delta_{A_i B_j} &\text{ todos iguales.} \\ H_1: &\text{ al menos una } \delta_{A_i B_j} \text{ es diferente de otra.} \end{aligned} \quad (4.27)$$

Con la información proporcionada en la Tabla 4.19, se puede concluir que existen efectos de los factores  $A$  y  $B$ , además existe efecto de interacción. La gráfica de la Fig. 4.7 auxilia en la interpretación de esta interacción dado que es relevante en las conclusiones del ejemplo.

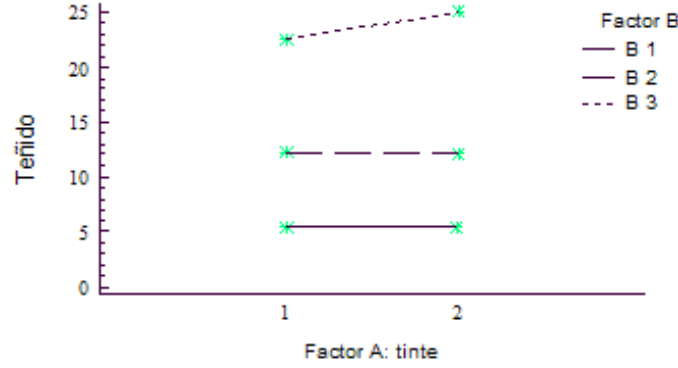
#### 4.5.2 Modelo estadístico

El modelo estadístico para un diseño factorial de dos factores, sin restricciones en la aleatorización de tratamientos, es

$$\begin{aligned} y_{ijl} &= \mu_{ij} + \varepsilon_{ijl} \\ \varepsilon_{ijk} &\sim N(0, \sigma^2), \text{ independientes} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$i = 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, b \quad l = 1, 2, \dots, n$$

Observe que  $\varepsilon_{ijl} = y_{ijl} - \mu_{ij}$ , indica la discrepancia entre el valor observado y el promedio en el tratamiento  $ij$  para la  $l$ -ésima replicación. Con la finalidad de

Fig. 4.8: Efecto de interacción entre  $A$  y  $B$ 

obtener los estimadores de los  $\mu_{ij}$  parámetros en el modelo se utiliza el principio de mínimos cuadrados, el cual consiste en

$$\min_{\mu_{ij}} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{l=1}^n \varepsilon_{ijl}^2 = \max_{\mu_{ij}} \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{l=1}^n (y_{ijl} - \mu_{ij})^2$$

Los estimadores de  $\mu_{ij}$  son resultado de optimizar esta expresión; así  $\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$  es el estimador de la media general  $\mu$ ,  $\bar{y}_{i\bullet\bullet}$  estima a la media marginal en el nivel  $i$ -ésimo del factor  $A$   $\mu_{i\bullet}$ , y análogamente  $\bar{y}_{\bullet j\bullet}$  estima a la media marginal en el nivel  $j$ -ésimo del factor  $B$   $\mu_{\bullet j}$ .

El término  $\mu_{ij}$  en el modelo (4.28) se puede modelar de manera aditiva, es decir, sin considerar el efecto de interacción  $AB$ , esto es:

$$\mu_{ij} = \mu + \delta_{A_i} + \delta_{B_j}$$

donde  $\delta_i$  es el efecto  $i$ -ésimo nivel del factor  $A$ , éste se define por  $\delta_{A_i} = \mu_{i\bullet} - \mu$ . Análogamente el efecto  $j$ -ésimo del factor  $B$  es  $\delta_{B_j} = \mu_{\bullet j} - \mu$ . Así  $\mu_{ij}$  se puede reescribir como:

$$\mu_{ij} = \mu + (\mu_{i\bullet} - \mu) + (\mu_{\bullet j} - \mu)$$

el efecto de la combinación  $ij$  es  $\omega_{ij} = \mu_{ij} - \mu$ , esto es:

$$(\mu_{ij} - \mu) = (\mu_{i\bullet} - \mu) + (\mu_{\bullet j} - \mu)$$

El efecto conjunto del tratamiento  $ij$  ( $i$  de  $A$  y  $j$  de  $B$ ) se denota por  $\delta_{A_i B_j}$ ; éste es

$$\delta_{A_i B_j} = (\mu_{ij} - \mu) - [(\mu_{i\bullet} - \mu) + (\mu_{\bullet j} - \mu)] = \mu_{ij} - \mu_{i\bullet} - \mu_{\bullet j} + \mu$$



El modelo (4.28), se puede expresar por

$$y_{ijl} = \mu + \delta_{A_i} + \delta_{\beta_j} + \delta_{A_i B_j} + \varepsilon_{ijl}, \quad (4.29)$$

$$\varepsilon_{ijl} \sim N(0, \sigma^2), \text{ independientes}, \quad (4.30)$$

$$i = 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, b \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

## 4.6 Ejercicios

**Ejercicio 4.1** Por medio de un grafismo esboce lo sucedido en el ejemplo que ilustró la comparación del OFAT con un diseño factorial, al inicio de este capítulo.

**Ejercicio 4.2** En el laboratorio de pruebas de una empresa petroquímica, un grupo de ingenieros aplicó un diseño de experimentos factorial para evaluar el rendimiento ( $y$ ) de gasolina en un automóvil. Ellos seleccionaron dos factores, el factor  $A$ : tipo de gasolina con los niveles magna y premium, y el factor  $B$ : la marca del aditivo; los niveles son marca 1 y marca 2. El experimento se realizó con tres UE en cada tratamiento. Los datos son:

	marca 1	marca 2
magna	16.5	12.8
	15.3	12.2
	15.8	13.1
premium	14.7	11.6
	14.3	11.4
	14.5	12.0

1. Estime el efecto de los factores  $A$  y  $B$ .
2. Estime los efectos de interacción de los factores  $AB$ .
3. Represente mediante una gráfica los efectos computados, ¿qué observa?
4. Escriba la tabla del ANDEVA, realice su planteamiento estadístico, ¿cuáles son sus conclusiones?
5. Con auxilio del paquete de cómputo estadístico realice el trabajo anterior, con ayuda de las gráficas complete el análisis estadístico.

**Ejercicio 4.3** En la tabla de abajo se presenta el promedio de los resultados al realizar un experimento con tres replicaciones. Grafique la interacción entre el factor  $A$ : concentración de bicarbonato de sodio (0 ppv, 20 ppv) y el factor  $B$ : tiempo de remojo (8 hr, 12 hr). Se mide el tiempo de cocción de una variedad de frijol considerando los factores  $A$  y  $B$ .

	$B_1$	$B_2$	$\bar{y}_{i\bullet\bullet}$
$A_1$	$\bar{y}_{11\bullet} = 74$	$\bar{y}_{12\bullet} = 59$	
$A_2$	$\bar{y}_{21\bullet} = 68$	$\bar{y}_{22\bullet} = 55$	
$\bar{y}_{\bullet j\bullet}$			

1. A partir de la gráfica, ¿parece significativa la interacción?
2. Estime los efectos de los factores  $A$ ,  $B$  y la interacción  $AB$ .
3. En la tabla del ANDEVA, ¿qué hipótesis se probaría?

**Ejercicio 4.4** En una investigación para disminuir el efecto de la contaminación se elaboró un combustible sintético; los ingenieros del proceso realizaron un experimento controlando tres factores en dos niveles, factor  $A$ : extracto de una semilla (5% y 10%), factor  $B$ : concentración de etileno (15% y 25%), y factor  $C$ : la temperatura de destilación. La emisión es la variable respuesta. El esquema experimental es un  $2^3$  en tres réplicas, y los resultados se muestran a continuación.

Trat	$A$	$B$	$C$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
1	-1	-1	-1	29	24	30
2	1	-1	-1	20	21	24
3	-1	1	-1	22	25	20
4	1	1	-1	16	19	18
5	-1	-1	1	43	45	40
6	1	-1	1	51	49	52
7	-1	1	1	39	40	37
8	1	1	1	49	48	50

1. Suponga que a usted le encomiendan realizar este experimento, indique los detalles de cómo lo realizaría.
2. Haga la gráfica del efecto de interacción de  $AB$ . Explique paso a paso cómo la elabora.
3. Estime los efectos de los tres factores y sus respectivas interacciones para la primera realización.

4. Elabore un diagrama de Pareto para indicar la significancia de los factores.
5. Grafique en gráficos Normal y semi Normal los efectos de los factores e interacciones e interprételo.
6. Realice el análisis gráfico de los residuales y obtenga sus conclusiones.
7. Construya la tabla del ANDEVA para la primera realización.
8. Obtenga sus conclusiones a partir de sus análisis.

**Ejercicio 4.5** La producción de una reacción química se realiza mediante la función de las siguientes tres factores, temperatura ( $T$ ), velocidad de la mezcladora ( $V$ ), y formulación ( $F$ ).

Factores\Niveles	-1	1
Temperatura	70°C	85°C
Velocidad	60rpm	70rpm
Formulación	A	B

Se tienen los siguientes resultados (una sola replicación)

Trat	$T$	$V$	$F$	$y$
1	-1	-1	-1	96.0
2	1	-1	-1	91.2
3	-1	1	-1	97.3
4	1	1	-1	94.0
5	-1	-1	1	91.4
6	1	-1	1	89.7
7	-1	1	1	86.0
8	1	1	1	84.2

1. Estime los efectos de los factores  $T$ ,  $V$ ,  $F$  y las de interacción. Indique cuáles efectos son significativos, previo planteamiento estadístico.
2. Realice un análisis gráfico.
3. Aplique la prueba de Lenth.
4. En una segunda realización del experimento se tiene la siguiente información: 95.3, 91.0, 95.8, 95.0, 91.0, 88.4, 85.0, 88.5. Junte estos resultados con los anteriores y haga el trabajo planteado en los incisos 1 y 2 verificando los supuestos para hacer el análisis.

**Ejercicio 4.6** En un experimento para mejorar el rendimiento de una variedad de cacahuete se estudiaron cuatro factores, cada uno con dos niveles y una sola realización. Los factores del diseño son: tiempo ( $A$ ), concentración ( $B$ ), presión ( $C$ ), y temperatura ( $D$ ).

Factores\Niveles	-1	1
$A$	$15min$	$25min$
$B$	10%	15%
$C$	$130u$	$150u$
$D$	$65^{\circ}C$	$80^{\circ}C$

1. Use el gráfico de probabilidad Normal o semi Normal para indicar qué efectos pueden dar evidencia de ser significativos.
2. Haga la prueba de Lenth.
3. Complete el análisis estadístico interpretando sus resultados.

Los datos que se obtuvieron al correr el experimento son:

Trat	$A$	$B$	$C$	$D$	$y$
1	-1	-1	-1	-1	12
2	1	-1	-1	-1	18
3	-1	1	-1	-1	13
4	1	1	-1	-1	16
5	-1	-1	1	-1	17
6	1	-1	1	-1	15
7	-1	1	1	-1	20
8	1	1	1	-1	15
9	-1	-1	-1	1	10
10	1	-1	-1	1	25
11	-1	1	-1	1	13
12	1	1	-1	1	24
13	-1	-1	1	1	19
14	1	-1	1	1	21
15	-1	1	1	1	13
16	1	1	1	1	14

**Ejercicio 4.7** A continuación se describe uno de los ejemplos que Lenth utilizó para ilustrar su método. Un ingeniero desea estudiar la producción de una sustancia química, los factores que él considera que afectan esta respuesta son: la fuerza del ácido ( $A$ ), el tiempo ( $B$ ), la cantidad de ácido ( $C$ ) y la temperatura

( $D$ ), es decir, es un diseño  $2^4$  sin réplicas. Los resultados experimentales presentados en el orden estándar son: 0.08, 0.04, 0.53, 0.43, 0.31, 0.09, 0.12, 0.36, 0.79, 0.68, 0.73, 0.08, 0.77, 0.38, 0.49, 0.23.

1. Estime los efectos y el pseudo error estándar ( $PSE$ ).
2. Pruebe la significancia de los efectos. Dé sus conclusiones.
3. Grafique en un diagrama de barras vertical los efectos de los factores e interacciones. Trace en esa gráfica las líneas  $\mp t(gl, \alpha/2)PSE$ , las cuales son paralelas al eje horizontal.

**Ejercicio 4.8** La finalidad de este ejemplo es repasar la estrategia experimental de un diseño  $2^k$ , así como su análisis e interpretación. Para ello usamos una aplicación refrescante.

Cuatro factores tienen influencia en el sabor de una bebida, estos son: el tipo de endulzante ( $A$ ), la razón de agua a jarabe ( $B$ ), el nivel de carbonatación ( $C$ ), y la temperatura ( $D$ ). El experimento se realizó considerando dos niveles de cada factor, la bebida resultante de cada combinación de los niveles de los factores se dio a probar a 20 personas, a cada prueba se le asignó un valor en la escala de 1 a 10. Se reporta la calificación total como variable de respuesta, el objetivo final del experimento es encontrar un valor máximo. El experimento se realizó dos veces. Los resultados son:

Trat	$A$	$B$	$C$	$D$	$y_1$	$y_2$
1	-1	-1	-1	-1	190	193
2	1	-1	-1	-1	174	178
3	-1	1	-1	-1	181	185
4	1	1	-1	-1	183	180
5	-1	-1	1	-1	177	178
6	1	-1	1	-1	181	180
7	-1	1	1	-1	188	182
8	1	1	1	-1	173	170
9	-1	-1	-1	1	198	195
10	1	-1	-1	1	172	176
11	-1	1	-1	1	187	183
12	1	1	-1	1	185	186
13	-1	-1	1	1	199	190
14	1	-1	1	1	179	175
15	-1	1	1	1	187	184
16	1	1	1	1	180	180

1. Estime los parámetros del modelo y sus interacciones, identifique los factores que son significativos.
2. Haga el análisis gráfico del efecto de los factores y las interacciones.
3. Elimine los efectos que no son significativos, haga el análisis de varianza de estos datos experimentales y obtenga sus conclusiones.
4. Comente las gráficas de residuales y dé sus observaciones.
5. Considere que únicamente se pueden realizar 8 tratamientos por día, ¿cómo realizaría el experimento? Haga el análisis considerando este hecho.

**Ejercicio 4.9** Operación evolutiva (EVOP), una estrategia de mejora de un proceso mediante experimentación secuencial, tiene dos metas principales: 1. Realizar experimentos en procesos industriales que están en operación. 2. Escalar a nivel planta, mediante experimentación, los resultados (parámetros del proceso) obtenidos en el laboratorio. En esta estrategia (ver por ejemplo Box y Draper, 1969) originalmente se propuso una hoja de cálculo que permitía ir evaluando el efecto de los factores, su interacción y la curvatura en un diseño  $2^2$  o  $2^3$  a lo largo de la secuencia experimental. El procedimiento de EVOP consiste, identificando dos o tres factores relevantes del proceso, en llevar a cabo experimentos secuenciales de bloques completos con  $2^2$  o  $2^3$  tratamientos más una realización al centro (la parte factorial representando alternativas de combinaciones de los factores relevantes del proceso en donde presumiblemente no hay posibilidades de producir fuera de especificaciones; además generalmente el centro del diseño representa la condición actual de operación del proceso). Idealmente se corre el proceso en tantos bloques como sea necesario mientras no se reporte significancia de alguno de los efectos. A cada bloque así corrido se le da el nombre de ciclo en la literatura de EVOP. Los resultados alcanzados permiten mejorar gradualmente el proceso.

Los conceptos aprendidos en este capítulo se pueden aplicar para obtener los resultados que se generan en la hoja de cálculo presentada por Box y Draper, pero sin usarla. Para ello siga el siguiente algoritmo:

1. Estime los efectos principales y de interacción en el primer ciclo.
2. Estime el efecto de curvatura y su suma de cuadrados para el análisis. Aplique las siguientes fórmulas:

$$SC_{curvatura} = \frac{N n_o \hat{\delta}_T^2}{N + n_o}$$

donde  $\hat{\delta}_T = \bar{y}_{trat} - \bar{y}_o$ , cambio en el efecto de la media.  $N = r2^k$  ( $r$  réplicas,  $k = 2$ , o  $3$ ) y  $n_o =$  puntos en el centro del diseño.

3. Cada uno de los siguientes ciclos se va incorporando al análisis como bloque y se repiten los pasos 1 y 2.
4. En cada ciclo se determina la significancia de cada efecto, de cada factor, de su interacción y de posible curvatura. La secuencia de ciclos se puede parar cuando el efecto de un factor o de las interacciones es significativa en uno o varios de éstos ( $r \geq 2$ ).
5. Si cambian las condiciones del proceso, se puede seguir investigando sobre el desarrollo de éste. Para ello habrá que incorporar un nuevo conjunto de condiciones experimentales (y así nuevos ciclos).

Se aplicó el algoritmo anterior en el siguiente ejemplo. Se tiene un proceso funcionando a una temperatura de  $150^\circ C$ , con un tiempo de proceso de 30 minutos (condición al centro en este ejemplo). Se aplica un diseño  $2^2$  (alternativas conservadoras de operación), con el propósito de intentar mejorar las condiciones de operación actual. Se mide como variable de respuesta el rendimiento del equipo, el objetivo es incrementarlo.

	Niveles	-1	0	1
Factores				
A : $X_1$ : Temperatura ( $^\circ C$ )		145	150	155
B : $X_2$ : tiempo (min)		28	30	32

ciclo \ condiciones	(1) <sup>#</sup>	(2) <sup>#</sup>	(3) <sup>#</sup>	(4) <sup>#</sup>	(5) <sup>*</sup>
1	72.3	73.6	71.4	74.5	73.1
2	70.1	74.4	72.5	75.4	71.2

<sup>#</sup> tratamientos  $2^2$  en el orden estándar propuesto y

<sup>\*</sup> valor en el centro

Con estos datos realice lo siguiente:

1. Estime los efectos de los factores y su interacción en cada ciclo, e interprete los resultados.
2. En cada ciclo elabore la tabla del ANDEVA.
3. ¿Cómo interpreta que el cambio en el efecto de la media sea significativo?
4. En función de este procedimiento (EVOP), ¿qué puede concluir?

5. A partir de sus resultados, ¿se nota un cambio en un efecto? ¿Cuál? ¿Ese puede ser el motivo para cambiar a otro grupo de ciclos?
6. Bosqueje una gráfica que ilustre intuitivamente el proceso del EVOP.

**Ejercicio 4.10** Con el objeto de mejorar la resistencia de unas bolsas de celofán, en un proceso se consideran dos factores, a saber: temperatura (alta, moderada, baja) y tiempo de calentamiento (10 y 20 minutos). La variable de respuesta es la resistencia. A continuación se presenta la tabla de ANDEVA para que conteste las siguientes preguntas:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
$A:tem$	2	3843			
$B:tiem$	1		504		
$AB$		651			
Error	6	540			
Total	11				

1. Complete la tabla.
2. Escriba las hipótesis nulas que se deben probar.
3. ¿Cuáles hipótesis nulas se rechazan?
4. Bosqueje la gráfica que describa el efecto de interacción según sus resultados.
5. Si el diseño es balanceado, diga cuál es el valor de la desviación estándar  $S$ .
6. Si  $\bar{y}_{2\bullet\bullet} = 10$ , dé un intervalo de confianza del 95% para  $\mu_{2\bullet\bullet}$ .
7. Entre los valores de  $n_{\bullet 1\bullet}$ ,  $n_{2\bullet\bullet}$ , y  $n_{\bullet\bullet\bullet}$ , ¿cuál es más grande?

**Ejercicio 4.11** Dado un diseño  $2 \times 4$  y con una tabla del ANDEVA que reporta la suma de cuadrados siguiente:

$$SC_{total} = 100, SC_A + SC_B + SC_{AB} = 50,$$

$$SC_A = 25, SC_B = 10.$$

- 1.- ¿Cuál es la  $SC_{error}$ ?
- 2.- ¿Cuál es la  $SC_{A \times B}$ ?
- 3.- ¿Cuáles son los grados de libertad para  $AB$ ?
- 4.- ¿Cuál es el cuadrado medio de  $AB$ ?



**Ejercicio 4.12** En un estudio realizado por un grupo de estudiantes para mejorar la consistencia en unas galletas, éstos realizaron el experimento controlando dos factores en dos niveles, el factor  $A$ : material del molde (aluminio, vidrio), factor  $B$ : método de batido (batidora, a mano usando pala) y un tercer factor con tres niveles,  $C$ : la marca de harina (comercial, propia, nutri). Cada una de las doce formulaciones fue evaluada por tres jueces con una escala de 0 a 70. El esquema experimental y los resultados se muestran a continuación.

Trat	$A$	$B$	$C$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
1	-1	-1	-1	60	55	58
2	1	-1	-1	57	46	54
3	-1	1	-1	53	34	50
4	1	1	-1	51	28	47
5	-1	-1	0	65	70	64
6	1	-1	0	61	58	59
7	-1	1	0	57	46	54
8	1	1	0	54	37	51
9	-1	-1	1	58	49	56
10	1	-1	1	56	43	53
11	-1	1	1	53	34	50
12	1	1	1	51	28	47

1. Suponga que a usted le encomiendan realizar este experimento, indique los detalles de cómo lo realizaría.
2. Haga las gráficas de los efectos para cada factor y las de interacción.
3. Calcule la tabla ANDEVA.
4. Estime la desviación estándar en cada tratamiento. De manera intuitiva indique si algún factor tiene efecto de dispersión (efecto sobre desviaciones estándar).

**Ejercicio 4.13** Los siguientes datos representan los resultados al realizar un experimento con 3 replicaciones en un proceso químico. En éste se desea obtener un nuevo fertilizante, el cual se usará para mejorar el rendimiento en la producción de un fruto. El factor  $A$  es el método de fabricación (estándar, nuevo), el factor  $B$  concentración de un agente químico (10%, 20%, 30%).

Factores	$b_1$	$b_2$	$b_3$	
$a_1$	$\bar{y}_{11\bullet} = 16$	$\bar{y}_{12\bullet} = 11$	$\bar{y}_{13\bullet} = 16$	$\bar{y}_{1\bullet\bullet} = 14.3$
$a_2$	$\bar{y}_{21\bullet} = 4$	$\bar{y}_{22\bullet} = 9$	$\bar{y}_{23\bullet} = 14$	$\bar{y}_{2\bullet\bullet} = 9$
	$\bar{y}_{\bullet 1\bullet} = 10$	$\bar{y}_{\bullet 2\bullet} = 10$	$\bar{y}_{\bullet 3\bullet} = 10$	$\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet} = 10$

Plantee sus hipótesis y verifíquelas. Haga la gráfica para ilustrar el efecto de interacción entre los factores  $A$  y  $B$ .

**Ejercicio 4.14** Un pigmento es disuelto en un líquido mediante un dispositivo de rodillos. La efectividad de la molienda es evaluada pasando el lodo a través de un filtro para un periodo fijo de tiempo, se mide la presión de la gota que pasó por el filtro. El experimento consiste en un factorial  $4 \times 3$ .  $A$  la velocidad (rpm) y  $B$  el volumen del líquido (l) en el dispositivo son los factores del proceso. Los niveles de los factores y la presión se describen a continuación:

Trat	$A$	$B$	$y_{ij}$
1	15	90	16.5
2	25	90	11.1
3	35	90	8.4
4	45	90	5.6
5	15	110	20.3
6	25	110	16.3
7	35	110	11.5
8	45	110	8.8
9	15	130	12.9
10	25	130	11.0
11	35	130	7.9
12	45	130	6.1

1. Haga un gráfico para describir los datos en cada factor, diga lo que observa.
2. Plantee las hipótesis de interés para el proceso, construya la tabla del AN-DEVA y pruebe las hipótesis.
3. Obtenga sus conclusiones a partir de sus resultados.

**Ejercicio 4.15** Considere el ejercicio 7.7, haga el análisis estadístico como si fuera un diseño factorial  $2^5$ . Interprete los diagramas de Pareto y normal para los efectos de los factores e interacciones.

**Ejercicio 4.16** Se plantea un programa para evaluar la calidad en tubos de fibra de vidrio. Para ejecutar el programa se llevó a cabo un experimento. El programa requiere de 16 tubos, la mitad fueron manufacturados en la planta A y la otra mitad en la planta B. Cada tubo se fabricó bajo dos condiciones de operación y en dos temperaturas. Las condiciones que dan lugar al esquema experimental se describen en la siguiente tabla.

Condiciones				Condiciones			
Trat	Planta	de operación	Temp.	Trat	Planta	de operación	Temp.
1	2	Normal	175	9	1	Normal	175
2	2	Normal	150	10	1	Severa	150
3	2	Severa	150	11	1	Normal	150
4	1	Severa	175	12	2	Severa	175
5	2	Normal	175	13	1	Severa	175
6	2	Normal	150	14	1	Severa	150
7	1	Normal	150	15	2	Severa	150
8	2	Severa	175	16	1	Normal	175

1. Proponga diferentes estrategias para realizar el experimento.
2. En función de su planteamiento, identifique cuál de los siguientes conceptos estadísticos está incluido en el programa de prueba:
  1. Factores
  2. Niveles
  3. Bloque
  4. UE
  5. Estructura de diseño
  6. Mediciones repetidas
  7. Tratamientos
  8. Covariables
  9. Respuesta
  10. Estructura de tratamiento



## Capítulo 5

# Estructura factorial fraccionada

*Consultar a un estadístico después de que un experimento ha sido terminado, en general puede no ser más que pedirle un examen post mortem. Él puede quizás decir de qué murió el experimento.*

*Ronald A. Fisher*

### 5.1 Conceptos básicos

En muchas situaciones industriales o de investigación puede ocurrir que una gran cantidad de factores estén presentes para explicar el proceso; es importante en una primera aproximación, determinar cuáles de los varios factores son realmente los más relevantes en su efecto sobre la variable respuesta bajo estudio. En un experimento con muchos factores, el problema del gasto de recursos económicos y tiempo impone una serie de preguntas; entre ellas, se pueden citar las siguientes:

¿Cómo elucidar qué factores y cuáles de sus interacciones son los más importantes? ¿Cómo realizar lo anterior con un costo y manejo experimental eficientes?

La idea estadística es aplicar sólo una parte o fracción de todos los tratamientos, de tal manera que la fracción seleccionada genere la suficiente información para estimar los efectos de mayor interés para el experimentador. Los factoriales  $2^k$  fraccionados constituyen una alternativa eficiente en estas situaciones.

En este capítulo se presentarán diseños factoriales fraccionados bajo el criterio de reducir el tamaño del experimento.

## 5.2 Factorial $2^3$ fraccionado

### Ejemplo 5.1

En una empresa existe la necesidad de mejorar el tiempo de filtrado de aire, dado que el sistema actual ocasiona algunos problemas en el rendimiento del proceso y aumenta los costos de operación. Con la ayuda del diagrama de causa efecto que describe el sistema de filtrado, el ingeniero del proceso selecciona 8 factores que él considera pueden ser importantes para reducir el tiempo de filtrado. Se considera que en este estudio inicial cada factor tiene dos niveles, de esta manera el número de tratamientos que se requieren para realizar este experimento son  $2^8 = 256$ . Tal situación resulta poco operativa, por lo que se plantea la necesidad de reducir el número de tratamientos para llevar a cabo el experimento.

El caso que se estudiará en el presente capítulo es el de los diseños factoriales con dos niveles, esto es, un diseño en donde todos los factores de interés tengan dos niveles cada uno. Primero se presentarán las ideas esenciales para fraccionar un experimento, es decir, un procedimiento para seleccionar tratamientos, de tal manera que permita estimar los efectos de mayor interés para el experimentador pero con un experimento más pequeño. En este capítulo utilizaremos primordialmente la codificación de los niveles  $(-1, 1)$  de los factores en un  $2^k$ , presentada en el capítulo anterior, para identificar y seleccionar una fracción de un factorial  $2^k$ .

Enunciando un principio de jerarquía en los fenómenos estudiados, se esperaría que las interacciones de orden superior tuvieran, de manera relativa, un menor efecto sobre la respuesta que el efecto de interacciones de orden menor, o que el efecto principal de cada factor. Asumiendo este principio de jerarquía en el modelaje, por ejemplo, en un diseño factorial  $2^3$ , se podría pensar a priori que el efecto de la interacción  $ABC$  es de menor importancia que los efectos de  $A$ , de  $B$  y de  $C$  y de sus interacciones dobles, y con ello manejar a la interacción  $ABC$  como nula en la región experimental de interés.

Operativamente, manejar así la interacción  $ABC$  implica que se esté dispuesto a no estimar su efecto con los datos generados por la fracción seleccionada. Aquí surge la pregunta de cómo seleccionar esa fracción de tal manera que cumpla con lo requerido.

Trat	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	$y_{ijl}$
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	$y_{111}$
2	1	-1	-1	-1	-1	1	1	$y_{211}$
3	-1	1	-1	-1	1	-1	1	$y_{121}$
4	1	1	-1	1	-1	-1	-1	$y_{221}$
5	-1	-1	1	1	-1	-1	1	$y_{112}$
6	1	-1	1	-1	1	-1	-1	$y_{212}$
7	-1	1	1	-1	-1	1	-1	$y_{122}$
8	1	1	1	1	1	1	1	$y_{222}$

Tabla 5.1 Esquema completo codificado de un factorial  $2^3$ 

Observe la Tabla 5.1, consideremos la columna de  $ABC$ . Leyéndola resulta que hay cuatro tratamientos con 1 en la columna  $ABC$  y cuatro tratamientos con  $(-1)$  en esta misma. Si la fracción se configura considerando sólo a los tratamientos con 1 en la columna  $ABC$ , es decir, los tratamientos 2, 3, 5 y 8, no estaríamos en posibilidad de estimar el efecto de  $ABC$ ; sin embargo veremos que sí estaríamos en posibilidad de estimar el efecto de  $A$ , el efecto de  $B$  y el efecto de  $C$ .

Esta fracción de tratamientos seleccionados resultó en la mitad del número inicial de  $8(= 2^3)$ , por lo que se denota por factorial  $\frac{1}{2}2^3$  o por factorial  $2^{3-1}$ . Hay que señalar que así como configuramos la fracción con elementos 1 en la columna  $ABC$ , pudimos configurar otra fracción tomando a los tratamientos con  $-1$  en ésta. Desde el punto de vista del análisis estadístico ambas fracciones son equivalentes. En el primer caso se dice que el generador de la fracción es

$$I = +ABC. \quad (5.1)$$

Si hubiéramos configurado la otra fracción, el generador respectivo sería denotado por

$$I = -ABC. \quad (5.2)$$

En resumen, se puede decir que la no estimación de la interacción triple permitió la generación de dos fracciones para asignar estratégicamente cuatro tratamientos en cada una. En la práctica se selecciona aleatoriamente cualquiera de las dos fracciones generadas, mostradas en la Tabla 5.2 y 5.3.

Trat	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>BC</i>	<i>ABC</i>	$y_{ijl}$
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	$y_{111}$
4	1	1	-1	1	-1	-1	-1	$y_{221}$
6	1	-1	1	-1	1	-1	-1	$y_{212}$
7	-1	1	1	-1	-1	1	-1	$y_{122}$

Tabla 5.2 Fracción de un factorial  $2^3$ ,  $I = -ABC$ 

Trat	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>BC</i>	<i>ABC</i>	$y_{ijl}$
2	1	-1	-1	-1	-1	1	1	$y_{211}$
3	-1	1	-1	-1	1	-1	1	$y_{121}$
5	-1	-1	1	1	-1	-1	1	$y_{112}$
8	1	1	1	1	1	1	1	$y_{222}$

Tabla 5.3 Fracción de un factorial  $2^{3-1}$ ,  $I = +ABC$ .**Ejemplo 5.2**

En el desarrollo de nuevos productos, un ingeniero industrial tiene por objetivo evaluar la proteína de un jarabe que se obtiene usando semilla de amaranto. El proceso se realiza en varias etapas, en la última de éstas se obtiene la glucosa mediante un sistema de filtración. Los factores importantes para este proceso son la temperatura, la cantidad de una enzima y el porcentaje de sustrato; la descripción de estos factores y sus niveles se muestran a continuación en la Tabla 5.4.

Factores\Niveles	-1	1
<i>A</i> : temperatura	65 <sup>0</sup> C	80 <sup>0</sup> C
<i>B</i> : enzima	10v/w	30v/w
<i>C</i> : sustrato	10%	30%

Tabla 5.4 Factores y niveles del Ejemplo 5.2

Por las características de este proceso el ingeniero sólo tenía la posibilidad de realizar la mitad del experimento, y para ello estuvo dispuesto a no estimar el efecto de la interacción triple. El esquema resultante es como el que se muestra en la Tabla 5.5. Para realizar su experimento seleccionó aleatoriamente la fracción con  $I = +ABC$ ; al aplicar cada tratamiento se evaluó la proteína del jarabe, los resultados se describen en la Tabla 5.5.



Trat	A	B	C	AB	AC	BC	$y_{ijl}$
2	1	-1	-1	-1	-1	1	24
3	-1	1	-1	-1	1	-1	36
5	-1	-1	1	1	-1	-1	34
8	1	1	1	1	1	1	30

Tabla 5.5 Resultados del Ejemplo 5.2,  $2^{3-1}$ ,  $I = +ABC$ 

Una vez realizado el experimento, el objetivo es estimar los efectos de los factores y de las interacciones dobles. Los cálculos para cada factor e interacción se resumen en la Tabla 5.6.

Trat	A	B	C	AB	AC	BC	$y_{ijl}$
2	1	-1	-1	-1	-1	1	24
3	-1	1	-1	-1	1	-1	36
5	-1	-1	1	1	-1	-1	34
8	1	1	1	1	1	1	30
$\bar{y}_+$	27	33	32	32	33	27	
$\bar{y}_-$	35	29	30	30	29	35	
$\hat{\delta} =$	-8	4	2	2	4	-8	

Tabla 5.6 Estimación de efectos en un  $2^{3-1}$ ,  $I = +ABC$ 

En la Tabla 5.6 se puede observar que las columnas que representan al factor  $A$  y a la interacción  $BC$  son iguales, esto implica que los efectos de  $A$  y  $BC$  se calculan de la misma forma, y así:

$$\hat{\delta}_A = \hat{\delta}_{BC}$$

De manera semejante, se tiene que las columnas de los factores  $B$  y  $C$  coinciden con las columnas de las interacciones  $AC$  y  $AB$  respectivamente, con lo que sus efectos serán computados de la misma manera, es decir:

$$\hat{\delta}_B = \hat{\delta}_{AC}$$

$$\hat{\delta}_C = \hat{\delta}_{AB}$$

Estas tres últimas igualdades muestran que los efectos principales están confundidos con efectos de interacción doble; esta confusión se denota como se mues-

tra en la Tabla 5.7. El efecto en cada uno de los factores se representa por:

$$\begin{array}{c} \hat{\delta}_A = \hat{\delta}_{BC} = -8 \\ \hat{\delta}_B = \hat{\delta}_{AC} = 4 \\ \hat{\delta}_C = \hat{\delta}_{AB} = 2 \end{array}$$

Tabla 5.7 Efectos principales e interacción estimados para el Ejemplo 5.2

Entonces, cuando en un factorial  $2^3$  se sacrifica la estimación de la interacción  $ABC$  para poder generar fracciones del experimento, como se ha mostrado en este caso, se dice que el diseño  $2^{3-1}$  es una estructura de tratamientos de resolución  $III$ . Para identificarlo se escribe la resolución como subíndice, es decir  $2^{3-1}_{III}$ . En los factoriales fraccionados de resolución  $III$  se dice que los factores  $A$ ,  $B$  y  $C$  son alias de las interacciones  $AC$ ,  $BC$  y  $AB$ , respectivamente.

### 5.3 Alias y resolución

En general, se dice que un factorial fraccionado es de resolución  $III$  cuando los efectos principales no se confunden con otros efectos principales, sin embargo los efectos principales se confunden con efectos de interacción doble.

Cuando un factorial se fracciona, existe una estructura llamada alias, que indica cómo los efectos están confundidos con otros efectos, los alias. Determinar tal estructura alias es simple; se multiplica el generador de la fracción por el factor o la interacción de la que se quiera determinar su alias. Por ejemplo si el factor  $A$  se multiplica por el generador  $I = +ABC$ , el resultado es:

$$AI = A^2BC$$

Observe que el factor  $A$  está elevado al cuadrado en el segundo miembro de la ecuación anterior. Dado que en la estructura de tratamientos que se estudia, los factores tienen dos niveles, los elementos de las columnas al multiplicarse por sí mismos siempre resultan en una columna de  $1's$  (la columna de  $1's$  se ha denotado por  $I$ ), es decir,  $A^2 = I$ . De esta manera,

$$A = IBC = BC$$

Esta expresión indica que el factor  $A$  es alias de la interacción  $BC$ , como mostraron los resultados que se obtuvieron numéricamente en el Ejemplo 5.2; de modo análogo este producto se tiene para los otros factores al realizar la multiplicación correspondiente, o sea

$$BI = AB^2C = AIC = AC \quad y$$

$$CI = ABC^2 = AB$$

En general la estructura alias del factorial  $2^{3-1}$  se escribe como se muestra en la Tabla 5.8.

$$\begin{array}{c} \hline A \rightarrow BC \\ B \rightarrow AC \\ C \rightarrow AB \\ \hline \end{array}$$

Tabla 5.8 Estructura alias del factorial  $2^{3-1}$  con  $I = +ABC$

Se puede observar que se obtuvieron los efectos estimados de los factores. Para evaluar la significancia estadística de éstos se construye la tabla del ANDEVA como se hizo en el capítulo anterior.

Suponga que por cuestiones de azar el ingeniero seleccionó la segunda fracción con generador  $I = -ABC$ , cuyo esquema y los resultados de la proteína para esos 4 tratamientos se describe en la Tabla 5.9.

Trat	A	B	C	AB	AC	BC	$y_{ijl}$
1	-1	-1	-1	1	1	1	34
4	1	1	-1	1	-1	-1	46
6	1	-1	1	-1	1	-1	54
7	-1	1	1	-1	-1	1	58

Tabla 5.9. Resultados Ejemplo 5.2,  $2^{3-1}$ ,  $I = -ABC$

La estimación de los efectos se realiza en forma similar a lo hecho en la fracción  $I = +ABC$ ; los resultados se describen a continuación:

	A	B	C	AB	AC	BC
$\bar{y}_+$	50	52	56	40	44	46
$\bar{y}_-$	46	44	40	56	52	50
$\hat{\delta}$	4	8	16	-16	-8	-4

En resumen, la estimación de los efectos principales y sus alias con los efectos de interacción es:

$$\begin{array}{c} \hline \hat{\delta}_A = -\hat{\delta}_{BC} = 4 \\ \hat{\delta}_B = -\hat{\delta}_{AC} = 8 \\ \hat{\delta}_C = -\hat{\delta}_{AB} = 16 \\ \hline \end{array}$$

De esta manera la estructura alias es similar a la mostrada en la Tabla 5.8, sólo cambia el signo, como se muestra en la Tabla 5.10.

$$\begin{array}{c} \hline A \rightarrow -BC \\ B \rightarrow -AC \\ C \rightarrow -AB \\ \hline \end{array}$$

Tabla 5.10 Estructura alias en un  $2^{3-1}$  con  $I = -ABC$

El factorial fraccionado  $2_{III}^{3-1}$  tiene otra característica de interés; ésta se genera a partir de la relación que existe entre los grados de libertad y el número de tratamientos. Observe que el factorial  $2_{III}^{3-1}$  tiene 4 tratamientos y por lo tanto tres grados de libertad ( $4-1$ ); con estos últimos, sólo se puede estimar la suma de cuadrados para cada efecto principal y no da lugar a tener grados de libertad para estimar la suma de cuadrados del error. Como resultado de esta situación, se dice que el factorial  $2_{III}^{3-1}$  es saturado y se satisface la relación: número de factores más uno = número de tratamientos. Existen otros factoriales fraccionados que son saturados, para detectarlos es necesario verificar si se cumple la relación general  $k+1=N$ , donde  $k$  es número de factores y  $N$  es número de tratamientos. Una definición alternativa de diseño saturado es aquella donde se enuncia como aquel diseño en el que el número de efectos por estimar es uno menos que el número de corridas del mismo.

## 5.4 Factorial $2^4$ fraccionado

El plan presentado para fraccionar un factorial  $2^3$  se puede generalizar para estructuras de tratamiento con más de tres factores en dos niveles. Veamos el caso para el factorial  $2^4$  con 16 tratamientos originales. Nuevamente la idea es separar en fracciones los 16 tratamientos. Suponga que en primera instancia se pueden sólo experimentar con 8 tratamientos y por ello una fracción  $\frac{1}{2}$  del  $2^4 (= 2^{4-1})$  se requiere; si  $I = +ABCD$ , esto es, una fracción sería con valores 1 en la columna  $ABCD$ .

### Ejemplo 5.3

En un proceso de moldeo por inyección se obtienen paneles estructurales de películas de plástico. El grado de delgadez de la hoja es una característica de calidad

crítica para el proceso. Los factores y sus niveles se muestran en la Tabla 5.11.

Factores\Niveles	-1	1
<i>A</i> : velocidad de inyección (seg)	10.0	22.5
<i>B</i> : tiempo de cura (seg)	150.0	200.0
<i>C</i> : temperatura de molde $^{\circ}C$	40.0	80.0
<i>D</i> : temperatura de fundido $^{\circ}C$	250.0	300.0

Tabla 5.11 Factores y niveles del Ejemplo 5.3

Se tuvo que fraccionar el factorial  $2^4$  a la mitad para poder realizar el experimento; en este caso, el generador es  $I = +ABCD$ , vea la sección 5.8 de este capítulo. La respuesta considerada es la delgadez (mm) de la película de plástico.

Observe que el generador  $I = +ABCD$  se puede escribir como  $D = +ABC$ . En la Tabla 5.12 se presenta al factorial  $2^{4-1}$  en el orden estándar, únicamente con los factores  $A, B, C$ ; a continuación se completa la columna referente al factor  $D$  con el producto de los factores  $ABC$ . Por ejemplo, si el producto es menos uno ( $-1$ ), entonces el signo que le corresponde al nivel del factor  $D$  es menos uno, de tal manera que el producto entre  $ABC$  y  $D$  sea positivo.

Trat	<i>I</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	$D = ABC$	<i>y</i>
1	1	-1	-1	-1	-1	46
2	1	1	-1	-1	1	54
3	1	-1	1	-1	1	45
4	1	1	1	-1	-1	50
5	1	-1	-1	1	1	55
6	1	1	-1	1	-1	30
7	1	-1	1	1	-1	46
8	1	1	1	1	1	24

Tabla 5.12 Esquema del factorial  $2^{4-1}$ , con  $I = +ABCD$

Previo a estimar los efectos de los factores, es conveniente establecer la estructura alias de los efectos. Por ejemplo, si se desea conocer con qué efecto está confundido el factor  $A$ , entonces se multiplica este factor con el generador  $I$ , el producto es:

$$AI = A^2BCD = BCD$$

Con lo que el efecto del factor  $A$  está confundido con el efecto de interacción triple  $BCD$ . De modo similar se realiza con los otros factores, considere la interacción entre los factores  $B$  y  $D$ , el producto de estos factores con el generador  $I$ . Se tiene el siguiente resultado:

$$BDI = AB^2CD^2 = AC$$

Se puede observar que para este caso la interacción doble  $BD$  está confundida con la interacción doble  $AC$ , la estructura alias para la fracción del factorial  $2^4$  se muestra en la Tabla 5.13.

$A \longrightarrow BCD$
$B \longrightarrow ACD$
$C \longrightarrow ABD$
$D \longrightarrow ABC$
$AB \longrightarrow CD$
$AC \longrightarrow BD$
$AD \longrightarrow BC$

Tabla 5.13 Estructura alias en un  $2^{4-1}$  con  $I = +ABCD$

El diseño cuya estructura se presenta en la Tabla 5.13 tiene resolución  $IV$ , así el factorial  $2^{4-1}$  es de resolución  $IV$ , y se denota por  $2^{4-1}_{IV}$ . Una definición formal sobre esta resolución de un diseño se menciona a continuación.

#### Estructura de tratamiento de resolución $IV$

Una estructura de tratamiento es de resolución  $IV$ , si los efectos principales no se confunden con otros efectos principales, sin embargo, éstos se confunden con efectos de interacción triple, y efectos de interacción doble se confunden con otros efectos de interacción doble.

#### Estructura de tratamiento de resolución $V$

Siguiendo de esta manera, un diseño de mayor resolución es el  $V$ , el cual se puede definir como sigue. Una estructura de tratamiento es de resolución  $V$ , si los efectos principales no se confunden con otros efectos principales y estos se confunden con efectos de interacción de alto orden, y los efectos de interacción doble están confundidos con efectos de interacción triple.

#### Continuación del ejemplo 5.3

En el proceso de moldeo por inyección, los resultados que se obtuvieron se mostraron en la Tabla 5.12. A continuación se presentan los efectos estimados y sus cuadrados medios, así como el cuadrado medio del error. Vea la Tabla 5.14, las expresiones para el cálculo de estos cuadrados se presentaron en el capítulo anterior. De manera similar a la explicada en el Capítulo 4, se puede llevar a cabo

el análisis de varianza para estudiar la significancia estadística de los efectos.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>AB</i>	<i>AC</i>	<i>AD</i>
$\bar{y}_-$	48.0	46.0	48.8	43.0	43.8	51.3	45.0
$\bar{y}_+$	39.5	41.0	38.8	44.5	43.8	36.3	42.5
$\hat{\delta} = \bar{y}_+ - \bar{y}_-$	-8.5	-5	-10	1.5	0	-15	-2.5
$SC_{\hat{\delta}}$	144.5	50	200	4.5	0	450	12.5
$CM_{error}$	0						

Tabla 5.14 Efectos estimados y sus respectivas sumas de cuadrados, y cuadrado medio del error para el Ejemplo 5.3

## 5.5 Fracciones más pequeñas

En el Ejemplo 5.1, la mitad del factorial  $2^8$  tiene aún una buena cantidad de tratamientos, por ello conviene hacer un mayor fraccionamiento de este factorial, así en lugar de separar los tratamientos en dos fracciones, se pueden considerar cuatro, ocho o  $2^p$  fracciones más pequeñas. En general los factoriales  $2^k$  fraccionados en dos o más fracciones se denominan  $2^{k-p}$ ; cuando es  $p = 1$  se tendrá un medio del experimento (un generador), si  $p = 2$  es necesario un cuarto del experimento (dos generadores) y así sucesivamente; la fracción que se requiera es el inverso a una potencia de 2 (la potencia  $p$  denota al número de generadores). Entonces, al realizar un mayor fraccionamiento de un experimento se requiere de más generadores.

### Ejemplo 5.4

En una empresa existe un proceso que tiene por objetivo remover el material que se crea en el sistema de producción. La máquina limpiadora se compone de una brocha de acero cilíndrica. El equipo de trabajo compuesto por varios empleados identificó cinco factores que afectan la eficiencia de la operación en la limpieza, ésta se evalúa mediante la razón del material que se remueve. Los factores y sus niveles se describen en la Tabla 5.15.

Factores\Niveles	-1	1
A: diámetro del filamento	30mm	35mm
B: longitud del filamento	2cm	7cm
C: número de filamentos	18000	23000
D: ancho de la brocha	4cm	8cm
E: profundidad de entrada	250mm	500mm

Tabla 5.15 Factores y niveles del Ejemplo 5.4

De los  $2^5 = 32$  tratamientos, el grupo de trabajo decidió realizar sólo ocho de ellos. En tal situación, del factorial  $2^5$  se tiene que obtener una fracción de  $\frac{1}{4}$ , es decir,  $\frac{2^5}{4} = \frac{2^5}{2^2} = 2^{5-2}$ , lo cual da lugar a cuatro posibles fracciones; resulta que se requieren dos generadores. Para ello es necesario sacrificar dos efectos en lugar de uno, como en el caso  $2^{k-1}$ . Suponga que se puede pensar en sacrificar  $ABD$  y  $ACE$ , con ello tendríamos dos generadores, cada uno con dos posibilidades:

$$I_1 = \pm ABD \quad I_2 = \pm ACE$$

Con objeto de obtener la fracción deseada, se procede de la siguiente manera: se construye el esquema experimental  $2^5$  representando los niveles de los factores con unos y menos unos; en éste se representan todas las posibles combinaciones de los niveles de los factores presentadas en el orden estándar. Se representan también las cinco columnas correspondientes a los factores; se agregan dos columnas, una representa el producto de los factores  $ABD$ , denomínela  $I_1$ , la otra el producto de los factores  $ACE$ , denomínela  $I_2$ ; en cada una de estas hay 1's y -1's. En una primera fracción denotada por  $f(+, +)$ , se escriben los tratamientos que tienen en común el 1 en las columnas  $I_1$  e  $I_2$ , la siguiente fracción que se denota por  $f(+, -)$ , corresponde a los tratamientos que en la columna  $I_1$  está el 1 y en la columna  $I_2$  está el -1. En la tercera fracción  $f(-, +)$ , se representan los tratamientos cuando en las columnas  $I_1$  e  $I_2$  están el 1 y -1 respectivamente; en la última fracción  $f(-, -)$  están los tratamientos que tienen en común el -1 en las columnas  $I_1$  e  $I_2$ .

El experimento se realiza seleccionando aleatoriamente una de estas cuatro fracciones; suponga que se ha seleccionado  $f(+, +)$ .

La meta principal de este factorial  $2^{5-2}$  es aplicar sólo un cuarto de los tratamientos para estimar los efectos principales, por ello se han propuesto dos generadores; dado que cada uno de ellos genera dos fracciones, la combinación de ambos da lugar a cuatro fracciones, cada una de ellas con ocho tratamientos. Se llama fracción principal a la fracción  $f(+, +)$ , ésta se obtiene a partir de



los generadores  $I_1 = +ABD$  ( $D = +AB$ ),  $I_2 = +ACE$  ( $E = +AC$ ). Utilizando los tres factores  $A$ ,  $B$ , y  $C$ , el diseño correspondiente a  $f(+, +)$  se describe en la Tabla 5.16.

Observe que los productos  $AB$  y  $AC$  en la Tabla 5.16, para los ocho tratamientos, son siempre 1 y  $-1$  respectivamente. Con referencia al Ejemplo 5.4, el experimento se realiza aleatoriamente, poniendo la máquina limpiadora bajo estos tratamientos. El análisis estadístico se realiza aplicando la expresión (4.24) para estimar los efectos, y los cálculos apropiados para construir la tabla del ANDEVA.

Trat	$A$	$B$	$C$	$D = +AB$	$E = +AC$
1	-1	-1	-1	1	1
2	1	-1	-1	-1	-1
3	-1	1	-1	-1	1
4	1	1	-1	1	-1
5	-1	-1	1	1	-1
6	1	-1	1	-1	1
7	-1	1	1	-1	-1
8	1	1	1	1	1

Tabla 5.16 Esquema del factorial factorial  $2^{5-2}$

Para conocer qué efectos están confundidos es necesario establecer la estructura alias; ésta se logra mediante el mecanismo operativo indicado anteriormente, es decir, multiplicando los generadores por los factores e interacciones. A continuación se ilustra la obtención de la estructura alias para los generadores  $I_1 = +ABD$  y  $I_2 = -ACE$ , el proceso se inicia multiplicando entre sí estos generadores:

$$I_1 I_2 = (ABD)(-ACE) = -A^2 BCDE = -BCDE$$

Así, el alias de cada factor se obtiene multiplicando, la letra del factor por  $I_1$ ,  $I_2$  y  $-BCDE$ . Por ejemplo, los alias del factor  $A$  son:

$$AI_1 = A(ABD) = A^2 BD = BD$$

$$AI_2 = A(-ACE) = -A^2 CE = -CE$$

$$A(-BCDE) = -ABCDE$$

En forma análoga se obtienen los alias de los demás factores; en resumen los resultados se muestran en la Tabla 5.17.

$I_1 = ABD$	$I_2 = -ACE$	$-BCDE$	
$A$	$BD$	$-CE$	$-ABCDE$
$B$	$AD$	$-CDE$	$-ABCE$
$C$	$-AE$	$-BDE$	$ABCD$
$D$	$AB$	$-BCE$	$-ACDE$
$E$	$-AC$	$-BCD$	$ABDE$
$BC$	$-DE$	$ACD$	$-ABE$
$-BE$	$CD$	$ABC$	$-ADE$

Tabla 5.17 Estructura alias del factorial  $2^{5-2}_{III}$  en la fracción  $(+,-)$

Esta estructura de tratamientos es de resolución  $III$  porque existen efectos principales confundidos con efectos de interacción doble.

## 5.6 Criterio de aberrancia mínima

El cómo escoger una buena fracción  $2^{k-p}$  tiene una respuesta por el criterio de máxima resolución, que en general implica que si la resolución de un diseño es  $R$ , ningún efecto que involucre a  $l$  factores esté aliado con efectos conformados por menos de  $R - l$  factores. Sin embargo el criterio de máxima resolución no dice nada respecto a cómo diferenciar entre dos fracciones con la misma resolución. Entre dos fracciones alternativas, ¿cuál es mejor? En última instancia siempre la selección de una fracción dependerá de cuáles efectos son de interés estimar. Sin embargo, un criterio adicional al de resolución, que a continuación se presenta, se enfoca sobre el número de efectos confundidos. Como vimos, la fracción  $2^{-p}$  de un  $2^k$  es determinada por los  $p$  efectos confundidos o, alternativamente llamados, las  $p$  palabras de definición. El número de letras en una palabra en particular es llamado longitud de la palabra. Al grupo de  $p$  palabras, sus interacciones generalizadas e  $I$  se le llama relación de definición o subgrupo de contrastes de definición; éste contiene  $2^p - 1$  palabras más  $I$ .

En una fracción  $2^{k-p}$  denotaremos por  $A_i$  al número de palabras de longitud  $i$  en el subgrupo de contrastes de definición correspondiente; sea  $W = (A_3, \dots, A_k)$  el llamado patrón de longitudes de palabra (sólo a partir de palabras de longitud tres).

Criterio de aberrancia mínima: para cualesquiera dos fracciones  $2^{k-p}$ , denotadas por  $d_1$  y  $d_2$  respectivamente, sea  $r$  el entero más pequeño, tal que

$$A_r(d_1) \neq A_r(d_2)$$

Entonces  $d_1$  se dice que tiene menos aberrancia que  $d_2$  si

$$A_r(d_1) < A_r(d_2)$$

si el número de palabras de longitud  $r$  de  $d_1$  es menor que el correspondiente en  $d_2$ . La fracción  $d_1$  será de mínima aberrancia si no existe otra que tenga una menor.

Así, el criterio de mínima aberrancia operacionaliza el cómo seleccionar entre fracciones de acuerdo al número de palabras de cierta longitud en el subconjunto de contrastes de definición. Para mayores detalles y tablas de diseños que contemplan el criterio de mínima aberrancia, ver Wu y Hamada (2000).

Debe señalarse que tanto el criterio de máxima resolución como el criterio de aberrancia mínima para seleccionar una fracción, son guías generales de selección; sin embargo, si bien una fracción con resolución alta y menor aberrancia es deseable, en última instancia la fracción seleccionada tiene que dar la posibilidad de estimar los efectos de interés para el experimentador. Por ejemplo, considere un experimento con siete factores en dos niveles cada uno, en una fracción  $1/4$ , es decir  $2^{7-2}$ , para el cual se proponen dos diseños:

$$\begin{array}{ll} d_1 & I = 4567 = 12346 = 12357 \quad W(d_1) = (0, 1, 2, 0, 0) \\ d_2 & I = 1236 = 1457 = 234567 \quad W(d_2) = (0, 2, 0, 1, 0) \end{array}$$

El diseño  $d_1$  sería preferible.

## 5.7 Análisis de efectos confundidos

Cuando se realiza el análisis estadístico en los factoriales fraccionados de resolución *III* o *IV*, puede ocurrir que un efecto de interacción doble sea importante, y que sin embargo, éste no se distinga debido a que está confundido con un efecto principal u otra interacción. Por ejemplo, si  $AB$  está confundido con  $C$  en algún caso, cabe la posibilidad de que el efecto de  $C$  no sea importante y que el efecto de  $AB$  sí lo sea. En principio tal tipo de disyuntivas deben ser resueltas con base en opiniones de expertos del área, con las que se descarte cuáles efectos son los importantes. Si las opiniones están divididas o se basan en argumentaciones débiles, se requiere realizar más experimentación para esclarecer los efectos confundidos de interés. Se presentan a continuación dos enfoques alternativos para analizar efectos confundidos.

### 5.7.1 Adición de corridas

Con objeto de identificar cuál de los efectos en una cadena de alias corresponde al efecto cuantificado, se puede optar por adicionar algunas corridas experimentales extras. El siguiente ejemplo ilustra este enfoque.

**Ejemplo 5.5**

En un proceso que se refiere a un ciclo de mezclado, se hace una lista de las causas y efectos que intervienen en él. En la Tabla 5.18 se muestran 11 factores de control y las variables de respuesta del proceso. Se propone como estrategia la selección de factores importantes en el proceso, considerando la viscosidad como variable de respuesta.

Factores de control	Variables de calidad
<i>A</i> : temperatura de inicio	viscosidad
<i>B</i> : temperatura de descarga	gravedad específica
<i>C</i> : velocidad de rotores	dureza
<i>D</i> : energía consumida	propiedades físicas
<i>E</i> : adición de componentes	color
<i>F</i> : capacidad de llenado	
<i>G</i> : tiempo de mezclado	
<i>H</i> : tipo de formulación	
<i>I</i> : agua de enfriamiento	
<i>J</i> : sistema de lubricación	
<i>K</i> : extracción de polvos	

Tabla 5.18 Factores y variables respuesta en el Ejemplo 5.5

El esquema experimental que se plantea para seleccionar las variables importantes en el proceso es un factorial fraccionado  $2^{11-7}$ , en este caso se tienen 7 generadores; estos se muestran en la Tabla 5.19.

Generadores	$I_1 = ABCE$
	$I_2 = BCDF$
	$I_3 = ACDG$
	$I_4 = ABDH$
	$I_5 = ABCDI$
	$I_6 = ABJ$
	$I_7 = ACK$

Tabla 5.19 Generadores propuestos para un factorial  $2^{11-7}$

La estructura alias considerando sólo hasta efectos de interacción doble se muestran en la Tabla 5.20.

$A =$	$BJ =$	$CK =$	$FI$
$B =$	$AJ =$	$EK =$	$GI$
$C =$	$AK =$	$EJ =$	$HI$
$D =$	$EI =$	$GK =$	$HJ$
$E =$	$BK =$	$CJ =$	$DI$
$F =$	$AI =$	$GJ =$	$HK$
$G =$	$BI =$	$DK =$	$FJ$
$H =$	$CI =$	$DJ =$	$FK$
<hr/>			
$I =$	$AF =$	$BG =$	$DH = DE$
<hr/>			
$J =$	$AB =$	$CE =$	$DH = FG$
<hr/>			
$K =$	$AC =$	$BE =$	$DG = FH$
<hr/>			
$AD =$	$BH =$	$CG =$	$EF$
<hr/>			
$AE =$	$BC =$	$DF =$	$GH = JK$
<hr/>			
$AG =$	$BF =$	$CD =$	$EH = IJ$
<hr/>			
$AH =$	$BD =$	$CF =$	$EG = IK$

Tabla 5.20 Estructura de alias con base en los generadores en la Tabla 5.19

Los datos que se emplean para ilustrar el proceso en este ejemplo son simulados y se muestran en la Tabla 5.21.

Trat	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$H$	$I$	$J$	$K$	$y$
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	23
2	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	50
3	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	70
4	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	44
5	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	30
6	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	48
7	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	76
8	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	45
9	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	38
10	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	94
11	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	77
12	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	86
13	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	75
14	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1	92
15	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	79
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	86

Tabla 5.21 Resultados del experimento Ejemplo 5.5

### Análisis del diseño experimental

Se aplican los conceptos estadísticos presentados con anterioridad para estimar los efectos de los factores y de las interacciones. Ordenando estos efectos y usando una gráfica probabilística seminormal, se puede detectar cuáles de los efectos principales y de los cuatro de interacción doble, son significativos. Con la información proporcionada por la gráfica probabilística normal identificamos efectos importantes.

En la última columna de la Tabla 5.22 se ha señalado con s o ns la significancia o no de los efectos.

Factor	$\bar{y}_+$	$\bar{y}_-$	$\hat{\delta}$	$CM_{\hat{\delta}}$	$S^2_+$	$S^2_-$	
A	68.13	58.5	9.63	370.56	532.7	566.6	s
B	76.38	56.25	14.13	798.06	282.6	755.6	s
C	63.38	60.25	6.13	150.06	497.9	632.8	ns
D	78.38	48.25	30.13	3630.06	312.8	320.8	s
E	65.88	60.75	5.13	105.06	484.9	652.2	ns
F	61.13	65.50	-4.38	76.56	580.9	560.3	ns
G	61.66	65.00	-3.38	45.56	566.3	579.4	ns
H	66.13	60.50	5.63	126.56	337.3	796.9	ns
I	65.38	61.25	4.13	68.06	591.4	551.1	ns
J	53.25	73.38	-19.88	1580.06	637.1	289.4	s
K	59.88	66.75	-6.88	189.06	615.8	509.4	ns
AD	69.63	57.00	12.63	637.56	773.7	287.4	s
AE	61.38	65.25	-3.88	60.06	658.8	484.8	ns
AG	64.88	61.75	3.13	39.06	560.1	586.5	ns
AH	58.88	66.75	-6.88	180.06	645.0	480.2	ns

Tabla 5.22 Resultados del análisis estadístico Ejemplo 5.5

De la tabla que describe la estructura alias para el diseño bajo estudio, se observa que el efecto del factor  $J$  es alias de la interacción  $AB$ . Cabe notar que los factores  $A$  y  $B$  tienen un efecto importante; tal situación llama la atención porque existe la posibilidad de que el efecto del factor  $J$  sea realmente provocada por la interacción  $AB$ .

Para averiguar esa situación conviene hacer en mayor detalle el análisis del experimento, siendo el propósito romper la estructura alias entre el factor  $J$  y la interacción  $AB$ . Para ello basta con agregar un tratamiento extra, el 17 en la Tabla 5.23. Note que con el nuevo tratamiento ya no se confunde el efecto de  $J$  con el de  $AB$ , debido a que en este tratamiento adicional  $J$  tiene  $-1$ , mientras que en  $AB$  se tiene 1.

Al realizar este nuevo ensayo pueden surgir condiciones no contempladas en el experimento que impliquen cambios en las condiciones o en el material con que se realiza éste, por ejemplo, el día que se lleva a cabo el tratamiento adicional. Para aminorar estos efectos de ruido se identificaría un efecto de bloque correspondiente. Por otra parte, para interpretar los efectos de los factores y sus respectivas sumas de cuadrados, es conveniente que se siga satisfaciendo la ortogonalidad de los efectos con el efecto de bloque. En ese sentido se requiere que al sumar el producto elemento a elemento, entre las columnas de los factores, y el ruido sea cero. De manera inmediata, en este ejemplo uno se da cuenta que esto no se cumple sólo con haber realizado el tratamiento 17, por lo que es necesario agregar tres tratamientos extras, 18, 19 y 20 en la Tabla 5.23.

Trat	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>J</i>	<i>AB</i>	<i>AD</i>	bloque	<i>y</i>
1	-1	-1	-1	1	1	1	1	23
2	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	50
3	-1	1	-1	-1	-1	1	1	70
4	1	1	-1	1	1	-1	1	44
5	-1	-1	-1	1	1	1	1	30
6	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	48
7	-1	1	-1	-1	-1	1	1	76
8	1	1	-1	1	1	-1	1	45
9	-1	-1	1	1	1	-1	1	38
10	1	-1	1	-1	-1	1	1	94
11	-1	1	1	-1	-1	-1	1	77
12	1	1	1	1	1	1	1	86
13	-1	-1	1	1	1	-1	1	75
14	1	-1	1	-1	-1	1	1	92
15	-1	1	1	-1	-1	-1	1	79
16	1	1	1	1	1	1	1	86
17	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	33
18	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	50
19	-1	1	1	1	-1	-1	-1	84
20	1	1	1	-1	1	1	-1	87

Tabla 5.23 Resultados con cuatro tratamientos adicionales del Ejemplo 5.5 en los efectos significativos

En resumen, con estos cuatro nuevos tratamientos, se verifica que el factor *J* y la interacción *AB* ya no son alias, además se satisface la ortogonalidad entre los factores y el bloque. La finalidad de emplear el bloque es evitar efectos de condiciones diferentes de experimentación de los primeros 16 tratamientos y los últimos 4.

El análisis subsecuente, después de aumentar estos tratamientos, se describe en la Tabla 5.24.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>D</i>	<i>J</i>	<i>AB</i>	<i>AD</i>
$\hat{\delta}_{efecto}$	9.70	14.08	30.08	-0.13	-19.75	12.62

Tabla 5.24 Resultados con tratamientos adicionales Ejemplo 5.5

Claramente se puede notar que el efecto del factor *J* resultó, en magnitud, ser más pequeño con respecto a la interacción *AB*, así que el efecto mostrado en el primer experimento se debió al efecto de interacción *AB*. Sin embargo hay que notar que, a partir de la Tabla 5.23, los pares de efectos (*B*, *D*), (*J*, *AB*), (*J*, *AD*), (*AB*, *AD*) ya no son ortogonales, por lo que no debe intentarse trabajar con su significancia estadística - ya sea por el gráfico Normal o semi Normal o por procedimientos anteriores que suponen ortogonalidad de efectos-, sino por medio de métodos de selección de variables, como en el modelo de regresión.

Como se puede apreciar este método es un tanto ad hoc ya que depende de la habilidad del experimentador, por lo que no puede ser aplicado de manera general. Se describe a continuación un enfoque más general para estudiar efectos confundidos.

### 5.7.2 Técnica de desdoble

Otra alternativa para romper estructuras alias es la llamada técnica de desdoble.

#### Desdoble total

Una estructura desdoblada, por ejemplo, consiste en construir una estructura de resolución *IV* a partir de una estructura de resolución *III*.

A partir de la estructura de resolución *III* se lleva a cabo otro experimento cambiando los signos (niveles) en el esquema experimental del primero. Por ejemplo, considere un factorial  $2_{III}^{3-1}$ , donde el generador es  $I = ABC$  ( $d_1$ ) tal como se muestra en la Tabla 5.25. Con este diseño *C* estará confundido con *AB*. Se realiza el experimento con estos cuatro tratamientos.

Trat.	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
5	-1	-1	1
2	1	-1	-1
3	-1	1	-1
8	1	1	1

Tabla 5.25 Primer diseño  $d_1$  factorial  $2_{III}^{3-1}$



Considere la Tabla 5.26. Un segundo experimento,  $d_2$ , se lleva a cabo con un esquema similar al anterior, sólo que ahora se cambian los signos de los factores (niveles); este recurso genera lo que se denomina estructura desdoblada. Considere que la línea doble que divide a las dos tablas funciona como un doblez y en la tabla de la derecha se ha puesto un espejo cuyo reflejo de la tabla de la izquierda corresponde pero con signos contrarios. Note que ambas tablas juntas representan a los 8 tratamientos de un diseño factorial  $2^3$  pero en dos experimentos separados. El diseño aumentado consiste de ocho tratamientos  $2_{IV}^{4-1}$  con un factor para identificar los dos bloques ( $d_1$  y  $d_2$ ).

Trat.	$A$	$B$	$C$	$bloque$		Trat.	$A$	$B$	$C$	$bloque$
5	-1	-1	1	1		1	1	1	-1	-1
2	1	-1	-1	1		6	-1	1	1	-1
3	-1	1	-1	1		7	1	-1	1	-1
8	1	1	1	1		4	-1	-1	-1	-1
donde $C = A \times B$										
Primer experimento $d_1$						Segundo experimento $d_2$				

Tabla 5.26 Diseño aumentado  $2_{IV}^{4-1}$  a partir de un  $2_{III}^{3-1}$

Otro ejemplo del uso de la técnica de desdoble se presenta a continuación para el caso de un diseño  $2_{III}^{7-4}$  con generadores

$$d_1 : D = AB, E = AC, F = BC, G = ABC$$

En la Tabla 5.27 se muestra el diseño aumentado. Se puede mostrar que los generadores para  $d_2$  son:

$$d_2 : D = -AB, E = -AC, F = -BC, G = ABC.$$

Con ello, juntando ambos grupos de generadores de  $d_1$  y  $d_2$ , se aprecia que sólo se mantiene  $G = ABC$  y que las interacciones dobles se vuelven estimables con el diseño aumentado  $d (= d_1 \oplus d_2)$ .

$d_1$	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$	$G$	$Bloque$
1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
2	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
3	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
4	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
5	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
6	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
7	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
8	1	1	1	1	1	1	1	1
$d_2$	$-A$	$-B$	$-C$	$-D$	$-E$	$-F$	$-G$	$Bloque$
9	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
10	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
11	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
12	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1
13	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1
14	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
15	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1
16	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Tabla 5.27 Estructura de doblez a partir de un  $2_{III}^{7-4}(d_1)$  aumentado a un  $2_{IV}^{7-3}(d = d_1 \oplus d_2)$

### Estructuras de desdoble alternativas

Li y Mee (2002) discuten sobre la técnica de desdoble en casos en los que no representa necesariamente la mejor forma de aumentar un diseño de resolución impar a uno de resolución par, ya que el cambio de signo de todas las columnas de la fracción original sólo elimina efectos confundidos formados por un número impar de factores. Mejores esquemas de desdoble los podemos identificar por medio del examen de las palabras de longitud tres en los generadores de la fracción original (incluidas sus interacciones generalizadas), que conforman el llamado subgrupo de contrastes de definición, por medio del siguiente algoritmo (en el que a los factores que resulten circulados se les cambiará el signo y a los tachados no se les cambiará el signo).

### Algoritmo de Li y Mee

1. Enliste todas las palabras de longitud tres en la relación de definición. Si existen factores que aparecen en el subgrupo de contrastes de definición pero

que no estén en alguna palabra de longitud tres, entonces necesariamente existen desdobles múltiples que incrementan la resolución.

2. Trabajando sobre tal lista, tache los  $k - p$  factores básicos, esto es, los factores usados para generar los  $p$  factores adicionales.
3. Circule cualquier factor que aparezca en cualquier palabra de longitud tres con dos factores básicos. Circule este factor cuando aparezca en las otras palabras de longitud tres.
4. Tache cualquier factor que aparezca en una palabra de longitud tres con un factor ya tachado y uno ya circulado. Tache este factor cuando aparezca. Continúe circulando o tachando cualquier factor que aparezca en una palabra formada con todos los factores marcados excepto uno, siguiendo las siguientes dos reglas: si un número par de factores está circulado, entonces circule el factor restante; si sólo un factor está circulado, entonces tache el factor restante.
5. Si todos los factores están ya marcados, existe sólo una fracción de despliegue para incrementar la resolución. Sin embargo, si quedan factores sin marca, cada uno de ellos puede ser circulado o tachado. Cualquier arreglo resultante para el que un número impar de factores esté circulado en cada palabra de longitud tres, incrementará la resolución a  $IV$  o más.

### Ejemplos usando el algoritmo

1. Un diseño  $2^{8-4}$  generado por  $E = AB$ ,  $F = AC$ ,  $G = AD$  y  $H = ABCD$ .
  - (a) Paso 1: palabras de longitud tres son  $ABE$ ,  $ACF$ ,  $ADG$ , después de haber obtenido interacciones generalizadas entre los 4 generadores iniciales. En estas tres palabras de longitud tres no aparece el factor  $H$ , indicando que hay múltiples posibilidades de desdoble.
  - (b) Paso 2: de la lista anterior se tachan  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , y  $D$  dado que con ellos se generan los  $E$ ,  $F$ ,  $G$  y  $H$ .
  - (c) Paso 3: se circula ahora a  $E$ ,  $F$  y  $G$  porque aparecen en palabras de longitud tres con dos factores básicos:  $ABE$ ,  $ACF$ ,  $ADG$ .
  - (d) Como ya todos están marcados salvo  $H$ , los esquemas de desdoble son cambiar signos a  $E$ ,  $F$  y  $G$ , o alternativamente a  $E$ ,  $F$ ,  $G$  y  $H$ .
2. Un diseño  $2^{9-5}$  generado por  $E = AB$ ,  $F = AC$ ,  $G = AD$ ,  $H = BCD$  y  $J = ABCD$ .

- (a) Paso 1: palabras de longitud tres son cuatro:  $ABE$ ,  $ACF$ ,  $ADG$ ,  $AHJ$ . Aparecen todos los factores en ellas.
  - (b) Paso 2: en tal lista tache  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  porque son los básicos.
  - (c) Paso 3: como  $E$ ,  $F$  y  $G$  aparecen en  $ABE$ ,  $ACF$  y  $ADG$ , respectivamente, palabras de longitud tres junto con dos factores básicos, son circulados.
  - (d) Paso 4: en la lista no hay factores que cumplan con las condiciones de este paso.
  - (e) Paso 5: como  $H$  y  $J$  no han sido marcados circulando uno y tachando el otro, o viceversa, se generan dos esquemas de desdoble: cambiar el signo a  $E, F, G$  y  $H$ ; cambiar el signo a  $E, F, G$  y  $J$ .
3. Un diseño  $2^{10-6}$  generado por  $E = AB$ ,  $F = AC$ ,  $G = BC$ ,  $H = AD$ ,  $J = BCD$ ,  $L = ABCD$ .
- (a) Paso 1: las palabras de longitud tres son  $ABE$ ,  $ACF$ ,  $BCG$ ,  $ADH$ ,  $AJL$ ,  $DGJ$ ,  $EFG$  y  $GHL$ . Todos los factores aparecen entonces en estas palabras de longitud tres.
  - (b) Paso 2: tache  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  en la lista anterior.
  - (c) Paso 3: dado que  $E$ ,  $F$ ,  $G$  y  $H$  aparecen en palabras de longitud tres con dos factores básicos, circularlos.
  - (d) Paso 4: dado que  $J$  aparece en la lista en  $DGJ$ , palabra de longitud tres formada con un factor ya circulado y un factor tachado, tacharlo. Dado que  $L$  aparece en  $GHL$ ,  $G$  y  $H$  ya marcados, ambos circulados, circule a  $L$ .

Todos los factores ya están marcados, la única alternativa de desdoble es cambiar el signo de  $E$ ,  $F$ ,  $G$ ,  $H$  y  $L$ . En general ningún diseño de 16 corridas con  $k > 9$  puede ser aumentado con una fracción de desdoble para incrementar la resolución a  $IV$  sin eliminar todas las palabras de longitud impar.

Para mayores detalles sobre tal algoritmo y otros resultados interesantes, consulte a Li y Mee (2002).

## 5.8 Generadores de fracciones en diseños $2^k$

A continuación se presentan unas tablas que muestran los generadores para fraccionar diseños experimentales con diferente número de factores.

no. de factores	no. de UE	fracción	resolución	generador
3	4	1/2	III	$C = \pm AB$
4	8	1/2	IV	$D = \pm ABC$
5	16	1/2	V	$E = \pm ABCD$
	8	1/4	III	$D = \pm AB$ $E = \pm AC$
6	16	1/4	IV	$E = \pm ABC$ $F = \pm BCD$
	8	1/8	III	$D = \pm AB$ $E = \pm AC$ $F = \pm BC$
7	32	1/4	IV	$F = \pm ABCD$ $G = \pm ABDE$
	16	1/8	IV	$E = \pm ABC$ $F = \pm BCD$ $G = \pm ACD$
	8	1/16	III	$D = \pm AB$ $E = \pm AC$ $F = \pm BC$ $G = \pm ABC$
8	64	1/4	V	$G = \pm ABCD$ $H = \pm AB EF$
	32	1/8	IV	$F = \pm ABC$ $G = \pm ABD$ $H = \pm BCDE$
	16	1/16	III	$E = \pm BCD$ $F = \pm ACD$ $G = \pm ABC$ $H = \pm ABD$

no. de factores	no. de UE	fracción	resolución	generador
9	64	1/8	IV	$G = \pm ABCD$
				$H = \pm ACEF$
				$J = \pm ABCE$
	32	1/16	IV	$F = \pm BCDE$
				$G = \pm ACDE$
				$H = \pm ABDE$
	16	1/32		$J = \pm ABCE$
				$E = \pm ABC, H = \pm ABD$
				$F = \pm BCD, J = \pm ABCD$
				$G = \pm ACD$

## 5.9 Diseños de Plackett y Burman

Una clase de diseños ortogonales que permiten una gran eficiencia en la estimación insesgada de muchos efectos principales al realizarla con un número relativamente pequeño de pruebas experimentales, fueron propuestos por Plackett y Burmann (1946); éstos son de mucha utilidad cuando se puede suponer que todas las interacciones son despreciables ya que son de resolución *III*. Si  $T$  denota al número total de pruebas experimentales (tratamientos), los diseños de Plackett - Burmann son tales que

$$T = k * (\# \text{ de niveles de cada factor} - 1) + 1 \quad (5.3)$$

donde  $k$  es el número de factores; en el caso de factoriales  $2^k$ , estos diseños permiten en  $T = k + 1$  pruebas, estimar  $k$  efectos.

Plackett y Burman (1946) inspirados en algunos resultados matriciales proporcionan diseños con  $T$  tratamientos, éstos pueden usarse desde  $T = 4$  hasta  $T = 100$ , en múltiplos de 4, excepto el caso de  $T = 92$ . Coinciden en el caso de la serie  $2^k$  con diseños  $2^{k-p}$ . Sin embargo, una complicación de este tipo de diseños es que su estructura alias es generalmente complicada. Para el caso de  $T = 12, 20, 24, 36$  y  $44$ , estos autores generaron diseños que en la literatura estadística se denominan diseños Plackett - Burman.

### 5.9.1 Construcción del diseño PB

El aporte principal de Plackett y Burman fue proporcionar diferentes contrastes. Cada uno de ellos da origen a un esquema experimental, por ejemplo para 11

factores el contraste es:

$$1 \quad 1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad -1$$

El esquema experimental que produce este contraste se muestra en la Tabla 5.28, y se denota por  $PB_{12}(11)$ , 12 indica el número de tratamientos (corridas) y  $11(k)$  los factores. El  $PB_{12}(11)$  se crea de manera cíclica mediante el siguiente procedimiento; el contraste propuesto se escribe en el renglón 1 para representar la primera corrida. El siguiente renglón se construye quitando el último elemento de la primera corrida y poniendo al final el primer elemento de la corrida anterior. Este procedimiento continua hasta que se cubre todo el ciclo, es decir, éste se repite  $T - 1$  veces. Finalmente en el último renglón se agrega un tratamiento donde todos los factores están en su nivel bajo. El mismo procedimiento cíclico, a excepción del último tratamiento añadido, se puede realizar por columnas.

El análisis estadístico para los diseños PB es similar al expuesto para factores con dos niveles. Es factible aplicar el esquema experimental  $PB_{12}(11)$  desde 7 factores. Las columnas no ocupadas pueden utilizarse para construir la suma de cuadrados del error en el ANDEVA correspondiente. En general, esto se puede decir de cualquier diseño que no ocupe todos sus grados de libertad para estimar efectos de interés.

Trat	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
2	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1
3	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
4	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
5	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1
6	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1
7	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1
8	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1
9	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
10	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1
11	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1
12	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1

Tabla 5.28 Diseño de Plackett-Burman para 11 factores

Los generadores para el diseño Plackett-Burman con 20 tratamientos son:

1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1
---	---	----	----	---	---	---	---	----	---	----	---	----	----	----	----	---	---	----

Los diseños Plackett - Burman cuentan con propiedades proyectivas útiles cuando se detecta un número pequeño de efectos principales como significativos, propiedades que permiten explorar interacciones de interés; para mayor detalle consulte Wu y Hamada (2000).

## 5.10 Contribuciones de Taguchi

Entre las actividades que desarrolla el ser humano siempre van surgiendo ideas interesantes e innovadoras, los nuevos resultados se pueden contrastar con los ya existentes para evaluar la bondad de las nuevas ideas. En el contexto de experimentación industrial, algunas de ellas fueron sugeridas por Genichi Taguchi, a través de su práctica en el análisis de la mejora de procesos de producción; éstas se conocieron con detalle en el mundo “occidental” a partir de la década de mil novecientos ochenta.

Conviene resaltar que dentro de la investigación que se realiza en estadística existen varios trabajos que destacan las debilidades de la metodología desarrollada por Taguchi. Sin embargo, las técnicas estadísticas propuestas por él, sin ser la panacea, fueron motivadas por demandas peculiares de los procesos industriales a nivel piloto o en piso.

El tener líneas de producción eficientes y eficaces involucra a tres tipos de diseño:

### **Diseño del sistema**

En este tipo de diseño se tiene como componente fundamental la innovación a partir del conocimiento del contexto de aplicación en electrónica, química, física, etc. Incluye el establecimiento del producto por lograr y de la forma para producirlo, incluyendo la selección de materiales, así como los equipos de producción y medición.

### **Diseño de "parámetros"**

En este tipo de diseño se determinan los valores óptimos de los parámetros (factores) del sistema. Este tipo de diseño es de suma importancia porque constituye la puesta en marcha del sistema en las condiciones actuales y específicas. En esta etapa se usan de manera intensiva metodologías experimentales que permitan tal optimización, y en las que se utilizan de manera fundamental las relaciones no lineales entre factores y variables respuesta de interés.

### **Diseño de tolerancias**

Determinados los niveles óptimos de los parámetros (factores) del sistema, se tendrán que determinar tolerancias a variaciones en tales niveles óptimos, así como influencias de factores de ruido; todo con el objetivo de robustificar las variables respuesta de interés bajo condiciones ruidosas. Esto puede reducir los intervalos de las tolerancias del proceso.



### 5.10.1 Cocientes señal a ruido

Las ideas aportadas por Taguchi en la mejora de procesos se ubican en el diseño de parámetros y en el de tolerancias. Tales ideas se orientan en tres grandes direcciones.

En una primera dirección, Taguchi establece una definición de calidad de un producto manufacturado: “La calidad de un producto es la mínima pérdida que se le ocasiona a la sociedad desde que el producto es embarcado.” Esto dio lugar a pensar en consecuencias globales de procesos / productos a través de funciones de pérdida sobre la variabilidad respecto a un valor objetivo de la característica bajo estudio; al hablar de pérdida, plantea que ésta debe ser continuamente reducida, sin importar que la característica se encuentre dentro de especificaciones. Ésta fue una idea importante en la evolución del aseguramiento de calidad.

La pérdida, plantea Taguchi, debe representarse a través de variables respuesta que la reflejen. Para ello propone varios tipos de cocientes señal - a - ruido para ser tratados como respuesta. Suponiendo que en cada corrida experimental hay réplicas, los cocientes señal a ruido propuestos por Taguchi fueron los siguientes.

Objetivo	Cociente señal a ruido
Tipo: Diferencia del valor objetivo Nombre: Desviación respecto a una valor objetivo	$S/R_{di} = (\bar{y} - T)^2$
Tipo: Menor es mejor Nombre: Respuesta es no negativa y el valor objetivo ideal es cero	$S/R_{me} = -10 \log_{10} \left( \frac{\sum y_i^2}{n} \right)$
Tipo: Nominal es mejor Nombre: El valor objetivo estimado por la media de la respuesta, es óptimo	$S/R_{no} = 10 \log_{10} \left( \frac{\bar{y}}{S} \right)^2$
Tipo: Mayor es mejor Nombre: Respuesta es no negativa y el valor objetivo ideal infinito es óptimo	$S/R_{ma} = -10 \log_{10} \left( \frac{\sum \frac{1}{y_i^2}}{n} \right)$
Tipo: Respuesta positiva o negativa Nombre: Respuesta puede tomar valores positivos y negativos	$S/R_{pn} = -10 \log_{10} (S^2)$

Seleccionando uno de ellos según el contexto, se buscan combinaciones de factores que lo optimicen y con ello se reduzca la pérdida así representada. Factores que no muestran efectos sobre tal tipo de respuesta serían entonces usados para ajustar el valor medio de la variable original según lo requerido (a tales factores se les llama factores de ajuste). Sin embargo, debe señalarse:

- Los cocientes señal - a - ruido propuestos no son en absoluto universalmente aplicables; un cociente señal - a - ruido no necesariamente corresponde a la función de pérdida de los consumidores o del siguiente proceso. Así son válidos sólo en ciertos contextos. Por ejemplo, en el caso de nominal es mejor, sólo cuando la varianza de la respuesta es proporcional a su valor esperado al cuadrado, es útil el cociente señal - a - ruido respectivo.
- El uso de tales cocientes como variables respuesta en un modelo estadístico puede inducir no linealidades innecesarias y difíciles de modelar.
- Los factores de ajuste no son fácilmente encontrados en las aplicaciones.

### 5.10.2 Diseño robusto de parámetros

En una segunda dirección, Taguchi ideó una estrategia experimental que se conoce como diseño robusto de parámetros, que es una metodología estadístico / ingenieril que busca reducir la variación en el desempeño de un sistema, medido a través de cocientes de señal a ruido, mencionados antes.

El diseño robusto de parámetros es un paso más en la búsqueda de reducción de la variabilidad aportada por ruido experimental; su estrategia principal es seleccionar condiciones en los factores de control que hagan al sistema menos sensible (más robusto) a los efectos de ruido. Es decir, no se pretende directamente desterrar los efectos de ruido. Por ello en este enfoque se explotan intensivamente las interacciones existentes entre los factores de control y los factores extraídos del ruido experimental. Siguiendo a Wu y Hamada (2000) suponga que  $y$  es una respuesta que se puede modelar por:

$$y = f(\mathbf{x}, \mathbf{z})$$

donde  $\mathbf{x}$  representa a los factores de control y  $\mathbf{z}$  a los factores de ruido; si  $\mathbf{x}$  y  $\mathbf{z}$  interactúan sobre  $y$ , la variación sobre  $y$  puede también ser reducida al cambiar los niveles de los factores en  $\mathbf{x}$ , ya que alguna combinación de éstos puede influir en la relación de  $y$  con  $\mathbf{z}$ . Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} y &= \mu + \alpha x_1 + \beta z + \gamma x_2 z + \varepsilon \\ &= \mu + \alpha x_1 + (\beta + \gamma x_2) z + \varepsilon \end{aligned}$$

La estrategia es escoger el valor de  $x_2$  tal que  $(\beta + \gamma x_2) \approx 0$ .

Las interacciones de factores de control con factores de ruido tienen entonces una importancia capital en el diseño robusto. En ese sentido un aspecto importante a señalar es que en el diseño robusto de parámetros, Taguchi sugiere que no es deseable que en el experimento por realizar existan interacciones entre factores de control ya que:

- Implican en general que sea necesario un número mucho mayor de corridas experimentales para estimar los efectos de los factores de control.
- Hacen difícil dividir la tarea de diseño de un producto complejo en varias tareas pequeñas a ser trabajadas por distintos equipos de trabajo.
- Hacen difícil la transferencia entre laboratorio - manufactura - campo. Si hay fuertes interacciones en el laboratorio, lo más seguro es que se manifiesten igual o más fuertemente en las etapas posteriores.

El evitar en lo ideal la presencia de interacciones de factores de control entre sí hace necesario la juiciosa selección de la región experimental; por otra parte, también la adecuada selección de la variable respuesta, siguiendo los lineamientos que aparecen en el Capítulo 1 de este trabajo, los cocientes señal - a - ruido, o una transformación de la respuesta, debe en lo posible analizarse desde la perspectiva de si inducen aditividad entre factores de control. Sin embargo esto no se da en automático en los experimentos reales.

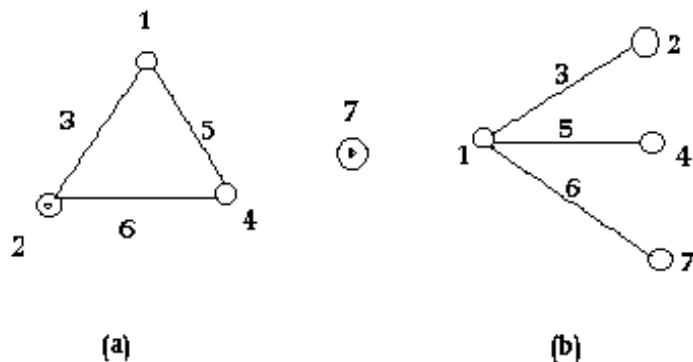
### 5.10.3 Arreglos ortogonales

Tenemos un diseño ortogonal cuando cada combinación de los niveles de cualesquiera dos factores aparece el mismo número de veces en el diseño experimental.

La tercera orientación de los aportes del Prof. Taguchi se enfoca a la experimentación. Para poder realizar un diseño robusto usa diseños experimentales que corresponden a los denominados arreglos ortogonales (AO) porque las columnas que los componen tienen la propiedad de ortogonalidad; en éstos se tiene a los arreglos ortogonales para el caso de estructuras  $2^k$ ; en general, los arreglos ortogonales los denotamos por  $AO_p(2^k)$ , donde  $p$  representa el número de tratamientos. La notación original propuesta para representar los arreglos ortogonales y que aparece en los textos que tratan el tema a la Taguchi, es  $L_p(2^k)$ .

Un arreglo ortogonal  $AO(N, s_1^{m_1}, \dots, s_\gamma^{m_\gamma})$  de fuerza  $t$  es una matriz  $N \times m$ ,  $m = \sum m_i$  en el que  $m_i$  columnas tienen  $s_i$  símbolos o niveles tales que para cualesquiera  $t$  columnas todas las posibles combinaciones de símbolos aparecen con la misma frecuencia en la matriz (Wu y Hamada, 2000). Típicamente  $t = 2$ .

Un caso particular de AO son diseños factoriales fraccionados. Sin embargo, la popularidad del uso de los AO propuestos por Taguchi radica en que éstos se describen en tablas ya establecidas, las cuales se componen de  $k$  columnas y  $p$  renglones; los niveles de los factores se denotan por los números 1 y 2. Recuerde que éstos son equivalentes al  $-1$  y  $1$ . Estos AO aparecen acompañados de unas gráficas lineales y una tabla de interacción con las que se podrá asignar a las columnas del arreglo a los factores y a las interacciones de interés.

Fig. 5.1: Gráficas lineales para el arreglo ortogonal  $AO_8(2^7)$ 

Conviene notar que los AO presentados por Taguchi a pesar de ser fracciones a las que no se les identifica su estructura alias, por lo general, son de resolución *III*. Es por ello que Taguchi ubica el uso de estos AO en experimentos en donde se pueda pensar que interacciones entre factores de control son despreciables.

El primer diseño que se abordará en este apartado es el  $AO_8(2^7)$ , el esquema permitirá fijar ideas sobre su aplicación en la estrategia experimental. La descripción del arreglo se presenta en la Tabla 5.29.

Columnas							
Trat	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
grupo 1		grupo 2		grupo 3			

Tabla 5.29 Descripción del arreglo ortogonal  $AO_8(2^7)$ 

Para completar la interpretación del AO es necesario presentar las gráficas lineales y la tabla de interacción descrita en la Tabla 5.28. Las gráficas lineales correspondientes al  $AO_8(2^7)$  se muestran en la Fig. 5.1.

El arreglo mostrado en la Tabla 5.29 consta de ocho corridas (tratamientos) y puede ser utilizado, de acuerdo a la gráfica lineal en la Fig. 5.1(a), con 7 efectos como máximo. Por ejemplo, en el caso de cuatro factores  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , se asignarían a las columnas 1, 2, 4 y 7 respectivamente, mientras que las interacciones  $AD$ ,  $DB$ ,  $AB$  a las columnas 5, 6 y 3, respectivamente. La Fig. 5.1 (b) se usa en un experimento en donde las interacciones entre un factor y algunos otros son importantes. Suponga que  $B$  va a la columna 1,  $C$  a la columna 2,  $D$  a la columna 4, y a la columna 7 va  $A$ , con lo que las interacciones  $BC$ ,  $BD$  y  $BA$  van a las columnas 3, 5 y 6, respectivamente. Las columnas no ocupadas pueden utilizarse para construir la suma de cuadrados del error en el ANDEVA correspondiente.

Columnas	1	2	3	4	5	6	7
1	(1)	3	2	5	4	7	6
2		(2)	1	6	7	4	5
3			(3)	7	6	5	4
4				(4)	1	2	3
5					(5)	3	2
6						(6)	1
7							(7)

Tabla 5.30 Tabla de interacciones para el  $AO_8(2^7)$ 

El  $AO_8(2^7)$  puede representar también a los diseños factorial fraccionado  $2_{IV}^{4-1}$ ,  $2_{III}^{5-2}$ ,  $2_{III}^{7-4}$ , el primero tendrá los cuatro factores en las columnas y habrá lugar para tres interacciones, en el segundo arreglo se ocupan cinco columnas para los factores y dos para interacciones, en el  $2_{III}^{7-4}$  sólo aplican los factores.

Otros arreglos ortogonales para diseños factoriales con dos niveles son  $AO_4(2^3)$ ,  $AO_{12}(2^{11})$ ,  $AO_{16}(2^{15})$ ,  $AO_{32}(2^{31})$ . Los esquemas, las gráficas lineales y las tablas de interacción para estos arreglos ortogonales se pueden consultar en Phadke (1989) y Peace(1993). Se pensaría, sin embargo, que ante las posibilidades de cómputo vigentes el uso de tablas y figuras como la Tabla 5.30 y Fig. 5.1 ya no son de relevancia actualmente.

#### 5.10.4 Doble arreglo ortogonal

Para la reducción en variabilidad, Taguchi propone un tipo de análisis, novedoso en su momento, como parte de la metodología de diseño robusto: el uso de un diseño doble ortogonal, uno para estudiar efectos de localización y otro, ligado al primero, para estudiar efectos de dispersión (a través de cocientes señal - a - ruido). Dado que el promedio y la variabilidad deben también ser estudiados ante

factores de ruido, este arreglo doble consiste en separar los factores de control del proceso en un arreglo ortogonal, llamado interno, y por ejemplo un  $AO_8(2^7)$  y los factores de ruido (no controlados en la vida real por el experimentador pero sí susceptibles de controlarse en un experimento), en otro arreglo ortogonal, denominado externo. El esquema general de este tipo de experimentos es como se describe en la Tabla 5.31.

Arreglo interno / externo	$AO_m(2^z)$ factores de ruido						
	corrida	1	2	$\dots$	$m$		
$AO_n(2^k)$ factores de control							
$A \quad B \quad \dots \quad K$	$M$ $N$ $\vdots$ $Z$					$\bar{y}$	$S^2$
corrida							
1		$y_{11}$	$y_{12}$	$\dots$	$y_{1m}$	$\bar{y}_{1\bullet}$	$S_1^2$
$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n$		$y_{n1}$	$y_{n2}$		$y_{nm}$	$\bar{y}_{n\bullet}$	$S_n^2$

Tabla 5.31 Doble Arreglo ortogonal

Como se muestra en la Tabla 5.31, se tienen  $m$  valores de la respuesta en cada corrida del arreglo interno, como consecuencia de las  $m$  combinaciones de ruido. El siguiente ejemplo ilustra la aplicación del arreglo doble ortogonal, donde se usa el arreglo ortogonal  $AO_8(2^7)$  para los factores de control, y un solo factor de ruido con dos niveles.

### Ejemplo 5.5

El moldeo por inyección es un proceso utilizado en varias industrias. En una compañía que produce material de hule tienen problemas porque éste sufre de un encogimiento después del curado; se sabe que esto da lugar a un incremento en la variabilidad, por lo que es necesario conocer qué factores afectan al producto. En la tabla de abajo se describen los siete factores de control que intervienen en el proceso, los expertos responsables de la elaboración del producto consideran

que la mezcla ( $M_1$ : mezcla 1,  $M_2$ : mezcla 2) es un factor de ruido.

Factores de control\Niveles	-1	1
A: tamaño de la puerta (cm)	15	30
B: temperatura de moldeo ( $^{\circ}\text{C}$ )	85	125
C: contenido de humedad (%)	20	30
D: tamaño de la cavidad (cm)	40	50
E: tiempo de ciclo (min)	10	15
F: presión (MPa)	60	80
G: velocidad de inyección mm/s	10	20

Se realizó el experimento aleatorizando los tratamientos. El esquema experimental es un doble arreglo ortogonal, los factores de control se asignan en un diseño factorial fraccional  $2_{III}^{7-4}$ . Los resultados del encogimiento del hule se muestran en la Tabla 5.32, y el esquema  $2_{III}^{7-4}$  está escrito de acuerdo al orden estándar.

Trat	A	B	C	D	E	F	G	$M_1$ $y_1$	$M_2$ $y_2$	$\bar{y}$	$S^2$	$\ln S^2$
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	2.8	2.3	2.55	0.125	-2.079
2	1	-1	-1	1	1	-1	1	2.3	2.5	2.40	0.020	-3.912
3	-1	1	-1	1	-1	1	1	1.8	1.7	1.75	0.005	-5.298
4	1	1	-1	-1	1	1	-1	1.9	1.5	1.70	0.080	-2.526
5	-1	-1	1	-1	1	1	1	1.6	1.7	1.65	0.005	-5.298
6	1	-1	1	1	-1	1	-1	1.4	1.9	1.65	0.125	-2.079
7	-1	1	1	1	1	-1	-1	3.0	2.4	2.70	0.180	-1.715
8	1	1	1	-1	-1	-1	1	2.5	2.6	2.55	0.005	-5.298

Tabla 5.32 Resultados del encogimiento del hule

La estrategia de diseño propuesta por Taguchi mediante el arreglo doble ortogonal permite estudiar los efectos de los factores de control sobre un cociente señal a ruido adecuado, por ejemplo  $\ln(s^2)$ , efectos importantes se les llamará efectos de dispersión. A los efectos de factores de control que sean importantes sobre el promedio de las réplicas en este tipo de diseños, se les llamará efectos de localización. En la Tabla 5.33 se muestran los efectos en este ejemplo.

	A	B	C	D	E	F	G
sobre $\bar{y}$	-0.088	0.113	0.038	-0.013	-0.013	-0.863	-0.063
sobre $\ln(S^2)$	-0.14	0.36	0.14	-0.54	-0.32	0.54	1.43

Tabla 5.33 Resumen para determinar el cuadrado medio de los efectos de localización en el Ejemplo 5.5

Con lo que  $G$  tiene un efecto potencial de dispersión y  $F$  un efecto potencial de localización.

En general, para el análisis estadístico exploratorio de efectos estimados en este contexto experimental se recomienda que se realice mediante un gráfico Normal o semi Normal.

### 5.10.5 Un arreglo ortogonal combinado

Una estrategia experimental alternativa al doble arreglo ortogonal es el uso de un arreglo ortogonal combinado en el que se incluyan tanto los factores de control como los factores de ruido. En este caso la variable respuesta es analizada directamente explorando todos los efectos principales de interés, además de permitir explorar efectos principales de factores de ruido, interacciones control - ruido, control - control - ruido. Del estudio de los efectos de interacción entre factores de control y factores de ruido, se seleccionan combinaciones de factores de control en las que  $y$  sea robusta respecto a factores de ruido. Esta estrategia de un arreglo combinado es en general más eficiente que el doble arreglo ortogonal y permite detallar interacciones mencionadas. Sin embargo, debe señalarse que la detección de interacciones ruido - control medianamente importantes estimadas a partir de un arreglo ortogonal combinado puede verse dificultada cuando los efectos de los factores de ruido son muy importantes.

Cuando el arreglo externo es un factorial completo, entonces el arreglo doble se puede analizar como un arreglo combinado. En el ejercicio 5.11 se solicita el análisis de un conjunto de datos utilizando ambas estrategias experimentales, y se apreciarán las diferencias mencionadas entre ellas en lo relativo a las interacciones entre factores de control y factores de ruido, de suma importancia en diseño robusto. Para mayores detalles consulte Wu y Hamada (2000).

En el análisis y detección de efectos de dispersión y efectos de localización es muy importante contar con réplicas. En los casos de experimentos sin réplicas actualmente no es claro cómo realizar el análisis estadístico de efectos de dispersión. Un procedimiento en esta dirección lo propusieron Box y Meyer (1986). Empleando los valores residuales al ajustar un modelo en un experimento sin réplicas proponen estudiar efectos de dispersión mediante el algoritmo siguiente:

1. Ajustar un modelo  $\hat{y}$ .
2. Calcular los residuales  $e = y - \hat{y}$ .
3. Determinar la varianza de esos residuales en cada nivel de los factores utilizados, esto es:  $S_e^2(-)$  y  $S_e^2(+)$ .
4. Evaluar  $Z_c = \ln(S_e^2(+)/S_e^2(-))$ .



5. Decidir descriptivamente sobre la significancia de cada factor en función de  $Z_c$ .

Si bien la propuesta de Box y Meyer ha sido utilizada, Brennenman y Nair (2001) realizan un análisis crítico de este método y otros alternativos, a la fecha propuestos para analizar efectos de dispersión en experimentos sin réplicas. Concluyen que el análisis conjunto de efectos de localización y de efectos de dispersión en experimentos sin réplicas es virtualmente un campo minado, por lo que se requiere cuidado y arrojo.

#### 5.10.6 Sistemas de señal - respuesta

Un sistema señal - respuesta es aquel en el que el esfuerzo radica en que la relación entre la variable respuesta  $Y$  y un factor  $M$  muy significativo en ella, al menos en teoría en un ambiente no ruidoso, opere claramente. A tal factor se le llama factor señal. En este sentido el interés está en

$$Y = g(M)$$

donde  $M$  denota al factor señal. Típicamente  $g$  es monótona. El problema es evaluar cómo tal dependencia entre  $Y$  y  $M$  depende de factores de control y de ruido.

Hay varios tipos de sistema señal - respuesta:

- Sistemas con múltiples objetivos, cuya operación requiere que el valor de una respuesta sea ajustado por medio del cambio del nivel de un factor de control. Por ejemplo, en el sistema de frenado de un auto, la respuesta  $Y$  es la cantidad de torque generado mientras se frena; el factor señal  $M$  es la fuerza del pedalazo, y otros factores de control son el material de las balatas, su forma y el material del rotor; factores de ruido son las condiciones de la superficie de rodamiento, la velocidad y la habilidad del chofer. Aquí el objetivo sería encontrar niveles de los factores de control (un nuevo diseño del sistema de frenado) de tal forma que la relación torque ( $M$ ) - fuerza ( $Y$ ) satisfaga algunos requerimientos y sea robusta a variaciones por ruido. Para obtener una mayor información sobre el manejo del factor señal  $M$ ,

consultar Lunani et al. (1997).

Sistemas de objetivos múltiples	$Y$	$M$
moldeo por inyección	peso de la pieza	presión alta de inyección
moldeo por inyección	tamaño de la pieza	tamaño del molde
maquinado de partes	diámetro de parte	profundidad de corte
maquinado de superficie	rugosidad de superficie	tasa de alimentación
recubrimientos	peso del recubrimiento	área recubierta
frenos de auto	torque generado en el frenado	fuerza del pedalazo
fotografía	imagen fotográfica	verdadera imagen
alimentador de papel	distancia que viaja el papel	rotación del rodillo

- Sistemas de medición, para obtener el estimado de alguna cantidad de interés para una muestra o unidad dada. La cantidad verdadera puede ser considerada como una señal de entrada  $M$ , la cual el sistema convierte en un valor medido o respuesta  $Y$ . La precisión con la que  $M$  puede ser estimada basándose en  $Y$  es determinada por la relación  $Y = g(M)$ . Identificando factores de control y de ruido, el propósito del experimento es el de identificar condiciones de los factores de control que hagan a  $Y$  sensible ante cambios en el factor señal, pero insensible ante cambios en los factores de ruido.

Sistemas de medición	$Y$	$M$
desbalanceo en flecha automotriz	lectura de máquina	desbalance
corriente parásita en medición	intensidad de feedback	dureza de la superficie
de dureza de una superficie		
sensor del enfriador de motor	voltaje de salida	temperatura del "anticongelante"

- Sistemas de control usado en control feed - forward o feedback.

Sistema de control	$Y$	$M$
maniobrabilidad de un vehículo	radio de la vuelta de un vehículo	ángulo del volante
temperatura de agua de la regadera	temperatura del agua	cantidad de ajuste
termostato	on/off	temperatura
transductores para control adaptativo	fuerza	voltaje

En general la experimentación en sistemas señal - respuesta debe intentar encontrar condiciones en las que el efecto del factor señal sea grande en relación al ruido circundante. Un enfoque experimental para el estudio y mejora de sistemas señal - ruido es el denominado Response Function Modeling (RFM) propuesto por Wu y Hamada (2000) en los dos siguientes pasos:

- Para cada combinación de factores de control / ruido en el experimento ajuste un modelo de regresión lineal o no lineal de los valores de la respuesta sobre los niveles del factor señal.
- Obtenga modelos para cada uno de los parámetros estimados del modelo en el paso anterior, como funciones de los factores de control y de ruido.

**Ejemplo 5.6** El sistema (una máquina de moldeo por inyección) fue requerido para inyectar cantidades diferentes de material para aplicaciones distintas. Entonces se requiere de un método confiable de control de la cantidad de material inyectado que sea necesario. Este ejemplo se estudia en Wu y Hamada (2000), aquí se reproduce para presentar algunos aspectos de análisis no considerados por ellos.

El peso de la pieza fue identificado como la variable respuesta y la presión alta de inyección como el factor de señal ( $M$ ), debido a que se sabe de su capacidad para cambiar la cantidad de material inyectado.

Siete factores de control  $A, B, C, D, E, F, G$ , cada uno a dos niveles, fueron además incluidos en el experimento porque se pensó que tenían efectos potenciales en la variabilidad del peso de la parte.

Factor de control	-1	+1
$A$ : velocidad de inyección	0.0	2.0
$B$ : tiempo de presión(seg)	44	49
$C$ : tiempo de alta iny(seg)	6.3	6.8
$D$ : tiempo de baja iny(seg)	17	20
$E$ : cantidad de presión (psi)	1700	1900
$F$ : enfriamiento por agua( $^{\circ}F$ )	70	80
$G$ : presión de baja iny (psi)	550	650

Tabla 5.37 Factores y niveles del Ejemplo 5.6

Cuatro factores de ruido fueron identificados pero se eligieron niveles de tal manera que se conformara un factor de ruido combinado  $N$ , de la siguiente forma,

evitando experimentación excesiva respecto a factores de ruido:

	Factores de ruido	Nivel		Factores de ruido	Nivel
$X_N = -1$	índice de fundido	18	$X_N = 1$	índice de fundido	22
	% de remolido	5%		% de remolido	0%
	operador	nuevo		operador	Experto
	humedad de resina	alto		humedad de resina	baja

Tabla 5.38 Factor compuesto y sus niveles del Ejemplo 5.6

El experimento fue corrido en dos días; en el primer día el factor de ruido compuesto fue ubicado en su nivel bajo y entonces los factores de control fueron variados usando un diseño  $2^{7-4}$ :

Trat	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
1	1	1	-1	-1	1	-1	1
2	1	1	-1	1	-1	1	-1
3	1	-1	1	-1	1	1	-1
4	1	-1	1	1	-1	-1	1
5	-1	1	1	-1	-1	-1	-1
6	-1	1	1	1	1	1	1
7	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
8	-1	-1	-1	1	1	-1	-1

Tabla 5.39 Diseño para factores de control del Ejemplo 5.6

Para cada combinación de factores de control, el factor señal fue variado de 650 a 1000 psi en incrementos de 50 psi. Cuatro partes fueron hechas y pesadas en cada presión. En el segundo día, el procedimiento fue replicado en el nivel alto del factor de ruido combinado. Los datos se muestran en las Tablas 5.40a y 5.40b.

Para cada combinación del factor de ruido con el diseño  $2^{7-4}$  de los factores de control, se ajustaron polinomios cuadráticos de la respuesta versus el factor señal:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 M + \beta_2 (M - cM)^2 + \varepsilon \quad (5.4)$$

porque así lo sugieren los datos, véase las Fig. 5.2 en cada una las 16 corridas.

señal	650	700	750	800	850	900	950	1000	$X_N$
fila	639.7	642.3	645.5	653.9	666.6	672.1	692.2	711.6	
1	640.5	641.7	644.8	655.1	665.8	670.8	690.6	710.8	-1
	636.2	643.6	646.1	654.7	667.1	673.3	689.7	711.1	
	637.2	644	644.3	654.2	665.4	671.1	689.8	710.5	
	634.4	639.9	642.6	650.2	659.9	666.8	678.4	708.3	
2	632.9	640.8	640.4	651.6	660.3	660.3	682.6	710.1	-1
	633.7	641.1	643.1	650.9	657.9	659.8	681.8	707.7	
	635.8	642.4	641.9	653.2	662.1	661.5	683.2	706.6	
	640.2	646.1	647.2	655.5	666.2	671	688.6	708.9	
3	638.1	644.4	646	654	667.3	673.6	687.5	710	-1
	637.3	644.4	647.5	653.8	669.1	672.4	691	711.3	
	639.1	641.2	644.3	652.8	664.7	672.2	693.1	708.4	
	641.1	644.5	647.2	652	665.3	669.2	688.7	709.8	
4	642.1	647.3	644.8	654.6	661	671.1	690.4	710.1	-1
	642	642.8	646	653.8	659.7	670.1	686.3	707.7	
	641.8	643.9	646.3	651.7	662.4	671.1	685.8	706.4	
	640.8	644.7	647.6	652.3	661.1	673	685.7	706.4	
5	641.1	645.3	646.8	654.5	662.8	673.2	686.7	707.7	-1
	641.2	644.6	647.3	653.9	659.2	672.5	686.2	706.9	
	641.6	645	647.5	653.6	659.9	673.7	686.1	706.3	
	650.4	655.4	659.7	665.8	671	677.7	695.6	716.5	
6	650.8	655	660.2	665.9	670.8	677.5	696.8	717	-1
	651.2	654.6	660.3	665.9	671.2	678.2	694.3	718.3	
	650.7	654.9	659.3	666.4	670.5	677.8	696.1	717.6	
	639.6	643.8	648.2	655.7	665.2	674.8	691.7	710.1	
7	639.4	644.2	647.3	656	664.8	675.3	691.4	711.4	-1
	639.9	644.1	647.2	655.5	664.3	675	691.8	710.3	
	640	644.4	647.8	656.2	663.9	675.1	692.3	711.1	
	636.5	641.8	645.2	653.8	662.8	671.8	689.4	709.7	
8	636.2	640.6	646.1	653.9	662.3	671.6	689.1	709.6	-1
	635.7	640.5	645.5	653.9	662.1	671.6	689.6	709.7	
	636.1	640.3	645	653.6	662.4	671.6	689.3	709.3	

Tabla 5.40a Datos del Ejemplo 5.6

	señal	650	700	750	800	850	900	950	1000	$X_N$
fila		640.1	644.4	647.6	655.2	664.8	674.4	693.2	709.8	
1		641.2	646.2	646.3	657.3	669.7	671.3	689.4	714.2	1
		633.6	642.8	647.2	656.4	668.3	676.7	691.1	717.2	
		638.2	643.9	647.8	658	669.2	675.1	695.3	704.5	
		638.6	645.3	645.5	655.1	662.1	670.8	692.3	711.8	
2		636.3	640.2	642.1	654.3	663.6	668.2	691.1	712.3	1
		634.4	641.8	642.1	653.3	660.7	672.3	690.5	714.6	
		638.2	641.1	644.3	654.6	667.1	674.3	686.7	710.1	
		642.6	648.3	650	657.3	666.3	675.2	695.2	714.6	
3		640.2	642.9	648.2	659.4	667.3	674.4	691.4	713.7	1
		641.6	646.1	647.9	658.1	670.1	676.6	689.9	714.2	
		639.9	645.2	649.9	660	671.5	678.2	699.2	709.9	
		643.8	649.8	650.6	658.3	666.2	673.2	696.6	713.8	
4		641.6	646.3	649.7	657.9	666.8	675.8	691.2	711.7	1
		642.2	645.2	648.2	659.1	670.2	675.8	690.2	711.8	
		643.6	647.2	650.1	660	671.8	678.2	690.6	712.2	
		642.6	645.6	647.9	654.6	666.8	672.3	687.9	709.8	
5		641.8	645.8	648.2	655.2	665.7	674.6	688.8	710.2	1
		642	645.7	648	654.7	665.8	673.9	689.3	711.3	
		642.3	646	647.8	654.9	669.2	675.4	688.6	710.7	
		650.6	655.7	660.2	667.8	671.1	678.9	694.7	718.4	
6		650.2	656.2	659.7	666.5	672	679.3	693.3	720.2	1
		651.3	655.5	659.4	666.7	671.7	679.1	696.8	716.6	
		650.1	656	658.9	666.6	671.4	678.6	692.1	717	
		639.9	644.1	647.6	656.3	664.8	675.3	693.1	709.9	
7		640.2	644.6	648	656	665.2	674.7	692.8	711.4	1
		640.3	645	648.2	656.4	665.1	674.9	691.9	712.2	
		640.1	644.7	647.8	656.7	665.5	675.2	692.4	711.6	
		637.7	642.9	647.3	651.1	665	673.2	689.6	710.9	
8		638.1	643.4	647.3	655.4	664.7	672.8	689.9	709.3	1
		638.2	643	646.8	655.4	664.5	673.4	690.7	708.6	
		638.4	642.9	647	655.2	664.8	672.8	690.2	709.1	

Tabla 5.40b Datos del Ejemplo 5.6

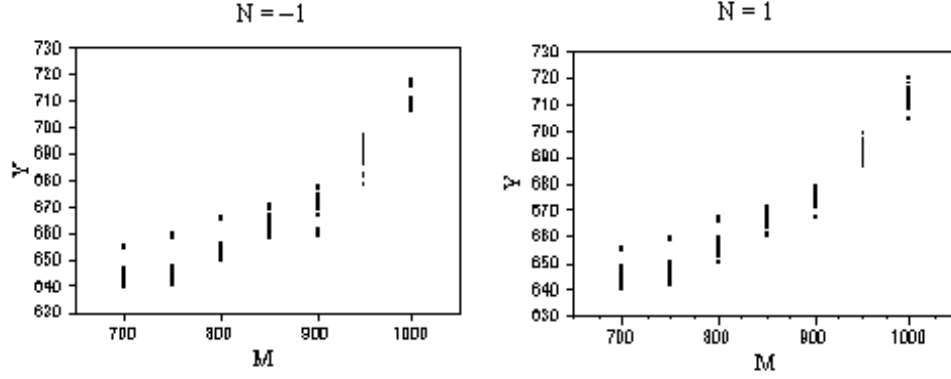


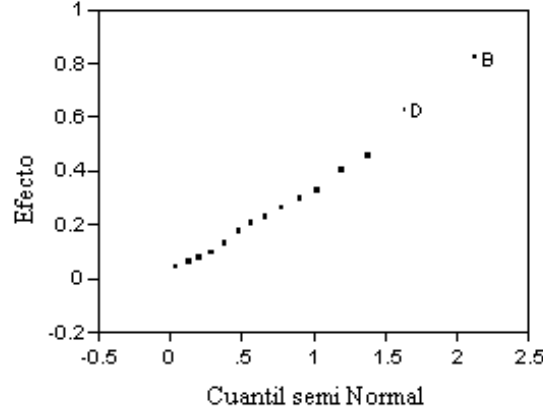
Fig. 5.2: Relación respuesta  $y$  versus factor señal  $M$ , para los casos de  $N = -1$  y  $N = 1$

Dado que se cuenta en este ejemplo con réplicas, es posible separar dos tipos de variabilidad del error: la variabilidad debida a posible carencia de ajuste del modelo propuesto a los datos y la variabilidad debida al llamado error puro que representa la variabilidad entre réplicas, respectivamente denotadas por  $\sigma_l^2$  y  $\sigma_p^2$ , que se estiman por un método presentado en el Capítulo 8.  $\sigma_l^2$  representa un comportamiento sistemático en los datos no explicado por el modelo propuesto, que se estima mediante (detalles en el Capítulo 8 de este texto)

$$\sum n_i(\hat{y}_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2 / (\# \text{ total de corridas} - \# \text{ de tratamientos}),$$

mientras que  $\sigma_p^2$ , la variabilidad pura de una UE, es estimada mediante

$$\sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2 / (\# \text{ de tratamientos} - \# \text{ de efectos estimados})$$

Fig. 5.3: Gráfica semi Normal del Ejemplo 5.6 para el caso de  $\ln \sigma_l^2$ 

Ajustando el modelo (5.4), resultan los siguientes coeficientes estimados:

	$N = -1$					$N = 1$				
$T$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2^*$	$\hat{\sigma}_l^2$	$\hat{\sigma}_p^2$	$\hat{\beta}_0$	$\hat{\beta}_1$	$\hat{\beta}_2^*$	$\hat{\sigma}_l^2$	$\hat{\sigma}_p^2$
1	493.45	.1995	5.3	27.38	1.21	494.58	.2010	4.7	22.48	7.78
2	497.31	.1878	5.9	107.25	3.21	487.68	.2048	5.8	28.42	4.45
3	497.93	.1947	5.1	25.39	2.70	497.43	.1993	4.9	17.15	4.99
4	505.89	.1821	6.2	14.57	2.64	504.60	.1957	5.0	19.25	3.53
5	509.49	.1786	5.6	10.19	0.56	505.52	.1863	5.5	19.74	0.67
6	523.92	.1734	5.5	53.12	0.30	524.64	.1732	5.3	59.14	1.00
7	497.02	.1968	5.2	7.23	0.18	497.09	.1971	5.3	9.23	0.21
8	490.97	.2011	5.2	15.77	0.12	496.71	.1960	5.9	12.85	0.75

Tabla 5.41. Coeficientes estimados para el modelo (5.5)  
del Ejemplo 5.6

Ahora en una segunda etapa se pretende estudiar los efectos de los factores de control sobre tales valores estimados. Para los casos de  $\hat{\sigma}_l^2$  y  $\hat{\sigma}_p^2$  su estudio típicamente requiere de usar la transformación logaritmo para minimizar desviaciones de los supuestos del modelo lineal utilizado. Así para  $\ln \hat{\sigma}_l^2$  se puede apreciar qué factores son importantes en la carencia de ajuste del modelo cuadrático propuesto, a partir de la Fig. 5.3.



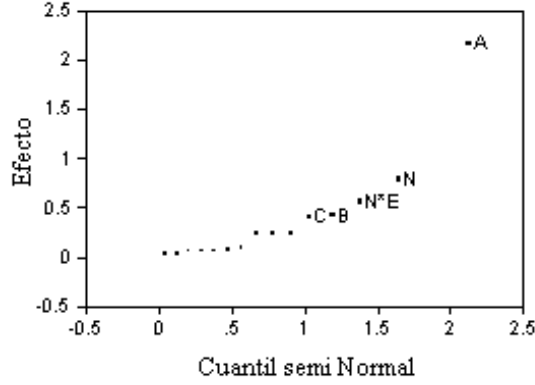


Fig. 5.4: Gráfico semi Normal del Ejemplo 5.6 para el caso de  $\ln \sigma_p^2$

Por lo que el modelo resultante es

$$\ln \hat{\sigma}_l^2 = 3.06 - 0.41x_B + 0.31x_D.$$

Este tipo de variabilidad por carencia de ajuste se puede reducir en el nivel alto de  $B$  y en el nivel bajo de  $D$ .

Para  $\ln \hat{\sigma}_p^2$ , observando la Fig. 5.4, los factores importantes son  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $E$ ,  $NE$  y  $N$ , por lo que el modelo ajustado es:

$$\ln (\hat{\sigma}_p^2) = 0.12 + 1.10x_A - 0.22x_B + 0.22x_C + 0.04x_E - 0.28x_{NE} - 0.41x_N$$

Al poner  $A$  como su nivel bajo,  $B$  alto,  $C$  bajo y dada la interacción  $NE$  (vea la Fig. 5.5), observando los efectos de interacción suponiendo  $A$ ,  $B$  y  $C$  como se mencionó, se tiene que es mejor poner a  $E$  en su nivel bajo porque la variación entre partes del mismo diseño será menor al cambiar el nivel del factor combinado de ruido.

Para  $\hat{\beta}_1$  a partir de la Fig. 5.6, se aprecia que  $C$  es importante en sus efectos sobre el parámetro del efecto lineal del factor señal, con lo que el modelo ajustado es:

$$\hat{\beta}_1 = 0.1914 - 0.0066x_C$$

El factor  $C$  puede ser usado para aumentar la sensibilidad (lineal) ante el factor señal: en su nivel bajo elevará tal sensibilidad.

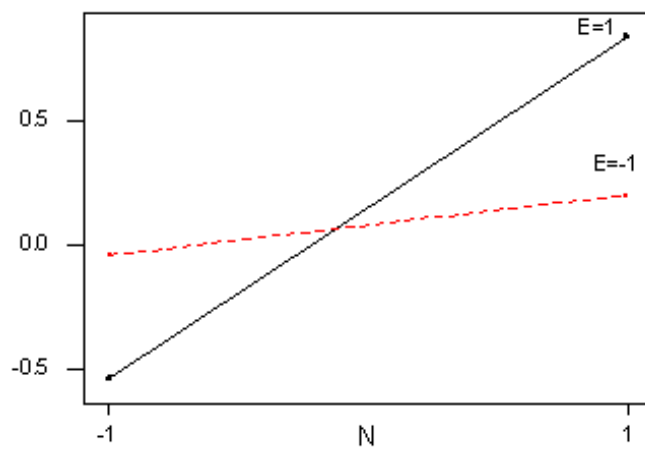


Fig. 5.5: Gráfica de interacción  $NE$  sobre  $\ln \sigma_p^2$  en el Ejemplo 5.6

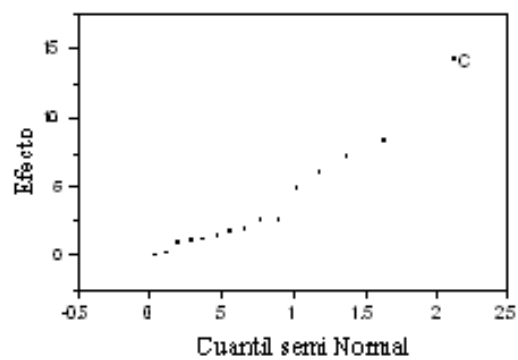
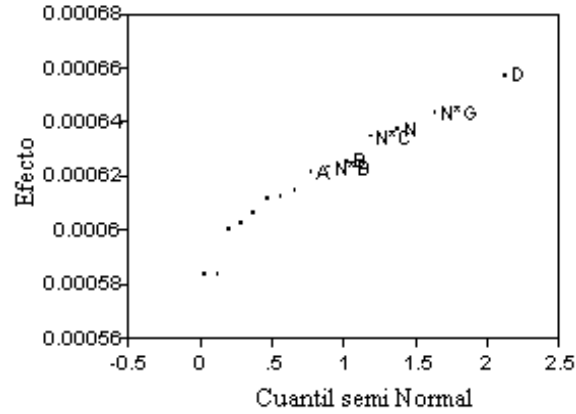


Fig. 5.6: Gráfico semi Normal para efectos sobre  $\hat{\beta}_1$  en el Ejemplo 5.6

Fig. 5.7: Gráfico semi Normal de efectos sobre  $\hat{\beta}_2$  en el Ejemplo 5.6

Para  $\hat{\beta}_2$  de la Fig. 5.7 se puede observar que no hay efectos claramente importantes.

Por lo tanto la curvatura no es resultado de los tratamientos manipulados en el experimento, sino al parecer sólo es propia de la relación entre la respuesta y el factor señal.

Finalmente para  $\hat{\beta}_0$ , observando la Fig. 5.8, resulta que  $A, B, C, D$  y  $G$  son importantes en sus efectos sobre la ordenada al origen, por lo que el modelo ajustado es:

$$\hat{\beta}_0 = 501.51 - 4.15x_A - 3.06x_B + 7.16x_C + 2.45x_D + 3.64x_G$$

De lo anterior se puede sugerir lo siguiente:

Factor	Nivel recomendado
$A$ :	bajo
$B$ :	alto
$C$ :	bajo
$D$ :	bajo
$E$ :	bajo
$F$ :	según el requerimiento sobre $\beta_0$
$G$ :	según el requerimiento sobre $\beta_0$

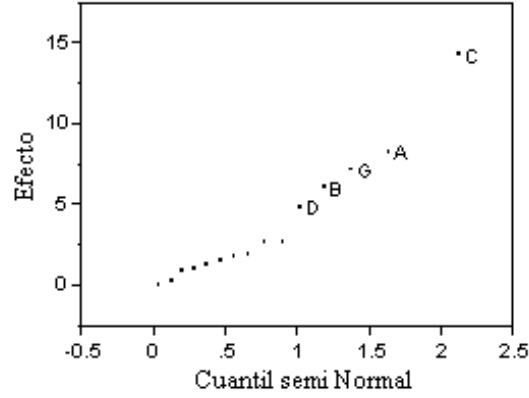


Fig. 5.8: Gráfico semi Normal de efectos sobre  $\hat{\beta}_0$  en el Ejemplo 5.6

### Selección de esquema experimental

En este tipo de sistemas señal - respuesta, como se ha visto, se tienen tres tipos de factores: control ( $C$ ), señal ( $S$ ) y de ruido ( $N$ ). En general dos tipos de arreglos son los cruzados y los únicos; por ejemplo,  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$  denota un arreglo cruzado que consiste en todas las combinaciones de niveles entre aquellos factores que se encuentren en  $\mathcal{A}$ , y aquellos factores en  $\mathcal{B}$  (a la Taguchi inner - outer array). Un arreglo único, denotado por  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  es un arreglo con las combinaciones de niveles de  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$ , pero en el que se pueden aplicar patrones de confusión - resolución económicas, eventualmente. Los arreglos cruzados generalmente implican costos de experimentación altos y por ello se usan factores de ruido combinados en dos niveles; estos factores combinados de ruido sin embargo, no se garantiza en general que representen condiciones extremas de ruidos de interés.

En el contexto de sistemas señal - respuesta, las posibilidades de selección de esquemas experimentales son las siguientes:

1.  $C \times N \times S$  arreglo cruzado: todas las combinaciones de niveles de todos los tipos de factores.
2.  $(C, N) \times S$  arreglo único de factores de control y de ruido; una vez seleccionado un esquema económico correspondiente, se cruzan todos los tratamientos con todas los niveles del factor señal.
3.  $C \times (N, S)$  arreglo único de factores de ruido y el factor señal; una vez seleccionado un esquema económico correspondiente, se cruza con todos los tratamientos de factores de control.

4.  $(C, S) \times N$  arreglo único de factores de control y el factor señal; una vez seleccionado un esquema económico correspondiente, se cruza con todos las condiciones de las combinaciones de niveles de factores de ruido.

El esquema del experimento de moldeo por inyección corresponde a 1. En general el esquema más recomendable es 1 si no hay problemas por costo implicado; si el costo es importante la estrategia 2 sería la opción.

Además, la selección de un esquema experimental debe tomar en cuenta las restricciones en el manipuleo de factores que se sean difíciles de cambiar en sus niveles, llevándonos a consideraciones de diseños de parcelas divididas en donde efectos de tales factores sean los candidatos naturales a ser confundidos.

Para mayores detalles consulte a Wu y Hamada (2000). Finalmente, el estudio de sistemas señal - respuesta puede ser realizado como un caso particular de modelos lineales funcionales (Ramsay y Silverman, 2005).

## 5.11 Ejercicios

**Ejercicio 5.1** En un proceso de moldeo por inyección se obtienen paneles estructurales de películas de plástico. El grado de delgadez de la hoja (mm) es una variable respuesta de calidad crítica para el proceso. Los factores son:

Factores\Niveles	-1	1
A: velocidad de inyección (m/seg)	1.0	2.25
B: tiempo de cura (seg)	150	200
C: temperatura del molde ( $^{\circ}C$ )	40	80
D: temperatura de fundido ( $^{\circ}C$ )	250	300

El generador es  $I = +ABCD$ . A continuación se muestran los resultados que se obtienen al realizar el experimento, éstos representan a los tratamientos escritos en el orden estándar: 37, 42, 29, 39, 44, 21, 35, 12.

Escriba el diseño. Indique la estructura alias del diseño. Realice el análisis y obtenga sus conclusiones. Verifique los supuestos estadísticos que se requieren para hacer la inferencia.

**Ejercicio 5.2** Un ingeniero está interesado en mejorar la eficiencia de una operación de limpieza. La máquina limpiadora usa una brocha de acero para remover el material. Se identifican cinco factores como posibles causas que afectan

la razón del material removido.

Factores\Niveles	-1	1
<i>A</i> : diámetro del filamento (mm)	20	25
<i>B</i> : longitud del filamento (cm)	3	6
<i>C</i> : número de filamentos	15000	20000
<i>D</i> : ancho de la brocha (cm)	2	5
<i>E</i> : profundidad de entrada (cm)	25	40

Se planteó un diseño fraccionando  $2^{5-2}$ , los generadores son  $I = -ABD$ ,  $I = +ACE$ . Escriba la tabla que muestre el diseño. Los resultados que se obtienen al realizar el experimento son: 145, 184, 125, 147, 170, 132, 123, 96, representan a los tratamientos escritos en el orden estándar. La variable de respuesta es el volumen  $\times 10^{-7}$  rev. ¿Cuáles fueron los factores más significativos? ¿Cuál combinación tiene el mejor resultado?

**Ejercicio 5.3** Los siguientes datos se obtuvieron en un estudio de un sistema solar de calefacción de agua; los factores analizados fueron *A*: la intermitencia en la radiación solar, *B*: el flujo del agua a través del sistema, *C*: capacidad de almacenamiento del agua, *D*: total de insolación diaria; cada factor tiene dos niveles. Se construyó un modelo y con ello se midió *Y*: la eficiencia de la distribución de energía. Los datos se muestran siguiendo el orden estándar, para un diseño  $2^4$ .

tratamiento	1	2	3	4	5	6	7	8
<i>Y</i>	45	82	50	68	63	81	47	65
tratamiento	9	10	11	12	13	14	15	16
<i>Y</i>	63	79	46	64	62	80	40	64

1. Estime los efectos principales y de interacción, interpréte los con las gráficas de probabilidad semi Normal y Pareto.
2. Realice el análisis de varianza e interprete. Auxíliese con otras gráficas.
3. Fraccione el experimento usando como generador  $I = -ABCD$ , haga el mismo análisis anterior e indique sus conclusiones.

**Ejercicio 5.4** Se desea realizar un experimento que sea un cuarto del diseño  $2^5$ , es decir  $2^{5-2}$ , se proponen como generadores  $I_1 = +ABD$  y  $I_2 = +CDE$ .

1. Indique qué tratamientos aparecerán en la fracción  $(+, +)$ .
2. Escriba la estructura alias.

3. Indique cuál es la resolución de ese diseño y por qué.
4. ¿Es éste un diseño saturado?, ¿por qué?
5. Escriba la expresión para estimar el efecto del factor  $C$ .

**Ejercicio 5.5** En la extrusión de un polímero fundido para fabricar fibras y películas de plástico. Se considera que los factores que se citan abajo provocan cambios estructurales que afectan la resistencia del polímero a la foto-oxidación.

Factores\Niveles	-1	1
$A$ : control de la tensión manual automática	1	2
$B$ : temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ )	100	140
$C$ : velocidad de alimentación (cm/seg)	25	35
$D$ : mezclado	simple	doble
$E$ : máquina	#1	#2
$F$ : humedad (%)	20	30

El experimento se realizó mediante un diseño de Plackett - Burman, los resultados de la resistencia que se obtuvieron al efectuar el experimento son: 82, 96, 65, 67, 58, 67, 46, 90, 88, 42, 99, 50; este orden corresponde al generador del diseño Plackett-Burman, en este caso es:  $11 - 1111 - 1 - 1 - 11 - 1$ , generado por renglones.

Describa el diseño. Estime los efectos y represente mediante una gráfica estos efectos. Use un gráfico probabilístico Normal o semi Normal para ver qué efectos son significativos. Realice el análisis de varianza de estos datos.

**Ejercicio 5.6** Producción de aceite de cacahuete. Se realizó una investigación para extraer aceite de cacahuete usando dióxido de carbono ( $\text{CO}_2$ ) a presiones muy altas. El investigador considera que cinco factores son importantes y se propuso manejar cada uno en dos niveles, pero debido a la lentitud para realizar el experimento fue necesario usar una fracción de éste. Así se propuso un diseño  $2^{5-1}$ ; los factores propuestos son:  $A$ : presión  $\text{CO}_2$ ,  $B$ : temperatura  $\text{CO}_2$ ,  $C$ : mezcla de cacahuete,  $D$ : razón de flujo del  $\text{CO}_2$  y  $E$ : tamaño del cacahuete. El generador que se empleó para construir la fracción  $I = +ABCDE$ .

Las respuestas son la  $Y_1$  = solubilidad y la  $Y_2$  = producción. A continuación se muestran las respuestas experimentales siguiendo el orden estándar:

$Y_1 = 29.2, 23, 37, 139.7, 23.3, 38.3, 42.6, 141.4, 22.4, 37.2, 31.3, 48.6,$   
 $22.9, 36.2, 33.6, 172.6.$

$Y_2 = 63, 21, 36, 99, 24, 66, 71, 54, 23, 74, 80, 33, 63, 21, 44, 96.$

1. Describa el esquema experimental. Estime los efectos para cada respuesta y represéntelos en una gráfica.

2. Construya un gráfico probabilístico Normal o semi Normal con las observaciones  $Y_1$  y  $Y_2$ , interprete estas gráficas.
3. Bosqueje mediante una gráfica las observaciones y determine intuitivamente un óptimo común.
4. Realice el análisis de varianza para ambas respuestas.

**Ejercicio 5.7** En un diseño experimental con cinco factores de dos niveles se desea estudiar  $Y$ : la profundidad de corte medida en mm. En el cuadro de abajo se muestran los cinco factores con sus respectivos niveles. Existe el interés por conocer los factores que influyen en la profundidad de corte y se desea controlar el efecto de dispersión. Dada la cantidad de pruebas experimentales se decidió un diseño factorial fraccionado  $2^{5-2}$ . Las fracciones consideradas son:  $I_1 = +ABD$  y  $I_2 = -ACE$ . Explique cómo haría el experimento.

Factores\Niveles	-1	1
A: tipo de herramienta	1	2
B: ángulo de corte	15	30
C: velocidad de corte (cm/seg)	25	35
D: tipo de corte	continuo	interrumpido
E: material a cortar (elasticidad)	poca	mediana

Trat	A	B	C	$D = +AB$	$E = -AC$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\bar{y}$	$\ln S^2$
1	-1	-1	-1	1	-1	24.3	25.2	26.3		
2	1	-1	-1	-1	1	27.6	26.6	27.4		
3	-1	1	-1	-1	-1	28.2	27.1	25.5		
4	1	1	-1	1	1	20.2	20.6	22.1		
5	-1	-1	1	1	1	18.7	17.8	20.7		
6	1	-1	1	-1	-1	30.5	34.4	36.7		
7	-1	1	1	-1	1	21.8	22.0	24.5		
8	1	1	1	1	-1	33.1	33.0	34.4		

1. Identifique la estructura alias de este diseño.
2. Calcule la media y la desviación estándar de cada tratamiento.
3. Estime los efectos de localización y de dispersión y gráfíquelos.
4. Use un gráfico semi Normal en cada caso para evaluar la significancia de los efectos.



**Ejercicio 5.8** En la industria del calzado se desea lanzar al mercado una nueva suela. Antes de llevarla al proceso se hacen varias pruebas en el laboratorio con el objetivo de minimizar el encogimiento de la suela, medido en  $\text{mm} \times 10^{-2}$ . Cinco factores se consideran como apropiados para probar la respuesta.

Factores\Niveles	-1	1
<i>A</i> : temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ )	120	160
<i>B</i> : presión máquina	65	80
<i>C</i> : tiempo de ciclo (min)	25	35
<i>D</i> : humedad de solventes	15%	25%
<i>E</i> : formulación	mezcla 1	mezcla 2

El diseño propuesto es un diseño  $2^{5-1}$ , con el generador  $I = -ABCDE$ . Los resultados del experimento siguiendo el orden estándar son: 59, 98, 318, 580, 41, 149, 261, 590, 79, 120, 342, 585, 162, 50, 368, 520.

1. Describa el diseño. Estime los efectos de los factores. Ajuste e interprete el modelo.
2. Estime los residuales  $e : y - \hat{y}$ . Verifique si hay efectos de dispersión.

**Ejercicio 5.9** Una industria vende un producto químico a una empresa que elabora pinturas; esta última le pide a la compañía química que desarrolle un producto con el menor número de impurezas. Las pruebas se hacen a nivel laboratorio para alcanzar un producto con menos impurezas, y para ello los factores que se consideran importantes en este proceso se muestran en la tabla, entre éstos existe un factor de ruido el cual corresponde a dos diferentes proveedores. El experimento se realiza para estos proveedores.

Factores\Niveles	-1	1
<i>A</i> : temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ )	180	220
<i>B</i> : concentración	20	40
<i>C</i> : catalizador	<i>C</i> 1	<i>C</i> 2
<i>D</i> : tiempo de operación (min)	30	45
<i>E</i> : proveedor	prov 1	prov 2

trat	A	B	C	$D = -ABC$	prov 1	prov 2	$\bar{y}$	$S^2$
1	-1	-1	-1	1	41	39		
2	1	-1	-1	-1	50	46		
3	-1	1	-1	-1	50	42		
4	1	1	-1	1	54	56		
5	-1	-1	1	-1	26	30		
6	1	-1	1	1	19	15		
7	-1	1	1	1	31	33		
8	1	1	1	-1	21	19		

1. Calcule la media y la desviación estándar de cada tratamiento.
2. Estime y grafique los efectos para la localización y dispersión. Comente y concluya.

**Ejercicio 5.10** Evaluación de la productividad. Un ingeniero desea evaluar la productividad, la cual se mide mediante el número de piezas producidas por un empleado en una semana. Para ello considera el factor A, años de experiencia, con dos niveles, (nivel -1: regular, nivel 1: suficiente) y el factor B, uso de tres equipos diferentes, con tres niveles (nivel -1: Bo, nivel 0: Me, nivel 1: To). Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

A	B	$y_1$	$y_2$	$\bar{y}$	$S^2$
-1	-1	56	52		
1	-1	55	49		
-1	0	71	77		
1	0	76	80		
-1	1	50	48		
1	1	51	55		

1. Haga las gráficas para representar los promedios de cada factor, ¿qué observa?
2. Grafique la interacción.
3. Estime los efectos del factor A y del factor B.
4. Realice el análisis de la varianza, ¿qué hipótesis estadísticas prueba? Obtenga sus conclusiones.

**Ejercicio 5.11** El proceso de teñido se emplea en la industria textil, curtiduría, vinílicas; la finalidad de éstas es tener productos con un teñido adecuado, la adherencia es una respuesta de interés en estos casos. A continuación se presenta un experimento en un doble arreglo ortogonal, se tienen 5 factores de control y dos factores de ruido como se describe en la siguiente tabla.

Factores de control\Niveles	- 1	1
<i>A</i> : contenido de sal u.	30	75
<i>B</i> : razón de líquido u/s	35	70
<i>C</i> : temperatura de teñido °C	20	40
<i>D</i> : clases de tinte	nuevo	actual
<i>E</i> : pH	7	8

Factores de ruido\Niveles	-1	1
<i>L</i> : cantidad de tinta	1%	3%
<i>M</i> : sustancia de fijación	sin	con

El arreglo ortogonal para los factores de control es  $2^{5-2}$ , empleando los generadores  $D = -AB$  y  $E = -AC$  se construye el arreglo. Por la estructura alias que se genera también se puede y se desea estimar los efectos de las interacciones  $BC$  y  $BE$ . El otro arreglo es un diseño factorial  $2^2$ , la estructura del diseño con sus resultados se muestran en la siguiente tabla.

								$L$	-1	1	-1	1
								$M$	-1	-1	1	1
trat	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$BC$	$-BE$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	
1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	7.8	14.9	8.5	15.1	
2	1	-1	-1	1	1	1	1	8.6	17.0	8.4	18.0	
3	-1	1	-1	1	-1	-1	1	7.6	13.1	8.1	12.6	
4	1	1	-1	-1	1	-1	-1	8.8	18.5	9.0	18.7	
5	-1	-1	1	-1	1	-1	1	7.7	14.7	8.0	14.1	
6	1	-1	1	1	-1	-1	-1	9.4	17.9	9.5	17.6	
7	-1	1	1	1	1	1	-1	8.3	15.0	8.7	15.1	
8	1	1	1	-1	-1	1	1	9.5	19.6	9.4	19.3	

1. Utilizando el doble arreglo ortogonal determine efectos de localización y de dispersión a partir del estudio de efectos de *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *BC* y *BE*.
2. Utilizando un solo arreglo ortogonal en donde se incluya a *L* y a *M* como columnas adicionales, incluya en el modelo por supuesto a *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *BC*, *BE*, pero además a *L*, *M* y todas las interacciones de estos dos últimos con *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *BC* y *BE*.

3. Compare resultados de ambas estrategias y obtenga sus conclusiones.

**Ejercicio 5.12** Con base en los resultados del ejercicio 5.10, estime  $(\ln S^2)$  para cada tratamiento, haga el análisis estadístico que permita conocer la existencia de algún efecto de dispersión, realice una evaluación conjunta de las respuestas  $\bar{y}$  y  $(\ln S^2)$ .

**Ejercicio 5.13** Una empresa automotriz requiere de un tipo de piel para forrar asientos; entre las características de interés que necesita está la resistencia al rasgado. Uno de sus proveedores realiza un experimento para estudiar tal característica, cinco son los factores que influyen en la resistencia al rasgado, los cuales se muestran a continuación.

Factores de control \ Niveles
A: velocidad de planchado
B: tiempo de evaporación
C: temperatura de planchado °C
D: mezcla de resinas
E: mezcla de solventes

Cada factor se maneja experimentalmente en dos niveles. Se utilizó un diseño factorial fraccionado  $2^{5-1}$ , con el generador  $I = ABCDE$ ; los resultados al realizar el experimento se muestran en la siguiente tabla:

trat	A	B	C	D	E	y	$y - \hat{y}$
1	-1	-1	-1	-1	1	75	-5.25
2	1	-1	-1	-1	-1	87	6.75
3	-1	1	-1	-1	-1	81	0.75
4	1	1	-1	-1	1	78	-2.75
5	-1	-1	1	-1	-1	56	7.50
6	1	-1	1	-1	1	35	-13.5
7	-1	1	1	-1	1	51	2.50
8	1	1	1	-1	-1	52	3.50
9	-1	-1	-1	1	-1	63	3.25
10	1	-1	-1	1	1	57	-2.75
11	-1	1	-1	1	1	59	-0.75
12	1	1	-1	1	-1	60	0.25
13	-1	-1	1	1	1	63	7.25
14	1	-1	1	1	-1	51	-4.75
15	-1	1	1	1	-1	53	-2.75
16	1	1	1	1	1	56	0.25

1. Estime los efectos de cada factor y de sus interacciones siguiendo el procedimiento señalado en los apartados anteriores.
2. Realice el análisis de varianza para establecer qué factores son significativos.

**Ejercicio 5.14** En un proceso en el que se pintan piezas metálicas, se quiere alcanzar una delgadez de 0.500mm en el espesor de la capa de pintura con la menor variación posible. Esto beneficia al resultado final en la línea de producción por varios motivos, entre ellos el ahorro de pintura y la presentación final del producto. Cuatro factores de control y dos de ruido se consideran importantes para su efecto en la respuesta, los factores y sus niveles se describen a continuación:

Factores de control\Niveles	-1	1
A: sustancia química.	10	20
B: presión del fluido	15	30
C: temperatura de quemado °C	68	78
D: proveedor	1	2

Factores de ruido\Niveles	-1	1
P: velocidad de la cadena	v1	v2
Q: proporción de esmaltes	e1	e2

El experimento se realizó en un doble arreglo ortogonal. El arreglo interno en un diseño  $2^{4-1}_{IV}$  y el arreglo externo en un diseño  $2^2$ . Los datos se presentan en la tabla de abajo.

					$P$	$-1$	$1$	$-1$	$1$			
					$Q$	$-1$	$-1$	$1$	$1$			
Trat	$A$	$B$	$C$	$D$		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$	$\overline{y}$	$lns^2$	$S/R_{no}$
1	$-1$	$-1$	$-1$	$-1$		.640	.478	.497	.539			
2	1	$-1$	$-1$	1		.495	.509	.494	.514			
3	$-1$	1	$-1$	1		.492	.532	.528	.561			
4	1	1	$-1$	$-1$		.756	.508	.633	.565			
5	$-1$	$-1$	1	1		.659	.623	.636	.584			
6	1	$-1$	1	$-1$		.549	.456	.387	.605			
7	$-1$	1	1	$-1$		.843	.909	.658	.953			
8	1	1	1	1		.875	.898	.910	.913			

$$S/R_{no} = 10 \log_{10}(\frac{\bar{y}}{S})^2$$

1. Estime y grafique los efectos para  $\bar{y}$ ,  $lns^2$  y  $S/R_{no}$ . Reporte lo que observa.

2. Realice el análisis de la varianza para la media de la delgadez.
3. Realice el análisis de varianza para  $lns^2$ .
4. Escriba el modelo para  $lns^2$  a partir de los efectos que resultaron significativos, recuerde que la estimación de los parámetros del modelo igual al efecto entre dos. Indique en qué niveles de los factores significativos se tiene la menor variabilidad.
5. Escriba el modelo para  $\bar{y}$  a partir de los efectos que resultaron significativos. Establezca los valores de los factores donde la delgadez tenga el valor requerido. Nota: Observe que al minimizar  $lns^2$  se maximiza  $S/R_{no}$ .
6. Una de las aplicaciones de los resultados experimentales es evaluar la capacidad del proceso. La expresión para ésta es:  $C_{pk} = \frac{\min(LES - \mu, \mu - LEI)}{3\sigma}$ , donde  $\mu$  se estima por  $\bar{y}$ ; éste se obtiene a partir del modelo del inciso 5, en nuestro caso  $\bar{y} = 0.500$ , y  $\sigma$  se estima por el modelo del inciso 4,  $\hat{\sigma} = 0.0212$ . Los límites de especificación inferior y superior son 0.530 y 0.470 respectivamente. Interprete el valor de  $C_{pk}$ .

**Ejercicio 5.15** *Lo más pequeño es lo mejor.* En un proceso de moldeo por inyección un ingeniero tiene problemas asociados al encogimiento del producto después del curado. Este encogimiento contribuye a una creciente variabilidad del producto. El objetivo es determinar qué factores contribuyen a disminuir el encogimiento y reducir la variabilidad del producto. Se tienen 11 factores en dos niveles:  $A$ : tiempo de ciclo,  $B$ : temperatura del molde,  $C$ : contenido de la mezcla,  $D$ : razón de mezclado,  $E$ : temperatura en el estado de precalentamiento,  $F$ : grosor del liberador del molde,  $G$ : tamaño de la puerta,  $H$ : curva del liberador del molde,  $I$ : presión de inyección,  $J$ : velocidad del tornillo,  $K$ : densidad. Existe un factor de ruido, éste es la instalación y se denota por  $M$ ; se emplea un doble arreglo ortogonal. El arreglo interno es un diseño Plackett - Burman que coincide con el diseño  $AO_{12}$ .

1. Estime el efecto de cada uno de los factores para la respuesta  $S/R_{me} = -10 \log_{10} \frac{\sum_1^3 y_i^2}{3}$ .
2. Indique en qué niveles de los factores se produce el menor encogimiento.
3. ¿Cuál es el valor de  $S/R_{me}$  que produce el menor encogimiento? Sugerencia: use la expresión  $S/R_{me} = \bar{y} + \sum_i (\text{factor}_i - \bar{y})$ , donde  $\text{factor}_i$  corresponde al promedio del  $i$ -ésimo factor que resultó significativo en el experimento.

Los resultados del experimento son:

<i>exp</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>J</i>	<i>K</i>	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$S/R_{me}$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	.13	.18	.14	16.4
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	.25	.27	.22	12.1
3	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	.08	.12	.12	19.3
4	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2	.08	.11	.11	19.9
5	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1	.17	.22	.13	15.0
6	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1	.09	.18	.19	15.9
7	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	.24	.32	.28	11.0
8	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2	.18	.19	.11	15.7
9	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1	.19	.20	.30	12.6
10	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	.22	.25	.22	12.7
11	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2	.24	.18	.16	14.1
12	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1	.08	.10	.11	20.2

**Ejercicio 5.16** Se desea mejorar la densidad de color en un aparato electrodoméstico, en ese sentido se realiza un experimento. En este proceso de pintado se tiene como factor señal la cantidad de pintura que se usará, y se plantea en tres niveles (5,10,15). La variable de respuesta es la densidad de color. En el experimento se consideraron cinco factores de control cada uno en dos niveles, y un factor de ruido que describe en dos niveles las condiciones generales del proceso. La descripción de los factores se muestra en la tabla siguiente.

Factores de Control\Niveles	-1	1	Factor de Ruido
A: Tipo de pintura	nueva	actual	P: Condiciones generales
B: Posición de quemado	d	r	$p_1$ : malas
C: Cantidad de óxido H	10%	20%	$p_2$ : buenas
D: Cantidad de óxido M	15%	20%	
E: Espesor de la aplicación	4mm	6mm	

Los resultados que se obtuvieron al realizar el experimento son:

Trat	A	B	C	D	E	$M_1 = 5$		$M_2 = 10$		$M_3 = 15$	
						$p_1$	$p_2$	$p_1$	$p_2$	$p_1$	$p_2$
1	-1	-1	-1	1	1	7.0	5.5	13.5	15.5	19.0	21.0
2	1	-1	-1	-1	-1	6.5	8.5	16.0	13.5	22.5	20.0
3	-1	1	-1	-1	1	6.5	8.0	13.5	16.0	21.0	23.5
4	1	1	-1	1	-1	6.0	8.5	16.5	13.5	20.5	24.0
5	-1	-1	1	1	-1	7.0	6.5	14.5	14.0	20.0	21.0
6	1	-1	1	-1	1	7.0	7.5	13.5	14.0	20.5	21.5
7	-1	1	1	-1	-1	9.0	8.5	16.5	16.0	24.0	23.0
8	1	1	1	1	1	9.0	9.5	17.0	16.6	23.5	24.5

El esquema global del diseño consiste en un doble arreglo ortogonal, y la tabla anterior es la forma típica para representarlo. Los  $Y_{ijk}$  denotan las observaciones correspondientes,  $i$  es la  $i$ -ésima combinación de los factores de control,  $j$  describe a los valores de los factores señal, y  $k$  es la  $k$ -ésima combinación de los factores de ruido. Bajo el supuesto de una función lineal (linealidad) ideal sin intercepto, se tiene el siguiente modelo:

$$Y_{ijk} = \beta_i M_j + \varepsilon_{ijk},$$

donde  $\beta_i$  es la medida de sensibilidad (la magnitud de la pendiente del modelo), y  $\sigma_i^2 = V(\varepsilon_{ijk})$  ambos dependen de los factores de control. La linealidad indica qué tan cercana es la relación (lineal) entre la respuesta  $Y_{ijk}$  y la señal  $M_j$ . La dispersión (variabilidad) es la desviación de las líneas causada por los factores de ruido.

Aplicando este modelo a cada uno de los tratamientos se tendrán ocho líneas rectas, una para cada combinación de los factores de control. Así para evaluar este sistema señal respuesta es deseable tener una pequeña dispersión ( $\sigma_i^2$ ) y un valor grande de  $\beta_i$ . Un valor grande de la sensibilidad permitirá identificar si hay un cambio grande en la respuesta  $Y_{ijk}$  debido a un cambio en la señal  $M_j$ . Una medida que relaciona la sensibilidad y la dispersión se establece mediante:

$$\eta = 10 \log \left( \frac{\beta_i^2}{CM_{error(i)}} \right),$$

donde  $CM_{error}$  ( $\hat{\sigma}_i^2 = CM_{error(i)}$ ) es la suma de los cuadrados del residual entre sus respectivos grados de libertad. Esta medida se conoce como la razón señal-a - ruido para el sistema señal respuesta y fue propuesta por Taguchi.

1. Estimar la sensibilidad, la dispersión y el cociente señal - a - ruido para cada tratamiento (ver el Capítulo 8). Para fines de este capítulo, a continuación



se proporcionan los cálculos para este proyecto.

Trat	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	$\hat{\eta}$	$\sqrt{CM_{error(i)}}$	$\hat{\beta}_i$
1	-1	-1	-1	1	1	0.828	1.239	1.361
2	1	-1	-1	-1	-1	0.658	1.336	1.439
3	-1	1	-1	-1	1	1.664	1.219	1.479
4	1	1	-1	1	-1	-0.986	1.664	1.486
5	-1	-1	1	1	-1	8.661	0.505	1.382
6	1	-1	1	-1	1	9.890	0.447	1.396
7	-1	1	1	-1	-1	7.073	0.707	1.596
8	1	1	1	1	1	5.324	0.889	1.641

2. Construya la tabla del ANDEVA para la sensibilidad, dispersión y señal a ruido. Para cada caso establezca qué factores e interacciones son significativas. En función de su análisis indique sus conclusiones.
3. Elabore las gráficas para diferenciar el efecto que tienen los factores con respecto a la sensibilidad y dispersión. Para ello tome logaritmos en base 10 para la sensibilidad  $\hat{\beta}_i$  y la desviación estándar  $\sqrt{CM_{error(i)}}$  en cada tratamiento, considere estos valores como una pareja ordenada y represéntelos en un plano cartesiano. Escriba lo que observa de estas gráficas y contraste estas observaciones con los resultados de las tablas del ANDEVA.



## Capítulo 6

# Estructura de tratamientos factoriales $3^k$

*No tengo dones especiales. Sólo soy apasionadamente curioso.*

*Albert Einstein*

Una estructura factorial  $3^k$  indica que interesa experimentar con  $k$  factores pero con tres niveles cada uno de ellos; esto significa que se tienen  $3^k$  tratamientos, todas las posibles combinaciones de los factores con tres niveles; por ejemplo, en el caso de un diseño con dos factores,  $k = 2$ , se tendrán 9 tratamientos.

A diferencia de los diseños  $2^k$ , los diseños  $3^k$  no se utilizan para seleccionar a los más importantes, entre muchos factores. Es claro que al aumentar el número de factores, la cantidad de tratamientos que se realiza en un experimento crece de manera considerable.

Cuando los factores son continuos en su escala de medición, los diseños  $3^k$  permiten, de existir, estimar efectos de curvatura sobre la variable respuesta. Estos diseños junto con diseños Box - Behnken, de composición central, cúbicos, entre otros, forman parte de los diseños apropiados para la optimización de las condiciones que influyan en la respuesta. En general, los experimentos con factores de más de dos niveles tienen mayor precisión en la estimación de los efectos.

### 6.1 Diseño factorial $3^k$ y su análisis estadístico

Un diseño factorial  $3^k$  representa una estructura de tratamientos que puede aplicarse sobre las UE sin restricción alguna en la aleatorización. Sin embargo, aunque no es visto en detalle en este capítulo, también como en los diseños factoriales en general, en la estrategia experimental con diseños  $3^k$  se puede tomar en cuenta ruido experimental adicional al error experimental.

En el siguiente ejemplo se muestra la estructura de tratamientos y de análisis

de un diseño  $3^2$ . Sin embargo el interés en el análisis de esta estructura es resaltar el procedimiento para identificar cuándo un factor tiene efecto, ya sea lineal, cuadrático, o ambos. Para este último punto se utilizará la técnica de codificación expuesta en el Capítulo 5.

**Ejemplo 6.1** En el laboratorio de una empresa se tiene interés en estudiar cómo la cantidad de un gas nocivo que emite una máquina puede ser reducido; la variable de respuesta es la cantidad de gas medida en ppm. Se considera que dos factores, el tiempo de inyección y la razón del volumen de la cámara, influyen en la emisión del gas; se consideran tres niveles en cada factor. Dos máquinas se utilizaron para evaluar el efecto de los factores, suponga en primera instancia que las máquinas son totalmente homogéneas tal que no influyen en los resultados. Los factores y niveles se describen a continuación.

Factores/Niveles	1	2	3
$T$ : tiempo (min)	50	60	70
$V$ : volumen(uv)	30	35	40

Tabla 6.1 Factores y sus valores en cada nivel

Observe que los números 1, 2 y 3 se han asignado para identificar de manera abstracta los niveles de los factores de un  $3^k$ , esta notación se utiliza con frecuencia en la literatura de diseños. Como cada factor tiene tres niveles, todas las posibles combinaciones generan nueve tratamientos. Se aleatorizan sin restricciones los nueve tratamientos y se aplican a cada máquina previamente preparadas. Los resultados y respectivos promedios se exhiben en la Tabla 6.2.

La Fig. 6.1 muestra los valores de la respuesta en cada uno de los niveles para los factores en estudio, en ella se describe la dispersión de los datos; se observa que para el factor tiempo existe mayor variabilidad en la emisión.

La Fig. 6.2 permite observar que entre promedios, en cada nivel de cada factor, en apariencia hay diferencias. Si estas diferencias son estadísticamente significativas, sabremos que existe un efecto del factor correspondiente sobre la variable respuesta. Mediante una prueba de hipótesis estadística se verifica lo anterior. Las hipótesis son las siguientes:

$$H_{0T} : \delta_{T_1} = \delta_{T_2} = \delta_{T_3}$$

$$H_{0V} : \delta_{V_1} = \delta_{V_2} = \delta_{V_3}$$

$$H_{0TV} : \delta_{T_1V_1} = \delta_{T_1V_2} = \dots = \delta_{T_3V_3}$$

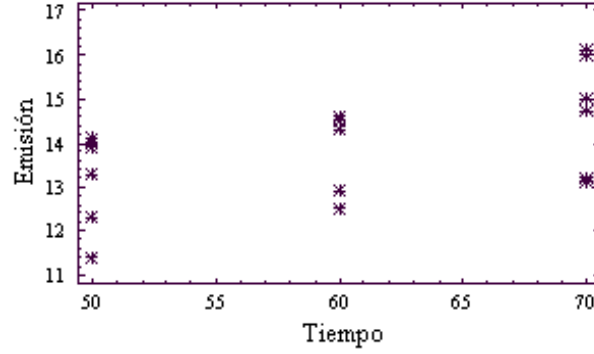


Fig. 6.1: Diagrama de dispersión de la emisión de gas nocivo versus el tiempo de inyección

Trat	$T$ : tiempo	$V$ : volumen	$y_1$	$y_2$	$\bar{y}_{ij\bullet}$
1	1	1	12.3	11.4	11.85
2	2	1	12.9	12.5	12.7
3	3	1	13.2	13.1	13.15
4	1	2	14.1	14.0	14.05
5	2	2	14.5	14.5	14.5
6	3	2	14.7	15.0	14.85
7	1	3	13.3	13.9	13.6
8	2	3	14.6	14.3	14.45
9	3	3	16.0	16.1	16.05
$\bar{y}_{1\bullet\bullet} = 13.17$			$\bar{y}_{\bullet 1\bullet} = 12.57$		
$\bar{y}_{2\bullet\bullet} = 13.88$			$\bar{y}_{\bullet 2\bullet} = 14.47$		
$\bar{y}_{3\bullet\bullet} = 14.68$			$\bar{y}_{\bullet 3\bullet} = 14.70$		
					$\bar{y}_{\bullet\bullet\bullet} = 13.91$

Tabla 6.2 Esquema del factorial  $3^2$ , con los resultados experimentales y promedios

Las hipótesis indican que no hay efecto del tiempo, ni volumen en la emisión de gas, ni de su interacción, respectivamente. Para probar las hipótesis, primero es necesario estimar el efecto de los factores en cada nivel. Recuerde que tal efecto se obtiene contrastando los promedios en cada nivel de los factores con el promedio de todas las observaciones del experimento. Es decir  $\hat{\delta}_{T_i} = \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$  los efectos para el factor tiempo y  $\hat{\delta}_{V_j} = \bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$  son efectos del factor volumen.

De la Tabla 6.2 se estiman los efectos en cada nivel de cada factor; para el

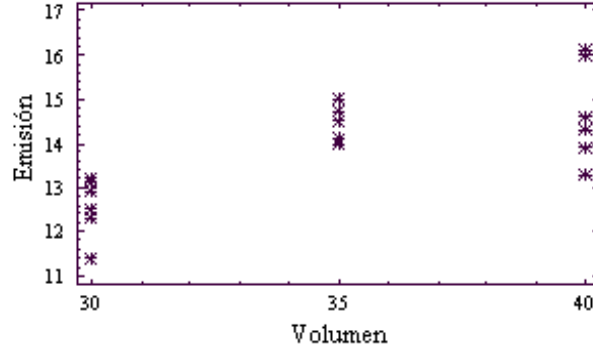


Fig. 6.2: Diagrama de dispersión de la emisión de gas nocivo versus la razón del volumen de la cámara

factor  $T$ (tiempo), los resultados son:

Efecto $T$ : tiempo
$\hat{\delta}_{T_1} = 13.17 - 13.91 = -0.74$
$\hat{\delta}_{T_2} = 13.88 - 13.91 = -0.03$
$\hat{\delta}_{T_3} = 14.68 - 13.91 = 0.77$

Similarmente para estudiar el efecto del factor  $V$ (volumen) se tiene

Efecto $V$ : volumen
$\hat{\delta}_{V_1} = 12.57 - 13.91 = -1.34$
$\hat{\delta}_{V_2} = 14.47 - 13.91 = 0.56$
$\hat{\delta}_{V_3} = 14.70 - 13.91 = 0.79$

El efecto de interacción se estima a través de las cantidades

$$\hat{\delta}_{T_i V_j} = \bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} + \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$$

Por ejemplo,

$$\hat{\delta}_{T_1 V_2} = 14.05 - 13.17 - 14.47 + 13.91 = 0.33$$

A continuación se muestran todas las cantidades  $\widehat{\delta}_{T_i V_j}$ .

Factores		$V_1$	$V_2$	$V_3$
$T_1$	$\widehat{\delta}_{T_1 V_j}$	0.03	0.33	-0.36
	$S_{1j}^2$	0.41	0.01	0.18
$T_2$	$\widehat{\delta}_{T_2 V_j}$	0.16	0.06	-0.22
	$S_{2j}^2$	0.08	0	0.05
$T_3$	$\widehat{\delta}_{T_3 V_j}$	-0.19	-0.39	0.58
	$S_{3j}^2$	0.01	0.05	0.01

Los estadísticos de prueba para estas hipótesis se construyen mediante el cálculo de los cuadrados medios. Éstos se obtienen por el siguiente procedimiento: se eleva al cuadrado cada uno de los resultados  $\widehat{\delta}_{T_i}$  y  $\widehat{\delta}_{V_j}$ ; luego se suman estos cuadrados y se multiplican por 6. Note que 6 se produce multiplicando el número de replicaciones por el número de niveles del otro factor, es decir:

$$SC_T = (3 \times 2) \sum_{i=1}^3 \widehat{\delta}_{T_i}^2 = 6.90$$

con dos grados de libertad. Para el otro factor, se tiene:

$$SC_V = 6 \sum_{j=1}^3 \widehat{\delta}_{V_j}^2 = 16.43$$

con dos grados de libertad. El efecto de interacción es

$$SC_{TV} = 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \widehat{\delta}_{T_i V_j}^2 = 1.67$$

con cuatro grados de libertad. Análogamente a otros casos presentados, la suma de cuadrados del error es:

$$SC_{error} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij}^2 = 0.77$$

con nueve grados de libertad. Estos resultados se resumen en la Tabla 6.3.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
$T$	2	6.92	3.45	40.37	0.0000
$V$	2	16.43	8.23	96.03	0.0000
$TV$	4	1.67	0.42	4.88	0.0228
error	9	0.77	0.09		
total		25.78			

Tabla 6.3 Resultados del ANDEVA del Ejemplo 6.1

Se aprecia una fuerte evidencia en contra de las hipótesis  $H_{0T}$  y  $H_{0V}$  y en menor medida contra  $H_{0TV}$ .

### Efecto cuadrático

Si se observa la Fig. 6.2 se puede observar, en las emisiones de gas promedio, que el volumen tiene potencialmente un efecto de curvatura sobre la cantidad de gas nocivo, no así el tiempo. De aquí surge la necesidad de plantear un procedimiento que permita evaluar la significancia estadística del efecto de curvatura de algún factor continuo.

En el Capítulo 5 se estimó por medio de contrastes el efecto de un factor para un diseño  $2^k$ . La expresión para estimar ese efecto es:  $\hat{\delta}_{\text{columna}} = \bar{y}_+ \text{ en la columna} - \bar{y}_- \text{ en la columna}$ , ésta se puede reescribir por:  $\bar{y}_{\text{nivel } 2} - \bar{y}_{\text{nivel } 1}$ . La gráfica de este contraste se interpreta como la pendiente de la recta que une los promedios en esos niveles, los valores de los coeficientes que representan al contraste de la expresión anterior son  $\{-1, 1\}$  y corresponden a los niveles de los factores.

Los diseños factoriales  $3^k$ , cada factor tiene tres niveles, con lo cual se tienen dos grados de libertad; estos grados de libertad ofrecen la posibilidad de evaluar la existencia de efectos lineal y cuadrático de un factor cuantitativo. Para detectar la presencia de estos efectos el procedimiento es como sigue, suponiendo que los tres niveles son equidistantes entre sí:

1. Se contrastan los promedios del nivel uno y dos del factor, es decir:  $\bar{y}_{\text{nivel } 2} - \bar{y}_{\text{nivel } 1}$ ; y luego se contrastan los promedios del nivel dos y tres del factor, es decir:  $\bar{y}_{\text{nivel } 3} - \bar{y}_{\text{nivel } 2}$ . Cada uno de estos contrastes equivale al efecto lineal.
2. Entonces, el efecto lineal total para un factor se obtiene por la suma de los contrastes en 2, es decir :

$$\hat{\delta}(l) = \bar{y}_{\text{nivel } 2} - \bar{y}_{\text{nivel } 1} + \bar{y}_{\text{nivel } 3} - \bar{y}_{\text{nivel } 2}$$



$$= \bar{y}_{nivel\ 3} - \bar{y}_{nivel\ 1} \quad (6.1)$$

Los coeficientes del contraste anterior representan el efecto lineal del factor y son los niveles del factor, es decir:  $\{c_1 = -1, c_2 = 0, c_3 = 1\}$ .

3. El efecto cuadrático se obtiene comparando las pendientes representadas por los contrastes en 2, lo que equivale a probar la diferencia entre las pendientes, es decir:

$$\hat{\delta}(c) = \{\bar{y}_{nivel\ 3} - \bar{y}_{nivel\ 2}\} - \{\bar{y}_{nivel\ 2} - \bar{y}_{nivel\ 1}\}$$

o:

$$\hat{\delta}(c) = \bar{y}_{nivel\ 1} - 2\bar{y}_{nivel\ 2} + \bar{y}_{nivel\ 3} \quad (6.2)$$

con lo que los coeficientes del contraste anterior representan el efecto cuadrático del factor y son los niveles del factor, es decir:  $\{c_1 = 1, c_2 = -2, c_3 = 1\}$ .

Observe que en cada caso la suma de los coeficientes es cero, esto es:

$$\sum_l c_l = 0$$

Existe una técnica matemática conocida como polinomios ortogonales que permite establecer los coeficientes de los contrastes para factores con diferente número de niveles. Éstos permitirán contrastar los promedios entre los niveles de un factor para determinar la existencia de efectos lineales o cuadráticos en el caso de diseños  $3^k$ , o de mayor orden para diseños cuyos factores tengan niveles mayores a 3, por ejemplo en el diseño  $4^k$  hasta el efecto cúbico. En la Tabla 6.4 se describen los coeficientes para los diseños  $2^k, 3^k$  que se tratan en este capítulo, y se anexa el de cuatro niveles que se dejará como ejercicio.

El lector interesado en conocer más sobre el tema de polinomios ortogonales puede consultar los libros Hinkelman y Kempthorne (1994), y Draper y Smith (1998).

Niveles	2	3		4		
Efecto	lineal	lineal	cuadrado	lineal	cuadrado	cubo
$c_1$	-1	-1	1	-3	1	-1
$c_2$	1	0	-2	-1	-1	3
$c_3$		1	1	1	-1	-3
$c_4$				3	1	1
$\sum c_i^2$	2	2	6	20	4	20

Tabla 6.4 Coeficientes de los contrastes ortogonales para diseños de 2, 3 y 4 niveles

A nivel de comentario se puede decir que, aplicando las expresiones (6.1) y (6.2) se estiman los efectos lineal y cuadrático de un factor. La estimación de los efectos de interacción se obtiene aplicando expresiones similares, sólo hace falta identificar los coeficientes que permitirán comparar las medias. Identificar los efectos cuadráticos de un factor y las interacciones entre la parte lineal y cuadrática es importante en la modelación matemática del proceso, ya que enriquece la interpretación en la variable de respuesta y permite determinar valores de ésta que resulten apropiados para operar mejor el proceso. Sin embargo, la metodología para construir un modelo se verá con detalle en un capítulo posterior.

A continuación se ilustran los cálculos necesarios para evaluar la significancia estadística de un efecto cuadrático. Estimación de los efectos lineales para los factores tiempo y volumen, vea la Tabla 6.2:

$$\hat{\delta}_T(l) = 14.683 - 13.167 = 1.516$$

$$\hat{\delta}_V(l) = 14.7 - 12.568 = 2.132$$

Los efectos cuadráticos son:

$$\hat{\delta}_T(c) = 13.167 - 2(13.883) + 14.683 = 0.084$$

$$\hat{\delta}_V(c) = 12.568 - 2(14.467) + 14.7 = -1.667$$

La suma de cuadrados  $SC$  tanto para el efecto lineal como cuadrático, se obtiene por la expresión

$$SC = \frac{r\hat{\delta}_{efecto}^2}{\sum c_{ij}^2} \quad (6.3)$$

donde  $r$  es el número de observaciones utilizadas en cada uno de los promedios empleados. En este caso  $r = 3 \times 2 = 6$ . Los resultados se muestran en la siguiente tabla:

	$T_l$	$T_c$	$V_l$	$V_c$
efecto	1.516	0.084	2.13	-1.667

La suma de cuadrados para los efectos lineales, cuadráticos y las de interacción se reproducen en la Tabla 6.5.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
Tiempo	2	6.91			
$T_l$	1	6.90	6.90	32.47	0.0003*
$T_c$	1	0.01	0.01	0.08	0.7851
Volumen	2	16.43			
$V_l$	1	13.65	13.65	159.58	0.0000*
$V_c$	1	2.78	2.78	80.66	0.0000*
Interacción	4	1.67	0.42	4.87	0.0228
Error	9	0.77	0.09		
Total	17	25.78			

Tabla 6.5 Análisis de la varianza para los efectos lineales y cuadráticos

Se sabía que los efectos de los factores eran significativos, sin embargo con el procedimiento desarrollado se ha detectado que el efecto del factor volumen es significativo tanto en su componente lineal como en el cuadrático.

## 6.2 Factorial $3^k$ fraccionado

Cuando el número de tratamientos del factorial  $3^k$  es grande, la realización del experimento puede resultar complicado, debido a que se requiere más material, es más costoso y es necesario invertir mayor tiempo. Por ejemplo, si  $k = 4$ , se requieren 81 tratamientos para llevar a cabo el experimento. En primera instancia se puede efectuar el experimento en varias partes, para ello, será necesario establecer una estrategia con el fin de obtener fracciones del factorial. Realizar el experimento en fracciones (bloques) de un factorial  $3^k$  tiene la ventaja de que el experimento se puede efectuar en diferentes días, por distintos operadores y en varios laboratorios, entre otras posibles consideraciones.

Aquí se presentarán los lineamientos generales para fraccionar un diseño  $3^k$ ; para fijar las ideas del procedimiento, se considera únicamente el caso de un diseño con tres factores, esto es  $3^3$ . Este plan se puede extender de manera idéntica para  $k > 3$ . Sólo se trata el hecho de fraccionar en tercios, este tema se puede extender a fracciones menores. En la Tabla 6.6, se describe el diseño para los primeros nueve tratamientos, los niveles se han denotado por 1, 2 y 3.

### 6.2.1 Fracción un tercio del factorial $3^3$

El procedimiento para fraccionar un factorial  $3^k$  es parecido al que se utiliza en los factoriales  $2^k$ . Antes de plantear éste, es importante notar que en los factoriales

$3^k$  los efectos principales tienen 2 gl, las interacciones dobles 4 gl, las interacciones triples 8 gl y así de manera sucesiva. Dado que el número de gl en cada caso es distinto, resulta imposible tener efectos principales completamente confundidos con interacciones de diferente grado.

Para poder abordar esta situación, las interacciones se deben separar en grupos de tal manera que sus grados de libertad sean igual al de los efectos principales. Por ejemplo, en la interacción doble se deben tener dos grupos de 2 gl cada uno, entonces un grupo se puede confundir con efectos principales, de igual forma se hace con interacciones de orden mayor.

Pensando que el factorial  $3^3$  es un diseño ortogonal, la interacción doble  $AB$  se puede descomponer en  $A^1B^1$ ,  $A^1B^2$ ,  $A^2B^1$  y  $A^2B^2$ , cada una de éstas tiene un gl. Para formar los grupos existen varias posibilidades, sin embargo, por conveniencia se tomará el grupo que contiene al factor  $A$  con exponente 1, así se puede escoger el grupo compuesto por  $A^1B^1$ ,  $A^1B^2$  con dos grados de libertad. Escribimos a propósito el 1 como exponente para diferenciarlo de la interacción completa.

Con esta idea se puede plantear el procedimiento para dividir en tres fracciones el factorial  $3^k$ , de esa manera cada fracción será un tercio del factorial y se denota por  $3^{k-1}$ . Suponga que los  $k$  factores son  $A, B, \dots, K$ , con tres niveles, en particular se propone el siguiente generador:

$$I = A^1 B^{\alpha_2} \dots K^{\alpha_k}, \quad (6.4)$$

$\alpha_i = 0, 1, 2$ ,  $i = 2, 3, \dots, k$  el valor de  $\alpha_i$  será el exponente del factor que interviene para formar las fracciones. Cada efecto principal o aquel que se compone de interacciones estimado por el factorial  $3^{k-1}$  tiene dos alias, éstos se determinan multiplicando el efecto por  $I$  e  $I^2$  módulo 3 para el exponente.

La estrategia para formar las fracciones consiste en observar el valor del residuo que deja la división de  $L$  entre 3, es decir:

$$\text{residuo}\left(\frac{L}{3}\right)$$

donde  $L = a + \alpha_2 b + \dots + \alpha_k k$ , las letras minúsculas representan niveles del factor correspondiente.

A continuación, se describe el procedimiento para fraccionar el factorial  $3^3$ , la idea es considerar el efecto de interacción triple  $ABC$ . Los tres posibles grupos (con 2 gl) que se forman por la convención adoptada son:  $A^1B^1C^1$ ,  $A^1B^2C^1$ ,  $A^1B^2C^2$ . El generador que se propone es  $I = A^1B^2C^1$ , de esta manera los exponentes de los factores  $A, B$  y  $C$  tienen el valor de 1, 2 y 1, así los valores de  $\alpha_1 = \alpha_3 = 1$ ,  $\alpha_2 = 2$ , entonces  $L = a + 2b + c$ . Aplicando la operación módulo 3

a  $L$  se producen las fracciones, esto es:

$$\text{residuo}\left(\frac{a+2b+c}{3}\right) = \begin{cases} 0 & \text{para la fracción 1} \\ 1 & \text{para la fracción 2} \\ 2 & \text{para la fracción 3} \end{cases}$$

El fin de esta expresión es repartir los  $3^3 = 27$  tratamientos en tres fracciones. Note que se generan tres números, con éstos se formarán tres fracciones, en la primera irán los tratamientos cuyo residuo es el cero, en la siguiente se asignan los de residuo uno, los restantes en la fracción tres. La Tabla 6.6 ejemplifica nueve casos y en la Tabla 6.7 se exhiben las tres fracciones.

Trat	Factor $A$	Factor $B$	Factor $C$	Suma $a + 2b + c$	Criterio $\text{residuo}\left(\frac{a+2b+c}{3}\right)$
1	1	1	1	4	1
2	2	1	1	5	2
3	3	1	1	6	0
4	1	2	1	6	0
5	2	2	1	7	1
6	3	2	1	8	2
7	1	3	1	8	2
8	2	3	1	9	0
9	3	3	1	10	1

Tabla 6.6 Estrategia para fraccionar el diseño  $3^k$ , ilustración de nueve tratamientos

Trat	Fracción 1 (0)			Trat	Fracción (1)			Trat	Fracción 3 (2)		
	$A$	$B$	$C$		$A$	$B$	$C$		$A$	$B$	$C$
3	3	1	1	1	1	1	1	2	2	1	1
4	1	2	1	5	2	2	1	6	3	2	1
8	2	3	1	9	3	3	1	7	1	3	1
11	2	1	2	12	3	1	2	10	1	1	2
15	3	2	2	13	1	2	2	14	2	2	2
16	1	3	2	17	2	3	2	18	3	3	2
19	1	1	3	20	2	1	3	21	3	1	3
23	2	2	3	24	3	2	3	22	1	2	3
27	3	3	3	25	1	3	3	26	2	3	3

Tabla 6.7 Asignación de fracciones del factorial  $3^3$

Cada una de estas fracciones representa una parte del factorial  $3^3$ , la cual corresponde a un tercio. Si sólo se requiere llevar a cabo una parte del experimento, se selecciona aleatoriamente una de las tres fracciones.

Por otro lado, si es necesario realizar el experimento en tres días, se van seleccionando cada una de las fracciones restantes de manera aleatoria. En esta situación el día desempeña el papel de factor de ruido y se usa como bloque, en ese caso el efecto de  $AB^2C$  está confundido con el efecto del bloque.

Como se sabe, al fraccionar un factorial existen efectos principales que se confunden parcial o completamente con efectos de interacción, o algunos efectos de interacción entre ellos. Para conocer cómo se presentan esos efectos confundidos es necesario plantear la estructura alias. Los alias se obtienen a partir de los generadores  $I$  e  $I^2$  y multiplicando cada uno de ellos por los factores y algunas interacciones hasta completar ocho efectos, que es el número de grados de libertad disponible. Para determinar el exponente se tiene que aplicar la operación módulo 3. En la siguiente tabla se describen los alias resultantes para el caso que estamos tratando.

Generadores	$I = AB^2C$	$I^2 = A^2BC^2$
	$A(AB^2C) = A^2B^2C$	$A(A^2BC^2) = BC^2$
	$B(AB^2C) = AC$	$B(A^2BC^2) = A^2B^2C^2$
	$C(AB^2C) = AB^2C^2$	$C(A^2BC^2) = A^2B$
	$AB(AB^2C) = A^2C$	$AB(A^2BC^2) = B^2C^2$

Sólo cuatro efectos se pueden estimar usando los ocho gl, éstos son:  $A \rightarrow A^2B^2C \rightarrow BC^2$ ,  $B \rightarrow AC \rightarrow A^2B^2C^2$ ,  $C \rightarrow AB^2C^2 \rightarrow A^2B$ ,  $AB \rightarrow A^2C \rightarrow B^2C^2$ . De aquí se desprende que los efectos principales están confundidos con efectos dobles, por lo que una fracción de  $\frac{1}{3}$  del factorial  $3^3$  es de resolución *III*.

Existe una amplia gama de estrategias para fraccionar diseños factoriales, éstas consideran los casos en que los factores tienen un número primo de niveles. McLean y Anderson (1984) presentan varios esquemas de factoriales fraccionados que tratan con factores de 2 y 3 niveles.

### 6.2.2 Fracción de un $3^k$ por medio del cuadrado latino

Otro procedimiento para generar un  $3^k$  fraccionado es la aplicación del cuadrado latino; por ejemplo suponga que se tienen tres factores  $A$ ,  $B$  y  $C$ , cuyos niveles son 1, 2 y 3 el esquema de cuadrado latino en esta situación es:

	$B$	1	2	3
$A$				
1		1	2	3
2		2	3	1
3		3	1	2

Observe que las columnas describen los niveles del factor  $A$ , en los renglones los niveles del factor  $B$ , y dentro del cuadro los niveles de  $C$ ; la presentación del diseño anterior se describe en un arreglo ortogonal:

Trat	$A$	$B$	$C$
1	1	1	1
2	1	2	2
3	1	3	3
4	2	1	2
5	2	2	3
6	2	3	1
7	3	1	3
8	3	2	1
9	3	3	2

Este arreglo describe una fracción de un diseño  $3^3$ , el mismo arreglo se obtiene aplicando la expresión (6.4). Esta es una manera eficiente y económica para generar una fracción de un factorial  $3^3$ , este modo de originar la fracción no lleva consigo implícito un generador tal y como lo hemos establecido en el subapartado anterior. Se debe tomar en cuenta que está presente una estructura alias, la cual da lugar a tener efectos principales confundidos con efectos de interacción doble sin embargo, el fin principal de estas fracciones es proporcionar información sobre el efecto de los factores en la respuesta, sin la necesidad de realizar muchas pruebas experimentales. Además, al contar los factores con tres niveles existe la posibilidad de identificar la presencia de un efecto no lineal.

Otra extensión importante se refiere al caso de un diseño con cuatro factores  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , donde se usa un diseño de cuadrado latino cúbico o greco - latino; el arreglo es similar al anterior, sólo que en este nuevo esquema se combinan dentro del cuadrado los niveles de los factores  $C$ ,  $D$ , y entre paréntesis se escriben los niveles del factor  $D$ .

$B$	1	2	3
$A$			
1	1(1)	2(2)	3(3)
2	2(3)	3(1)	1(2)
3	3(2)	1(3)	2(1)

Por consiguiente, el arreglo ortogonal de este nuevo esquema que representa

un diseño factorial fraccionado  $3^4$  es:

trat	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
1	1	1	1	1
2	1	2	2	3
3	1	3	3	2
4	2	1	2	2
5	2	2	3	1
6	2	3	1	3
7	3	1	3	3
8	3	2	1	2
9	3	3	2	1

Tabla 6.8 Esquema experimental para la fracción del diseño  $3^4$

Observación: Como se ha mencionado en el capítulo anterior, Taguchi propuso una serie de arreglos ortogonales, entre otros propósitos sus arreglos permiten facilitar la estrategia experimental, en particular el arreglo ortogonal de la Tabla 6.8 es exactamente el descrito por Taguchi para factores con tres niveles, el cual se denota por  $AO_9(3^4)$ . Recuerde que en la presentación Taguchi las columnas se enumeran y cada una de ellas representa a los factores, en la Tabla 6.8 se han puesto los factores. Existen otros arreglos ortogonales para factores con tres niveles, entre los que tienen mayor aplicación se encuentra el arreglo  $AO_{27}(3^{13})$ , ésta presentación incrementa los casos de arreglos ortogonales que se han ido discutiendo a lo largo del trabajo.

Como ya se ha discutido, cada uno de los arreglos ortogonales propuestos por Taguchi tiene una tabla de interacciones con la finalidad de colocar las de mayor importancia para el experimentador en columnas del arreglo. Para el caso específico del arreglo  $AO_9(3^4)$  la tabla es:

1	2	3	4
(1)	3	2	2
	4	4	3
(2)		1	1
		4	3
		(3)	1
			2

### 6.2.3 Diseño Plackett - Burman para factoriales $3^k$

Los diseños propuestos por Plackett - Burman también permiten tener fracciones de esquemas experimentales en factoriales  $3^k$ . Para obtener los esquemas de estos diseños se establece una fórmula que permita relacionar los números



de factores ( $k$ ) tratamientos ( $t$ ) y niveles ( $ni$ ), tal expresión es:  $k = \frac{t-1}{ni-1}$ , por ejemplo si se tienen 9 tratamientos y 3 niveles, así el número de factores es:  $k = \frac{9-1}{3-1} = 4$ . El generador propuesto por Plackett - Burman para esta situación es:  $\{1, 2, 3, 3, 1, 3, 2, 2\}$ , donde cada número representa el nivel de los factores. En el capítulo anterior se mostró el procedimiento para construir el esquema experimental cuando  $ni = 2$ , en esta nueva situación la estrategia es similar, es decir:

1. En la columna correspondiente al factor  $A$  se pone el generador tal cual.
2. En la siguiente etapa se quita el último número del generador pasándolo al primer lugar, los demás números se recorren un lugar, este nuevo orden del generador se escribe en la columna correspondiente al factor  $B$ .
3. El paso anterior se repite para el resto de los factores, en cada nueva columna se van recorriendo los lugares, tomando el orden del generador en la columna previa.
4. En el último renglón que corresponde al tratamiento nueve se colocan todos los factores en su nivel 1.

Siguiendo el procedimiento descrito, el esquema experimental es:

trat	$A$	$B$	$C$	$D$
1	1	2	2	3
2	2	1	2	2
3	3	2	1	2
4	3	3	2	1
5	1	3	3	2
6	3	1	3	3
7	2	3	1	3
8	2	2	3	1
9	1	1	1	1

Tabla 6.9 Esquema experimental Plackett-Burman

Observaciones:

1. El esquema Plackett - Burman descrito en la Tabla 6.9 se puede ordenar de tal manera que se obtiene el arreglo ortogonal  $AO_9(3^4)$  de Taguchi.

- Existen generadores para otros diseños de factores con tres niveles; a continuación sólo se presenta el que en la práctica tiene mayor posibilidad de ser usado, por ello se escribe el generador del caso de  $T = 27$ :

$$\{1, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 2, 1, 1, 3, 1, 3, 2, 3, 3, 2, 1, 3, 3, 3\}$$

En la situación de que un experimentador necesite realizar un experimento con esta cantidad de factores, la construcción del esquema sigue el procedimiento citado en la elaboración de la Tabla 6.9. Este esquema es equivalente al arreglo  $AO_{27}(3^{13})$ , razón por la que no se escribe la tabla correspondiente al arreglo Taguchi.

### 6.3 Ejercicios

**Ejercicio 6.1** Tiempo de cocción. Se desea conocer el tiempo de cocción del frijol para tres variedades (var) de frijol, con tres diferentes concentraciones (con) de sal en el remojo, en este proceso se tienen dos factores con tres niveles. Se hicieron tres réplicas del experimento, el tiempo se determinó cuando el 90 % de las unidades experimentales estaban cocidas. Los resultados se muestran a continuación:

A:con.	B: var	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$\bar{Y}$	$S^2$
1	1	62	48	63		
2	1	51	57	45		
3	1	59	65	55		
1	2	57	45	39		
2	2	61	58	70		
3	2	58	63	70		
1	3	59	53	67		
2	3	55	58	50		
3	3	47	56	51		

- Haga las gráficas para representar los promedios de cada factor, ¿qué observa?
- Grafique la interacción.
- Estime los efectos lineal y cuadrático para los factores  $A$  y  $B$ .
- Realice el análisis de la varianza, ¿qué hipótesis estadísticas se prueban? Obtenga sus conclusiones.
- Haga una evaluación estadística del modelo.

**Ejercicio 6.2** En la actualidad es muy común hacer estudios sobre la contaminación generada por diferentes equipos o máquinas. Un ingeniero desea estudiar el gas emitido por una máquina, éste se mide en partes por millón de monóxido de carbono ( $Y$ ). Los factores que afectan son la razón del volumen de la cámara ( $V$ ), y tiempo de inyección ( $I$ ), ambos considerados en tres niveles igualmente espaciados. Se realiza el experimento poniendo a funcionar la máquina aleatoriamente en los diferentes tratamientos, ¿cuántos son?, los datos arrojados se describen a continuación (dos réplicas por tratamiento):

trat	tiempo	volumen	$y_1$	$y_2$
1	1	1	26	27
2	2	1	30	29
3	3	1	31	32
4	1	2	35	37
5	2	2	37	38
6	3	2	41	40
7	1	3	34	33
8	2	3	34	36
9	3	3	31	32

1. Realice el ANDEVA indicando qué hipótesis se prueban.
2. Construya el intervalo de confianza para el volumen en el nivel intermedio. Interprete.
3. Construya el intervalo de confianza para el tratamiento 6, es decir, cuando el volumen está en el nivel intermedio y el tiempo en el nivel alto.
4. Estime los efectos lineales y cuadráticos de los factores.
5. Estime las interacciones respectivas.
6. Construya el ANDEVA que represente los efectos lineales y cuadráticos con sus interacciones.

**Ejercicio 6.3** Con el objeto de encontrar las condiciones óptimas de germinación de semilla de amaranto Mora (1989), se realizó un diseño experimental  $3^2$ , los factores que se consideran en el estudio son: concentración (%) de NaCl y temperatura ( $^{\circ}C$ ) a un tiempo fijo de 20 minutos. La respuesta es el porcentaje de semillas germinadas. Los resultados al realizar el experimento se muestran en la tabla siguiente (tres réplicas):

Temp ( $^{\circ}C$ ) \ NaCl (%)	0	0.1	0.3
25	80, 81, 80	89, 89, 89	90, 91, 90
30	90, 90, 90	90, 90, 92	92, 96, 96
35	93, 92, 90	92, 92, 93	94, 95, 95

1. Describa en una gráfica los efectos de cada factor.
2. Estime los efectos de los factores.
3. Complete el análisis estadístico.

**Ejercicio 6.4** En referencia al ejercicio 4.11 descomponga el efecto del factor  $C$  en su parte lineal y cuadrática; verifique la significancia de estos efectos.

**Ejercicio 6.5** Considere el ejercicio 4.13, use los contrastes de la Tabla 6.4 para estudiar los efectos lineal, cuadrático y cúbico del factor  $A$ , y el lineal y cuadrático para el factor  $B$ , así como las interacciones respectivas que esta descomposición genere. Reconstruya la tabla del ANDEVA para estos efectos y obtenga sus conclusiones. ¿Cómo puede reconstruir la suma de cuadrados para el error en función de sus resultados de la tabla ANDEVA?

**Ejercicio 6.6** En un proceso que simula un ciclo de mezclado se tienen identificados cuatro factores de control que se describen en la tabla. Se planteó realizar un experimento siguiendo un esquema  $AO_9$ . Al llevar a cabo este experimento, se midió la dureza del material. Cabe destacar que en el proceso se consideró como factor de ruido a dos condiciones de operación diferentes relacionadas al mantenimiento preventivo, éstas se denominaron  $M_1$  y  $M_2$ .

Factor	Nivel		
	1	2	3
$A$ : Temperatura de inicio	baja	media	alta
$B$ : Temperatura de carga	baja	media	alta
$C$ : Energía consumida	baja	media	alta
$D$ : Tipo de formulación	actual	actual+S1	actual+S2

Los resultados experimentales

Trat	Factores				$M_1$	$M_2$
	$A$	$B$	$C$	$D$	$y_1$	$y_2$
1	1	1	1	1	44	58
2	1	2	2	2	41	83
3	1	3	3	3	53	80
4	2	1	2	3	74	78
5	2	2	3	1	87	84
6	2	3	1	2	51	98
7	3	1	3	2	55	74
8	3	2	1	3	32	42
9	3	3	2	1	50	83

1. Estime los promedios en cada nivel para cada factor.
2. Considere las respuestas  $\bar{y}$  y  $\log(S^2)$ , realice un bosquejo gráfico para ambas respuestas para identificar efectos significativos. Dé sus comentarios.
3. Realice el ANDEVA para los efectos principales e interprete sus resultados.
4. Obtenga la mejor condición para alcanzar una dureza entre 60 y 65.

**Ejercicio 6.7** (Wu y Hamada, 2000) Considere un experimento para estudiar el efecto de cuatro factores sobre la fuerza de jale de cinturones de asiento de carro que se producen parcialmente durante una operación de rizado en la que se une un sujetador a un cable. Los cuatro factores son presión hidráulica de la máquina de rizado ( $A$ ), ancho de dado ( $B$ ), longitud del rizo ( $C$ ) y lote del sujetador ( $D$ ), cada uno de ellos en tres niveles como se muestra a continuación:

Factor	Nivel		
	1	2	3
$A$ : Presión (psi)	1100	1400	1700
$B$ : Dado (mm)	10	10.2	10.4
$C$ : Longitud de rizo (mm)	18	23	27
$D$ : Lote de sujetador (número)	P74	P75	P76

El diseño experimental fue un factorial fraccionario  $3^{4-1}$  mostrado a continuación junto con los resultados de tres réplicas, midiendo dos respuestas: fuerza de tensión del rizo en libras (que debe ser mayor a 4000 lb por especificaciones de seguridad) y lo denominado “flash”, es decir, el exceso de metal del rizo (el cual por especificaciones no debe exceder a 14mm).

1. Considerando que el generador de la fracción utilizada es  $I = ABCD^2$ , identifique la estructura alias correspondiente.

2. Identifique factores de localización y dispersión en ambas variables respuesta como lo mencionado en el capítulo 5.
3. De acuerdo a los objetivos del experimento seleccione para cada respuesta un cociente señal a ruido como los mencionados en el capítulo 5 y realice el análisis correspondiente.
4. Compare resultados de 2 y 3 y proponga recomendaciones prácticas.

Factores											
Trat	A	B	C	D	Fuerza			Flash			
1	1	1	1	1	5164	6615	5959	12.89	12.70	12.74	
2	1	1	2	2	5356	6117	5224	12.83	12.73	13.07	
3	1	1	3	3	3070	3773	4257	12.37	14.47	12.44	
4	1	2	1	2	5547	6566	6320	13.29	12.86	12.70	
5	1	2	2	3	4754	4401	5436	12.64	12.50	12.61	
6	1	2	3	1	5524	4050	4526	12.76	12.72	12.94	
7	1	3	1	3	5684	6251	6214	13.17	13.33	13.98	
8	1	3	2	1	5735	6271	5843	13.02	13.11	12.67	
9	1	3	3	2	5744	4797	5416	12.37	12.67	12.54	
10	2	1	1	2	6843	6895	6957	13.28	13.65	13.58	
11	2	1	2	3	6538	6328	4784	12.62	14.07	13.38	
12	2	1	3	1	6152	5819	5963	13.19	12.94	13.15	
13	2	0	1	3	6854	6804	6907	14.65	14.98	14.40	
14	2	2	2	1	6799	6703	6792	13.00	13.35	12.87	
15	2	2	3	2	6513	6503	6568	13.13	13.40	13.80	
16	2	3	1	1	6473	6974	6712	13.55	14.10	14.41	
17	2	3	2	2	6832	7034	5057	14.86	13.27	13.64	
18	2	3	3	3	4968	5684	5761	13.00	13.58	13.45	
19	3	1	1	3	7148	6920	6220	16.70	15.85	14.90	
20	3	1	2	1	6905	7068	7156	14.70	13.97	13.66	
21	3	1	3	2	6933	7194	6667	13.51	13.64	13.92	
22	3	2	1	1	7227	7170	7015	15.54	16.16	16.14	
23	3	2	2	2	7014	7040	7200	13.97	14.09	14.52	
24	3	2	3	3	6215	6260	6488	14.35	13.56	13.00	
25	3	3	1	2	7145	6868	6964	15.70	16.45	15.85	
26	3	3	2	3	7161	7263	6937	15.21	13.77	14.34	
27	3	3	3	1	7060	7050	6950	13.51	13.42	13.07	

**Ejercicio 6.8**

El objetivo de este ejercicio es considerar el análisis de un experimento en el que la variable de respuesta es cualitativa. En este caso particular se inspeccionan  $n$  artículos, la respuesta es 0 si el artículo es defectuoso y 1 si el artículo es no defectuoso; es decir:

$$y_i = \begin{cases} 0, & \text{si el artículo es defectuoso} \\ 1, & \text{si el artículo es no defectuoso} \end{cases}$$

En esta situación  $y_i$  sigue una distribución Bernoulli, para este tipo de datos se deduce de la función de ruido nominal es mejor, la expresión:

$$S/R = -10 \log \left( \frac{1}{p} - 1 \right),$$

donde  $p = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$ ,  $n$  : número de artículos. Nota: en los ejercicios del Capítulo 8 se presenta un ejercicio cuyo análisis estadístico es una alternativa a esta propuesta.

Un experimento se realiza para detectar el número de productos de plástico no defectuosos en un proceso de inyección. Si un defecto es encontrado en el plástico al terminar la inyección, el producto es considerado defectuoso. Cuatro factores se consideraron en tres niveles como se describe a continuación.

Factores\Niveles	1	2	3
A: Temperatura de secado (°C)	100	110	120
B: Temperatura de proceso (°C)	220	230	235
C: Presión de inyección (ud)	70	75	80
D: Tipo de formulación	1	2	3

En cada tratamiento se probaron 150 plásticos, los resultados experimentales en un arreglo  $AO_9(3^4)$  son:

Trat	A	B	C	D	no defectos	S/R
1	1	1	1	1	117	
2	1	2	2	2	110	
3	1	3	3	3	136	
4	2	1	2	3	144	
5	2	2	3	1	108	
6	2	3	1	2	118	
7	3	1	3	2	110	
8	3	2	1	3	140	
9	3	3	2	1	133	

1. Calcule la señal razón a ruido, encuentre los promedios de los factores en cada uno de sus niveles, haga las gráficas e indique en que niveles hay mayor respuesta.
2. ¿Cuál es el valor de  $S/R$  produce la mayor respuesta? Sugerencia, use la expresión  $S/R_{me} = \bar{y} + \sum_i(\text{factor}_i - \bar{y})$ , donde el  $\text{factor}_i$  corresponde al nivel de los factores que resultaron significativos en el experimento. Según este valor diga ¿cuál es el porcentaje de no defectuosos?

### Ejercicio 6.9

Los diseños en parcelas divididas tienen aplicación en procesos industriales, en particular en diseños factoriales  $2^k$  y sus fracciones. Considere que se lleva a cabo un experimento para estudiar la resistencia de un plástico, se identifica que hay cuatro factores importantes para este proceso como se muestra en la tabla de abajo, entre ellos la temperatura que es difícil estar variándola. El diseño es un  $2^4$  y se realiza dos veces.

Factores\Niveles	-1	1
A: Temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ )	150	180
B: Aditivo (%)	10	15
C: Razón de agitación (m/seg)	30	35
D: Tiempo del proceso (min)	15	20

El experimento se organiza formando 4 grupos: parcela en función de la temperatura (Tem) baja - alta, y el diseño  $2^3$ .

Parcela	Tem baja	Tem alta	Tem alta	Tem baja
Diseño	$2^3$	$2^3$	$2^3$	$2^3$



El esquema del diseño y los resultados son:

Parcela	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>y</i>	Parcela	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>y</i>
1	-1	-1	-1	-1	72.7	3	1	-1	-1	-1	70.8
1	-1	1	-1	-1	77.0	3	1	1	-1	-1	68.1
1	-1	-1	1	-1	62.7	3	1	-1	1	-1	66.8
1	-1	1	1	-1	75.0	3	1	1	1	-1	67.4
1	-1	-1	-1	1	65.5	3	1	-1	-1	1	60.3
1	-1	1	-1	1	56.1	3	1	1	-1	1	67.5
1	-1	-1	1	1	63.7	3	1	-1	1	1	66.9
1	-1	1	1	1	70.4	3	1	1	1	1	69.2
2	1	-1	-1	-1	61.6	4	-1	-1	-1	-1	63.7
2	1	1	-1	-1	61.7	4	-1	1	-1	-1	68.2
2	1	-1	1	-1	60.7	4	-1	-1	1	-1	72.2
2	1	1	1	-1	68.1	4	-1	1	1	-1	69.8
2	1	-1	-1	1	60.6	4	-1	-1	-1	1	62.8
2	1	1	-1	1	62.3	4	-1	1	-1	1	77.5
2	1	-1	1	1	57.4	4	-1	-1	1	1	65.7
2	1	1	1	1	63.7	4	-1	1	1	1	68.4

1. Realice el análisis para la parcela.
2. Construya la tabla del análisis de la varianza para la parcela dividida.
3. Determine las desviaciones estándar del diseño y de la parcela.
4. Solución posterior. Usando las técnicas del Capítulo 8 estime el modelo de regresión.



## Capítulo 7

# Algunos diseños especiales

*...la verdad sobre la naturaleza, que yo había rechazado y echado de casa, volvió sigilosamente por la puerta trasera, y se presentó disfrazada para que yo la aceptara...Ah, ¡qué pájaro más necio he sido!*

*Johannes Kepler*

### 7.1 Diseño en parcelas divididas

Hasta ahora, en todos los diseños estudiados se ha definido de manera única a la UE; hay que recordar que una UE se define como aquella porción del material experimental que recibe de modo independiente un tratamiento, sin embargo en muchos experimentos por restricciones prácticas no es posible aplicar el tratamiento completo a una UE, sino que éste se debe aplicar en una secuencia. Ilustremos con un ejemplo esta situación.

#### Ejemplo 7.1

En México el jamón cocido de pierna de cerdo es uno de los alimentos más consumidos por la población urbana; en la práctica industrial, en general, se utilizan gomas de grado alimenticio mezcladas con carne con el fin de bajar el costo, pero a costa de la calidad para el consumidor. Un tecnólogo en alimentos preocupado por esta práctica industrial, cree que la substitución de tales gomas por proteínas miofibrilares de pollo, puede generar jamón mejorado en sus características de calidad (elasticidad, cohesividad, masticabilidad, gomosidad y firmeza) y de rendimiento (pérdida de peso por cocción y capacidad de retención de agua).

Así desea realizar un experimento para comparar un jamón control (formulación comercial) con goma en un 2% del total, con jamones elaborados con 2, 5 y 10% de proteína miofibrilar de pollo. Adicionalmente, dadas las condiciones

del proceso de producción, se desea estudiar los efectos de la posible interacción existente entre las cuatro formulaciones y la variabilidad debida al usar uno de los tres métodos de cocción, por lo que se considera como otro factor al método de cocción en tres niveles para simular en el laboratorio tales variaciones. Así el interés principal son las diferencias en las formulaciones pero interesan los efectos de interacción con los métodos de cocción. Sin embargo, por cuestiones prácticas es difícil hacer cambios de método de cocción, por lo que es deseable en una primera etapa, antes que nada formar UE grandes llamadas parcelas, cada una formada por cuatro jamones que se asignen de manera aleatoria a los métodos de cocción, una vez asignados habrá que aleatorizar las formulaciones sobre las cuatro UE pequeñas (subparcelas), que integran a la parcela grande.

El manejo de este experimento implicó dos restricciones en la aleatorización: identificar parcelas antes de aleatorizar los métodos de cocción e identificar subparcelas antes de aleatorizar formulaciones.

Factor/Nivel				
A: método de cocción	$A_1$	$A_2$	$A_3$	
B: formulación	$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$

Bloque 1 (día 1)	$A_2$	$A_1$	$A_3$
	$B_4, B_1, B_2, B_3$	$B_4, B_2, B_1, B_3$	$B_2, B_1, B_4, B_3$
Bloque 2 (día 2)	$A_3$	$A_2$	$A_1$
	$B_3, B_1, B_2, B_4$	$B_4, B_1, B_3, B_2$	$B_2, B_1, B_3, B_4$
Bloque 3 (día 3)	$A_1$	$A_2$	$A_3$
	$B_4, B_2, B_1, B_3$	$B_3, B_1, B_2, B_4$	$B_1, B_3, B_2, B_4$

Tabla 7.1 Descripción del principio de parcelas divididas

Esta forma de aplicar los tratamientos responde al conocido principio de parcelas divididas: parcelas o unidades grandes a las que los niveles de uno o más de los factores pueden ser aplicados son divididas en subparcelas o unidades chicas, a las que los niveles de uno o más factores adicionales son aplicados.

El principio se ilustra en el Ejemplo 7.1 para el caso de dos factores uno, métodos de cocción a parcelas y el otro, formulaciones de jamón a las subparcelas. Es generalizable a un mayor número de restricciones en la aleatorización con la consecuente división de factores: a las parcelas, a las subparcelas, a las subsubparcelas, etcétera.

Siguiendo con el Ejemplo 7.1, los recursos existentes permiten realizar por triplicado cada formulación en cada método de cocción, esto nos lleva a considerar 36 ( $= 4 \times 3 \times 3$ ) unidades experimentales o lotes de jamón a ser fabricados

durante el experimento. Suponga que sólo es posible producir 12 lotes de jamón al día, por lo que se considera que en tres días debe ser efectuado el experimento completo, esto impone considerar el efecto posible por la diferencia de días de experimentación, que se traduce en una restricción adicional (diferente a las consideradas en el principio anterior) para agrupar lotes de jamón por día (bloque), y así garantizar una estimación más precisa del error experimental; de esta forma se tendría un diseño en bloques, pero divididos en parcelas (niveles: métodos de cocción) y éstas divididas en subparcelas (niveles: formulaciones).

A partir de este último planteamiento y de la Tabla 7.1 se ve que hay  $r = 3$  replicaciones en cada método de cocción y  $9 = 3r$  replicaciones en cada formulación, entonces note que habrá precisiones diferentes en la comparación entre los métodos de cocción y las diferentes formulaciones; además, los dos factores están asociados a diferentes tamaños de UE, lo que da lugar a diferentes varianzas del error experimental asociadas con estas comparaciones.

### 7.1.1 Estimación de varianzas con aleatorización en dos etapas

Como se recordará, en general la estimación de la varianza del error se da a través de las replicaciones, es decir, con al menos dos UE bajo el mismo tratamiento. En el diseño en bloques en parcelas divididas, por causa de la aleatorización en dos etapas de los factores, resultan UE de diferentes tamaños - recuerde que una UE tiene asociado un término de error experimental -, entonces en el caso de un diseño en parcelas divididas, al haber dos tipos de UE se tendrán dos tipos de término de error experimental y por ende dos varianzas a ser estimadas. La estimación de las varianzas de estos dos tipos de errores requieren de réplicas, el número de réplicas de cada tipo de UE será en general diferente si la UE corresponde a una parcela o a una subparcela.

Para estimar la varianza del error asociado a UE parcelas se usan las replicaciones de los niveles del factor que van a las parcelas que se repiten sólo al cambiar de bloque. Lo que corresponde a la primera etapa de aleatorización, que no es otra cosa mas que un diseño en bloques completamente al azar, por lo que se tienen  $a$  tratamientos ( $a$  niveles del factor que se aplica en las parcelas denotado por  $A$ ), y  $r$  = número de replicaciones (igual en este caso al número de bloques).

La estimación de la varianza de UE subparcelas surge con las replicaciones de los niveles del factor que van a las subparcelas que se repiten obviamente al cambiar de bloque pero también dentro de cada bloque, en este caso también se tiene un diseño en bloques completamente al azar, con  $b$  tratamientos ( $b$  niveles del factor que se aplica a subparcelas, denotado por  $B$ ) y  $ra$  = número de replicaciones.

Esto hace que para la estimación de la varianza del error experimental en las parcelas se cuente con menos replicaciones que en el caso de la estimación

de la varianza del error de las subparcelas, desde luego, tales replicaciones son concebibles suponiendo la no interacción entre el efecto de bloques con cualquiera de los efectos de los factores de interés.

Con esta información tenemos para la primera estructura de diseño, la siguiente partición de los grados de libertad  $ra - 1$  en la parcela:

Fuente de variación	Grados de libertad
Bloques	$r - 1$
Factor $A$ : Parcela	$a - 1$
Error ( $A$ )	$(r - 1)(a - 1)$
Parcela completa	$ra - 1$

Si se considera la segunda estructura de diseño, los grados de libertad disponibles son:  $rab - 1$  y la partición de éstos se muestra a continuación:

Fuente de variación	Grados de libertad
replicaciones	$ra - 1$
Factor $B$ : Subparcela	$b - 1$
Error ( $B$ )	$(ra - 1)(b - 1)$
Total	$rab - 1$

La descripción de la estructura de diseño bosquejada en las tablas anteriores proporciona los elementos conceptuales del diseño experimental y con ellos se podrá establecer el modelo y la tabla del ANDEVA.

El modelo estadístico correspondiente al ejemplo 7.1 se muestra en (7.1) inicialmente pensado como un diseño bifactorial pero con dos tipos de restricciones a la aleatorización, por un lado la que da nombre al diseño en parcelas divididas respondiendo a la facilidad del manejo de los tratamientos, y por el otro, la restricción correspondiente al bloqueo del ruido debido a los días distintos de elaboración.

$$y_{ijk} = \mu + \delta_{R_i} + \delta_{A_j} + \delta_{RA_{ij}} + \delta_{B_k} + \delta_{RB_{ik}} + \delta_{AB_{jk}} + \delta_{RAB_{ijk}} + \epsilon_{ijk} \quad (7.1)$$

$$\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma^2) \text{ independientes,}$$

$$i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, a; k = 1, \dots, b,$$

donde  $\mu$  representa un efecto medio general a todas las condiciones experimentales,  $\delta_{R_i}$  representa el efecto de bloque(día);  $\delta_{A_j}$  el efecto del factor asignado a la parcela (método de cocción),  $\delta_{RA_{ij}}$  el efecto de interacción  $R$  con  $A$ ;  $\delta_{B_k}$  el efecto

del factor que va a la subparcela (formulación);  $\delta_{RB_{ik}}$  el efecto de interacción de  $R$  con  $B$ ;  $\delta_{AB_{jk}}$  el efecto de interacción entre  $A$  y  $B$ ;  $\delta_{RAB_{ijk}}$  la interacción triple y  $\epsilon_{ijk}$  el error experimental.

Como se puede observar el término de error  $\epsilon_{ijk}$  está totalmente confundido con el término de interacción triple  $\delta_{RAB_{ijk}}$  dado que no hay réplicas en este contexto. Los efectos de bloque  $\delta'_{R_i}$  no se comparan entre sí por las mismas razones que en el caso de un diseño en bloques completamente aleatorizados. Por otra parte, todos los términos de interacción del modelo que involucran al efecto de bloque, es decir,  $\delta_{RA_{ij}}$ ,  $\delta_{RB_{ik}}$  y nuevamente  $\delta_{RAB_{ijk}}$ , no son estrictamente estimables dado que no existen replicaciones de cada bloque (de hecho esto no es posible), y por ende, las sumas de cuadrados correspondientes pueden ser usadas para estimar la variabilidad debida a los tipos de errores experimentales.

Si se denota por  $e_{ij}$  al error experimental de las parcelas en el bloque  $i$  se puede mostrar que su varianza  $\sigma_e^2$  es adecuadamente estimada por el cuadrado medio derivado de la suma de cuadrados de la interacción de bloque con el factor que va a la parcela. Respecto a la varianza del error experimental de las subparcelas, denotada por  $\sigma_\epsilon^2$ , será adecuadamente estimada mediante el cuadrado medio derivado a partir de las sumas de cuadrados correspondientes a  $\delta_{RB_{ik}}$  y  $\delta_{RAB_{ijk}}$ . Así el modelo correspondiente a un diseño en parcelas divididas en bloques es:

$$y_{ijk} = \mu + \delta_{R_i} + \delta_{A_j} + e_{ij} + \delta_{B_k} + \delta_{AB_{jk}} + \epsilon_{ijk} \quad (7.2)$$

$$\epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \text{ independientes}$$

$$e_{ij} \sim N(0, \sigma_e^2) \text{ independientes}$$

$$i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, a; k = 1, \dots, b$$

De acuerdo a lo anterior, desde el punto de vista de cómputo de la tabla de análisis de varianza, se debe operar como un diseño trifactorial (bloque, factor  $A$  y factor  $B$ ); la diferencia estriba en que, si es plausible suponer que las interacciones de cualquier factor con el factor bloque no existen, la suma de cuadrados de bloque con el factor cuyos niveles se asignan a parcela se utiliza como la suma de cuadrados de residual de la parcela. Las sumas de cuadrados de las interacciones de bloque con el factor  $B$  y de bloque - factor  $A$  - factor  $B$ , ambas se suman y se usan como la suma de cuadrados de residuales para la subparcela. Análogamente para los grados de libertad correspondientes. Así la tabla de análisis de varianza

se muestra en la Tabla 7.2.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio
Bloque R	$r - 1$	$SC_{bloque}$	$CM_{bloque}$
Factor A	$a - 1$	$SC_A$	$CM_A$
Error (parcela)	$(r - 1)(a - 1)$	$SC_{bloque \times A}$	$CM_e$
Factor B	$b - 1$	$SC_B$	$CM_B$
Interacción AB	$(a - 1)(b - 1)$	$SC_{AB}$	$CM_{AB}$
Error (subparcela)	$a(b - 1)(r - 1)$	$SC_{bloque \times B} + SC_{bloque \times AB}$	$CM_\varepsilon$

Tabla 7.2 ANDEVA para el modelo de diseño de bloques en parcelas divididas

Las hipótesis por contrastar son iguales a las de un bifactorial, las cuales se muestran a continuación junto con los cocientes  $F$  correspondientes:

Hipótesis	$F_c$
$H_0: \delta_{A_1} = \dots = \delta_{A_a}$	$\frac{CM_A}{CM_e}$
$H_0: \delta_{B_1} = \dots = \delta_{B_b}$	$\frac{CM_B}{CM_\varepsilon}$
$H_0: \delta_{AB_{11}} = \dots = \delta_{AB_{ab}}$	$\frac{CM_{AB}}{CM_\varepsilon}$

La estimación adecuada de  $\sigma_\varepsilon^2$  es

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = CM_\varepsilon = \frac{SC_{bloque \times B} + SC_{bloque \times AB}}{a(b - 1)(r - 1)}.$$

Con el fin de realizar inferencias para los parámetros en el modelo (7.2) es necesario tener un estimador para la varianza  $\sigma_e^2$ , para ello se requiere obtener las esperanzas de los cuadrados medios mostradas en la Tabla 7.2. La Tabla 7.3 proporciona estas esperanzas, estos resultados se pueden verificar utilizando los procedimientos que se presentan en el apéndice técnico D. Con la información proporcionada en la Tabla 7.3 se puede estimar la varianza debida a la parcela  $\sigma_e^2$ , a partir de  $E(CM_e) = \sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_e^2$ :

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{CM_e - \hat{\sigma}_\varepsilon^2}{b}$$



Fuente de variación	Grados de libertad	$E(CM)$
Factor A	$a - 1$	$\sigma_{\varepsilon}^2 + b\sigma_e^2 + \frac{rb}{a-1} \sum_i \delta_{A_i}^2$
Error $\mathcal{C}$ (parcela)	$(r - 1)(a - 1)$	$\sigma_{\varepsilon}^2 + b\sigma_e^2$
Factor B	$b - 1$	$\sigma_{\varepsilon}^2 + \frac{ra}{b-1} \sum_i \delta_{B_i}^2$
Interacción AB	$(a - 1)(b - 1)$	$\sigma_{\varepsilon}^2 + \frac{r}{(a-1)(b-1)} \sum_i \sum_j \delta_{A_i B_j}^2$
Error $\mathcal{E}$ (subparcela)	$a(b - 1)(r - 1)$	$\sigma_{\varepsilon}^2$

Tabla 7.3 Esperanzas de cuadrados medios para el modelo (7.2)

### 7.1.2 ¿Cuándo debe aplicarse este tipo de diseño?

El principio de parcelas divididas debe ser aplicado en las siguientes situaciones:

1. Cuando los tratamientos asociados con los niveles de uno o más factores requieren mayores cantidades de material experimental del que requieren tratamientos de otros factores. Esto puede ser porque así se precisa por cuestiones experimentales o por cuestiones prácticas en la realización física del experimento. También equivale en ciertos contextos a factores que son difíciles de cambiar durante el experimento (hard - to - change factors), como el factor método de cocción del Ejemplo 7.1.
2. Cuando un factor adicional es incorporado en un experimento para incrementar la base inferencial. Tal factor es asignado a las parcelas grandes. Por ejemplo, en diseño robusto, un factor de ruido iría a la parcela. En el Ejemplo 7.1 el método de cocción así fue incluido en el experimento.
3. Cuando con información previa pueden conocerse diferencias grandes entre los niveles de ciertos factores que las correspondientes entre otros. En este caso, los tratamientos para los efectos donde diferencias grandes son esperadas pueden ser asignados al azar a las parcelas grandes simplemente como una cuestión de conveniencia.
4. Cuando mayor precisión es deseada para las comparaciones entre ciertos factores que para los otros. Esto es esencialmente lo mismo que en 3, pero las razones pueden ser diferentes.

De esta forma a las subparcelas o subunidades se les asignan tratamientos que:

- Requieren menor cantidad de material experimental.

- Se espera que muestren diferencias menores.
- Se desea mayor precisión en su análisis.

En el Ejemplo 7.1, debido a lo anterior, los métodos de cocción se asignarían a las parcelas completas y las formulaciones a las subparcelas.

### Ejemplo 7.1(continuación)

Ilustremos lo anterior con datos, tomemos como referencia al Ejemplo 7.1 planteado al inicio de este capítulo. Los datos se muestran en la Tabla 7.4, la variable respuesta corresponde a la pérdida de peso por cocción en gramos. La codificación es la siguiente: bloques (días) 1, 2, 3 (días); métodos de cocción 1, 2, 3 (parcelas); formulaciones 1 (control comercial), 2, 3 y 4 (subparcelas).

Bloque	fórmula	método cocción	$y_{ijk}$	Bloque	fórmula	método cocción	$y_{ijk}$
1	1	1	30	2	3	2	42
1	2	1	35	2	4	2	40
1	3	1	37	2	1	3	31
1	4	1	36	2	2	3	30
1	1	2	34	2	3	3	32
1	2	2	41	2	4	3	40
1	3	2	38	3	1	1	31
1	4	2	42	3	2	1	37
1	1	3	29	3	3	1	41
1	2	3	26	3	4	1	40
1	3	3	33	3	1	2	35
1	4	3	36	3	2	2	40
2	1	1	28	3	3	2	39
2	2	1	32	3	4	2	44
2	3	1	40	3	1	3	32
2	4	1	41	3	2	3	34
2	1	2	31	3	3	3	39
2	2	2	36	3	4	3	45

Tabla 7.4 Pérdida de peso por cocción de distintas formulaciones y métodos de cocción de jamón

La estimación del efecto de bloque (días) se obtiene por la expresión  $\hat{\delta}_{bloque_i} = \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$ , el efecto del método de cocción ( $A$ ) por:  $\hat{\delta}_{A_j} = \bar{y}_{\bullet j \bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$  y el efecto

de formulación ( $B$ ) por:  $\hat{\delta}_{A_k} = \bar{y}_{\bullet\bullet k} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$ , finalmente la interacción entre bloque y método de cocción (residual parcela) se usa  $\hat{\delta}_{bloque_i A_j} = \bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} + \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$  y entre método de cocción y formulación se obtiene con  $\hat{\delta}_{A_j B_k} = \bar{y}_{\bullet jk} - \bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet k} + \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$ . Con la finalidad de evaluar significancias de estos efectos se construye la tabla del ANDEVA como se muestra en la Tabla 7.5 ésta se obtiene aplicando las expresiones de suma de cuadrados a estos efectos, éstas se presentaron en los capítulos 2 y 4, aquí sólo nos interesa su adecuada interpretación. La construcción de ésta se solicita en el Ejercicio 7.2.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
Bloques (días)	2	77.556	38.778		
Método de cocción	2	128.389	64.194	7.07	0.049
Residual parcela ( $e$ )	4	36.278	9.069		
Formulación	3	434.083	144.694	36.43	0.000
Interacción	6	75.167	12.528	3.15	0.027
Residual subparcela ( $\varepsilon$ )	18	71.500	3.972		

Tabla 7.5 ANDEVA para datos de formulaciones y métodos de cocción de jamón

Existen cinco posibilidades de continuar con la inferencia estadística en un diseño en parcelas divididas, si resulta que no se detectó efecto de interacción entre los dos factores de interés, corresponde entonces comparar medias de cada factor en lo individual, para ello utilice los resultados de la Tabla 7.6.

Diferencia	Intervalo de confianza
$\mu_{\bullet\bullet k} - \mu_{\bullet\bullet k'}$	$\bar{y}_{\bullet\bullet k} - \bar{y}_{\bullet\bullet k'} \pm t(a(b-1)(r-1), \alpha/2) \sqrt{\frac{2CM_e}{ra}}$
$\mu_{\bullet j\bullet} - \mu_{\bullet j'\bullet}$	$\bar{y}_{\bullet j\bullet} - \bar{y}_{\bullet j'\bullet} \pm t((r-1)(a-1), \alpha/2) \sqrt{\frac{2CM_e}{rb}}$

Tabla 7.6 Intervalos de confianza para comparaciones de medias en parcelas divididas

Si resulta que estadísticamente existe interacción entre los dos factores de interés, las comparaciones de medias se juzgan a través de los intervalos de confianza en la Tabla 7.7.

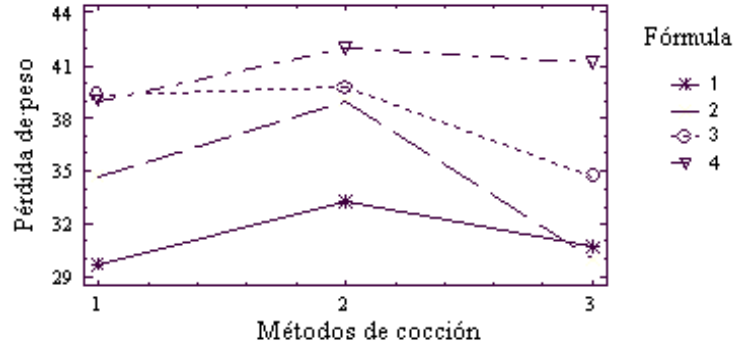


Fig. 7.1: Gráfica de interacciones entre formulación y método de cocción

Diferencia	Intervalo de confianza
$\mu_{\bullet jk} - \mu_{\bullet jk'}$	$\bar{y}_{\bullet jk} - \bar{y}_{\bullet jk'} \pm t(a(r-1)(b-1), \alpha/2, ) \sqrt{\frac{2CM_{\varepsilon}}{r}}$
$\mu_{\bullet jk} - \mu_{\bullet j'k}$	$\bar{y}_{\bullet jk} - \bar{y}_{\bullet j'k} \pm t^* \sqrt{\frac{2(CM_{\varepsilon} + (b-1)CM_{\varepsilon})}{rb}}$
$\mu_{\bullet jk} - \mu_{\bullet j'k'}$	$\bar{y}_{\bullet jk} - \bar{y}_{\bullet j'k'} \pm t^* \sqrt{\frac{2CM_{\varepsilon} + (b-1)CM_{\varepsilon}}{rb}}$

Tabla 7.7 Intervalos de confianza para comparaciones de medias en parcelas divididas en bloques con interacción

donde

$$t^* = \frac{(b-1)CM_{\varepsilon}t_{(gl_{\varepsilon}, \alpha/2)} + CM_e t_{(gl_e, \alpha/2)}}{(b-1)CM_{\varepsilon} + CM_e}$$

y  $gl_{\varepsilon} = a(b-1)(r-1)$ , y  $gl_e = (a-1)(r-1)$ . Por supuesto si son muchas comparaciones por realizar es preferible utilizar los cuantiles de la estadística de la prueba de Tukey mencionada en el capítulo 3.

En las Figs.7.1, 7.2 y 7.3 se muestran las gráficas de interacción y de efectos principales del Ejemplo 7.1. Analice tales gráficas y realice las comparaciones de interés.

## 7.2 Experimentos con mediciones repetidas en el tiempo

En muchos experimentos el interés fundamental es comparar los efectos de distintos tratamientos sobre una variable respuesta pero a lo largo de un intervalo

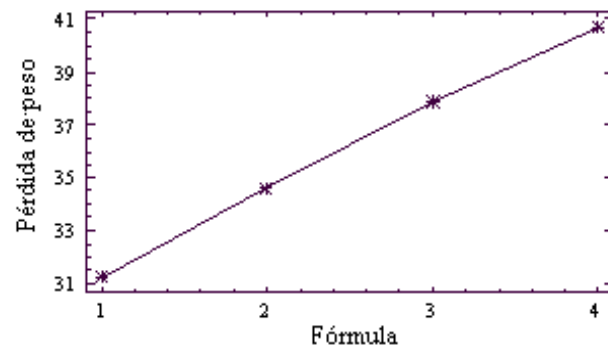


Fig. 7.2: Gráfica de efectos principales de formulaciones



Fig. 7.3: Gráfica de efectos principales de métodos de cocción

de tiempo, esto equivale a medir repetidamente la respuesta en cada una de las UE en el experimento. Para fijar ideas consideremos el siguiente ejemplo.

### Ejemplo 7.2

El crecimiento de galletas durante su cocinado está influenciado por el tipo de harina y el edulcorante utilizado en la masa de la galleta, la cual gradualmente crece en diámetro durante el cocinado hasta alcanzar su diámetro máximo. La tasa de crecimiento es de interés en este estudio; los datos se muestran en la Tabla 7.8. Representan mediciones de tres galletas por tipo de producto realizadas cada minuto, empezando en cero minutos y terminando al minuto 6. Cada galleta de cada producto fue independientemente formulada, es decir cada galleta proviene de un lote de producción diferente, pero las mediciones en el tiempo son mediciones repetidas sobre la misma galleta. Antes de resolver este ejemplo, se mostrará la metodología del análisis.

Corrida	$t_0$	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$
<b>producto control</b>							
1	62.10	63.08	66.99	72.86	76.28	80.68	85.57
2	61.72	62.21	67.31	72.90	76.79	79.95	84.08
3	61.98	63.19	67.59	74.18	78.08	81.74	85.89
<b>producto con fructuosa</b>							
1	59.41	63.78	67.66	72.51	77.36	79.78	80.75
2	60.62	62.31	66.65	72.21	76.79	79.93	82.11
3	60.62	62.31	67.39	72.69	78.00	81.14	82.83
<b>producto con glucosa</b>							
1	59.65	62.08	65.47	70.81	76.14	80.02	81.96
2	61.34	63.27	66.17	70.76	76.55	80.90	82.35
3	61.23	62.92	68.00	74.29	78.89	82.04	83.97
<b>producto con trigo</b>							
1	60.61	62.05	65.42	70.71	74.79	76.96	78.40
2	60.94	62.62	65.49	71.19	74.57	77.44	79.35
3	61.74	63.21	67.13	72.52	76.19	79.13	81.83
<b>producto con sacarosa</b>							
1	62.02	63.19	68.07	72.96	78.81	83.94	87.59
2	60.98	61.47	64.85	71.15	77.20	82.28	87.36
3	60.11	61.79	65.14	71.13	76.88	81.91	85.50

Tabla 7.8 Diámetros (mm) para el experimento de crecimiento de galletas (Milliken, 1990)

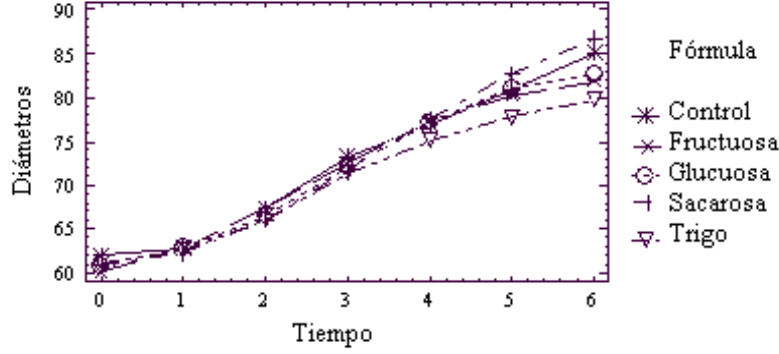


Fig. 7.4: Tendencias en el tiempo del crecimiento del diámetro de galletas, por fórmula

### Análisis de la varianza

El ANDEVA se puede construir usando las suposiciones estándar correspondientes a un diseño en parcelas divididas, donde la parcela es una galleta y las subparcelas pueden pensarse como producto de las mediciones realizadas en el tiempo. El tratamiento de la parcela es el tipo de edulcorante, el tratamiento de la subparcela el tiempo - note que el tiempo en este caso no puede ser aleatorizado dentro de la parcela -. Por otra parte, hay que notar que la suposición de independencia entre los errores dentro de la parcela puede ser no realista, dado la posible correlación temporal de las mediciones sobre la misma galleta. Sin embargo si se supone que la correlación temporal de errores dentro de cada parcela se mantiene constante, el análisis estándar tipo parcelas divididas será adecuado. Si tal supuesto no es razonable, aun tomando en cuenta los ajustes a las pruebas estadísticas correspondientes (véase Milliken, 1990), dado el interés por comparar tendencias en el tiempo se cree que es más conveniente otro enfoque para el análisis estadístico de este tipo de experimentos.

Observando la Fig. 7.4 se puede apreciar que el crecimiento promedio del diámetro en el tiempo es aproximadamente lineal en todos los tipos de productos, y por ende el interés sería comparar los interceptos y las pendientes de las líneas de crecimiento. Así, si denotamos por  $y_{ijk}$  al diámetro de la gallega  $j$  bajo el edulcorante  $i$  al tiempo  $k$ , se puede pensar que

$$y_{ijk} = \alpha_{ij} + \beta_{ij}T_k + s_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

donde  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, d$ ,  $T_k$  representa el  $k$ -ésimo tiempo,  $s_{ij}$  representan los errores del sujeto (que induce la llamada variación intraindividual, pero dados los alcances de este libro, se supone como no importante; de ser

importante la variación intraindividual se requiere un tratamiento específico, ver por ejemplo: Verbeke y Molenberghs, 2000),  $\epsilon_{ijk}$  los errores correspondientes a los intervalos de tiempo,  $\alpha_{ij}$  y  $\beta_{ij}$  denotan el intercepto y la pendiente de la recta de regresión para el sujeto  $j$  del tratamiento  $i$ , cuyo manejo se verá con mayor detalle en el capítulo 8. Utilizando los interceptos y las pendientes estimados,  $\{\hat{\alpha}_{ij}\}$  y  $\{\hat{\beta}_{ij}\}$ , respectivamente, se puede pensar que

$$\hat{\alpha}_{ij} = \phi_i + u_{ij}, \hat{\beta}_{ij} = \pi_i + r_{ij}$$

donde  $\phi_i$  representa el efecto medio del edulcorante  $i$  sobre la pendiente del crecimiento estimado de la galleta  $j$ ,  $\pi_i$  el efecto del edulcorante  $i$  sobre el intercepto del crecimiento estimado de la galleta  $j$ , con  $\{u_{ij}\}$  y  $\{r_{ij}\}$  errores con varianzas constantes respectivamente. Así, verificar estadísticamente

$$H_0 : \pi_1 = \dots = \pi_m \text{ vs } H_a : \text{no } H_0$$

es equivalente a verificar la hipótesis de nula interacción del tratamiento con el tiempo, dado que la relación entre la respuesta y el tiempo es lineal. Si las líneas son paralelas (pendientes iguales,  $H_0$  se acepta),

$$H_0 : \phi_1 = \dots = \phi_m \text{ vs } H_a : \text{no } H_0$$

equivalente a verificar estadísticamente si hay igualdad de efectos de tratamientos.

De esta manera para cada galleta (sujeto) de cada tipo de producto (tratamiento) se puede estimar los parámetros de la recta correspondiente, vía estimación por mínimos cuadrados como se muestra a continuación:

$$\hat{\beta}_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^d (T_k - \bar{T})(y_{ijk} - \bar{y}_{ij\bullet})}{\sum_{k=1}^d (T_k - \bar{T})^2}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

$$\hat{\alpha}_{ij} = \bar{y}_{ij\bullet} - \hat{\beta}_{ij}\bar{T}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n$$

### Solución del ejemplo 7.2

Los resultados se muestran en la Tabla 7.9.



Producto( $i$ )	Galleta( $j$ )	Pendiente( $\hat{\beta}_{ij}$ )	Intercepto( $\hat{\alpha}_{ij}$ )
Control	1	4.10357	60.1979
	2	4.00143	60.1329
	3	4.26143	60.4514
Fructuosa	1	3.77571	60.2800
	2	3.92321	59.7475
	3	4.10357	59.8293
Glucosa	1	4.05286	58.7171
	2	3.88107	59.9768
	3	4.19107	60.4754
Trigo	1	3.30571	59.9314
	2	3.35536	60.1625
	3	3.61321	60.8389
Sacarosa	1	4.60536	59.9811
	2	4.75393	57.9225
	3	4.57679	58.0496

Tabla 7.9 Pendientes e interceptos estimados

Realizando los cálculos, las ANDEVA correspondientes se muestran en las Tablas 7.10 y 7.11.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Producto	4	2.2882	0.5720	27.36	0.000
Error	10	0.2091	0.0209		
Total	14	2.4973			

Tabla 7.10 ANDEVA para pendientes

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	valor $p$
Producto	4	5.461	1.365	2.75	0.089
Error	10	4.970	0.497		
Total	14	10.431			

Tabla 7.11 ANDEVA para interceptos

Como se aprecia en las tablas anteriores, sí existen diferencias estadísticas entre las pendientes de los diferentes productos. Sólo para completar el análisis la Tabla 7.11 se presenta. La Tabla 7.12 contiene los intervalos de confianza contruidos con el estadístico de Tukey, con una tasa de error por familia  $\alpha = 0.05$ , tasa de error individual = 0.00815, valor crítico = 4.65.

	Control	Fructuosa	Glucosa	Trigo
Fructuosa	-0.2002 0.5762			
Glucosa	-0.3077 0.4687	-0.4957 0.2807		
Trigo	0.3092 1.0856	0.1212 0.8976	0.2287 1.0051	
Sacarosa	-0.9114 -0.1350	-1.0994 -0.3230	-0.9919 -0.2155	-1.6088 -0.8324

Tabla 7.12 Intervalos de confianza de comparaciones múltiples mediante la prueba de Tukey

Como se puede apreciar en la Tabla 7.12 la sacarosa se considera diferente de los demás con una pendiente más grande; el control, la glucosa y la fructuosa se consideran estadísticamente similares y el trigo con una tasa estadísticamente diferente y menor de crecimiento.

En lo anterior se ha supuesto que la relación entre la variable respuesta y el tiempo para todos los tratamientos es aproximadamente una línea recta. Si resultara que la relación entre la variable respuesta y el tiempo para todos los tratamientos fuera no lineal en el tiempo, pero común a todos los tratamientos, mediante el uso de polinomios de orden mayor a uno se podría intentar el ajuste; el enfoque de análisis estadístico presentado en esta sección es directamente aplicable comparando los coeficientes correspondientes al mismo orden.

### 7.3 Diseños que involucran anidamiento

Efectos anidados pueden ocurrir tanto en la estructura de tratamientos como en la estructura de un diseño experimental. En general el anidamiento está presente cuando en la estructura existe una jerarquía tal que los niveles inferiores de la jerarquía no siempre son los mismos al cambiar en el nivel superior de la misma. Así, para que exista anidamiento en la estructura de tratamientos, en primer lugar debe haber al menos dos factores, digamos  $A$  y  $B$ , pero tales que cada nivel de  $A$  ocurra con sólo un nivel del factor  $B$ . En este caso se dice que los niveles del factor  $A$  están anidados en los niveles del factor  $B$ . Por otro lado, en la estructura de diseño el anidamiento se da cuando existen al menos dos tamaños de UE, como fue el caso del diseño en parcelas divididas mencionado anteriormente.

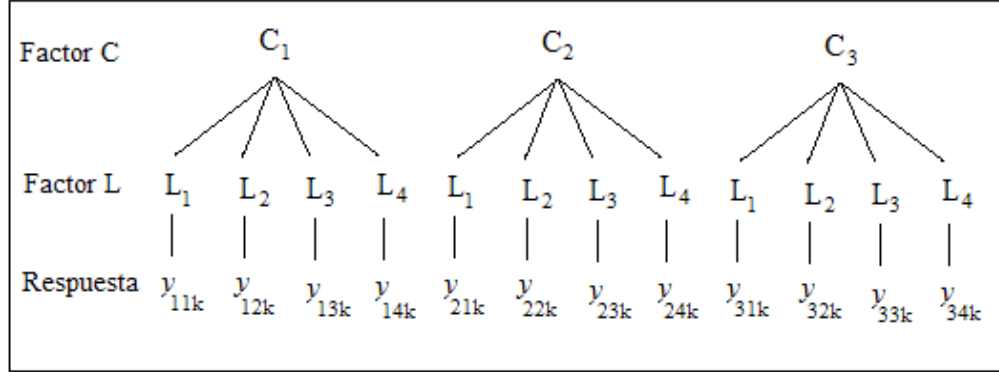


Fig. 7.5: Descripción de un experimento anidado.

**Ejemplo 7.3**

Suponga que se tienen cuatro lotes:  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$ ,  $L_4$ , de cada uno de tres conservadores comerciales:  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ ; la variable respuesta de interés es la acidez de un producto alimenticio al que es adicionado un conservador. Cada combinación conservador - lote es adicionada a  $n$  unidades de producto. El diseño esquemáticamente Fig 7.5.

En este caso se tienen dos factores, el factor fijo conservador y el factor aleatorio lote. Las diferencias entre los efectos de  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  se deberán en parte a las diferencias entre los efectos específicos de los lotes; sin embargo, los efectos de lote están anidados en un nivel del factor conservador, ya que el lote  $L_1$  del conservador 1 no es el lote  $L_1$  del conservador  $C_2$  y  $C_3$ , etc. El anidamiento implica en este caso que no sea posible pensar en evaluar la interacción entre lotes y conservadores, si esto fuera el interés del experimentador.

**Metodología del análisis estadístico**

Denotemos por  $\delta_{C_i}$  el efecto del conservador  $i$ , y por  $\delta_{L_{j(i)}}$  el efecto anidado del lote  $j$  en el conservador  $i$ . De esta manera el término correspondiente a la interacción  $\delta_{CL_{i,j(i)}}$  no aparecerá en el modelo correspondiente al diseño de este tipo de experimentos.

El modelo estadístico para el ejemplo 7.3 es representado como:

$$y_{ijk} = \mu + \delta_{C_i} + \delta_{L_{j(i)}} + \epsilon_{k(ij)} \quad i = 1, \dots, a; j = 1, \dots, b; k = 1, \dots, n$$

La tabla de análisis de varianza correspondiente involucra el cómputo de las

siguientes cantidades:

$$SC_C = n \sum_i b \hat{\delta}_{C_i}^2, \quad a - 1 \text{ grados de libertad}$$

$$SC_{L(C)} = n \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \hat{\delta}_{L_{j(i)}}^2, \quad \hat{\delta}_{L_{j(i)}} = \bar{y}_{ij\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet} \quad a(b-1) \text{ grados de libertad}$$

$$SC_{error} = \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{ij\bullet})^2, \quad ab(n-1) \text{ grados de libertad}$$

$$SC_{total} = \sum_{i,j,k} (y_{ijk} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet})^2, \quad abn - 1 \text{ grados de libertad}$$

Hay que señalar, dado que en este ejemplo el conservador se considera como un factor fijo, mientras que el factor lote se considera aleatorio, las esperanzas de cuadrados medios correspondientes son:

$$\begin{aligned} C_i & \quad \sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{L(C)}^2 + \phi_C \\ L_{j(i)} & \quad \sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{L(C)}^2 \\ \varepsilon_{k(ij)} & \quad \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

Las hipótesis globales a contrastar serán:

$$H_{01} : \delta_{C_1} = \delta_{C_2} = \delta_{C_3}$$

$$H_{02} : \sigma_{L(C)}^2 = 0$$

Así la tabla de análisis de varianza se muestra en la Tabla 7.12.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$
$C(H_{01})$	$(a-1)$	$SC_C$	$CM_C = \frac{SC_C}{(a-1)}$	$\frac{CM_C}{CM_{L(C)}}$
$L(C) (H_{02})$	$a(b-1)$	$SC_{L(C)}$	$CM_{L(C)} = \frac{SC_{L(C)}}{a(b-1)}$	$\frac{CM_{L(C)}}{CM_{error}}$
Error	$ab(n-1)$	$SC_{error}$	$CM_{error} = \frac{SC_{error}}{ab(n-1)}$	
Total	$abn-1$	$SC_{total}$		

Tabla 7.12 ANDEVA para un factor anidado en otro

La Tabla 7.12 es aplicable también en el caso en que el factor no anidado se considere aleatorio, sólo análogamente modificando la interpretación de  $H_{01}$ . En

el caso en que ambos factores bajo estudio se consideren fijos, los cocientes  $F$  tendrán como denominador al  $CM_{error}$ . Véanse los apéndices técnicos  $B$  y  $D$ ; otra referencia para calcular las sumas de cuadrados es Neter, et al. (1996).

### Solución del ejemplo 7.3

Continuando con el ejemplo introductorio, suponga que al realizar el experimento los datos generados sobre la acidez del producto son los siguientes ( $n = 3$ ):

$C_1$				$C_2$				$C_3$			
$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$	$L_1$	$L_2$	$L_3$	$L_4$
111	108	108	111	111	110	109	110	112	108	109	113
109	107	110	114	108	114	110	113	114	110	109	112
110	106	111	110	107	112	108	112	110	112	112	111

La tabla de análisis de varianza correspondiente es la Tabla 7.13.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
$C$	2	12.06	6.03	0.74	0.502
$L$ anidado en $C$	9	72.916	8.10	3.00	0.015
error	24	64.666	2.69		
total	35	149.639			

Tabla 7.13 ANDEVA para el Ejemplo 7.3

Se aprecia que estadísticamente no es fuerte la diferencia de efectos de los conservadores; sin embargo en cada conservador se aprecian ciertas indicaciones sobre diferencias entre los lotes correspondientes. En este sentido, cualquier conservador es bueno para controlar la acidez, pero habrá que cuidar la homogeneidad de los lotes recibidos.

Finalmente, el ejemplo presentado representa a dos factores que son, uno anidado en otro. Cuando hay más factores, si el anidamiento se da en un subconjunto de los factores y una estructura factorial sin anidamiento en los restantes, el análisis estadístico es similar al análisis de diseños factoriales, sólo teniendo cuidado en las interacciones presentes. Para más detalles vea Hicks (1986) o Montgomery (1991).

**Ejemplo 7.4**

Un experimento fue realizado para estudiar los efectos de tres niveles de temperatura ambiente (18, 23 y 28 grados centígrados) y del género (femenino y masculino) sobre el confort personal. Las tres temperaturas fueron aleatoriamente asignadas a tres de nueve cámaras ambientales disponibles. Una cámara es entonces la UE para la temperatura, teniendo así un diseño experimental de un factor (la temperatura) completamente aleatorizado en las cámaras. Por otra parte se tuvieron 36 voluntarios, 18 mujeres y 18 hombres para realizar el experimento; ellos fueron asignados a las cámaras de tal forma que ambos sexos siempre estuvieran presentes en cada cámara con dos réplicas, es decir, en cada cámara 2 mujeres y 2 hombres. La UE para género es una persona y el diseño experimental correspondiente para el género es un diseño experimental de un factor (género) completamente aleatorizado en bloques (cámaras). Realizado el experimento, la variable respuesta midió el confort personal en una escala del 1 al 15, 1 representando sensación de frío, 8 sensación confortable y 15 sensación de calor. Los datos se muestran en la Tabla 7.14.

$T$ : Temp $\delta_T$	$G$ : Género $\delta_G$	$C$ : Cámara $\delta_{C_1}$	Cámara $\delta_{C_2}$	Cámara $\delta_{C_3}$
18	hombre	5 4	5 4	4 2
	mujer	1 2	5 5	1 3
23	hombre	8 8	6 3	5 7
	mujer	10 7	8 8	8 8
28	hombre	12 8	8 7	6 6
	mujer	11 13	8 8	6 7

Tabla 7.14 Datos del Ejemplo 7.4

**Planteamiento del análisis estadístico**

En este experimento hay dos anidamientos, las cámaras anidadas en temperaturas y las personas del mismo género anidadas en cámaras. Por otra parte el factor temperatura y el factor género son factores fijos, mientras que las cámaras se consideran como un factor aleatorio. Se pueden visualizar dos UE's y por ende surgirán dos términos de error. Por lo tanto, el modelo estadístico es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 y_{ijlm} &= \mu + \delta_{T_i} + \delta_{G_l} + \delta_{TG_{il}} + \delta_{C_{j(i)}} + \xi_{m(ijl)} \\
 i &= 1, 2, 3; l = 1, 2; j = 1, 2, 3; m = 1, 2
 \end{aligned}$$

donde  $\delta_{T_i}$  representa el efecto de la temperatura  $i$ ;  $\delta_{G_l}$  representa el efecto del género  $l$ ;  $\delta_{TG_{il}}$  representa el efecto de interacción;  $\delta_{C_{j(i)}}$  el efecto anidado de la

cámara  $j$  con la temperatura  $i$ , y  $\xi_{m(ijl)}$  el efecto de la persona  $m$  del género  $l$  en la cámara  $j$  sujeta a temperatura  $i$ . Nótese que no está incluido en el modelo el término de interacción  $\delta_{GC_{lj(i)}}$ , suponiéndolo no importante. Se supone además el efecto de cámara es aleatorio, es decir, que los términos  $\delta_{C_{j(i)}}$  son tales que:

$$\delta_{C_{j(i)}} \sim N(0, \sigma_C^2)$$

independientes e idénticamente distribuidos, y que los términos  $\xi_{m(ijl)}$  son tales que,

$$\xi_{m(ijl)} \sim N(0, \sigma_\xi^2)$$

independientes e idénticamente distribuidos; también se supone que:  $\{\delta_{C_{j(i)}}\}$  y  $\{\xi_{m(ijl)}\}$  son independientes entre sí. Las hipótesis globales a contrastar son:

$$H_{01} : \delta_{T_1} = \delta_{T_2} = \delta_{T_3} \text{ temperaturas}$$

$$H_{02} : \delta_{G_1} = \delta_{G_2} \text{ género}$$

$$H_{03} : \delta_{TG_{il}} \text{ iguales para cada } il \text{ interacción temperatura - género}$$

$$H_{04} : \sigma_C^2 = 0 \text{ cámaras}$$

Del modelo presentado, es entonces fácil derivar las esperanzas de los cuadrados medios correspondientes a cada término en el modelo (ver Apéndice D); éstas resultan ser como se muestran a continuación:

$\delta_{T_i}$	$\sigma_\xi^2 + 4\sigma_C^2 + \phi_T$
$\delta_{G_l}$	$\sigma_\xi^2 + \phi_G$
$\delta_{TG_{il}}$	$\sigma_\xi^2 + \phi_{TG}$
$\delta_{C_{j(i)}}$	$\sigma_\xi^2 + 4\sigma_C^2$
$\xi_{m(ijl)}$	$\sigma_\xi^2$

La tabla ANDEVA correspondiente se construye con las expresiones siguientes:

$$SC_T = cbr \sum_{i=1}^a \hat{\delta}_{T_i}^2 \quad SC_G = acr \sum_{l=1}^b \hat{\delta}_{G_l}^2 \quad SC_{C(T)} = br \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^c \hat{\delta}_{C_{j(i)}}^2 \quad (7.3)$$

donde:

$$\hat{\delta}_{C_{j(i)}} = \bar{y}_{ij\bullet\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet\bullet}$$

$$SC_{TG} = \sum_{i=1}^a \sum_{l=1}^b \hat{\delta}_{T_i G_l}^2 \quad (7.4)$$

donde:

$$\hat{\delta}_{T_i G_l} = \bar{y}_{i\bullet\bullet} - \bar{y}_{i\bullet\bullet\bullet} - \bar{y}_{i\bullet l\bullet} + \bar{y}_{i\bullet\bullet\bullet}$$

En el Ejemplo 7.4, los cálculos son los siguientes:

$T$	1	2	3					$\widehat{\delta}$
$\overline{y}_{i\bullet\bullet\bullet}$	3.42	7.17	8.33					$\overline{y}_{i\bullet\bullet\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet\bullet}$
$G$	1	2						
$\overline{y}_{\bullet\bullet l\bullet}$	6.00	6.61					$\overline{y}_{\bullet\bullet l\bullet} - \overline{y}_{\bullet\bullet\bullet\bullet}$	
$TG$	11	12	21	22	31	32		
$\overline{y}_{i\bullet l\bullet}$	4.00	2.83	6.16	8.16	7.83	8.83		
$C(T_1)\overline{y}_{1j\bullet\bullet}$	3.00	4.75	2.50					$\overline{y}_{1j\bullet\bullet} - \overline{y}_{1\bullet\bullet\bullet}$
$C(T_2)\overline{y}_{2j\bullet\bullet}$	8.25	6.25	7.00					$\overline{y}_{2j\bullet\bullet} - \overline{y}_{2\bullet\bullet\bullet}$
$C(T_3)\overline{y}_{3j\bullet\bullet}$	11.0	7.75	6.25					$\overline{y}_{3j\bullet\bullet} - \overline{y}_{3\bullet\bullet\bullet}$
$\overline{y}_{\bullet\bullet\bullet\bullet}$	6.31							

Tabla 7.15 Promedios en los niveles de los factores

Aplicando las expresiones (7.3) y (7.4) para el efecto de cámara anidado en tratamiento, se tiene:

$$\begin{aligned} SC_{C(T)} &= 2 \times 2(0.18 + 1.77 + 0.85 + 1.17 + 0.85 + 0.03 + 7.13 + 0.34 + 4.33) \\ &= 4(16.63) = 66.50, \text{ con } (3-1)(3) = 6 \text{ grados de libertad} \end{aligned}$$

Así la ANDEVA se muestra en la Tabla 7.16.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Temperatura $T$	2	158.07	79.04	7.14	0.0200
Género $G$	1	3.35	3.35	2.17	0.1200
$TG$	2	15.72	7.86	4.75	0.0200
Cámara( $C$ )	6	66.50	11.08	6.71	0.0003
Error	24	40.00	1.67		
Total	35				

Tabla 7.16 ANDEVA para el modelo de diseño de lote anidado en conservador.



Los grados de libertad de esta tabla: en el error  $24 = 18 + 6$ . 18 grados de libertad del término  $\xi_{m(ijl)}$   $[(2 - 1) \times (3 \times 2 \times 3) = 18]$  y 6 del término  $\delta_{GC_{lj(i)}}$   $[(2 - 1) \times (3 - 1) \times 3 = 6]$ .

Nótese que a partir de las esperanzas de cuadrados medios, se pueden estimar (por el método de momentos) las varianzas  $\sigma_\xi^2$  y  $\sigma_C^2$  (componentes de varianza). En este caso éstas se estiman como:

$$\hat{\sigma}_\xi^2 = 1.65 \quad \text{y} \quad \hat{\sigma}_C^2 = 2.36$$

Nótese además que el error de las unidades pequeñas incluye en sus 24 grados de libertad a 8 grados de libertad de la interacción  $\delta_{GC_{lj(i)}}$  y su suma de cuadrados a la suma de cuadrados correspondiente. Interprete los resultados de la tabla anterior y saque conclusiones.

## 7.4 Sobre errores de restricción en la aleatorización

Los errores de restricción son términos que deben ser incluidos en los modelos estadísticos correspondientes a diseños experimentales en los que existan restricciones en la aleatorización de tratamientos para poder realizar inferencia estadística correcta. Así deben incluirse tantos términos de error de restricción, como tipos de UE resultantes de las restricciones presentes. Por ejemplo, como ya se ha visto, en un diseño en bloques completamente aleatorizados se tendrá un error de restricción debido a cada bloque, mientras que en un diseño en bloques en parcelas divididas se tendrán términos de error para cada bloque y para cada parcela.

Así un error de restricción es común a un grupo de UE aisladas por el procedimiento experimental. Es aleatorio en el sentido de que si el experimentador quisiera recrear el mismo grupo de UE, este grupo sería diferente. La inclusión de los errores de restricción pertinentes permite clarificar qué hipótesis son contrastables bajo el diseño experimental considerado. Recuerde que identificar las hipótesis que son contrastables requiere del cálculo de las esperanzas de cuadrados medios; cuando hay restricciones en la aleatorización de tratamientos, pero no se identifican a los errores de restricción en el modelo, las esperanzas de cuadrados medios identificarán incorrectamente qué hipótesis son contrastables en general.

Para fijar ideas consideremos un experimento realizado como un diseño de un factor completamente aleatorizado en bloques completos. En este caso hay una restricción, la formación de bloques de UE homogéneas en su respuesta, antes de aplicar aleatoriamente a los tratamientos. El modelo estadístico sin errores de restricción como se recordará es:

$$\begin{aligned}
y_{ij} &= \mu + \delta_{B_i} + \delta_{A_j} + \varepsilon_{(ij)} \\
\varepsilon_{(ij)} &\sim N(0, \sigma_\varepsilon^2); i = 1, \dots, b, \quad j = 1, \dots, t
\end{aligned}$$

donde  $\delta_{B_i}$  representa el efecto del bloque  $i$  y  $\delta_{A_j}$  representa el efecto del nivel  $j$  del factor de interés. Utilizando las reglas para calcular las esperanzas de cuadrados medios resultaría que la hipótesis:

$$H_0 : \delta_{B_1} = \dots = \delta_{B_b} \quad (7.5)$$

sería contrastable, sin embargo, si consideramos el modelo estadístico con los errores debidos a la restricción de formar previamente los bloques:

$$\begin{aligned}
y_{ij} &= \mu + \delta_{B_i} + \delta_{j(i)} + \delta_{A_l} + \varepsilon_{k(ijl)} \\
i &= 1, \dots, b, \quad l = 1, \dots, t, \quad j = 1, k = 1
\end{aligned}$$

donde  $\delta_{l(B_i)}$  es el error de restricción debido al bloque  $i$ , las esperanzas de cuadrados medios:

	$a$	1	$t$	1	
	$R$	$R$	$F$	$R$	
	$i$	$j$	$l$	$k$	esperanza de cuadrados medios
$\delta_{B_i}$	1	1	$t$	1	$\sigma_\varepsilon^2 + t\sigma_\delta^2 + t\sigma_B^2$
$\delta_{j(i)}$	1	1	$t$	1	$\sigma_\varepsilon^2 + t\sigma_\delta^2$
$\delta_{A_l}$	$a$	1	0	1	$\sigma_\varepsilon^2 + a\phi_A$
$\varepsilon_{k(ijl)}$	1	1	1	1	$\sigma_\varepsilon^2$

indicarán claramente que la hipótesis (7.5) no es verificable con este diseño experimental.

En el caso de un experimento pensado como un diseño de dos factores ( $A$  y  $T$ ) en parcelas divididas y en bloques ( $B$ ), el modelo con errores de restricción es:

$$\begin{aligned}
y_{ijk} &= \mu + \delta_{B_i} + \delta_{l(B_i)} + \delta_{A_j} + \delta_{BA_{ij}} + \omega_{p(ij)} + \\
&\quad \delta_{T_k} + \delta_{BT_{ik}} + \delta_{AT_{jk}} + \delta_{BAT_{ijk}} + \epsilon_{m(ijk)}
\end{aligned} \quad (7.6)$$

$$i = 1, \dots, a, \quad l = 1, \quad j = 1, \dots, b, \quad k = 1, \dots, c; p = 1, m = 1$$

En este caso  $\delta_{l(B_i)}$  es el error de restricción  $l$  de las unidades en el bloque  $i$ , mientras que  $\omega_{p(ij)}$  corresponde al error de restricción  $p$  de las unidades en el bloque  $i$ , a las que les fue asignado el nivel  $j$  de  $A$  aplicado a la parcela.

En la Tabla 7.17 se muestra el cálculo de la esperanza de los cuadrados medios para el modelo (7.6). En el apéndice D se presentan las reglas para obtener estas esperanzas.

	$a$	$b$	1	1	$c$	
	$R$	$F$	$R$	$R$	$F$	
	$i$	$j$	$l$	$p$	$k$	Esperanza de cuadrados medios
$\delta_{B_i}$	1	$b$	1	1	$c$	$\sigma_\varepsilon^2 + c\sigma_\varpi^2 + bc\sigma_\delta^2 + bc\sigma_B^2$
$\delta_{A_j}$	$a$	0	1	1	$c$	$\sigma_\varepsilon^2 + c\sigma_\varpi^2 + c\sigma_{BA}^2 + ac\phi_A$
$\delta_{l(B_i)}$	1	$b$	1	1	$c$	$\sigma_\varepsilon^2 + bc\sigma_\delta^2$
$\delta_{BA_{ij}}$	1	0	1	1	$c$	$\sigma_\varepsilon^2 + c\sigma_\varpi^2 + c\sigma_{BA}^2$
$\varpi_{p(ij)}$	1	1	1	1	$c$	$\sigma_\varepsilon^2 + c\sigma_\varpi^2$
$\delta_{T_k}$	$a$	$b$	1	1	0	$\sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_{BT}^2 + ab\phi_T$
$\delta_{BT_{ik}}$	1	$b$	1	1	0	$\sigma_\varepsilon^2 + b\sigma_{BT}^2$
$\delta_{AT_{jk}}$	$a$	0	1	1	0	$\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_{BAT}^2 + a\phi_{AT}$
$\delta_{BAT_{ijk}}$	1	0	1	1	0	$\sigma_\varepsilon^2 + \sigma_{BAT}^2$
$\varepsilon_{(ijk)}$	1	1	1	1	1	$\sigma_\varepsilon^2$

Tabla 7.17 Esperanzas de los cuadrados medios en un diseño en parcelas divididas

De la Tabla 7.16 se puede apreciar que  $B$  (bloques) y todas las interacciones en las que se involucra no son contrastables. Suponiendo que las interacciones que involucran bloques son nulas,  $A$  debe ser contrastada versus el cuadrado medio de  $AB$ ,  $T$  versus el de  $BT$ , y  $AT$  versus el de  $BAT$ . En algunos contextos es costumbre sumar las sumas de cuadrados y los grados de libertad nominalmente pertenecientes a  $BT$  y  $BAT$  para usar el cuadrado medio resultante como el denominador para contrastar  $T$  y  $AT$ .

## 7.5 Ejercicios

**Ejercicio 7.1** Los datos en la tabla siguiente muestran las tasas cardíacas (pulsos por minutos) de pacientes sujetos a cuatro drogas. A los 20 sujetos masculinos les fueron asignadas aleatoriamente una droga de las cuatro, lo que nos da cinco sujetos por droga. El tiempo de medición fue cada cinco minutos, siendo la primera medición a los cinco minutos de la administración. ¿Existe interacción entre el factor tratamiento y el tiempo? ¿Los tratamientos son diferentes estadísticamente?

Tratamiento	Sujeto	$t_1$	$t_2$	$t_3$	$t_4$	$t_5$	$t_6$	$t_7$
1	1	73	74	74	78	79	81	79
1	2	78	77	76	79	84	88	86
1	3	73	73	74	78	81	81	79
1	4	75	72	73	74	79	82	80
1	5	75	74	73	78	82	84	82
2	1	72	74	76	80	81	83	81
2	2	77	77	78	81	85	86	84
2	3	72	74	78	80	84	86	84
2	4	77	80	78	83	85	86	84
2	5	74	75	75	80	84	85	83
3	1	79	80	81	83	83	83	82
3	2	73	76	74	81	79	82	81
3	3	68	68	74	75	76	78	77
3	4	75	77	80	81	85	89	88
3	5	72	74	81	79	82	83	82
4	1	78	82	83	87	91	92	87
4	2	78	81	81	85	89	92	87
4	3	78	80	81	82	87	87	82
4	4	71	75	76	80	85	85	80
4	5	80	83	86	86	90	90	85

*Datos de tasas cardiacas medidas cada cinco minutos en siete intervalos de tiempo*

### Ejercicio 7.2

1. Construya la Tabla 7.4. A continuación se proporcionan las expresiones. La tabla ANDEVA correspondiente se construye con las expresiones siguientes:

$$SC_B = a \sum_{i=1}^r \hat{\delta}_{R_i}^2 \quad SC_A = r \sum_{l=1}^a \hat{\delta}_{A_l}^2$$

donde  $\hat{\delta}_{factor} = \bar{y}_{niveles} - \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$ .

$$SC_{AB} = r \sum_{l=1}^a \sum_{k=1}^b \hat{\delta}_{A_l B_k}^2 \quad \hat{\delta}_{A_l B_k} = \bar{y}_{lk\bullet} - \bar{y}_{l\bullet\bullet} - \bar{y}_{\bullet k\bullet} + \bar{y}_{\bullet\bullet\bullet}$$

**Ejercicio 7.3.** Usando los datos presentados en el Ejemplo 7.2, estime los intervalos confianza descritos en la Tabla 7.5 y 7.6 para comparaciones de interés.

**Ejercicio 7.4** En el estudio de un sistema de medición se seleccionan al azar seis botellas. A continuación se realizan las mediciones de la concentración de una substancia en tres muestras aleatorias que se toman en cada botella. Los datos reportados por el operador se describen en la siguiente tabla:

Botellas	1	2	3	4	5	6
	7.86	16.25	10.87	9.50	7.12	9.05
	6.45	15.98	10.40	5.83	7.45	11.10
	7.68	15.70	8.45	7.45	7.12	7.80

Observe que en este caso no es de interés comparar la diferencia entre las botellas. Aquí la medición de la substancia está anidada en la botella. Esto da lugar a un modelo de componentes de varianza, así la pregunta a responder es sobre la significancia estadística de la componente relacionada con la muestra, entonces la hipótesis estadística es:

$$H_o : \sigma_B^2 = 0$$

$$H_1 : \sigma_B^2 \neq 0$$

1. Presente en la siguiente tabla un resumen estadístico de la medición en cada botella.

Botella	Repeticiones	Media	Varianza
1			
2			
3			
4			
5			
6			
Promedio total			
Varianza total			

2. Complete la siguiente Tabla del ANDEVA para contrastar la hipótesis mencionada.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	Componentes de varianza	Porcentaje
Botellas					
Error					
Total					

Tabla del ANDEVA y las componentes de varianza

3. Interprete sus resultados.

**Ejercicio 7.5** En una tenería llevan un control en el sistema de medición para la elongación de la piel. De cada uno de los once lotes ( $L$ ) de producción diarios toman tres muestras de piel ( $P$ ) de manera aleatoria y le hacen dos mediciones ( $M1$  y  $M2$ ). Los resultados reportados por el laboratorio de mediciones son:

$L$	$P$	$M1$	$M2$	$L$	$P$	$M1$	$M2$	$L$	$P$	$M1$	$M2$
1	1	69	70	4	3	59	60	8	2	71	75
1	2	66	65	5	1	53	50	8	3	63	65
1	3	51	48	5	2	60	61	9	1	64	65
2	1	62	61	5	3	63	62	9	2	63	60
2	2	68	70	6	1	55	51	9	3	49	47
2	3	60	61	6	2	48	52	10	1	51	50
3	1	71	69	6	3	57	59	10	2	57	58
3	2	53	51	7	1	60	61	10	3	55	56
3	3	65	61	7	2	65	66	11	1	78	78
4	1	53	54	7	3	58	56	11	2	50	52
4	2	51	52	8	1	73	75	11	3	59	58

En esta situación se tienen datos en un esquema balanceado en dos estratos de anidamiento. Las mediciones están anidadas en las pieles y éstas en lotes.

1. Presente en una tabla el resumen estadístico, en cada renglón represente un lote y en cada columna una muestra de piel.
2. Construya una tabla del ANDEVA similar a la del ejercicio anterior.
3. Interprete sus resultados.

**Ejercicio 7.6** Una aplicación de los diseños anidados se presenta en los estudios de medición para evaluar la repetibilidad y reproducibilidad. Este tipo de estudio se denomina R&R. En un estudio R&R dos ingenieros químicos (operadores:  $O$ ) realizan 10 pruebas ( $P$ ) para medir el volumen (peso agua/densidad), además realizan una repetición ( $R$ ) en cada medición. El rango de especificaciones es: 0-30, es decir que la tolerancia es 30. Por lo tanto decimos que las mediciones (repeticiones) están anidadas en el operador y el operador anidado en las pruebas. Los resultados del experimento de medición son:

<i>P</i>	<i>O</i>	<i>R</i>	<i>M</i>		<i>P</i>	<i>O</i>	<i>R</i>	<i>M</i>		<i>P</i>	<i>O</i>	<i>R</i>	<i>M</i>		<i>P</i>	<i>O</i>	<i>R</i>	<i>M</i>
1	1	1	19		3	2	1	13		6	1	1	21		8	2	1	17
1	1	2	21		3	2	2	13		6	1	2	20		8	2	2	17
1	2	1	24		4	1	1	12		6	2	1	18		9	1	1	19
1	2	2	19		4	1	2	12		6	2	2	20		9	1	2	16
2	1	1	16		4	2	1	12		7	1	1	13		9	2	1	16
2	1	2	15		4	2	2	13		7	1	2	10		9	2	2	15
2	2	1	16		5	1	1	24		7	2	1	13		10	1	1	22
2	2	2	15		5	1	2	28		7	2	2	15		10	1	2	24
3	1	1	10		5	2	1	26		8	1	1	15		10	2	1	24
3	1	2	12		5	2	2	27		8	1	2	16		10	2	2	23

1. Complete la siguiente Tabla del ANDEVA:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
Piezas					
Operadores					
Error					
Total					

2. Con el propósito de mostrar la terminología en los estudios R&R se describen las componentes de varianza que son relevantes en este tipo de estudio.

Componentes de varianza	Estimadores
$\sigma_\varepsilon^2$ repetibilidad	$CM_{error}$
$\sigma_P^2$	$\frac{CM_P - CM_{error}}{qt}$
$\sigma_o^2$	$\frac{CM_o - CM_{error}}{nt}$
$\sigma_{R\&R}^2 = \sigma_o^2 + \sigma_\varepsilon^2$	$\frac{CM_o + (nt-1)CM_{error}}{nt}$

3. Por lo general, los estudios R&R se representan en porcentaje. Con la información de los incisos anteriores complete la siguiente información:

$$\% \text{Repetibilidad} = 100 \frac{5.15(\hat{\sigma}_\varepsilon)}{\text{Tolerancia}} =$$

$$\% \text{Reproducibilidad} = 100 \frac{5.15(\hat{\sigma}_O)}{\text{Tolerancia}} =$$

$$\% \text{R\&R} = 100 \frac{5.15(\hat{\sigma}_{R\&R})}{\text{Tolerancia}} =$$

**Ejercicio 7.7** En la industria de la curtiduría se tiene una fórmula para evaluar la adherencia de una sustancia a la piel. Con fin de encontrar una nueva fórmula que resulte más eficiente y a un menor costo, una empresa curtidora se plantea desarrollar una nueva formulación. Cuatro factores son relevantes en este nuevo desarrollo y se considera que cada factor tienen dos niveles. La combinación de los niveles de estos factores dan lugar a la fórmula, ésta se aplica a dos diferentes tipos de piel, éste da lugar a un quinto factor. En el experimento primero se aleatorizaron los tratamientos del diseño completo, cada uno de éstos se aplicó aleatoriamente a cada tipo de piel. Esta estrategia es un caso particular del principio de parcelas divididas. En la tabla se muestra el diseño y los resultados:

Tratamiento	$A$	$B$	$C$	$D$	$y[E : -1]$	$y[E : 1]$
1	-1	-1	-1	-1	4.5	5.8
2	1	-1	-1	-1	9.9	9.6
3	-1	1	-1	-1	6.6	7.3
4	1	1	-1	-1	8.2	7.8
5	-1	-1	1	-1	5.3	6.4
6	1	-1	1	-1	8.8	8.3
7	-1	1	1	-1	5.1	6.4
8	1	1	1	-1	9.0	8.8
9	-1	-1	-1	1	8.7	9.7
10	1	-1	-1	1	8.1	7.8
11	-1	1	-1	1	9.6	10.3
12	1	1	-1	1	9.4	9.1
13	-1	-1	1	1	7.8	8.4
14	1	-1	1	1	8.6	8.5
15	-1	1	1	1	8.8	9.5
16	1	1	1	1	8.9	8.4

Comente sobre las implicaciones del uso de este diseño sobre la inferencia estadística, atendiendo al error de restricción involucrado. Haga recomendaciones para que este diseño pueda utilizarse evitando las consecuencias en la inferencia comentadas.

**Ejercicio 7.8** Es frecuente encontrar experimentos para mejorar o desarrollar nuevos productos en los que es difícil o costoso mover los niveles de un factor. Box (1996) describe un ejemplo con esa característica, el cual se propone aquí como ejercicio. El experimento tiene por objetivo mejorar la resistencia a la corrosión en barras de acero, para ello se aplican diferentes tipos de revestimiento en la superficie de cada barra y luego se hornean a un tiempo fijo. Se prueban cuatro revestimientos ( $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $R_4$ ) a tres temperaturas  $360^\circ C$ ,  $370^\circ C$  y  $380^\circ C$ ,



cada prueba se realizó dos veces, conformadas en dos bloques completos. El experimento se llevó a cabo en un arreglo en parcelas divididas, donde de manera aleatoria se fijaron las tres temperaturas, en cada una de ellas se aleatorizó el tipo de revestimiento de las barras. El esquema experimental y los resultados de la resistencia a la corrosión de las 24 barras tratadas se muestran en la siguiente tabla.

Bloque	Parcela	Subparcelas			
1	temperatura	$R_2$	$R_3$	$R_1$	$R_4$
	360	73	83	67	89
		$R_1$	$R_3$	$R_4$	$R_2$
	370	65	87	86	91
2		$R_3$	$R_1$	$R_2$	$R_4$
	380	147	155	127	212
		$R_4$	$R_3$	$R_2$	$R_1$
	380	153	90	100	108
		$R_4$	$R_1$	$R_3$	$R_2$
	370	150	140	121	142
		$R_1$	$R_4$	$R_2$	$R_3$
	360	33	54	8	46

Construya la tabla del análisis de la varianza, interprete resultados y obtenga conclusiones.

**Ejercicio 7.9** (Lorenzen y Anderson, 1993). Un experimento fue diseñado para medir la fuerza de una pieza de metal remachada en un dado. Cuatro factores fueron considerados: lubricante ( $L$ ) en tres niveles, ancho del acero ( $T$ ) en tres niveles, tipo de acero ( $S$ ) en dos niveles, y tipo de rizo ( $C$ ) en dos niveles. Diez piezas fueron remachadas para cada combinación de factores. Pero, dado que es laboriosa la limpieza de dados, un lubricante fue seleccionado y todas las combinaciones de los demás factores fueron corridas antes de que otro lubricante fuera utilizado. Estos tres factores fueron completamente aleatorizados para cada pieza por remachar. Como una medida de confirmación el experimento completo fue replicado una semana después usando diferentes aleatorizaciones y diferente metal. ¿Qué diseño experimental fue utilizado en este experimento? ¿Cómo se modificaría el diseño si se supiera que en cada combinación de factores las 10 piezas fueron remachadas antes de cambiar de combinación?

**Ejercicio 7.10** (Loske et al. 2002) Con el objetivo de estudiar los efectos bactericidas de ondas de choque bajo el agua sobre un microorganismo (*E. Coli*), se

preparó una suspensión con el mismo, suspensión que se deposita en viales experimentales los cuales son tratados por medio de cinco factores potencialmente importantes:  $A$ , la temperatura del agua;  $B$ , el voltaje de generación de ondas de choque;  $C$ , el número de ondas de choque;  $D$ , la radiación lumínica y  $E$ , el nivel de llenado del vial. Todos estos factores tenían dos niveles. La estructura de tratamientos correspondió a un diseño factorial  $2^{5-1}$ . La variable respuesta medía la reducción en viabilidad del microorganismo después de tratamiento. El experimento de 16 corridas fue replicado tres veces y en tres días diferentes, cada día se corrieron las 16 corridas experimentales, cada una en una ocasión. Finalmente, el factor  $A$ , temperatura del agua, dado que era difícil modificarlo para permitir una aleatorización sin restricción, fue fijado aleatoriamente en uno de sus dos niveles, y los demás factores fueron aleatorizados en su aplicación antes de cambiar a otra temperatura. Con esta información proponga un diseño experimental y construya la tabla de análisis de varianza correspondiente indicando los cocientes  $F$  adecuados.

## Capítulo 8

# El modelo de análisis de regresión

*Todos los modelos son incorrectos. Algunos son útiles.*

*G.E.P. Box*

### 8.1 Introducción

A lo largo de los capítulos anteriores la labor fundamental ha sido la comparación de tratamientos a través de las respuestas promedio correspondientes. Esta labor es fundamental, pero en muchas situaciones no es lo único por hacer. Por ejemplo, en el estudio de producción de enzimas mediante procesos de fermentación microbiana, suponga que se ha realizado un experimento en donde se determinó que el medio con que se alimenta a los microorganismos afecta a la actividad enzimática, ya que al pasar de un nivel bajo a un nivel alto de nitrógeno en el medio las actividades promedio correspondientes difieren estadísticamente. Sin embargo, otras preguntas adicionales de interés para el investigador podrían ser:

- ¿En otros niveles de nitrógeno no experimentados, qué sucede con la actividad enzimática?
- ¿En qué nivel exacto de nitrógeno se tendrá una actividad máxima?

La primera pregunta plantea un problema de extrapolación (fuera del intervalo comprendido entre los dos niveles de nitrógeno experimentados), y/o un problema de interpolación (dentro del intervalo comprendido entre los dos niveles de nitrógeno experimentados).

La segunda pregunta plantea en general lo que se conoce como un problema de optimización empírica del proceso de fermentación - actividad enzimática.

Para responder a estas preguntas, hay que notar que se requiere del conocimiento de una función que de manera continua y suave relacione a una respuesta (en el ejemplo, a la actividad enzimática) con no sólo unos cuantos niveles experimentados de un factor, sino en otros valores no experimentados de éste.

Los modelos que se manejan genéricamente como de análisis de regresión son de utilidad para responder a las preguntas planteadas.

En forma general la relación entre la respuesta y los factores que intervienen en un proceso se describe mediante la expresión:

$$y = f(X_1, \dots, X_p) + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (8.1)$$

donde  $f$  describe una relación suave entre los factores  $X_1, \dots, X_p$  que explican el fenómeno o proceso que se estudia, e  $y$  la respuesta; como en casos anteriores  $\varepsilon$  denota al término de error experimental. La forma específica de  $f$  dependerá del conocimiento que tenga el experimentador sobre el campo de experimentación; si hay mucho conocimiento acumulado  $f$  podría ser generada de la solución de ecuaciones diferenciales que relacionen a  $y$  con  $X_1, \dots, X_p$ ; si el conocimiento no permitiera lo anterior, típicamente  $f$  será un polinomio en  $X_1, \dots, X_p$ , por ejemplo:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_p X_p + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (8.2)$$

donde  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p$  representarían las cantidades que parametrizan la relación y por eso llamados parámetros. En este capítulo nos abocaremos a cómo estimar y contrastar hipótesis relativas a los parámetros de este tipo de modelos polinomiales.

### Ejemplo 8.1

En un proceso de moldeo por inyección, la variable que mide el encogimiento del producto resultante es vital para la parte de ensamble en otras etapas del proceso. Controlar esta variable ha resultado ser complicado, el ingeniero responsable del proceso tiene el propósito de reducir tanto como sea posible el encogimiento, para lo cual propone efectuar un experimento.

Dos factores son importantes para este proceso: la temperatura y la velocidad del tornillo de la máquina. Los rangos de operación respectivos se encuentran entre (160 °C, 200 °C) y de (300 rpm, 500 rpm). Los valores de la región experimental quedan determinados por el cuadrante que define la temperatura y velocidad. Se designa  $X_1$  como el primer factor de temperatura y  $X_2$  como el factor de velocidad.

Se puede observar que tanto la temperatura como la velocidad tienen diferentes escalas de medición, tal situación complica la construcción y análisis de los modelos. Para evitar este problema se propone codificar la región experimental.

La codificación se obtiene considerando los valores máximo, mínimo y promedio de cada factor, enseguida a cada nivel del factor elegido se le resta su promedio y se divide por el semi - rango, mediante esta operación se obtiene el valor codificado, la cual se repite para los otros factores. La transformación se describe en la siguiente expresión en el caso de que los valores estén equiespaciados:

$$x_{kl} = \frac{X_{kl} - \bar{X}_k}{\frac{1}{2}(\max_l\{X_{kl}\} - \min_l\{X_{kl}\})} \quad (8.3)$$

donde  $k = 1, 2$  representa el factor y  $l = 1, 2$  el nivel del factor, el valor codificado se denota por la letra minúscula de la variable factor. Si no están equiespaciados se sustituye en lugar de  $\bar{X}_k$  el valor central del intervalo total considerado. En el ejemplo 8.1 la codificación resulta como se muestra a continuación:

	nivel $x_{kl}$	-1	1
Factor $X_{kl}$			
$X_1$ : Temperatura $^{\circ}C$		$X_{11} = 160$	$X_{12} = 200$
$X_2$ : Velocidad (rpm)		$X_{21} = 300$	$X_{22} = 500$

Cabe observar que cuando un factor es cualitativo con dos niveles no se puede usar la expresión anterior, entonces se asigna de manera económica el valor  $-1$  y  $1$  para representar los niveles del factor en cuestión.

Los valores de predicción, optimización o las mejores condiciones de operación se encontrarán en la región experimental codificada, la interpretación en la región original se obtiene por la siguiente ecuación:

$$X_{kl} = \frac{1}{2}(\max_l\{X_{kl}\} - \min_l\{X_{kl}\})x_{kl} + \bar{X}_k$$

Si los datos originales no son simétricos o equiespaciados entonces para obtener valores codificados entre  $-1$  y  $1$  en la expresión (8.3) se sustituye  $\bar{X}_k$  por  $(\max(X_k) + \min(X_k))/2$ .

## 8.2 Modelos de primer y segundo orden

El modelo clásico de regresión lineal que describe una relación entre una variable respuesta  $y$  con un factor  $x$  está dado por:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (8.4)$$

donde  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son los parámetros que dan forma a la relación entre  $y$  y  $x$ ,  $\varepsilon$  representa al término de error experimental del que se supone que en promedio es cero y que tiene una varianza que no depende del valor de  $y$  o de  $x$ . De la misma manera un modelo de regresión lineal de  $y$  en  $x$  y  $x^2$  es:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_{11} x^2 + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (8.5)$$

Hay que notar que a ambos modelos se les llama lineales porque los parámetros entran sin transformación alguna al modelo; para muestra, un ejemplo de un modelo no lineal en los parámetros es:

$$y = \frac{1}{\beta_0 + \beta_1 x} + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

Aunque en el modelo se manejen funciones no lineales de  $x$  o de  $y$ , mientras los parámetros entren linealmente, el modelo será considerado lineal. Sin embargo el modelo (8.4) es de primer orden en  $x$ , mientras que el modelo (8.5) es de segundo orden en  $x$ .

Una vez realizado el experimento se tendrán en general  $n$  parejas de datos  $(y_i, x_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Con ellas entonces el modelo estadístico se representa por

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n, \text{ independientes}$$

en el caso del modelo de primer grado en  $x$ , y

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_{11} x_i^2 + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n, \text{ independientes}$$

para el modelo de segundo grado en  $x$ .

Cuando se tienen dos factores en el experimento, los modelos de regresión lineales de primer y segundo orden son:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n, \text{ independientes}$$

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{11} x_{1i}^2 + \beta_{22} x_{2i}^2 + \beta_{12} x_{1i} x_{2i} + \varepsilon_i \quad (8.6)$$

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n, \text{ independientes}$$

En este caso  $\beta_{12}$  representa el aporte del término cruzado  $x_{1i} x_{2i}$  o de interacción.

En la Fig. 8.1 se muestra dos posibles comportamientos esperados de  $y$  en función de estos dos modelos en  $x_1$  y en  $x_2$ . Note como el modelo de segundo orden supone comportamientos curvilíneos de  $y$ .

En general un modelo estadístico lineal en  $p$  factores se expresa:

$$y_i = \beta_0 + \sum_k^p \beta_k x_{ki} + \sum_k^p \sum_l^p \beta_{kl} x_{ki} x_{li} + \varepsilon_i \quad (8.7)$$

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n, \text{ independientes}$$

donde  $\beta_k$ ,  $k = 1, \dots, p$  son los parámetros del modelo que explican en cuanto contribuye de manera lineal cada factor a la respuesta, los  $\beta_{kl}$  ( $k, l = 1, \dots, p$ ) indican la curvatura; es decir,  $\beta_{kk}$  son los términos cuadráticos y los  $\beta_{kl}$  para  $k \neq l$  describen la interacción.

El orden de un modelo está determinado por el grado máximo observado en los factores, así el modelo (8.7) si todos los  $\beta_{kl}$  son cero, entonces el modelo será de primer orden, si al menos uno de los parámetros  $\beta_{kl}$  es diferente de cero, entonces el modelo será de segundo orden.

Denotemos por  $g$  el número de parámetros en un modelo lineal de regresión. Con respecto al número de parámetros en el modelo (8.7),

$$g = 1(\text{constante}) + p(\text{lineal}) + p(\text{cuadrática}) + \frac{p(p-1)}{2}(\text{interacciones dobles})$$

es decir:

$$g = \frac{(p+1)(p+2)}{2} \quad (8.8)$$

Suponiendo un modelo, una vez realizado el experimento, los objetivos que se plantean son:

1. Estimar los parámetros en el modelo.
2. Evaluar si el modelo representa de manera significativa a la variabilidad observada en la variable respuesta.
3. Evaluar si existen desviaciones en los datos que invaliden algunos de los supuestos del modelo.
4. Realizar predicciones de interpolación y/o extrapolación del comportamiento de  $y$  como función de valores no experimentados de los factores.
5. Encontrar los niveles de los factores en que se optimice el valor de la variable respuesta.

En las siguientes secciones se presentan procedimientos estadísticos para alcanzar los objetivos 1, 2, 3 y 4. El quinto objetivo será la materia del capítulo siguiente.

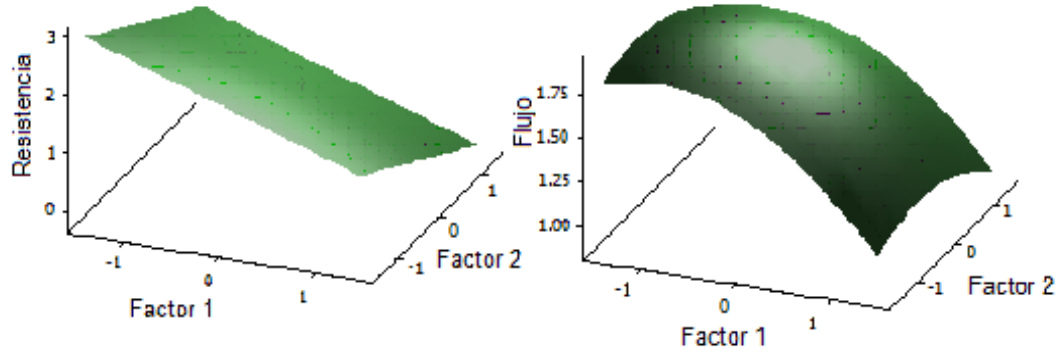


Fig. 8.1: Modelos de primer orden izquierda y segundo orden derecha

### 8.3 Estimación de los Parámetros del Modelo

Los parámetros del modelo (8.7) se estiman estadísticamente por medio de la información que se obtiene al conducir el experimento, después se prueba si los parámetros son iguales a cero estadísticamente, de ser así se dice que los factores en su parte lineal, cuadrática o interacción correspondiente a tales parámetros no contribuyen en la explicación de la respuesta.

Al efectuar el experimento la respuesta se denota por el vector  $\mathbf{y}$ , éste contiene los valores de todas las pruebas experimentales  $n$ , incluyendo las réplicas de tratamientos en el experimento. Los parámetros también se representan en forma vectorial por  $\beta'_{1 \times k} = [\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_{11}, \beta_{22}, \beta_{12}]'$ . En la  $i$ -ésima prueba experimental los factores toman valores  $(x_{i1}, x_{i2}, x_{i1}^2, x_{i2}^2, x_{i1}x_{i2})$ , de esta forma se genera la llamada matriz de diseño:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1, x_{11}, x_{21}, x_{11}^2, x_{21}^2, x_{11}x_{21} \\ 1, x_{21}, x_{22}, x_{21}^2, x_{22}^2, x_{21}x_{22} \\ \vdots \\ 1, x_{n1}, x_{n2}, x_{n1}^2, x_{n2}^2, x_{n1}x_{n2} \end{pmatrix}$$

donde los unos en la primera columna resultan de la presencia en el modelo del parámetro  $\beta_0$ . Así  $\mathbf{X}$  es una matriz de orden  $n \times g$ , y se denota por  $\mathbf{X}_{n \times g}$ .

Para mostrar las ideas básicas en la estimación de los parámetros, se propone ilustrar el procedimiento considerando un diseño factorial  $3^2$ , recuerde que este diseño tiene dos factores en tres niveles, en primera instancia el modelo que se propone toma en cuenta la parte lineal y cuadrática como se indica en la expresión (8.7), en este caso será necesario estimar  $g = 6$  parámetros.

Dada la codificación de los factores expresión (8.3), el esquema del diseño rep-



resentado por la matriz  $\mathbf{X}$  para el caso de un diseño factorial  $3^2$  se muestra en la Tabla 8.1. Note que en la primera columna aparecen unos y esto corresponde al término constante, las siguientes columnas describen las partes lineales, cuadráticas y de interacción.

$$\mathbf{X}_{9 \times 6} = \begin{bmatrix} I & x_1 & x_2 & x_1^2 & x_2^2 & x_1 x_2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tabla 8.1 Matriz que representa el esquema experimental  $3^2$

El modelo descrito en la ecuación (8.7) se escribe en forma resumida mediante la siguiente expresión matricial:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (8.9)$$

donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es un vector aleatorio con vector de medias cero, matriz de varianzas-covarianzas  $\sigma^2 \mathbf{I}$  con distribución de probabilidad normal,  $\boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$ , donde  $\boldsymbol{\varepsilon}$  es la discrepancia entre las observaciones y el modelo, esto es:  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$ .

El procedimiento matemático para estimar  $\boldsymbol{\beta}$  consiste en minimizar el producto  $\boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon}$  con respecto a  $\boldsymbol{\beta}$ , es decir:

$$\min_{\boldsymbol{\beta}} \boldsymbol{\varepsilon}'\boldsymbol{\varepsilon} = \min_{\boldsymbol{\beta}} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

este principio es conocido como el criterio de minimizar la suma de errores al cuadrado (mínimos cuadrados). Para obtener el mínimo se deriva la expresión anterior para cada parámetro en  $\boldsymbol{\beta}$ , dando lugar a un sistema de ecuaciones, la solución de este sistema genera el óptimo (mínimo), el cual representa al vector de los valores estimados que corresponden a los parámetros:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \quad (8.10)$$

A continuación se propone un ejemplo para mostrar numéricamente el procedimiento estadístico para estimar parámetros, el ejemplo corresponde al caso de un sólo factor y un modelo de primer orden.

**Ejemplo 8.2(regresión lineal simple)** Se realiza un experimento para probar la vida de anaquel. Éste consiste en efectuar una prueba de vida acelerada para estimar el tiempo en el que el producto puede estar a la venta. El material se sometió a condiciones extremas de temperatura y se evaluó su descomposición en horas. Estos resultados permitirán determinar la vida de anaquel. Los datos para siete pruebas se presentan en la Tabla 8.2a.

Temperatura ( $X$ ) ( $^{\circ}C$ )	Tiempo ( $y$ )(hrs)
17.0	240
23.5	216
31.0	209
42.0	210
56.0	206
61.0	155
77.0	131

Tabla 8.2a Valores de la vida de anaquel para diferentes temperaturas

El objetivo es encontrar la mejor relación lineal entre las variables  $X$  y  $y$ , la cual se establece mediante la estimación de los parámetros del modelo, que en este caso se plantea por:

$$y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \quad (8.11)$$

Para aplicar el estimador de mínimos cuadrados  $\hat{\beta}' = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$  (que en el caso de una sola  $X$  en el modelo resulta ser:

$$\hat{\beta} = \left( \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}, \frac{\sum (X_i - \bar{X}) y_i}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \right)'$$

La matriz de diseño  $\mathbf{X}$  transpuesta es:

$$\mathbf{X}'_{2 \times 7} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 17 & 23.5 & 31 & 42 & 56 & 61 & 77 \end{pmatrix}$$

con lo que:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 7 & 307.5 \\ 307.5 & 16352.25 \end{pmatrix} \quad \mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1367 \\ 55533.0 \end{pmatrix}$$

la inversa de  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  es:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 0.82133 & -0.01544 \\ -0.01544 & 0.00035 \end{pmatrix}$$

con lo que:

$$\hat{\beta}' = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \left( \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}, \hat{\beta}_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) y_i}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right)'$$

es

$$\hat{\beta}' = (265.06, -1.59)$$

Con estos valores estimados se escribe el modelo estimado:

$$\hat{y} = 265.06 - 1.59X \quad (8.12)$$

En la Fig. 8.2 se presenta este modelo conjuntamente con los valores observados.

Trabajando con la valores codificados, en este caso, el intervalo de recorrido de  $X$  va de 17 a 77; pero los valores no están equiespaciados, entonces  $\bar{X}_k = (\max(X_k) + \min(X_k))/2$  ( $k = 1$ ), por lo que el semi rango del intervalo es  $(77 - 17)/2 = 30$ . Se sustituye en la expresión (8.3), con ello se obtienen los valores codificados:

sin codificar $X$	17	23.5	31	42	56	61	77
codificado $x$	-1	-0.783	-0.533	-0.166	0.3	0.466	1

con lo que el modelo ajustado resulta ser

$$\hat{y} = 190.41 - 47.65x$$

Sustituyendo el valor codificado  $x = \frac{X-47}{30}$  en este último modelo ajustado y haciendo aritmética, se recupera el modelo ajustado a los datos no codificados de la ecuación (8.12).

Como ya se comentó en capítulos anteriores, los residuales ( $e = y - \hat{y}$ ) miden la discrepancia entre la respuesta observada y el modelo ajustado en cada punto de la variable  $X$  o  $x$ , los de este ejemplo se muestran en la Tabla 8.2b y en la Fig. 8.3 se grafican los valores ajustados versus los residuales.

$y$	240	216	209	210	206	155	131
$\hat{y}$	238.1	227.7	215.8	198.3	176.1	168.2	142.8
$r$	1.9	-11.7	-6.8	11.7	29.9	-13.2	-11.8

Tabla 8.2b Valores observados, ajustados y residuales para las diferentes temperaturas

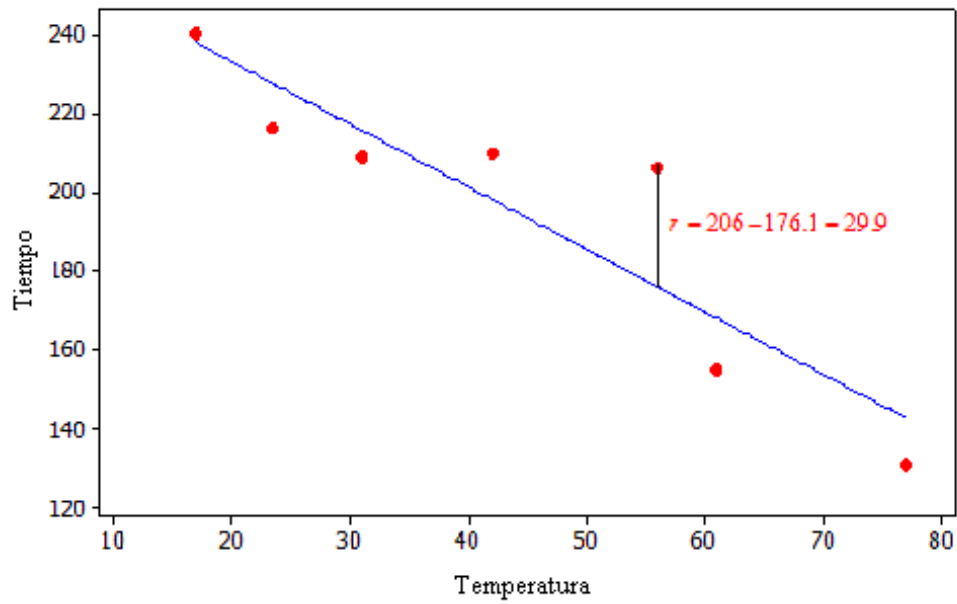


Fig. 8.2: Descripción del modelo ajustado, datos observados y residuales

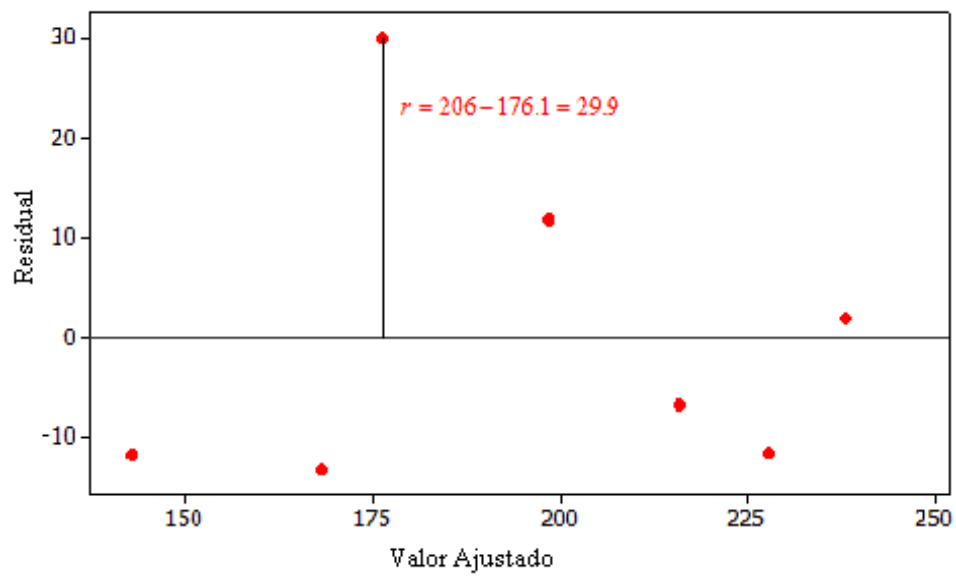


Fig. 8.3: Valores ajustados y residuales

Una vez estimados los parámetros del modelo, el objetivo es conocer si los factores en sus componentes lineales, cuadráticos o interacciones son importantes en sus efectos sobre la variable respuesta, además, evaluar la capacidad del modelo ajustado para poder estimar con precisión a la variable respuesta con propósitos de extrapolación o interpolación. Este conocimiento se obtiene mediante el estudio de la significancia estadística de los parámetros, para ello se contrasta el valor de cada parámetro con cero a través de un contraste de hipótesis estadísticas.

### Contraste de hipótesis sobre parámetros individuales del modelo de regresión

Las hipótesis que se contrastan en la parte lineal son:

$$\begin{aligned} H_{l0} : \beta_i &= 0, \quad i = 0, \dots, p \\ H_{l1} : \beta_i &\neq 0 \end{aligned}$$

En la parte cuadrática o interacciones son:

$$\begin{aligned} H_{c0} : \beta_{ij} &= 0, \quad i, j = 1, \dots, p \\ H_{c1} : \beta_{ij} &\neq 0 \end{aligned}$$

El estadístico que se emplea tradicionalmente para contrastar estas hipótesis es

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_{ij} - E(\hat{\beta}_{ij})}{ES(\hat{\beta}_{ij})} \quad (8.13)$$

donde  $t_c$  - suponiendo que se cumple la hipótesis nula respectiva - tiene una distribución de probabilidad  $t$  de *Student* con  $n - g$  grados de libertad  $t(n - g)$ .

Dos resultados que son importantes para la inferencia estadística de los parámetros y del modelo, son la media y la varianza del estimador  $\hat{\beta}$ . Éstas se obtienen por la esperanza de  $\hat{\beta}$ ,  $E(\hat{\beta}) = \beta$ , la matriz de varianzas y covarianzas de  $\hat{\beta}$  es igual  $\sigma^2(\mathbf{X}\mathbf{X})^{-1}$ , en resumen:

$$E(\hat{\beta}) = \beta \text{ y } Var(\hat{\beta}) = \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \quad (8.14)$$

El error estándar  $ES$  de cada parámetro del modelo se obtiene por:

$$ES(\hat{\beta}_i) = \sigma\sqrt{m_{ii}}, \quad (8.15)$$

donde  $m_{ii}$  es  $i$ -ésimo elemento de la diagonal en la matriz  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  y  $\sigma^2$  es la varianza del error. Un estimador insesgado de ésta se obtiene mediante la siguiente expresión si el modelo es el adecuado a los datos:

$$S^2 = \frac{(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})}{n - g} = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}}{n - g} \quad (8.16)$$

Nota: observe el siguiente resultado:  $\sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{y}_i - \hat{\mathbf{y}}_i)^2 = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$

La inferencia sobre un parámetro se realiza sustituyendo  $E(\hat{\beta}_{ij}) = \beta_{ij} = 0$  en (8.13), si el valor del estadístico  $t_c$  resulta ser más grande que el valor del cuantil  $t(n - g, \alpha/2)$  se rechaza  $H_0 : \beta_{ij} = 0$ .

### Intervalos de confianza sobre el parámetro de regresión para la respuesta media y la respuesta individual

En el análisis del modelo de regresión es importante estimar mediante intervalos de confianza a los parámetros del modelo y a la respuesta media en un valor específico de  $x$ , y mediante un intervalo de predicción para la respuesta individual para un valor específico de la variable  $x$ .

Intervalo de confianza para  $\beta_1$  :

$$\hat{\beta}_1 \pm t(n - g, \alpha/2) ES(\hat{\beta}_1) \pm t(n - g, \alpha/2) S\sqrt{m_{11}} \quad (8.17)$$

donde  $m_{11}$  es el segundo elemento de la diagonal en la matriz  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ .

Intervalo de confianza para la media de la variable de respuesta  $\mu^*$  en  $\mathbf{x}_0$  :

$$\hat{y}^* \pm t(n - g, \alpha/2) S\sqrt{(1, \mathbf{x}_0)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(1, \mathbf{x}_0)'} \quad (8.18)$$

donde  $\hat{y}^* = \mathbf{x}_0'\hat{\beta}$ , el vector de parámetros  $\hat{\beta}' = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$  y el vector  $(1, \mathbf{x}_0)$ , donde  $\mathbf{x}_0$  representa a los niveles de los factores donde se requiere estimar la media de  $y$ .

Intervalo de confianza para un valor de la variable de respuesta (predicho):

$$\hat{y}^* \pm t(n - g, \alpha/2) S\sqrt{1 + (1, \mathbf{x}_0)(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}(1, \mathbf{x}_0)'} \quad (8.19)$$

**Ejemplo 8.2, continúa, contraste de hipótesis** El objetivo en este ejemplo es ilustrar la inferencia estadística sobre los parámetros del modelo utilizando los datos del Ejemplo 8.2. La hipótesis estadística que se plantea para conocer si la temperatura tiene influencia en el tiempo de vida de anaquel es la siguiente:

$$H_0 : \beta_1 = 0$$

$$H_1 : \beta_1 \neq 0$$

como se indicó en la expresión (8.13) el estadístico para probar esta hipótesis es:

$$t_c = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{ES(\hat{\beta}_1)} \sim t(n - g, \alpha/2)$$

donde  $ES(\hat{\beta}_1)$  es el error estándar, éste se obtiene por la raíz cuadrada de la varianza estimada de  $(\hat{\beta}_1)$ , es decir:

$$ES(\hat{\beta}_1) = \sigma\sqrt{m_{11}}$$

Nota: observe los valores de  $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  en el Ejemplo 8.4 e identifique  $m_{11}$ . El valor calculado de este estadístico  $t_c$  se obtiene efectuando las siguientes operaciones:

1. Se estima la varianza  $\sigma^2$ , esto es:

$$S^2 = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\beta}}{n - g} = \frac{275659 - 274130.32}{5} = 305.74$$

2. El valor del error estándar es:

$$ES(\hat{\beta}_1) = (S^2 m_{11})^{1/2} = ((305.74)(0.00035))^{1/2} = 0.33$$

3. Se sustituyen los valores en el estadístico:

$$t_c = \frac{-1.59 - 0}{0.33} = -4.844$$

Para contrastar las hipótesis se compara el valor de  $t_c$  con el valor de  $t(n - g, \alpha/2) = t(5, 0.025) = -2.571$ . Se concluye que los datos no apoyan  $H_0 : \beta_1 = 0$  por lo que ésta se rechaza, esto se interpreta diciendo que el modelo que representa la relación entre la temperatura y el tiempo de vida de anaquel es significativo.

Los resultados de la estimación se presentan en resumen en la Tabla 8.3, en ella se señalan los valores estimados, el error estándar de cada parámetro, el valor del estadístico calculado y el nivel de significancia descriptivo.

Parámetro	Estimación	Error estándar	$t_c$	Valor $p$
$\beta_o$	265.06	15.84	16.73	< 0.0001
$\beta_1$	-1.59	0.33	-4.84	0.0047

Tabla 8.3 Resumen estadístico de la estimación de los parámetros

### Intervalo de confianza

El intervalo de 95% de confianza para la media de la respuesta y el valor individual de la respuesta predicho en  $x = 25$ , se obtienen sustituyendo en las expresiones (8.18) y (8.19).

$$\begin{pmatrix} 1 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 265.06 \\ -1.588 \end{pmatrix} \pm 2.571 \times 17.49 \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.821 & -0.015 \\ -0.015 & 0.00036 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 25 \end{pmatrix}} \\ 225.35 \pm 23.31.$$

### Intervalo de predicción

Con un 95 % de confianza se dice que el número de horas en promedio en las que el producto duraría en anaquel sometido a una temperatura de  $250^{\circ}\text{C}$  está entre 202.04 y 248.65. El intervalo de predicción con un 95 % para el valor individual para la respuesta en  $x = 25$  se tiene:

$$225.35 \pm 50.64$$

### Ejemplo 8.3

En un estudio de teoría de color un ingeniero químico tiene interés en estudiar el efecto de un solvente en el acabado de un tapiz automotriz, su variable de respuesta la obtiene mediante una prueba de color. El factor codificado y las observaciones después de realizar unas pruebas experimentales se muestran en la Tabla 8.4. El objetivo es construir un modelo de segundo orden.

$$\mathbf{X}_{6 \times 3} = \begin{array}{c|ccc} & I & x & x^2 & y \\ \hline 1 & 1 & -1 & 1 & 3.6 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 7.1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 3.7 \\ 4 & 1 & -1 & 1 & 7.6 \\ 5 & 1 & 0 & 0 & 3.4 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 7.5 \end{array}$$

Tabla 8.4 Observaciones de la prueba de color

El modelo de segundo orden con un factor es como el que se muestra en la expresión (8.5), de esta manera se requiere estimar los parámetros  $\boldsymbol{\beta}_{1 \times 3} = [\beta_0, \beta_1, \beta_2]'$ .

El procedimiento para estimar el vector de parámetros  $\boldsymbol{\beta}$  se obtiene aplicando la expresión (8.10); primero se calcula el producto de  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ , considerando a la matriz  $\mathbf{X}$  que representa el esquema experimental, éste es:

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix};$$

la inversa de  $\mathbf{X}'\mathbf{X}$  es:



$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 16 & 0 & -16 \\ 0 & 8 & 0 \\ -16 & 0 & 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/4 \end{bmatrix};$$

el producto de esta inversa por la matriz traspuesta  $X$  es:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

finalmente se multiplica la última expresión por  $\mathbf{y}$ , se obtiene:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ -1/4 & 0 & 1/4 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & -1/2 & 1/4 & 1/4 & -1/2 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3.6 \\ 7.1 \\ 3.7 \\ 7.6 \\ 3.4 \\ 7.5 \end{bmatrix}$$

es decir:

$$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = [5.25, 0, 0.35]$$

Estos valores son los estimadores de los parámetros  $\beta_{1x3} = [\beta_0, \beta_1, \beta_2]'$ . De esta manera el modelo se representa por:

$$\hat{y} = 5.25 - 0x + 0.35x^2$$

En el siguiente ejemplo se estima el modelo para las observaciones realizadas al llevar a cabo un diseño factorial  $2^3$ ; para este esquema no se pueden obtener los términos cuadráticos, sólo se estiman los efectos lineales (primer orden) y los efectos de interacción.

En general, la importancia de estudiar este tipo de modelos radica en que se pueden estudiar trayectorias de optimización o buscar otras regiones de experimentación. Este tipo de estudios es muy recomendable al inicio de una investigación, en el desarrollo de nuevos productos o para mejorar procesos bajo control estadístico. Antes de aplicar esquemas experimentales tal cual, como los reportados en otros estudios, vale la pena hacer un poco de esfuerzo para descubrir nuevas o mejores condiciones de operación.

**Ejemplo 8.4**

Un ingeniero desea conocer varias propiedades del amaranto en la elaboración de masa o harina mediante el proceso de nixtamalización, para ello lleva a cabo un diseño factorial  $2^3$  con dos réplicas. En este estudio inicial se quiere conocer cómo los factores que caracterizan este proceso influyen en el pH, los factores son:  $X_1$ :  $A$  temperatura;  $X_2$ :  $B$  tiempo;  $X_3$ :  $C$  concentración de Cal. En la tabla de abajo se muestran los valores reales y codificados de los factores:

Factores\Niveles	-1	1
$X_1$ : $A$ tem	$60^\circ C$	$90^\circ C$
$X_2$ : $B$ tiem	$50min$	$60min$
$X_3$ : $C$ cal	$20uds$	$40uds$

El diseño y las observaciones del pH que obtienen al realizar el experimento, se describen en la Tabla 8.5. Hay que notar que en este diseño no se incluyen columnas correspondientes a los términos cuadráticos dado que son idénticas a la columna  $I$ , es decir que los efectos cuadráticos están confundidos con el de  $\beta_0$ .

$I$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1x_2$	$x_1x_3$	$x_2x_3$	$y_1$	$y_2$
1	-1	-1	-1	1	1	1	2.7	2.7
1	1	-1	-1	-1	-1	1	3.5	4.4
1	-1	1	-1	-1	1	-1	6.0	3.6
1	1	1	-1	1	-1	-1	7.1	5.0
1	-1	-1	1	1	-1	-1	2.7	2.7
1	1	-1	1	-1	1	-1	3.7	3.4
1	-1	1	1	-1	-1	1	3.9	4.4
1	1	1	1	1	1	1	7.6	7.5

Tabla 8.5 Resultados del proceso de nixtamalización

Nuevamente para estimar los parámetros en el modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \beta_3x_3 + \beta_{12}x_1x_2 + \beta_{13}x_1x_3 + \beta_{23}x_2x_3 + \varepsilon$$

se aplica la fórmula descrita por la expresión (8.10), la matriz que va en esta expresión es:  $\mathbf{X}_{16 \times 7}$ , en ésta 16 representa todas las combinaciones de los niveles de los factores y la réplica, 7 muestra el número de parámetros que se van a estimar, así:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} = (4.43, .84, 1.21, .06, .32, .22, .16)'$$

por lo tanto el modelo estimado es:

$$\hat{y} = 4.43 + .84x_1 + 1.21x_2 + .06x_3 + .32x_1x_2 + .22x_1x_3 + .16x_2x_3 \quad (8.20)$$

este modelo permitirá analizar con detalle el proceso de nixtamalización dentro de la región experimental.

En la Tabla 8.6 se reportan los resultados que permiten completar el análisis sobre el modelo. La columna 1 reproduce los coeficientes del modelo, la segunda corresponde al error estándar de los estimados parámetros del modelo (véase expresión 8.14), la tercera el valor del estadístico suponiendo que la hipótesis nula correspondiente es cierta.

$\hat{\beta}$	$ES(\hat{\beta})$	$t = \frac{\hat{\beta}}{ES(\hat{\beta})}$	Valor $p$
$\hat{\beta}_0 = 4.43$	.225	19.69	.000
$\hat{\beta}_1 = .84$	.225	3.75	.005
$\hat{\beta}_2 = 1.21$	.225	5.36	.000
$\hat{\beta}_3 = .06$	.225	0.25	.808
$\hat{\beta}_{12} = .32$	.225	1.42	.190
$\hat{\beta}_{13} = .22$	.225	0.97	.356
$\hat{\beta}_{23} = .16$	.225	0.69	.505

Tabla 8.6 Resumen de la estimación de los parámetros y su significancia para el proceso descrito en el ejemplo 8.5

Estos resultados permiten sugerir que no existen efectos de interacción y que los factores significativos son  $X_1$  la temperatura y  $X_2$  el tiempo, es decir estos influyen en explicar el pH de la masa. De esta manera, el modelo queda simplificado por:

$$\hat{y} = 4.43 + .844x_1 + 1.21x_2 \quad (8.21)$$

Estimemos el intervalo de 95% confianza para el parámetro  $\beta_1$  a partir de la ecuación (8.17) y la información de la Tabla 8.6, se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_1 \pm t(n - g, \alpha/2)ES(\hat{\beta}_1) &= 0.84 \pm 2.262(0.225) \\ &= (0.331, 1.349) \end{aligned}$$

De manera análoga al ejemplo anterior, en éste también se puede realizar inferencia sobre los parámetros del modelo y estimar los intervalos de confianza para la media de la respuesta media y la respuesta individual.

## 8.4 Significancia global de un modelo ajustado

Recordemos el modelo base que se propuso fue el de la expresión (8.7). El interés en este apartado es conocer si este modelo es adecuado. Es decir, si tanto la parte lineal como la de segundo orden permiten explicar la variabilidad observada en la respuesta. De no ser así, los parámetros  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_p, \beta_{11}, \dots, \beta_{ij}$ , son todos igual con cero, en caso contrario alguno de ellos es diferente de cero. Para verificar si el modelo es adecuado es necesario probar la siguiente hipótesis:

$$H_0 : \beta_1 = \dots = \beta_p = \beta_{11} = \dots = \beta_{pp} = 0 \quad (8.22)$$

$$H_1 : \text{no todos los } \beta_i \text{ ni } \beta_{ij} \text{ son igual a cero, } i, j = 1, \dots, p$$

Para realizar esta prueba se deben satisfacer los supuestos que se han planteado sobre la variable aleatoria  $\varepsilon$ . Si la hipótesis nula  $H_0$  se rechaza se dice que el modelo es útil.

El método que se emplea para probar  $H_0$  es el de análisis de la varianza (ANDEVA). La idea principal es descomponer la suma de cuadrados total en dos componentes. Uno de esos componentes indica qué tanto contribuye el modelo a explicar la variabilidad de la respuesta y es la suma de cuadrados del modelo ( $SC_{reg}$ ) y la otra la suma de cuadrados debida al residual o error, ésta se denota por  $SC_{error} = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})$ . Retomemos la expresión:

$$SC_{error} = (\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}})'(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (8.23)$$

si a esta expresión le sumamos y restamos la cantidad  $\bar{y}_{\bullet}^2/n$  se tiene :

$$SC_{error} = SC_{total} - SC_{reg} = (\mathbf{y}'\mathbf{y} - \bar{y}_{\bullet}^2/n) - (\mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \bar{y}_{\bullet}^2/n) \quad (8.24)$$

la cantidad que corresponde al primer paréntesis de la expresión anterior representa la suma de cuadrados total  $SC_{total}$  y la cantidad en el segundo es la suma de cuadrados del modelo  $SC_{reg}$ .

Nota: observe el siguiente resultado:  $SC_{total} = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{\bar{y}_{\bullet}^2}{n} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \frac{\bar{y}_{\bullet}^2}{n}$ .

Estas sumas de cuadrados permite probar la hipótesis global de que todos los parámetros del modelo (8.22) son igual a cero (excepto  $\beta_0$ ), si dicha hipótesis es rechazada se concluye que al menos uno de los parámetros es distinto de cero. En este caso el estadístico de prueba es:

$$F_c = \frac{SC_{reg}}{g-1} \div \frac{SC_{error}}{n-g} = \frac{\mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \bar{y}_{\bullet}^2/n}{g-1} \div \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}}{n-g}$$

$F_c$  vista como variable aleatoria sigue una distribución de probabilidad  $F$  con  $g-1$  y  $n-g$  grados de libertad para el numerador y denominador respectivamente,  $F(g-1, n-g, \alpha)$ .

### Análisis de la Varianza

En forma esquemática el procedimiento para contrastar la hipótesis global se muestra en la Tabla 8.7. En la columna suma de cuadrados se representan los componentes de la expresión (8.24), finalmente en la quinta columna se presenta el valor calculado del estadístico.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Regresión	$g-1$	$SC_{reg} = (\mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \bar{y}_{\bullet}^2/n)$	$\frac{SC_{reg}}{g-1}$	$\frac{CM_{reg}}{CM_{error}}$	
Error	$n-g$	$SC_{error} = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}$	$\frac{SC_{error}}{n-g}$		
Total	$n-1$	$SC_{total} = (\mathbf{y}'\mathbf{y} - \bar{y}_{\bullet}^2/n)$			

Tabla 8.7 Descripción del análisis de la varianza

### Coefficiente de determinación $R^2$

El reporte sobre la bondad del modelo se completa mediante el cálculo del coeficiente de determinación, el cual indica qué porcentaje de los datos son explicados por el modelo, éste se estima por la siguiente expresión:

$$R^2 = \frac{SC_{reg}}{SC_{total}} = 1 - \frac{SC_{error}}{SC_{total}} = 1 - \frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}}{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \bar{y}_{\bullet}^2/n}$$

con la información presentada en la tabla del ANDEVA se obtiene el valor estimado de  $R^2$ .

Nota: observe que el coeficiente de determinación se puede obtener por la expresión:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y}_{\bullet})^2}$$

Este coeficiente se puede ajustar considerando el número de variables y datos en el experimento, es decir, mediante los grados de libertad del error y total,

entonces  $R_{ajustada}^2$  se obtiene por:

$$R_{ajustada}^2 = 1 - \frac{\frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{y}'\mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}}}{n-g}}{\frac{\mathbf{y}'\mathbf{y} - \bar{y}^2/n}{n-1}}$$

#### Ejemplo 8.4, continúa

Finalidad en esta parte es ilustrar con los datos del Ejemplo 8.4 el análisis de la varianza y la estimación del coeficiente de determinación. El proceso descrito en el Ejemplo 8.4 se ajusta al modelo (8.20), una vez que se tiene planteado el modelo, el propósito es evaluar globalmente si éste es adecuado para el proceso estudiado, eso equivale a contrastar las hipótesis (8.22). Mediante la tabla del ANDEVA se obtienen las conclusiones de esa prueba. En la Tabla 8.8 se presenta el resumen de los cálculos.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Modelo	6	37.50	6.25	7.71	0.004
Error	9	7.29	0.81		
Total	15	44.79			

Tabla 8.8 ANDEVA para el Ejemplo 8.4

Se puede concluir que en el modelo al menos uno de los parámetros es diferente de cero. Observe que en este caso se han considerado los seis parámetros correspondientes a las variables; con la información en la Tabla 8.8, el análisis global se puede reducir al modelo (8.21).

El coeficiente de determinación es:

$$R^2 = 1 - \frac{7.29}{44.79} = 0.84;$$

se concluye que aproximadamente el 84% de la variabilidad de los datos es explicada por el modelo (8.20). El coeficiente de determinación ajustado por lo grados de libertad es:

$$R_{ajustada}^2 = 1 - \frac{\frac{7.29}{9}}{\frac{44.79}{15}} = 0.73$$

En la estimación de parámetros por intervalo de confianza se requiere del conocimiento de la varianza  $\sigma^2$ , entonces un estimador de ésta se obtiene mediante el cuadrado medio del error, es decir  $\hat{\sigma}^2 = 0.81$ , la raíz cuadrada de este valor se refiere como el error estándar del modelo estimado.

## 8.5 La verificación de falta de ajuste

Se puede dar el caso en que aun cuando estadísticamente un modelo sea significativo deje de explicar un patrón importante de la relación entre la variable respuesta y los factores en el experimento, en tal caso se dice que existe falta de ajuste del modelo a los datos.

Comprobar estadísticamente si existe o no falta de ajuste es posible sólo cuando hay replicaciones (genuinas) en alguno de los tratamientos derivados de los factores que intervienen en el experimento.

Las hipótesis por contrastar son en este caso:

$H_0$ : El modelo se ajusta adecuadamente a los datos (no hay carencia de ajuste)

$H_1$ : El modelo no se ajusta adecuadamente a los datos

(8.25)

Para presentar el procedimiento estadístico para contrastarlas se requiere volver a utilizar notación utilizada anteriormente, es decir, en lugar de considerar  $y_i, i = 1, \dots, n$  manejaremos  $y_{ij}, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n_i$ , suponiendo en general que se tienen  $m$  tratamientos diferentes en  $n = \sum_i n_i$  corridas experimentales. Recuerde que todas las observaciones se usan para estimar la variabilidad debida al error experimental mediante:

$$SC_{error} = \sum \sum (y_{ij} - \hat{y}_{ij})^2;$$

sin embargo, las observaciones que son réplicas de un mismo tratamiento se pueden utilizar para estimar a un componente de la varianza del error experimental (el llamado error puro). Tal variabilidad estimada del error puro( $ep$ ), se construye a partir de:

$$SC_{ep} = \sum \sum (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2$$

con  $\sum_i n_i - m$  grados de libertad. Se puede demostrar que:

$$SC_{error} = SC_{ep} + \sum n_i (\hat{y}_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2$$

El segundo sumando de la expresión anterior se le denomina suma de cuadrados de falta de ajuste y con grados de libertad resultantes de la diferencia entre los grados de libertad de  $SC_{error}$  y los grados de libertad de  $SC_{ep}$ , es decir  $m - g$ . Denotemos por  $SC_{fa}$  a la suma de cuadrados de falta de ajuste. Con esta expresión se puede entonces estudiar la siguiente cantidad:

$$F_c = \frac{SC_{fa}/(m - g)}{SC_{ep}/(n - m)} \quad (8.26)$$

Se puede demostrar que (8.26) como variable aleatoria sigue una distribución  $F(m - g, n - m)$  bajo  $H_0$  (no hay carencia de ajuste). Si el valor  $p$  respectivo es pequeño sugiere rechazar la hipótesis  $H_0$  de ausencia de falta de ajuste y entonces el modelo no es aceptable en la explicación de la variación en los datos.

### Ejemplo 8.5

En un estudio que simula la calibración realizada por impulso completo se obtienen las tensiones pico de las pruebas que se realizan, manteniendo fija una polaridad y en un divisor resistivo (a 300 kv) y a diferentes niveles de tensión pico (kv). Los datos se presentan en la Tabla 8.9.

$U_n(\text{kv})$	$X$	125	100	200	75	150	175	75	175	125	200	100
Tensiones	$y$	165	115	122	32	153	152	46	122	155	104	137

Tabla 8.9 Datos que simulan el proceso de calibración

El modelo estimado aplicando el procedimiento de mínimos cuadrados es:

$$\hat{y} = 58.969 + 0.436x.$$

Ambos parámetros del modelo son no significativos, donde los errores estándar de estos son 39.4 y 0.0275 respectivamente. En la Tabla 8.10 se presenta el análisis de la varianza global para este modelo.

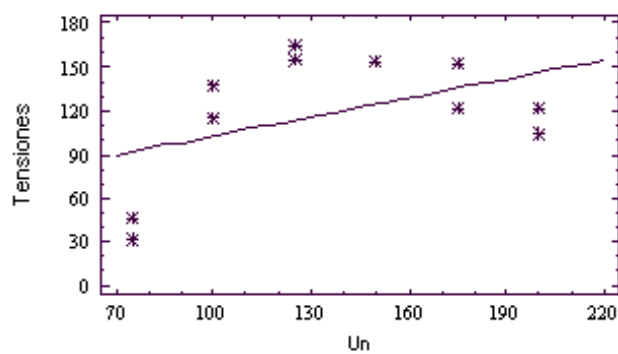
Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Regresión	1	4130.31	4130.31	2.48	0.1499
Error	9	15004.42	1667.16		
Total	10	19134.73			

Tabla 8.10 ANDEVA para el modelo de primer orden

Este modelo tiene un coeficiente de determinación  $R^2 = 0.216$ , ( $R_{ajustada}^2 = 0.129$ ). Dado que el valor  $p = 0.1499$  indica que el modelo es no significativo, la prueba indica que el modelo de primer orden (lineal en  $x$ ) no es el más adecuado.

Observando la Fig. 8.4 se ve que existe una evidente falta de ajuste, tal situación da pie para tratar de ajustar algún otro modelo, en este caso el modelo de segundo orden sería el adecuado, cuyo análisis de varianza se muestra en la Tabla 8.11. Mediante un contraste de hipótesis estadísticas se puede verificar la evidencia de la falta de ajuste del modelo de primer orden.



Fig. 8.4: Modelo ajustado  $\hat{y} = 58.97 + 0.44x$ 

Para verificar la falta de ajuste del modelo de primer orden, se tiene que

$$\begin{aligned} SC_{error} &= 15004 \\ SC_{ep} &= 1002 \end{aligned}$$

y por lo tanto:

$$SC_{fa} = 14002$$

mediante (8.26):

$$F_c = \frac{14002}{1002} \div \frac{6-2}{11-6} = 17.47$$

con valor  $p = .004$ , con lo que se sugiere rechazar  $H_0$ , por lo que se concluye que el modelo de primer orden no se ajusta adecuadamente a los datos.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Modelo	2	17079.90	8539.97	33.2492	< .0000
Error	8	2054.80	256.85		
Total	10	19134.73			

Tabla 8.11 ANDEVA del ejemplo 8.5 para el modelo de segundo orden

Nuevamente estos resultados se resumen en una tabla del ANDEVA, juntando la Tabla 8.11 de significancia global con los resultados del ANDEVA de falta de

ajuste. Éstos se presentan en la Tabla 8.12. Observe que se puede obtener la conclusión mencionada.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Modelo	1	4130.31	4130.31	18.10	0.0032
falta de ajuste	4	14002.42	3500.61	17.47	0.0038
error puro	5	1002.00	200.40		
Error	9	15004.42			
Total	10	19134.73			

Tabla 8.12 ANDEVA para verificar la falta de ajuste

En el siguiente ejemplo se realiza el análisis anterior en un caso en donde hay dos factores en el experimento.

### Ejemplo 8.6

Un investigador estudia el efecto de la razón de carga ( $X_1$ ) y temperatura ( $X_2$ ) en la vida de un nuevo tipo de celda de poder. Se realiza un experimento factorial  $3^2$  y con tres réplicas al centro, el objetivo de evaluar el número de ciclos de la celda antes de fallar, los tres niveles para el primer factor  $X_1$  son (0.6, 1.0 y 1.4) medidos en amperes y otro factor  $X_2$  tiene los niveles (10, 20, 30) en °C. La respuesta  $y$  mide la descarga de la celda, ésta se midió en términos del número de ciclos de carga - descarga. Los datos se muestran en la Tabla 8.13.

Se propone el modelo:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_{11} x_1^2 + \beta_{22} x_2^2 + \beta_{12} x_1 x_2 + \varepsilon.$$

Obtenga:

1. La tabla de coeficientes.
2. La tabla de ANDEVA.
3. Haga la prueba de falta de ajuste, es decir verifique si los datos apoyan la hipótesis nula en (8.25). Observe que los siguientes cálculos: la media de los tres valores repetidos en cero, esto es:  $\bar{x} = (157 + 131 + 184)/3 = 157.33$ , luego la suma de la diferencia, de cada valor repetido con respecto a la media al cuadrado:

$$SC_{ep} = (157 - 157.33)^2 + (131 - 157.33)^2 + (184 - 157.33)^2 = 1404.67$$

$$SC_{fa} = SC_{error} - SC_{ep} = 5240.44 - 1404.67 = 3835.77$$

$$F_c = \frac{3835.77}{3} \div \frac{1404.67}{2} = 1.82$$

$$F_c = 1.82 < F(0.05, 3, 2) = 19.2 \text{ (valor } p = .428).$$

Hay que notar que de cualquier manera es útil siempre analizar residuales de modelos propuestos.

Razón de carga	Tem			Número de ciclos
$X_1$	$X_2$	$x_1$	$x_2$	$y$
0.6	10	-1	-1	150
1.0	10	0	-1	86
1.4	10	1	-1	49
0.6	20	-1	0	288
1.0	20	0	0	157
1.0	20	0	0	131
1.0	20	0	0	184
1.4	20	1	0	109
0.6	30	-1	1	279
1.0	30	0	1	235
1.4	30	1	1	224
$\bar{X}_1 = 1$	$\bar{X}_2 = 20$			

Tabla 8.13 Resultados del experimento

## 8.6 Tipos de diseños para optimización

Existen diseños apropiados para ajustar modelos de regresión de primer y segundo orden. Una vez ajustado un modelo a los datos de la variable respuesta de manera satisfactoria (significancia global,  $R^2$  relativamente grande, no falta de ajuste), éste se convierte en una herramienta útil para buscar tratamientos en donde la variable respuesta esté optimizada (máxima o mínima según el caso). En esta sección comentamos sobre los diseños más usados en la búsqueda de un óptimo. La estrategia completa será presentada en el siguiente capítulo.

### 8.6.1 Diseños de primer orden

Los diseños factoriales  $2^k$ , los diseños factoriales fraccionados  $2^k$ , los diseños Plackett-Burman y los arreglos ortogonales  $AO_n(2^k)$  son diseños de primer orden, en el sentido de que presuponen que el comportamiento de  $y$  puede ser descrito por medio de un polinomio de primer grado en la región experimental en la que actualmente se experimenta. Así estos diseños se utilizan para determinar mejores tratamientos en términos de aumentar o decrementar el valor de la respuesta  $y$ , adicionalmente, agregando tratamientos formados con los niveles intermedios de los factores, verificando la existencia de curvatura si hay carencia de ajuste. Si la curvatura se detecta, probablemente se encuentre próximo un tratamiento óptimo para la variable respuesta.

### 8.6.2 Diseños de segundo orden

La detección de curvatura alrededor de un óptimo requiere que los niveles de los factores involucrados sean al menos tres. Después de haber establecido la proximidad de una región óptima, los diseños denominados de segundo orden son apropiados para encontrar una solución óptima. Además, los modelos ajustados a partir de estos diseños permitirán plantear diferentes escenarios de optimización. Existen varios diseños de segundo orden, en este apartado sólo se abordarán los diseños propuestos por Box - Behnken y Box - Wilson.

#### Diseño de Box - Behnken

Aún cuando se pueda fraccionar un diseño  $3^k$  el número de pruebas puede ser muy alto. Existe una serie de factoriales con tres niveles que tienen características estadísticas apropiadas para ser un buen esquema experimental, más adelante se hará una breve descripción de algunas propiedades.

Un tipo de diseño factorial incompleto con tres niveles en cada factor fue desarrollado por Box y Behnken (1960). Este diseño se forma combinando un diseño  $2^2$  con bloques incompletos balanceados. Por ejemplo, considere un experimento cuyo interés está en tres factores cada uno con tres niveles; una alternativa de diseño es un factorial  $3^3$  que implica 27 tratamientos; un diseño tipo Box - Behnken permite tener un menor número de tratamientos. El procedimiento de construcción es como sigue: primero, se obtienen las posibles combinaciones de los 3 factores en bloques de 2 factores, las posibles combinaciones representan el número de bloques y se obtienen mediante la expresión:

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = \frac{1 \times 2 \times 3}{1 \times 2 \times (1)} = 3$$

lo que da lugar a tener tres bloques. En el segundo paso, se pone el diseño  $2^2$  en cada uno de los bloques, para fijar ideas considere que el  $2^2$  se colocó en el primer bloque, suponga que el  $2^2$  corresponde al primer y segundo factor, en este caso para el tercer factor del bloque se escribe una columna con cuatro ceros que representa el nivel intermedio. Esta disposición se realiza en los dos bloques restantes alternando los factores, es decir  $2^2$  en el segundo bloque se utiliza para los factores 1 y 3, la columna con cuatro ceros para el factor 2; por último, en el tercer bloque el  $2^2$  se utiliza para los factores 2 y 3, la columna de ceros se asigna al factor 1. El diseño Box - Behnken se completa agregando en cada bloque un tratamiento extra que es la combinación de los tres factores en su nivel intermedio y es referido como tratamiento al centro.

Para enfatizar la construcción del diseño considere a  $c_1$  y  $c_2$  como las columnas del diseño  $2^2$ , es decir,  $c_1 = (-1, 1, -1, 1)'$  y  $c_2 = (-1, -1, 1, 1)'$ , el nivel intermedio en cualquiera de los factores se indicará por una columna de ceros  $ic = (0, 0, 0, 0)'$ , los valores que se muestran en estas columnas corresponden a los codificados. Con  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  se indicará a las variables codificadas para los factores en estudio. La estructura del diseño Box - Behnken se presenta en la Tabla 8.14, los tres factores se han denotado por  $A, B$  y  $C$ .

Bloque	$A$	$B$	$C$
$b_1$	$c_1$	$c_2$	$ic$
	0	0	0
$b_2$	$ic$	$c_1$	$c_2$
	0	0	0
$b_3$	$c_1$	$ic$	$c_2$
	0	0	0

Tabla 8.14 Arreglo de un diseño Box - Behnken para tres factores

Finalmente se sustituyen los valores de  $c_1, c_2$  e  $ic$  en los bloques, lo cual da lugar al esquema experimental que se describe en la Tabla 8.15.

Bloque 1				Bloque 2				Bloque 3			
Trat	A	B	C	Trat	A	B	C	Trat	A	B	C
1	-1	-1	0	11	0	-1	-1	6	-1	0	-1
2	1	-1	0	12	0	1	-1	7	1	0	-1
3	-1	1	0	13	0	-1	1	8	-1	0	1
4	1	1	0	14	0	1	1	9	1	0	1
5	0	0	0	15	0	0	0	10	0	0	0

Tabla 8.15 El arreglo codificado del diseño de Box - Behnken

El diseño Box - Behnken construido de esta manera es válido sólo para  $k = 3$ , 4 y 5, el número de bloques para  $k$  factores se obtienen por la expresión:  $B = \binom{k}{2} = \frac{k!}{2!(k-2)!}$ , el número de tratamientos que se realizan en el diseño es igual a  $2^2B + R$ , donde  $R$  son las réplicas cuando todos los factores están en su nivel intermedio.

Número de factores	Esquema experimental				Número de tratamientos
3	$x_1$	$x_2$	$x_3$		
	$c_1$	$c_2$	$ic$		4
	$c_1$	$ic$	$c_2$		4
	$ic$	$c_1$	$c_2$		4
	0	0	0		3,
					$n = 15$
4	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	
	$c_1$	$c_2$	$ic$	$ic$	4
	$ic$	$ic$	$c_1$	$c_2$	4
	0	0	0	0	1
	$c_1$	$ic$	$ic$	$c_2$	4
	$ic$	$c_1$	$c_2$	$ic$	4
	0	0	0	0	1
	$c_1$	$ic$	$c_2$	$ic$	4
	$ic$	$c_1$	$ic$	$c_2$	4
	0	0	0	0	1
					$n = 27$

Tabla 8.16 Diseño Box - Behnken para 3 y 4 factores

El diseño Box - Behnken también es un diseño de segundo orden porque es adecuado para estimar un modelo de segundo orden, por ello es de gran util-

idad para optimizar procesos como se ilustrará en el capítulo de optimización. Los bloques utilizados en la construcción de este tipo de diseños Box - Behnken pueden utilizarse como bloques en el experimento. Sin embargo, como se ha visto anteriormente, siempre es bueno que los efectos de bloque sean ortogonales a los estimados de los parámetros de interés en el modelo. Para que un diseño Box - Behnken sea un diseño ortogonalmente bloqueado se requiere del cumplimiento de ciertas condiciones.

Para el caso general de diseños con bloques, Box y Hunter (1957) muestran dos condiciones que deben satisfacer los bloques para que sean ortogonales a los efectos en el modelo. Considere que  $n_w$  representa el número de tratamientos del bloque  $w$ ; entonces las dos condiciones son:

1. Cada bloque debe ser un diseño ortogonal de primer orden, así para cada bloque se satisface la siguiente relación considerando un par de factores  $x_j$  y  $x_l$  en el diseño codificado.

$$\sum_{l=1}^{n_w} x_{jl}x_{hl} = 0 \quad j \neq h = 0, 1, 2, \dots, k \text{ para toda } w \quad (8.27)$$

2. La suma de los cuadrados de los tratamientos en cada bloque para cada variable dividido por la suma de los cuadrados en todos los tratamientos para cada variable, es igual a la fracción del número de observaciones en cada bloque entre el total de corridas  $N$ , es decir:

$$\frac{\sum_{l=1}^{n_w} x_{jl}^2}{N} = \frac{n_w}{N}, \quad j = 1, \dots, k, \text{ para toda } w. \quad (8.28)$$

Se puede decir que un diseño es deseable que sea corrido en bloques ortogonales a los efectos de interés cuando se espera que los efectos de bloque sean grandes.

Aplicando estas condiciones a los diseños Box - Behnken, para  $k = 3$  no se satisface la segunda propiedad. En el caso  $k = 4$ , el diseño como se muestra en la Tabla 8.16 satisface las dos propiedades anteriores. Además, este diseño tiene la propiedad de rotabilidad, propiedad que se describe en el siguiente subapartado. El diseño Box - Behnken para  $k = 5$  en la Tabla 8.17 cumple con las dos condiciones de ortogonalidad en los bloques mostrados. Si se requiere de otros esquemas de bloqueo ortogonal diferentes a los dados directamente por los diseños Box - Behnken, se pueden usar dos métodos propuestos por Box y Draper (1987) páginas 518 - 520.

El lector interesado en conocer los diseños para más de 5 factores puede consultar el artículo de Box y Behnken (1960). Ellos hacen una lista de diseños hasta para  $k = 16$ , exceptuando el caso de  $k = 8$ .

Conviene puntualizar que el diseño Box - Behnken,  $k = 3$  o 4, es de mucha utilidad porque permite realizar con relativamente pocas corridas la estimación de un modelo de segundo orden, el cual permitirá explicar el desempeño de la variable respuesta, predecir resultados y obtener condiciones (tratamientos) óptimas de operación. Por otro lado hay que notar que este tipo de diseños no considera condiciones experimentales extremas, por ejemplo con  $k = 3$  no considera la corrida  $(-1, -1, -1)$  o la corrida  $(1, 1, 1)$ . Se recomienda utilizar este diseño cuando el usuario tiene muy claro cómo funciona el proceso y después de haber realizado estudios experimentales preliminares para establecer qué factores y niveles son importantes en la variable respuesta.

$k$ número de factores	Esquema experimental					Número de tratamientos
	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	
5	$c_1$	$c_2$	$ic$	$ic$	$ic$	4
	$ic$	$ic$	$c_1$	$c_2$	$ic$	4
	$ic$	$c_1$	$ic$	$ic$	$c_2$	4
	$c_1$	$ic$	$c_2$	$ic$	$ic$	4
	$ic$	$ic$	$ic$	$c_1$	$c_2$	4
	0	0	0	0	0	3
	$ic$	$c_1$	$c_2$	$ic$	$ic$	4
	$c_1$	$ic$	$ic$	$c_2$	$ic$	4
	$ic$	$ic$	$c_1$	$ic$	$c_2$	4
	$c_1$	$ic$	$ic$	$ic$	$c_2$	4
	$ic$	$c_1$	$ic$	$c_2$	$ic$	4
	0	0	0	0	0	3
						$n = 46$

Tabla 8.17 Diseño Box - Behnken para 5 factores

### Diseño Central Compuesto

El diseño central compuesto (dcc) fue propuesto por Box y Wilson (1951); este diseño desempeña un papel relevante en la investigación que se realiza en el laboratorio, en el desarrollo de nuevos productos y para optimizar procesos industriales. El dcc abre la posibilidad de trabajar un proceso en una región experimental más detallada, dado que considera a cada factor con cinco niveles. Por otro lado, el diseño puede tener propiedades estadísticas importantes que se explicarán en



este apartado.

El diseño central compuesto es adecuado para ajustar modelos de segundo orden, es decir permiten evaluar la no linealidad de la respuesta, por ello se le clasifica como diseño de segundo orden. En el diseño dcc se tiene la ventaja de que a pesar de que la región experimental está descrita por factores con cinco niveles, el número de corridas experimentales extras no crece demasiado. Es un diseño más eficiente que los diseños factoriales contruïdos a partir del factorial  $3^k$ , y es más eficiente que el diseño Box - Behnken. Una discusión muy interesante sobre la eficiencia de los diseños dcc y factorial  $3^k$  se muestra en Myers y Montgomery (1995).

Recuerde que una manera práctica de analizar los diseños, es pasar de la región de operación real a una región experimental codificada, así la descripción codificada de un factor en cinco niveles será:

niveles	codificados	$-\alpha$	$-1$	$0$	$1$	$\alpha$
---------	-------------	-----------	------	-----	-----	----------

Para describir el mecanismo de codificación imagine que en un proceso tiene entre otros factores, el factor porcentaje de mezcla de una materia prima, considere que los valores máximo y mínimo de esas mezclas son 40% y 10 %, asigne estos valores a  $\alpha$  y  $-\alpha$  en la escala codificada, respectivamente. Entonces el valor intermedio no codificado es el promedio  $((40 + 10)/2 = 25)$ , de esta manera los niveles codificados y reales son:

Niveles codificados	$-\alpha$	$-1$	$0$	$1$	$\alpha$
Valores reales	10	$25 - \Delta$	25	$25 + \Delta$	40

La obtención del valor  $\Delta$  depende del valor para  $\alpha$ ; por ejemplo, si  $\alpha = 1.5$ , mediante la siguiente razón:

$$\frac{40 - 25}{1.5 - 0} = \frac{25 + \Delta - 25}{1 - 0} \text{ entonces: } \Delta = \frac{15}{1.5} = 10$$

y así:

Niveles codificados	$-1.5$	$-1$	$0$	$1$	$1.5$
Valores reales	10	15	25	35	40

Empleando este mecanismo para los diferentes factores del experimento, se construye un diseño central compuesto.

El dcc está formado por un diseño factorial  $2^k$  completo o fraccionado, al que se le agregan 2 tratamientos a una misma distancia,  $\alpha$  a ambos lados del centro de cada factor (y así  $2k$  en total), con lo que tales niveles serán  $-\alpha$  y  $\alpha$  en la escala codificada. El diseño se completa con uno o más tratamientos en el punto intermedio de los niveles de cada factor (réplicas al centro). Con objeto de

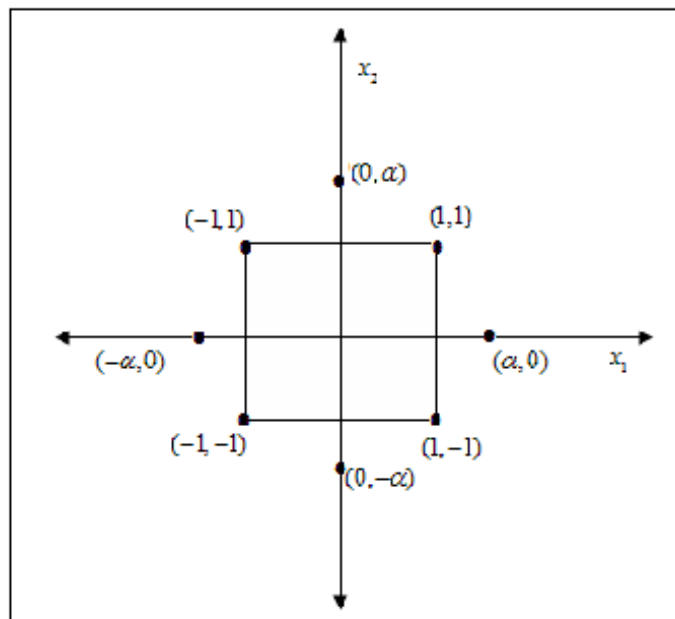


Fig. 8.5: Diseño central compuesto para dos factores

establecer ideas considere un diseño con dos factores, en la Fig. 8.5 se describen las características del diseño central compuesto para dos factores. El cuadrado representa el diseño  $2^2$ , en el centro del cuadrado están los tratamientos en el nivel intermedio y los puntos que representan a los cuatro tratamientos a una distancia  $\alpha$  del centro son:  $(-\alpha, 0)$ ,  $(\alpha, 0)$ ,  $(0, -\alpha)$  y  $(0, \alpha)$ ; a estos últimos se les llama puntos axiales o estrella.

En la Tabla 8.18 se describe un diseño central compuesto para tres factores en dos casos, el primero representa un diseño  $2^3$  completo y el otro se tiene una fracción  $1/2$ , es decir  $2^{3-1}$ .

En el caso 1 se tienen 20 tratamientos, 8 corresponden al diseño  $2^3$ , 6 a los puntos estrellas, y 6 a los centrales. El segundo caso se muestra un dcc de 13 tratamientos.

La recomendación general del número de puntos centrales es que oscile entre dos y cinco, pero nada se pierde si se incrementa un poco más, considerando sólo restricciones de costo.

El número de tratamientos en un diseño central compuesto queda dada por  $T = 2^{k-p} + 2k + 1$ . Los  $T$  tratamientos se dividen en:

1. Los  $2^{k-p}$  vértices  $(\pm 1, \pm 1, \dots, \pm 1)$  de un hipercubo  $k$  - dimensional, de resolución V. Esta parte es un diseño con varianza óptima para estimar tér-

minos lineales y de interacción.

2. Los  $2k$  puntos estrella  $(\pm\alpha, 0, \dots, 0)$ ,  $(0 \pm \alpha, \dots, 0)$ ,  $(0, 0, \dots, \pm\alpha)$ . Estos puntos contribuyen en gran medida en la estimación de los términos cuadráticos, sin ellos, los efectos cuadráticos no serían estimables en lo individual.
3. Un punto al centro  $(0, 0, \dots, 0)$ .

Caso 1				Caso 2			
$2^3$				$2^{3-1}$			
Trat	A	B	C	Trat	A	B	C
1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
2	1	-1	-1	2	1	-1	-1
3	-1	1	-1	3	-1	1	-1
4	1	1	-1	4	1	1	1
5	-1	-1	1	5	$-\alpha$	0	0
6	1	-1	1	6	$\alpha$	0	0
7	-1	1	1	7	0	$-\alpha$	0
8	1	1	1	8	0	$\alpha$	0
9	$-\alpha$	0	0	9	0	0	$-\alpha$
10	$\alpha$	0	0	10	0	0	$\alpha$
11	0	$-\alpha$	0	11	0	0	0
12	0	$\alpha$	0	12	0	0	0
13	0	0	$-\alpha$	13	0	0	0
14	0	0	$\alpha$				
15	0	0	0				
16	0	0	0				
17	0	0	0				
18	0	0	0				
19	0	0	0				
20	0	0	0				

Tabla 8.18 Esquema experimental de un diseño central compuesto

El número total de corridas será entonces  $n_c + n_s + n_0$ , donde  $n_c = r_c 2^{k-p}$  ( $r_c$  número de réplicas en cada punto de la parte factorial del dcc),  $n_s = r_s 2k$  ( $r_s$  número de réplicas en cada punto de la parte estrella del dcc),  $n_0$  réplicas al centro que proveen de ser genuinas réplicas de una estimación del error puro y contribuyen también en la estimación de los términos cuadráticos.

La varianza del valor  $\hat{y}$  depende del punto donde se observe respecto a la región experimental y ésta se calcula tomando la suma ponderada de las varianzas de los estimadores. Un diseño es rotatable si la varianza del valor predicho  $\hat{y}$  es

igual en todos los puntos (tratamientos) de la región experimental que están a la misma distancia del centro del diseño. Entonces se dice que la varianza de la respuesta estimada depende únicamente de la distancia de los puntos en la región experimental al centro. Esta propiedad permite una estabilidad en la varianza de  $\hat{y}(x)$ , por ejemplo, si  $x_1$  y  $x_2$  son dos puntos en la región experimental a la misma distancia del centro, se tiene que la  $Var(\hat{y}(x_1))$  y  $Var(\hat{y}(x_2))$  son iguales, dando lugar a homogeneidad en las predicciones independientemente de las direcciones de éstas. Por ello se considera importante tener diseños rotatables o casi rotables.

El criterio para que un dcc que no se corra en bloques sea rotable se establece mediante el valor  $\alpha$ :

$$\alpha = (2^{k-p})^{\frac{1}{4}}. \quad (8.29)$$

Si se desea correr un dcc en bloques, uno por la parte factorial y otro formado por los tratamientos estrella, pero sin que sea necesariamente rotable, se debe satisfacer que:

$$\alpha^2 = k \left( \frac{1 + n_{s0}/n_s}{1 + n_{c0}/n_c} \right)$$

donde  $n_{s0}$  es el número de puntos al centro corridos junto a los puntos estrella ( $n_s$ ) y  $n_{c0}$  es el número de puntos al centro corridos juntos a los puntos de la parte factorial ( $n_c$ ). Para obtener rotabilidad y ortogonalidad simultáneamente se debe satisfacer que

$$\frac{r_s}{r_c} = \frac{2^{k-p}}{k^2} \left\{ \frac{1 + n_{c0}/n_c}{1 + n_{s0}/n_s} \right\}.$$

Para mayores detalles consulte a Box y Draper (1987).

## 8.7 Ejercicios

**Ejercicio 8.1** En un estudio de cocinado por extrusión de cierto cereal con alto grado de proteína, se tiene interés por conocer la textura del producto final. En la siguiente tabla se muestran los resultados parciales del estudio.

Temperatura ( $X$ )	125	150	175	200	225	250	275
Textura ( $y$ )	1.4	2	4	4.2	3.4	1.8	1.2
	1.6	2.2	3.1	4.8	3	2	1

1. Estime un modelo de primer orden, es decir:  $y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$
2. Construya la tabla del ANDEVA.
3. Verifique si existe la falta de ajuste en el modelo.

**Ejercicio 8.2** Se somete un material a cierta temperatura, se desea conocer las impurezas generadas en un proceso químico. A continuación se muestran los datos.

Temperatura ( $X$ )(°C)	Impurezas ( $y$ )(%)
90	18.4, 17.6, 18
100	11.7, 10.3
110	7.7, 8.3
120	6.5, 6.7
130	6.6, 7.2, 6.7

Los resultados estadísticos al ajustar el modelo lineal se muestran en las siguientes tablas:

Parámetro	Coeficiente	Error estándar	Estadístico $t$	Valor $p$
intercepto	40.254	4.646	8.664	0.00001
pendiente $X$	-0.271	0.042	-6.471	0.00007

la Tabla del análisis de la varianza:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Regresión	1	205.21	205.21	41.88	0.00007
falta de ajuste	3	47.29	15.77	64.66	0.00002
error puro	7	1.71	0.24		
Error	10	49.00	4.90		
Total	11	254.203			

Tabla . ANDEVA para la falta de ajuste del modelo

Coeficiente de determinación  $R^2 = .8072$  y error estándar estimado del error= 2.21362.

Preguntas:

1. Escriba el modelo lineal y diga si es significativo.
2. Plantee y contraste las hipótesis de ajuste del modelo, ¿qué puede concluir?
3. Interprete el coeficiente de determinación.
4. Interprete el valor de la estimación del parámetro para la temperatura.

5. Estime el error estándar del parámetro estimado de la temperatura.
6. Observe la gráfica de residuales, ¿qué puede concluir?

A continuación se muestran los resultados estadísticos agregando al modelo el término cuadrático:

Parámetro	Estimado	Error estándar	Estadístico $t$	Valor $p$
constante	176.83	11.85	14.92	0.000
$X$	-2.80	0.22	-12.81	0.000
$X^2$	0.012	0.0009	11.59	0.000

$$R_{ajustada}^2 = 0.985, ES = 0.5848$$

La hipótesis estadística que se prueba es:

$$H_0 : \beta_{11} = 0$$

$$H_1 : \beta_{11} \neq 0$$

la tabla del ANDEVA:

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Regresión	2	251.13	125.56	367.12	0.000
Error	9	3.08	0.34		
Total	10	254.20			

$$R^2 = 0.988 \quad error \quad std = 0.585 \quad R^2 (Adj) = 0.985$$

1. Compare los resultados de los dos modelos. Observe que en este caso se ha agregado al último modelo el término cuadrático, se pueden considerar los modelos lineal y cuadrático como los modelos reducido y completo, en este caso se prueba la hipótesis de la existencia del término cuadrático, es decir  $H_1 : \beta_{11} \neq 0$ , ¿qué puede concluir?
2. Estime puntualmente su intervalo para el valor de las impurezas si la temperatura está a  $95^\circ C$ .
3. Observe el gráfico de residuales, ¿qué observa?

**Ejercicio 8.3** Se ha probado que el tiempo de vida de un acumulador se puede predecir midiendo la carga que se le proporciona a la batería (en volts). Se realiza un prueba de vida acelerada, en este caso los acumuladores se sometieron a ciertas condiciones ambientales de calor (entre otras posibles pruebas). Los datos para seis acumuladores son :

Corriente $X$	Tiempo de vida $y$
17.9	245
23.6	220
30.9	215
56.1	211
61	161
77	135

Realce un análisis completo.

**Ejercicio 8.4** En referencia al Ejemplo 8.3, estime los coeficientes de determinación y correlación, escriba la tabla del análisis de varianza. Escriba los intervalos de confianza para el parámetro  $\beta_1$ , para la media de la variable de respuesta y para predecir un valor de la variable de respuesta.

**Ejercicio 8.5 (Myers y Montgomery (1995), cap. 2)** Se realizó un estudio para conocer el desgaste de un metal  $y$  y su relación con la viscosidad del aceite  $VX_1$  y su carga  $CX_2$ . En la tabla se muestran los resultados:

$y$	$VX_1$	$CX_2$
193	1.6	851
230	15.5	816
172	22.2	1058
91	43.0	1201
113	33.0	1357
125	40.0	1115

1. Ajustar un modelo de regresión lineal múltiple a estos datos; codifique las variables  $x_1$  y  $x_2$  tal que  $-1 \leq x_i \leq 1, i = 1, 2$ .
2. Convierta el modelo del inciso anterior a un modelo usando las variables  $VX_1$  y  $CX_2$ .
3. Use el modelo en 2 para predecir el desgaste cuando  $VX_1 = 25$  y  $CX_2 = 1000$ .

4. Ajustar un modelo de regresión lineal con el término de interacción. Use las variables codificadas.
5. Use el modelo 4 para predecir el desgaste cuando  $VX_1 = 25$  y  $CX_2 = 1000$ . Compare su predicción con el valor predicho en la parte 2.
6. Contraste la significancia global del modelo de regresión en 1.1. ¿Cuáles son sus conclusiones?
7. Estime  $\sigma^2$  para el modelo de no-interacción.
8. Use el estadístico  $t$  para contrastar la significancia de cada coeficiente. ¿Qué conclusiones se pueden obtener?

**Ejercicio 8.6 (Myers y Montgomery, 1995, cap. 2)** Un ingeniero en una industria que manufactura semiconductores desea establecer la relación entre la ganancia o h FE ( $y$ ) y tres variables: emisión -RS :  $X_1$  , base -RS :  $X_2$  y emisión a base -RS :  $X_3$  . Vea la tabla.

1. Ajuste un modelo de regresión lineal a los datos.
2. Prediga h FE cuando  $X_1 = 14.5$ ,  $X_2 = 220$  y  $X_3 = 5.0$ .
3. Realice el contraste de significancia, obtenga sus conclusiones.
4. Estime  $\sigma^2$  para el modelo ajustado.
5. Indique los errores estándar de los coeficientes de regresión.
6. Realice el contraste de significancia individual para cada parámetro del modelo.
7. Encuentre un intervalo de confianza para los coeficientes de regresión.
8. Encuentre un intervalo de predicción de 99%, para h FE cuando  $X_1 = 14.50$ ,  $X_2 = 220$  y  $X_3 = 5.0$ .
9. Encuentre un intervalo de confianza para la media de h FE, cuando  $X_1 = 14.5$ ,  $X_2 = 220$  y  $X_3 = 5.0$
10. Analice los residuales en el modelo.



$X_1$	$X_2$	$X_3$	$y$
14.620	226.00	7.000	128.40
15.630	220.00	3.375	52.62
14.620	217.40	6.375	113.90
15.000	220.00	6.000	98.01
14.500	226.50	7.625	139.90
15.250	224.10	6.000	102.60
16.120	220.50	3.375	48.14
15.130	223.50	6.125	109.60
15.500	217.60	5.000	82.68
15.130	228.50	6.625	112.60
15.500	230.20	5.750	97.52
16.120	226.50	3.750	59.06
15.130	226.50	6.125	111.80
15.630	225.60	5.375	89.09
15.380	234.00	8.875	171.90
15.500	230.00	4.000	66.80
14.250	224.30	8.000	157.10
14.500	240.50	10.870	208.40
14.620	223.70	7.375	133.40

**Ejercicio 8.7** Un modelo de regresión:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \varepsilon$$

se ajustó a una muestra de  $n = 25$  observaciones. Los valores de  $t_c = \frac{\hat{\beta}_j}{ES(\hat{\beta}_j)}$  para  $j = 1, 2, 3$  son los siguientes:

Coefficiente	Estadístico	Valor $p$
$\beta_1$	$t_c = 4.82$	
$\beta_2$	$t_c = 8.12$	
$\beta_3$	$t_c = 0.98$	

1. Encuentre el valor  $p$  para estos valores de  $t$ .
2. Obtenga las conclusiones sobre los coeficientes de regresión.

**Ejercicio 8.8** Considere los siguientes datos:

$x$	$y$		
1.0	10.84	9.3	
2.0	16.35		
3.3	22.88	24.35	
4.0	24.56	25.86	29.46
4.5	24.59		
5.0	22.25		
5.6	25.9	27.2	25.61
6.0	25.45	26.56	
6.5	21.03		
6.9	21.46		

1. Analice los residuales y obtenga sus conclusiones.
2. Realice la prueba del ANDEVA. ¿Qué puede decir?
3. ¿El modelo se ajusta adecuadamente?

**Ejercicio 8.9** En la fabricación de hule se combinaron dos factores, el primero consistió de una  $X_1$  concentración de silicato hidratado, el otro un  $X_2$  agente químico de selenio. En el proceso se mantuvo fija una concentración de sulfuro. El objetivo del experimento era medir la dureza ( $y$ ) del hule. La descripción del rango de los factores se muestra a continuación:

Factores\Niveles	-2	2
$X_1$	0.06	2.2
$X_2$	30	70

En diseño central compuesto con  $\alpha = 2$ , dos factores y cuatro replicaciones al centro, se obtuvieron las siguientes respuestas:

Trat	$x_1$	$x_2$	$y$
1	-1	-1	39
2	1	-1	75
3	-1	1	70
4	1	1	71
5	-2	0	48
6	2	0	75
7	0	-2	66
8	0	2	73
9-12	0	0	75, 79, 83, 82

1. Ajuste un modelo lineal, construya el ANDEVA y analice sus residuales.
2. Ajuste un modelo de segundo orden, indique la contribución de la suma de cuadrados de la contribución en los términos cuadráticos. ¿Existe falta de ajuste?

**Ejercicio 8.10** El gerente de planta en una industria química tiene interés en conocer cómo afecta la pureza de la concentración de hexanol (pch) en el tiempo de reacción (tr) en varias tandas del proceso. Los datos registrados en 12 tandas son los siguientes:

Tanda	pch	tr	Tanda	pch	tr
1	10	300	7	9	330
2	13	380	8	13	370
3	10	350	9	10	330
4	11	320	10	9	350
5	7	280	11	12	310
6	14	400	12	14	360

Obtenga un modelo que establezca la relación entre estas variables y realice un análisis estadístico para verificar si el modelo explica significativamente la relación entre las variables, pruebe si el modelo se ajusta adecuadamente, interprete el coeficiente de determinación.

**Ejercicio 8.11** En un proceso se quiere conocer la relación que existe entre el tiempo de mezclado y la velocidad del equipo con la densidad. Un ingeniero realiza varias pruebas sus resultados se muestran en la siguiente tabla:

Prueba	tm	vel	den	Prueba	tm	vel	den
1	5	100	3.1	11	8	200	3.2
2	5	100	3.3	12	8	200	3.5
3	5	200	2.6	13	9	100	2.8
4	5	200	2.4	14	9	100	2.6
5	7	100	2.5	15	9	200	3.1
6	7	100	2.6	16	9	200	3.0
7	7	200	3.0	17	10	100	3.2
8	7	200	3.3	18	10	100	3.4
9	8	100	2.4	19	10	200	2.5
10	8	100	2.3	20	10	200	2.4

Proponga un modelo de primer orden y pruebe estadísticamente si existe falta de ajuste. Realice un análisis estadístico completo para evaluar el modelo.

Proponga el modelo de segundo orden y pruebe la falta de ajuste. Finalmente, agregue al modelo el efecto de interacción del término cuadrático de la primera variable con la segunda variable. Comente los resultados.

**Ejercicio 8.12** Juárez et al. (1991) investigó sobre la conservación y aprovechamiento agroindustrial de la jícama. Empleó la técnica de la deshidratación osmótica para estudiar la conservación de la jícama, su objetivo era encontrar las condiciones que permitieran recuperar a la jícama el 100% de agua después de haberla deshidratado considerando el tiempo de almacenamiento. El diseño propuesto fue de Box - Behnken, considerando tres factores en el estudio:

	<i>A</i> <i>B</i> <i>C</i>			
Bloque	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	-1	-1	0	97
	1	-1	0	74
	-1	1	0	100
	1	1	0	77
	0	0	0	87
2	-1	0	-1	99
	1	0	-1	75
	-1	0	1	99
	1	0	1	76
	0	0	0	86
3	0	-1	-1	84
	0	1	-1	88
	0	-1	1	83
	0	1	1	89
	0	0	0	86

1. Describa en una gráfica los efectos de cada factor.
2. Estime los efectos de los factores tanto lineal como cuadrático.
3. Haga la prueba de falta de ajuste.
4. Complete el análisis estadístico.
5. Estime el modelo regresión considerando el bloqueo y sin considerar el mismo. Al compararlos, ¿qué se observa y por qué?

**Ejercicio 8.13** En la elaboración de proteína vegetal texturizada a partir de harina desengrasada de cacahuate mediante un proceso de extrusión Trejo (1984)

tuvo interés en estudiar el comportamiento del índice de absorción del agua (iaa), y determinar el contenido de proteína, entre otras características. Se consideró que tres factores tienen una fuerte influencia en las respuestas, para evaluar el efecto de estos factores se utilizó el diseño Box - Behnken. Los factores y sus niveles se describen a continuación:

Factores\Niveles	-1	0	1
Humedad de la harina $X_1(\%)$	20	25	30
Temperatura del extrusor $X_2(^{\circ}C)$	100	125	150
Velocidad del tornillo $X_3(rpm)$	400	600	800

Se aleatorizan sin restricciones los tratamientos y se efectúa el experimento, los resultados se muestran en la tabla siguiente:

Trat	$x_1$	$x_2$	$x_3$	iaa
1	-1	-1	0	9.6
2	1	-1	0	16.9
3	-1	1	0	15.1
4	1	1	0	8.7
5	0	0	0	16.3
6	0	-1	-1	8.8
7	0	1	-1	8.4
8	0	-1	1	7.3
9	0	1	1	8.7
10	0	0	0	16.9
11	-1	0	-1	9.1
12	1	0	-1	9.5
13	-1	0	1	7.3
14	1	0	1	6.4
15	0	0	0	12.1

1. Describa en una gráfica los efectos de cada factor.
2. Estime los efectos de los factores tanto lineal como cuadrático.
3. Complete el análisis estadístico con bloques y sin ellos. Al compararlos, ¿qué se observa y por qué?

**Ejercicio 8.14** La producción de jarabes glucosados a partir de harina integral de amaranto es estudiada por Barba (1989). En resumen el objetivo es conocer la producción de hidrólisis de almidón en la enzima glucoamilasa bajo los factores de concentración de sustrato (%) y tiempo (min).

En esta investigación se usó un diseño central compuesto para encontrar las condiciones de optimalidad en la producción de hidrólisis. La descripción de los factores y la estructura del experimento considerada se muestran a continuación:

Factores\Niveles	$-\alpha$	$-1$	$0$	$1$	$\alpha$
$A : X_1$ :sustrato	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25
$B : X_2$ :enzima	10	15	20	25	30
$C : X_3$ :tiempo	15	30	45	60	75
$\alpha = 2$					

Trat	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$
1	-1	-1	-1	11.5
2	1	-1	-1	11.9
3	-1	1	-1	12.7
4	1	1	-1	11.1
5	-1	-1	1	15.5
6	1	-1	1	11.7
7	-1	1	1	15.3
8	1	1	1	12.7
9	-2	0	0	14.9
10	2	0	0	10.4
11	0	-2	0	11.9
12	0	2	0	9.0
13	0	0	-2	13.6
14	0	0	2	15.1
15	0	0	0	15.0
16	0	0	0	17.2

1. Describa en una gráfica los efectos de cada factor.
2. Estime los efectos de los factores tanto lineal como cuadrático.
3. Desarrolle la prueba de hipótesis para el término cuadrático del segundo factor.
4. Escriba el intervalo de confianza para el parámetro lineal del primer factor.
5. Contraste la significancia global del modelo mediante el análisis de la varianza.
6. Explique los resultados en función del coeficiente de determinación.
7. Verifique si hay falta de ajuste del modelo.

**Ejercicio 8.15** Considere el ejercicio 6.4. Dado que  $A, B$  y  $C$  son factores cuantitativos y  $D$  es cualitativo, proceda a su análisis típico de covarianza como el comentado en la sección 2.5.2 de este texto para ambas variables respuesta. ¿Qué implica en el modelo estadístico por ajustarse? Realice el análisis y compare resultados con aquellos obtenidos en el ejercicio 6.4.

**Ejercicio 8.16** Se llevó a cabo un experimento en un proceso textil en el que se consideró la cantidad de tinte como un factor señal. La densidad de color fue la característica dinámica en este estudio.

Se tiene un factor control (A) el tipo de tinte con dos niveles, nuevo y actual. Un factor de ruido (R), recoge las condiciones no controladas del proceso tales como la limpieza de la prenda, las condiciones ambientales y la temperatura de teñido, así los niveles de este factor 1: condiciones adecuadas, 2: condiciones normales, 3: condiciones no adecuadas. Los datos que se obtienen al realizar el experimento son:

$A$	$R$	$M_1$	$M_2$	$M_3$	$M_4$	$M_5$
		1%	2%	3%	4%	5%
1	1	10.7	13.6	16.8	19.1	21.9
	2	10.8	13.2	16.1	19.0	21.7
	3	10.5	13.1	16.0	18.7	21.5
2	1	10.6	13.5	16.6	19.5	21.9
	2	10.9	13.4	16.4	19.4	21.5
	3	10.5	13.2	16.1	19.0	21.3

1. Estime el modelo de regresión  $y = \beta_0 + \beta M + \epsilon$ , el cuadrado medio del error para cada nivel del factor A.
2. Compare los resultados para cada nivel de A. ¿Es preferible cambiar a la nueva pintura? ¿Por qué? ¿Qué decisión toma a partir de los valores de las pendientes?
3. Los lectores interesados en conocer más sobre este tema conocido como Diseño con Características Dinámicas pueden consultar los siguientes dos artículos: Lunani et. al (1997) y Miller (2002).





## Capítulo 9

# Optimización estadística del proceso

*Las personas que manifiestan mayor desprecio por la teoría, encuentran en ella, sin sospecharlo, un alimento cotidiano, si estuviéramos privados de este alimento el progreso se detendría.*  
*Henri Poincaré*

### 9.1 Introducción

En los capítulos anteriores hemos presentado diseños experimentales que permiten estimar efectos que sobre una variable respuesta tienen factores individuales y/o sus interacciones, así como la estimación de la variable respuesta.

Otro objetivo de suma importancia es el identificar qué condiciones hacen que la variable respuesta estimada alcance un valor óptimo. Para el cumplimiento de este objetivo es necesario un enfoque metodológico que combine el uso de los diseños experimentales antes vistos y las técnicas de modelaje del análisis de regresión del capítulo anterior, pero adicionando técnicas matemáticas de optimización. A esta combinación se le ha dado el nombre general de Metodología de Superficie de Respuesta (MSR).

La MSR se desarrolló inicialmente por Box y Wilson (1951). Hill y Hunter (1966) llevan a cabo una excelente revisión de sus fundamentos. Myers (1971) fue el primer libro sobre este tema. La evolución de la computación hizo que esta técnica cobrara un gran impulso y así, en estudios más recientes Khuri y Cornell (1987), Box y Draper (1987) y Myers y Montgomery (1995) publicaron notables trabajos acerca de la metodología.

La MSR es una herramienta que se ha utilizado ampliamente en el desarrollo de procesos industriales y en el desarrollo tecnológico, por ejemplo en la

elaboración de alimentos. Beetner (1974) emplea un diseño  $2^3$  en el estudio de la degradación en el cocinado de extrusión de tiamina y riboflavina. Con el objetivo de optimizar la producción de jamón, Motycka et al. (1984) aplican en una etapa inicial un diseño  $2^3$  con replicaciones al centro, y en la etapa de optimización emplean un diseño central compuesto. En la producción de jarabes de glucosados a partir de harina integral de amaranto, Barba (1989) lleva a cabo un experimento factorial central compuesto. Para elaborar alimentos de soya por extrusión Aguilera y Kosikowski (1976) propusieron un diseño de Box - Behnken. Este último esquema experimental ha servido como modelo a otros estudios como el de Trejo (1984) en el estudio de harina desengrasada de cacahuete; Mora (1989) lo utiliza para investigar las condiciones apropiadas para la germinación del amaranto; Petres y Czukor (1989) lo emplean para estudiar los efectos de la cocción - extrusión sobre factores antinutricionales. En la misma línea de estos diseños, Juárez (1991) estudia condiciones de optimización para la conservación de la jícama aplicando la técnica de deshidratación osmótica. Guzmán (1991) realiza un estudio que tiene como objetivo la optimización de un proceso enzimático para producir maltodextrinas, ahí emplea una combinación de diseños cubo - octaedro. Mullen y Ennis (1979) proponen un esquema experimental para estudiar propiedades sensoriales y de calidad nutricional en la elaboración de un producto. Shih et al. (1997) realizaron un estudio de optimización para tofu o queso de soya. Ilo et al. (1999) utilizan la MSR para estudiar el efecto del cocimiento en un proceso de extrusión de productos hechos de mezclas de harinas de arroz y de amaranto.

## 9.2 Ubicando a la región óptima

La MSR requiere identificar inicialmente una región experimental en donde se sospeche que la respuesta sea factible optimizar. El investigador debe inicialmente seleccionar la variable respuesta y los factores de estudio ( $X_1, \dots, X_p$ ) e identificar la combinación de éstos que a la fecha se conozca como la mejor ("óptima" en esta etapa inicial) en la respuesta; tal combinación se piensa como el centro de un diseño experimental. En general se utilizan inicialmente diseños factoriales  $2^k$  o sus fracciones con tratamientos al "centro" ("óptimo" actual), diseños de primer orden, de tal manera que se pueda ajustar un modelo de primer orden para determinar cuáles son los factores importantes en su efecto lineal y verificar estadísticamente si existe o no falta de ajuste del modelo de primer grado. Si no hay evidencia de falta de ajuste se utiliza el modelo ajustado de primer grado para trasladarse de manera secuencial a través de una trayectoria optimizante correspondiente a este modelo hasta encontrar un tratamiento en el que se detecte estadísticamente falta de ajuste de la superficie de primer orden, es decir, un cambio en la curvatura de la variable respuesta observada. Al ubicarse en

tal tratamiento, en la región circundante a éste se realiza experimentación adicional con un diseño experimental que permita estimar los efectos cuadráticos potencialmente responsables de la curvatura encontrada.

### Ejemplo 9.1

En el proceso de nixtamalización se consideran los factores tiempo, temperatura y la concentración de cal en 0.8%, se desea encontrar una región de operación de tal manera que el índice de absorción de agua (ia) se incremente. Como esta era una investigación inicial en donde no existía mucha información *a priori* sobre las mejores condiciones para lograr tal reducción, se tomaron dos niveles de los primeros dos factores, para el tiempo 10 y 20 minutos y para la temperatura 80 °C y 90 °C, la concentración de cal fue fijada en 0.8.

Factor\Niveles	-1	1
$t$ : tiempo min	10	20
$T$ : temperatura °C	80	90

La codificación de los factores de la región experimental original a la región codificada se expresa por las siguientes fórmulas primero la del factor tiempo y luego la de temperatura:

$$x_1 = \frac{t - \bar{t}}{\frac{1}{2}\text{amplitud}} = \frac{t - 15}{5} = \frac{\Delta t}{5} \quad (9.1)$$

$$x_2 = \frac{T - \bar{T}}{\frac{1}{2}\text{amplitud}} = \frac{T - 85}{5} = \frac{\Delta T}{5} \quad (9.2)$$

El diseño inicial que se realizó fue un diseño factorial  $2^2$  con dos repeticiones tanto en la parte factorial como al centro (niveles intermedios de los factores). La Tabla 9.1 muestra los resultados.

$tpo$	$temp$	$x_1$	$x_2$	$ia_1$	$ia_2$
10	80	-1	-1	2.3	2.5
20	80	1	-1	3.7	3.2
10	90	-1	1	4.6	4.9
20	90	1	1	5.3	5.8
15	85	0	0	3.8	3.8

Tabla 9.1 Resultados del diseño  $2^2$  con repeticiones al centro

Con esta información se ajusta por mínimos cuadrados un modelo de primer orden, resultando:

$$\hat{y} = 3.99 + 0.463x_1 + 1.113x_2. \quad (9.3)$$

Se observa de la Tabla 9.2 que el efecto de los factores tiempo y temperatura es significativo. El porcentaje de la variabilidad total explicada por el modelo es  $R^2 = 0.964$ , y el modelo se ajusta adecuadamente a los datos, la prueba de falta de ajuste que se presenta en la Tabla 9.2 lo confirma.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de Cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Tiempo	1	1.711	1.711	27.4	0.001
Temperatura	1	9.901	9.901	158.7	0.000
Error total	7	0.437	0.0624		
Falta de ajuste lineal	2	0.122	0.061	0.96	0.4424
Error puro	5	0.315	0.063		
Total	9	12.049			

Tabla 9.2 Análisis de falta de ajuste del modelo lineal del Ejemplo 9.1

Por ende, se presume que la región experimental vigente indica la posibilidad de seguir en la búsqueda del óptimo por medio del modelo de primer orden ajustado: se observa que al aumentar el tiempo y la temperatura el *iia* aumenta, ya que sus coeficientes estimados son positivos; esto se muestra gráficamente en la Fig. 9.1, donde se trazan las curvas (líneas en este caso) de nivel y la recta perpendicular a esas líneas, que representa la trayectoria optimizante. Observe que las curvas de nivel se obtiene a partir de la ecuación (9.3), por ejemplo suponga que  $\hat{y} = 3.99$ , entonces  $x_1 = -\frac{1.113}{0.463}x_2$ , en este caso el coeficiente de  $x_2$  corresponde a la pendiente de las curvas de nivel y el recíproco de esta cantidad corresponde a la pendiente de la trayectoria optimizante.

Del modelo (9.3) la dirección de ascenso o trayectoria optimizante es la que sigue a  $(0.463, 1.113)$  o de manera equivalente a  $(1, 2.4)$ , es decir que las curvas de nivel de la respuesta se mueven 1.113 unidades en la dirección de  $x_2$  para cada 0.463 unidades en la dirección de  $x_1$ , o por una unidad en  $x_1$  hay que recorrer 2.4 unidades en  $x_2$ , esto es:

$$0.463x_1 = 1.113x_2$$

$$x_1 = 2.4x_2 \quad (9.4)$$

La última relación en (9.4) equivale a la trayectoria optimizante ya que es usada como guía para encontrar nuevos puntos que permitan realizar nuevos experimentos secuenciales hasta encontrar cambios importantes en la respuesta observada. Así, al fijar un cambio en uno de los factores codificados, se obtiene

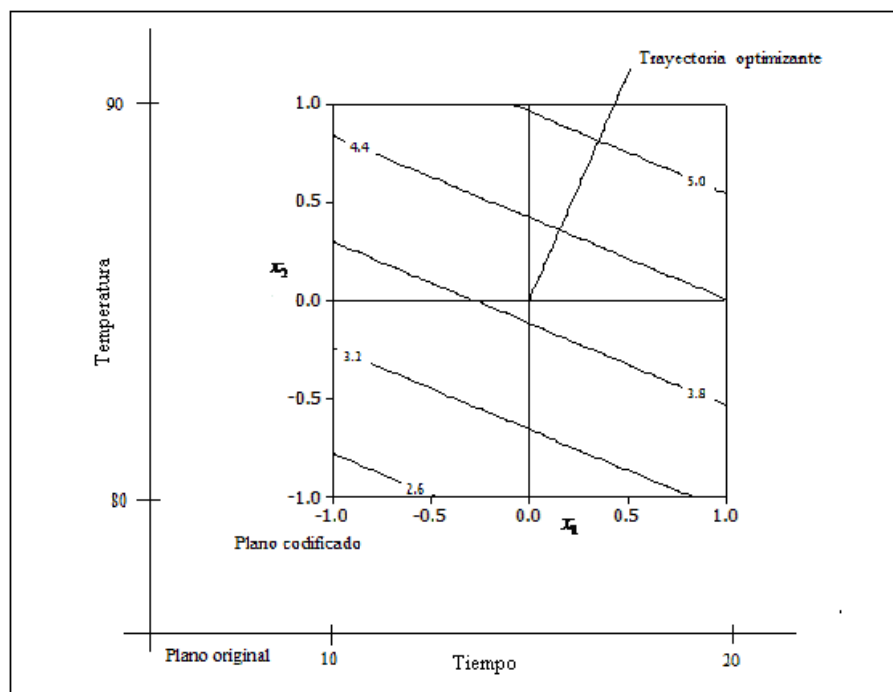


Fig. 9.1: Curvas de nivel y trayectoria optimizante en el primer experimento del Ejemplo 9.1

el otro: suponga que el ingeniero del proceso decide incrementar secuencialmente el tiempo en dos minutos,  $\Delta t = 2$  a partir del centro del diseño. De la expresión (9.4) se tiene que:

$$x_1 = \frac{\Delta t}{5} = \frac{2}{5} = 0.4 \quad (9.5)$$

y usando (9.4)  $x_2 = 2.4 \times 0.4 = 0.96$  que corresponde a una temperatura de  $T = 5x_2 + 85 = 89.8 \simeq 90$  utilizando (9.2). Estos resultados se interpretan diciendo que al incrementar el tiempo en dos minutos corresponde incrementar la temperatura en 5 grados para así estar sobre la trayectoria optimizante (9.4). De tal manera se plantea una estrategia secuencial de experimentación como se muestra en la Tabla 9.3; ahí se muestran los nuevos puntos experimentales, tanto codificados como originales, con incremento codificado  $\Delta = (0.4, 0.96)$ .

	$x_1$	$x_2$	$tpo$	$temp$	$iaa$
<i>base</i>	0	0	15	85	3.5
<i>base</i> + $\Delta$	0.4	0.96	17	90	5.4
<i>base</i> + $1.5\Delta$	0.6	1.44	18	92	5.9
<i>base</i> + $2\Delta$	0.8	1.92	19	95	6.3
<i>base</i> + $3\Delta$	1.2	2.88	21	100	6.5
<i>base</i> + $4\Delta$	1.6	3.84	23	104	6.1

Tabla 9.3 Estrategia experimental secuencial en la trayectoria optimizante del Ejemplo 9.1

Observe que la respuesta va aumentando hasta  $3\Delta$  con un valor de 6.5, pero que con  $4\Delta$  existe un cambio en la respuesta 6.5 a 6.1, tal situación abre la posibilidad de realizar un nuevo diseño factorial  $2^2 + n_0$  ( $n_0 = 2$ ) circundante a la condición original (23,104). Tal diseño se muestra en la Tabla 9.4:

$x_1$	$x_2$	$tpo$	$temp$	$iaa_1$	$iaa_2$
-1	-1	18	100	6.3	6.1
1	-1	28	100	6.7	7.0
-1	1	18	110	5.5	5.7
1	1	28	110	6.5	6.3
0	0	23	105	7.0	6.2

Tabla 9.4 Segundo diseño experimental del Ejemplo 9.1

El modelo de primer grado estimado es:

$$\hat{y} = 6.33 + 0.36x_1 - 0.26x_2,$$

con  $R^2 = 0.722$ , su análisis de falta de ajuste se muestra en la Tabla 9.5.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Tiempo	1	1.051	1.051	11.94	0.011
Temperatura	1	0.551	0.551	6.26	0.0411
Error total	7	0.619	0.088		
Falta de ajuste lineal	2	0.193	0.097	1.14	0.391
Error puro	5	0.425	0.085		
Total	9	2.221			

Tabla 9.5 Análisis de carencia de ajuste del modelo de primer grado del segundo diseño experimento del Ejemplo 9.1

Nuevamente no hay evidencia de falta de ajuste del modelo de primer grado, por lo que es necesario determinar la trayectoria optimizante correspondiente, que resulta ser:  $x_2 = \left(\frac{-0.26}{0.36}\right)x_1 = -0.73x_1$ . Ahora se propone un incremento de 5 minutos, por lo que el decremento en la temperatura es aproximadamente de 4 grados,  $(\Delta T = 5x_2 = 5(-0.73x_1) = 5(-0.73 \times 1) = -3.63)$ . Los resultados de la experimentación secuencial se muestran en la Tabla 9.6 pero ahora con  $\Delta = (1, -0.73)$ :

	$x_2$	$x_2$	$tpo$	$temp$	$ia$
<i>base</i>	0	0	23	105	6.5
<i>base</i> + $\Delta$	1	-0.73	28	101	6.9
<i>base</i> + $2\Delta$	2	-1.45	33	97	7.1
<i>base</i> + $3\Delta$	3	-2.18	38	93	6.7

Tabla 9.6 Tercer diseño experimental del Ejemplo 9.1

Como se ha dicho anteriormente, el cambio del  $ia$ , de 7.1 a 6.7 da lugar a una nueva experimentación para verificar curvatura. Esta se muestra en la Tabla 9.7.

$x_1$	$x_2$	$tpo$	$temp$	$ia_1$	$ia_2$
-1	-1	25	95	5.9	6.2
1	-1	39	95	5.4	5.7
-1	1	25	105	6.0	5.9
1	1	39	105	6.2	6.3
0	0	32	100	7.4	7.5

Tabla 9.7 Cuarto experimento en el Ejemplo 9.1

Con estos resultados se estima el modelo de primer grado y se concluye que el modelo no es adecuado ya que  $R^2 = 0.12$  y que la carencia del ajuste lineal es evidente observando la Tabla 9.8.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Falta de ajuste lineal	2	3.92	1.96	93.33	0.0001
Error puro	5	0.11	0.021		
Error total	7	4.025			

Tabla 9.8 Análisis de falta de ajuste para el cuarto experimento del Ejemplo 9.1

Esto sugiere que el modelo de primer grado no es suficiente por posible curvatura en la respuesta, por lo que se propone un diseño experimental que permita estimar también los efectos cuadráticos responsables del cambio observado en *ii*a. Una alternativa a esta situación es realizar la prueba de curvatura, donde la hipótesis nula plantea:  $H_0$ : no hay curvatura. Esta hipótesis se contrasta estimando la suma de cuadrados del efecto de curvatura utilizando la siguiente expresión:

$$SC_{curvatura} = \frac{Nn_o\hat{\delta}_C^2}{N + n_o}, \quad (9.6)$$

donde  $\delta_C = \bar{y}_o - \bar{y}_t$  que el cambio de la media del centro con respecto a los tratamientos.  $N = r2^k$  ( $r$  réplicas) y  $n_o$  puntos en el centro del diseño. El valor generado por la ecuación (9.6) se incorpora al análisis de la varianza y el resumen se describe en la Tabla 9.9. A partir del estadístico de prueba  $F$  se verifica que el efecto de curvatura es significativo.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Modelo	3	0.52	0.173	8.254	0.0221
Curvatura	1	3.6	3.60	171.43	0.0000
Error total	5	0.10	0.021		
Total	9	4.22			

Tabla 9.9 Análisis de varianza que incluye la suma de cuadrados para la curvatura.

Donde  $\delta_C = \bar{y}_o - \frac{1}{4}(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \bar{y}_3 + \bar{y}_4) = 7.45 - 5.95 = 1.5$ ,  $\bar{y}_i$  ( $i$  cada tratamiento).

En este contexto, un diseño central compuesto (dcc) resulta ser apropiado, así que se realiza un experimento utilizando el esquema de un dcc, el diseño y los



resultados se muestran en la Tabla 9.10.

$x_1$	$x_2$	$tpo$	$temp$	$iiia$
-1	-1	27	95	6.3
1	-1	37	95	5.4
-1	1	27	105	5.8
1	1	37	105	6.5
-1.41	0	25	100	4.9
1.41	0	39	100	5.6
0	-1.41	32	88	5.9
0	1.41	32	112	6.8
0	0	32	100	7.5
0	0	32	100	7.3
0	0	32	100	7.8

Tabla 9.10 dcc y resultados experimentales del Ejemplo 9.1

El modelo de segundo orden por ajustar es el siguiente:

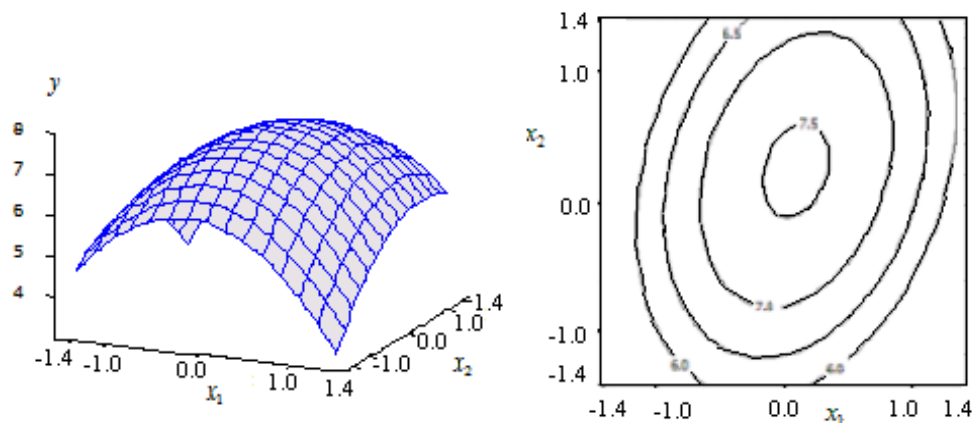
$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \beta_{11} x_{1i}^2 + \beta_{22} x_{2i}^2 + \beta_{12} x_{1i} x_{2i} + \varepsilon_i,$$

$$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2), \text{ independientes.}$$

Del proceso de estimación de los parámetros se tienen los siguientes resultados:

	Estimado	Valor $p$
$\hat{\beta}_0$	7.530	< .001
$\hat{\beta}_1$	0.099	0.3951
$\hat{\beta}_{11}$	-1.092	0.0003
$\hat{\beta}_2$	0.234	0.0783
$\hat{\beta}_{22}$	-0.542	0.0079
$\hat{\beta}_{12}$	0.400	0.0444

con una  $R^2_{ajustada} = 0.8959$ . El análisis de la varianza se presenta en la Tabla 9.10, en ésta se observa que este modelo cuadrático no muestra falta de ajuste.

Fig. 9.2: Modelo y curvas de nivel para el modelo cuadrático del *ii*a

Fuente de variación	gl	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Modelo cuadrático	5	8.18	1.64	18.21	0.0032
Error	5	0.45	0.09		
Falta del ajuste cuadrático	3	0.32	0.11	1.57	0.41
Error puro	2	0.13	0.07		
Total corregido	10	8.63			

Tabla 9.10 Análisis de la varianza ajustando un modelo cuadrático

En la Fig. 9.2 se puede ver en la gráfica que está a la derecha la superficie que corresponde a este modelo y la de la izquierda indica las curvas de nivel en la superficie; estas curvas de nivel son particularmente útiles porque permiten crear varios escenarios en donde la respuesta del proceso sea cercana al óptimo. Por ejemplo, si el investigador decide que un índice de absorción de agua es adecuado en 7.0, entonces en cualquier punto de la segunda elipse concéntrica en las curvas de nivel en la Fig. 9.2 se tendrán soluciones adecuadas para este proceso. En términos prácticos esto quiere decir que se podrá ajustar el proceso a diferentes temperaturas y tiempos, tal decisión dependerá de los intereses del investigador.

**Procedimiento para estimar las condiciones de optimización**

En la región experimental actual y con el modelo cuadrático ajustado se puede proceder a estimar las condiciones de optimización de la respuesta. Así, en general la MSR plantea los siguientes pasos:

- Diseño y modelo de primer orden: plantear y ajustar un modelo de primer orden en la región experimental de las variables  $x_1, x_2, \dots, x_p$ , es decir:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \sum_i^p \hat{\beta}_i x_i$$

En el caso de que la falta de ajuste sea no significativa se procede a establecer la trayectoria optimizante.

- Determinar trayectoria optimizante:
  - Sin restricciones: la dirección de la trayectoria optimizante está determinada por los coeficientes estimados correspondientes del modelo de primer grado  $(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_p)$ . El investigador propone un incremento en uno de los  $p$  factores del experimento, por ejemplo, suponga que el incremento codificado en el  $j$ -ésimo factor a lo largo de la trayectoria optimizante se denota por  $x_j^O$ , computado a partir del incremento deseado  $\Delta_j$  en la escala original del factor  $j$  a través de:

$$x_j^O = \frac{\Delta_j}{R_j}$$

donde:

$$R_j = \frac{1}{2}(\max \text{ valores de } x_j - \min \text{ valores de } x_j)$$

Los incrementos correspondientes a los otros factores son:

$$x_i^O = x_j^O \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\beta}_j}, i = 1, \dots, p, i \neq j \quad (9.7)$$

Estos incrementos al trasladarse a las escalas no codificadas indicarán al experimentador qué pruebas experimentales deben realizarse.

- Con restricciones: sin embargo, existen situaciones en las que a lo largo de la trayectoria optimizante pueden generarse valores de los factores que no tengan sentido en la experimentación por alguna razón, esto

hace que cada prueba experimental a lo largo de la trayectoria optimizante tenga que satisfacer restricciones. Esto equivale a utilizar una trayectoria optimizante dada nuevamente por los coeficientes estimados del modelo:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \sum_i^p \hat{\beta}_i x_i$$

pero sujeta a que sólo se mueva en una región experimental de interés, digamos  $\mathbb{R}$ . Por ejemplo podría ser que  $\mathbb{R}$  fuera una hipersfera de radio  $r$ . Esta restricción se traduce como  $\sum_i^p x_i^2 \leq r^2$ . El planteamiento matemático para la determinación de la trayectoria optimizante requiere formalmente optimizar:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_p) = \hat{\beta}_0 + \sum_i^p \hat{\beta}_i x_i - \mu \left( \sum_i^p x_i^2 - r^2 \right) \quad (9.8)$$

El óptimo se obtiene de las derivadas parciales de  $L$  con respecto a  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  y  $\mu$ :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \hat{\beta}_i - 2\mu x_i \quad \text{y} \quad \frac{\partial L}{\partial \mu} = -\left( \sum_i^p x_i^2 - r^2 \right)$$

donde  $i = 1, \dots, n$ , igualando con cero la primer ecuación tenemos:

$$x_i^O = \frac{\hat{\beta}_i}{2\mu} \quad \text{o} \quad \mu = \frac{\hat{\beta}_i}{2x_i^O} \quad (9.9)$$

Observe que las componentes de  $\mathbf{x}^O$  están relacionadas con los estimadores de los parámetros y depende del parámetro de Lagrange  $\mu$ , éste último llamado así porque el planteamiento en la expresión (9.8) se debe al gran matemático francés Lagrange. Si la trayectoria es de ascenso  $\mu$  es positiva y si la trayectoria es de descenso  $\mu$  es negativa. Ahora el objetivo es encontrar los valores de las coordenadas  $\mathbf{x}^O$  para determinar los nuevos puntos de experimentación, siempre dentro de la región  $\mathbb{R}$ . Primero se fija un incremento en algún factor ya codificado; por supuesto tal incremento dependerá de los valores que se puedan tomar en la región experimental original. Así si el incremento deseado ya codificado en el  $j$ -ésimo-factor es  $x_j^O$ , al sustituirlo en (9.9) se tiene que:

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\beta}_j}{2x_j^O}$$

Finalmente, se emplea el valor de  $\hat{\mu}$  para encontrar las coordenadas restantes  $x_i^O, i = 1, \dots, p; i \neq j$ . Estos valores  $x_i^O$  se decodifican y se toman como base para ir realizando una experimentación secuencial, hasta que la respuesta observada muestre un cambio en su tendencia. En el siguiente ejemplo se muestran los cálculos de este procedimiento para un proceso reportado en la literatura industrial.

### Ejemplo 9.2

En el estudio de procesamiento de jamón reportado por Motycka et al. (1984), se escogieron tres factores para el proceso: revoluciones por minuto de la revolvedora (3000 rpm y 4000 rpm), texturación mecánica (100% y 150% ) y la temperatura del proceso (8 °C y 16 °C); una de las variables de respuesta fue el rendimiento de jamón en porcentaje. Se empleó un diseño  $2^3$  con cuatro replicaciones en el centro (3500 rpm, 125% ,12 °C). El modelo de primer grado:

$$\hat{y} = 90.04 - 0.06x_1 - 0.88x_2 + 0.99x_3$$

considerado estadísticamente significativo (y sin carencia de ajuste). El procedimiento para encontrar las condiciones experimentales a lo largo de la trayectoria optimizante (en este caso ascendente):

- Se planteó un decremento de  $\Delta = 68$  rpm para el factor 1.
- Entonces

$$x_1 = \frac{-68}{500} = -0.136 \simeq -0.14$$

donde  $R_i = \frac{1}{2}(4000 - 3000) = 500$

- El valor de  $\hat{\mu}$  , se estima como:

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\beta}_1}{2x_1} = \frac{-0.06}{2(-0.14)} = 0.214$$

- Para completar, se encuentran los incrementos para los otros factores como:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{\hat{\beta}_2}{2\mu} = \frac{-0.88}{2(0.214)} = -2.06 \simeq -2 \\ x_3 &= \frac{\hat{\beta}_3}{2\mu} = \frac{0.99}{2(0.214)} = 2.31 \simeq 2 \end{aligned}$$

- Los valores decodificados son:

$$X_2 = -2 \times 25 = -50 \quad X_3 = 2 \times 4 = 8,$$

es decir la texturación mecánica también se decrementa y la temperatura se incrementa en 8. Entonces el siguiente experimento se realizó en los niveles 3432 rpm, 75% y 21C respectivamente, para cada uno de los factores considerados el valor de la respuesta se redujo. Este cambio en el valor de la respuesta nos puede sugerir la realización de un nuevo experimento con la posibilidad de encontrar un óptimo.

En el siguiente apartado describiremos la estrategia matemática de cómo encontrar una condición o tratamiento (combinación de los factores involucrados) donde la superficie de respuesta estimada alcance su óptimo .

### 9.3 Procedimiento de optimización

Ya habiendo agotado las trayectorias optimizantes, se presume que en la región experimental actual se estará cercano a una región donde la superficie de respuesta alcance su valor óptimo. Habrá entonces que plantear un diseño de segundo orden que permita corroborarlo; esto se hace a través de estimar los efectos lineales, pero primordialmente a los efectos de segundo orden. Así, el diseño debe permitir estimar y contrastar hipótesis referentes al modelo cuadrático:

$$y = \beta_0 + \sum_i^p \beta_i x_i + \sum_i^p \sum_j^p \beta_{ij} x_i x_j + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2) \quad (9.10)$$

El modelo (9.10) ya ajustado a los datos del experimento se representa como:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \sum_i^p \hat{\beta}_i x_i + \sum_i^p \sum_j^p \hat{\beta}_{ij} x_i x_j \quad (9.11)$$

si el ajuste es satisfactorio (9.11) se utilizará para encontrar el valor óptimo. Con el objetivo de facilitar el álgebra involucrada en la determinación del punto potencial con el valor óptimo en la respuesta, escribamos el modelo (9.11) en forma matricial:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \mathbf{x}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{x}'\mathbf{B}\mathbf{x} \quad (9.12)$$

donde  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  representa al vector cuyas componentes son los estimadores de los parámetros del modelo correspondientes a los coeficientes de los términos lineales de los factores, es decir:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}' = (\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \dots, \hat{\beta}_p)$$

$\mathbf{x}$  representa el vector de factores con valores codificados y  $\hat{\mathbf{B}}$  representa una matriz cuyos elementos son los coeficientes del modelo estimado que corresponden a la parte no lineal, es decir:

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_{11} & \cdots & \frac{\hat{\beta}_{1p}}{2} \\ \cdot & \cdots & \cdots \\ \frac{\hat{\beta}_{p1}}{2} & \cdots & \hat{\beta}_{pp} \end{pmatrix}$$

Se deriva parcialmente la expresión (9.12) con respecto a  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  e igualamos con cero, la solución de la ecuación resultante es el punto:

$$\mathbf{x}_S = -\frac{1}{2}\mathbf{B}^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (9.13)$$

al cual se le llama punto estacionario de la superficie de respuesta. Los valores de los factores en este punto determinan potencialmente las condiciones óptimas con respuesta  $\hat{y}_S$ , el valor de (9.12) al substituir  $\mathbf{x}$  por  $\mathbf{x}_S$ . Así el valor de la respuesta predicha en el punto estacionario  $\mathbf{x}_S$  es:

$$\begin{aligned} \hat{y}_s &= \hat{\beta}_0 + \mathbf{x}'_s \hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{x}'_s \hat{\mathbf{B}} \mathbf{x}_s \\ &= \hat{\beta}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{x}'_s \hat{\boldsymbol{\beta}} \end{aligned}$$

### Ejemplo 9.3

En una investigación que se realizó con harinas de amaranto se tenía interés en determinar las condiciones de temperatura ( $X_1$ ) y tiempo ( $X_2$ ) de tal manera que se pudiera obtener la mejor consistencia de la masa. Los valores reales y codificados de la temperatura y tiempo en el dcc se muestran en la Tabla 9.11.

$X_1$	$X_2$	$x_1$	$x_2$	$y$
80	50	-1	-1	0.36
90	50	1	-1	0.17
80	60	-1	1	0.29
90	60	1	1	0.47
78	55	-1.41	0	0.35
92	55	1.41	0	0.48
85	48	0	-1.41	0.27
85	62	0	1.41	0.29
85	55	0	0	0.70
85	55	0	0	0.64

Tabla 9.11 dcc y resultados del Ejemplo 9.3

El modelo ajustado es:

$$\hat{y} = 0.67 + 0.022x_1 + 0.032x_2 - 0.134x_1^2 - 0.201x_2^2 + 0.093x_1x_2 \quad (9.14)$$

A partir del resumen de los resultados del análisis de varianza efectuado para ajustar el modelo, se concluye que es un modelo adecuado con un  $R^2 = 0.95$ . El ANDEVA correspondiente se muestra en la Tabla 9.12, donde el  $F_c$  se obtuvo dividiendo los cuadrados medios de esta tabla entre el cuadrado medio del error de la Tabla 9.13.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrados medios	$F_c$	Valor $p$
Lineal	2	0.012	0.006	2.00	0.274
Cuadrático	1	0.034	0.034	11.34	0.002
Interacción	2	0.267	0.134	44.60	0.035
Total modelo	5	0.313	0.063	21.00	0.005

Tabla 9.12 ANDEVA en el Ejemplo 9.3

La prueba de falta de ajuste resulta no significativa, tal como se muestra en la Tabla 9. 14.

Fuente de variación	Grados de libertad	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F_c$	Valor $p$
Falta de ajuste	0.011	3	0.004	2.00	0.459
Error puro	0.002	1	0.002		
Error	0.013	4	0.003		

Tabla 9.13 Prueba de falta de ajuste del Ejemplo 9.3

El punto estacionario se obtiene aplicando la expresión (9.13), esto es:

$$\mathbf{x}_S = -\frac{1}{2}\hat{\mathbf{B}}^{-1}\hat{\boldsymbol{\beta}} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} -8.114 & -1.877 \\ -1.877 & 5.409 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.0217 \\ 0.0323 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.118 \\ 0.108 \end{bmatrix}$$

En términos de las variables originales esto significa que:

$$0.118 = \frac{2(X_1 - 85)}{10} \quad 0.108 = \frac{2(X_2 - 55)}{10}$$

Se despejan las variables  $X_1$  y  $X_2$  con objeto de obtener el valor óptimo para la temperatura, el cual es igual a 85.59 y en el tiempo es  $X_2 = 55.39$ . En



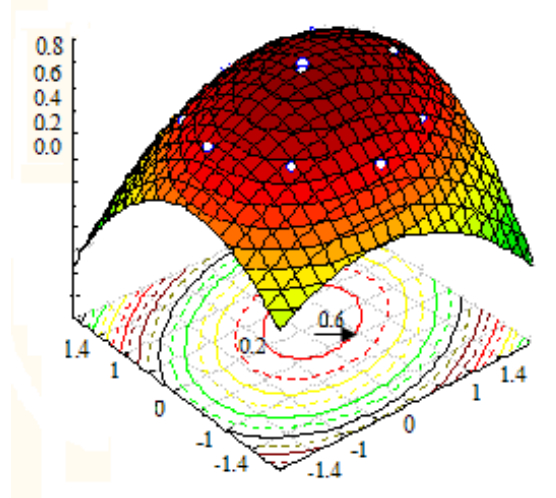


Fig. 9.3: Descripción del modelo de regresión ajustado y las curvas de nivel en el Ejemplo 9.3

la Fig. 9.3 de manera aproximada podemos observar que efectivamente en el punto  $(0.118, 0.108)$  se alcanza un máximo. El valor de  $\hat{y}$  en el óptimo es  $\hat{y}_S = \hat{y}(0.118, 0.108) = 0.673$ .

## 9.4 Caracterización del punto estacionario

El valor del punto  $\mathbf{x}_S$  obtenido en la ecuación (9.13) no indica en sí su naturaleza, es decir, si corresponde a un máximo, un mínimo o un punto silla de la superficie  $\hat{y}$ . Cuando el número de factores  $p$  es mayor a dos es difícil visualizar y entender a la superficie de respuesta, haciendo necesario utilizar herramientas matemáticas para determinar con precisión la naturaleza de puntos estacionarios y de la superficie de respuesta. Suponga que se tienen  $p$  factores por lo que la gráfica de la superficie de respuesta estará en  $p+1$  dimensiones, para lograr tal caracterización es conveniente reexpresar el modelo ajustado (9.11) en una forma simplificada. La simplificación deseada implica que desaparezcan primordialmente los términos correspondientes a términos cruzados (interacciones), así la reexpresión del modelo ajustado equivale a sustituir  $(x_1, \dots, x_p)$  por  $(w_1, \dots, w_p)$ , un nuevo sistema de “factores” artificiales con la propiedad de no tener interacciones entre ellos en su efecto sobre la respuesta, facilitando así su caracterización (la desaparición de interacciones se debe a que el sistema de coordenadas ha sido rotado). De

esta forma, si el centro del diseño de segundo orden finalmente utilizado en la optimización es cercano al punto estacionario  $\mathbf{x}_S$ , se puede mostrar que una representación adecuada de la superficie de respuesta (9.11) es (la llamada forma canónica B, ver detalle en Box y Draper, 1987):

$$\hat{y} = \hat{y}_S + \sum_{i=1}^p \lambda_i w_i^2 \quad (9.15)$$

donde  $\hat{y}_S$  es el valor estimado de  $y$  en el punto estacionario  $\mathbf{x}_S$  de la superficie de respuesta, las  $w_i$  representan los nuevos factores y las  $\lambda_i$  son constantes. Note que en esta representación desaparecen tanto los términos de primer grado como términos de interacciones.

Desde el punto de vista matemático, los  $\{w_i\}$  se relacionan con  $\{x_i\}$  mediante la expresión:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) = \mathbf{w}, \quad (9.16)$$

donde  $\mathbf{H}$  representa a la matriz que contiene a los vectores característicos o propios de la matriz  $\hat{\mathbf{B}}$  asociados a los valores propios  $\lambda_i$ . Los valores característicos  $\lambda_i$  son las raíces de la llamada ecuación característica  $|\hat{\mathbf{B}} - \lambda \mathbf{I}| = 0$ .

Los signos de los valores característicos ( $\lambda_i$ 's) dan la siguiente información:

1. Si todas  $\lambda_i < 0$  en cualquier dirección que nos movamos de  $\mathbf{x}_S$ ,  $\hat{y}$  decrecerá, por lo tanto se tendrá un punto máximo en  $\mathbf{x}_S$ .
2. Si todas  $\lambda_i > 0$  en cualquier dirección en que nos movamos de  $\mathbf{x}_S$ , crecerá  $\hat{y}$ , así que  $\mathbf{x}_S$  será un punto mínimo.
3. Si hay combinaciones de  $\lambda_i$ 's positivas y negativas,  $\hat{y}$  va a decrecer o crecer en alguna dirección del sistema  $(w_1, \dots, w_p)$ , tal situación dependerá de cómo se dé el movimiento, con lo que  $\mathbf{x}_S$  es un punto llamado silla.

### Ejemplo 9.3 (continuación)

Determinar la naturaleza del punto estacionario  $\mathbf{x}_S = (0.118, 0.108)$  que se generó en el Ejemplo 9.3, donde  $\hat{y}_s = 0.673$ . Los valores propios se obtienen resolviendo:

$$\begin{vmatrix} -0.134 - \lambda & 0.047 \\ 0.047 & -0.201 - \lambda \end{vmatrix} = (-0.134 - \lambda)(-0.201 - \lambda) - (0.047)(0.047) = 0$$

Los valores de  $\lambda$  que satisfacen esta última ecuación son  $\lambda_1 = -0.225$  y  $\lambda_2 = -0.110$ , entonces en el punto estacionario se alcanza un máximo. Los vectores

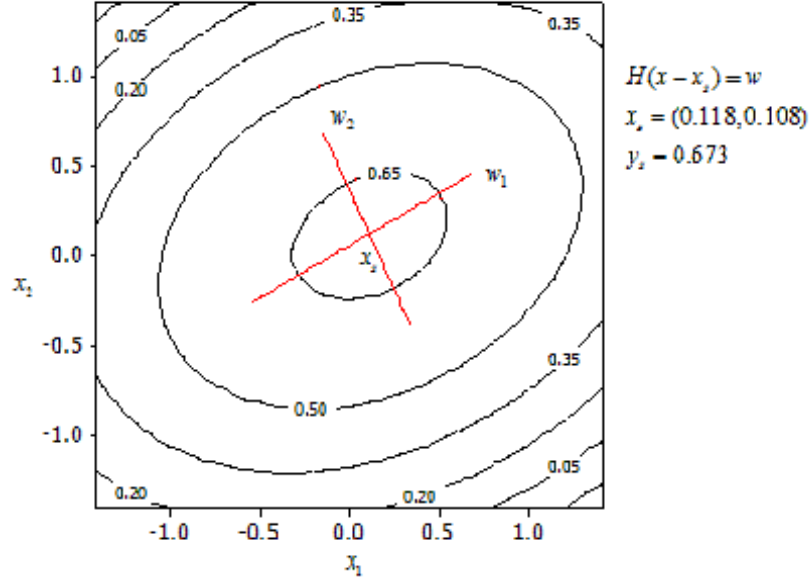


Fig. 9.4: Curvas de nivel para el modelo (9.14), coordenadas  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  y de  $w = (w_1, w_2)$ .

característicos correspondientes son:  $h'_1 = (-0.45, 0.89)$  y  $h'_2 = (0.89, 0.45)$ . El sistema de coordenadas  $w_i$  se obtienen por:

$$H(\mathbf{x} - \mathbf{x}_S) = \begin{bmatrix} -0.45 & 0.89 \\ 0.89 & 0.45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 0.118 \\ x_2 - 0.108 \end{bmatrix} = w \quad (9.17)$$

La descripción de los sistemas de coordenadas del diseño  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_k)$  y de  $w = (w_1, \dots, w_k)$  se describe en la Fig. 9.4.

## 9.5 Análisis de lomas

Dentro del estudio que se realiza para encontrar mejores condiciones de operación del proceso, muy frecuentemente en la región experimental final, las combinaciones de factores correspondientes no determinan de manera clara una respuesta óptima, ya que se necesita conocer cómo es la respuesta estimada en la región circundante al punto crítico.

Esta situación hace necesario el estudio de lomas en la superficie de respuesta estimada. Los tipos de lomas más usuales pertenecen a las llamadas lomas estacionarias y lomas crecientes. Las lomas estacionarias típicas son por ejemplo como la mostrada en la Fig. 9.5, cuyo modelo es  $\hat{y} = 80 - 4x_1^2 - 4x_2^2$ .

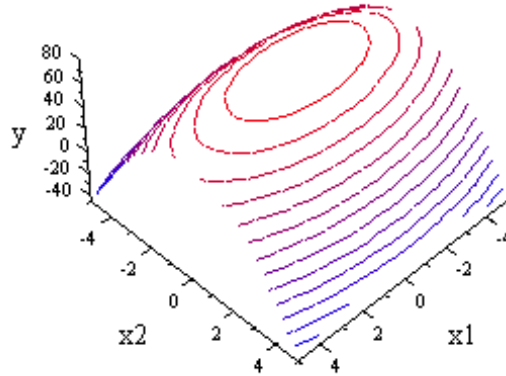


Fig. 9.5: Ejemplo de loma estacionaria

Note en la Fig. 9.5 que en la superficie de respuesta estimada existe una gran cantidad de puntos muy cercanos al punto con una respuesta máxima. Graficando en el caso de dos factores es relativamente fácil entender esta situación, pero para el caso de tres o más factores no hay ayudas visuales al caso. Por ejemplo, una loma ascendente se muestra en la Fig. 9.6, el modelo en este caso es  $\hat{y} = 87.69 - 9.02x_1^2 + 2.97x_2^2$ .

Sin embargo, mediante la re - expresión del modelo con factores sin interacción, como fue desarrollado anteriormente, es posible analizar con mayor claridad lomas aún en situaciones de tres o más factores. Las lomas o cordilleras en la superficie de respuesta estimada corresponden a las dependencias entre los factores involucrados, tales dependencias son reflejo en muchos casos de variables, digamos, fundamentales, que no son medidas ni controladas durante el experimento, pero que son funciones de los factores experimentales. Así muchas combinaciones de niveles de los factores podrían dar lugar a un mismo valor de la(s) variable(s) fundamental(es). Un ejemplo clásico es el estudio de la contracción de un músculo a partir de cambios de la resistencia y corriente eléctricas. A partir de la ley de Ohm, experimentando, se podría encontrar que la multiplicación de corriente y resistencia, es decir el voltaje, explica mejor el fenómeno. El voltaje sería una variable fundamental función (no lineal) de la resistencia y la corriente.

Al estudiar tales tipos de dependencias entre los factores experimentales se dan las siguientes posibilidades:

- Encontrar un conjunto de puntos donde se tiene optimalidad en la superficie

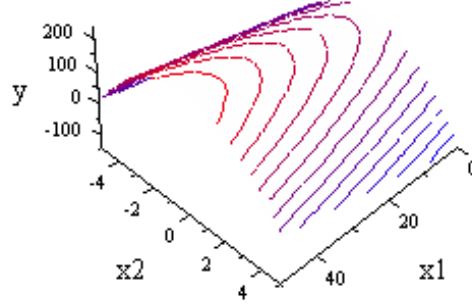


Fig. 9.6: Ejemplo de loma ascendente

- Al haber óptimos alternativos, si se desea optimizar otra respuesta se da una flexibilidad mayor para encontrar regiones donde ambas respuestas se vean cercanamente optimizadas de manera simultánea.
- Encontrar regiones de insensibilidad al alejarse de las condiciones óptimas.
- Sugerir posibles leyes naturales apoyándose en la teoría del área de aplicación.

Tales dependencias factoriales se pueden entender mediante el análisis de las  $w'_i$ s, ya que como se comentó antes:

$$w_i = \mathbf{h}'_i \mathbf{x} = h_{i1}x_1 + \cdots + h_{ip}x_p$$

es decir que cada  $w_i$  es una combinación lineal de los factores experimentales. Así cada  $w_i$  puede ser interpretada de manera fundamental, apoyándose en la teoría a la mano, de acuerdo a los pesos ( $h_{ip}$ ) respecto a las  $x'$ s.

Por otra parte, resulta ser que la longitud del eje  $i$  de la superficie estimada, dado éste en la dirección del  $w_i$ , es proporcional a  $|\lambda_i|^{-\frac{1}{2}}$ . Así, atendiendo a la magnitud de los valores característicos, a mayor valor absoluto de  $\lambda_i$  menor la longitud del eje correspondiente y viceversa. Un  $\lambda_i$  muy grande respecto a los demás valores característicos indica que en la dirección correspondiente la superficie se adelgaza, con lo que en esa dirección la  $w_i$  sería una variable “fundamental” en la que alejándose del punto estacionario cambia mucho la respuesta. Por otra parte, una  $\lambda_i$  pequeña indica que la superficie de respuesta en la dirección del  $w_i$  correspondiente cambia muy gradualmente y al alejarse del punto estacionario en esa dirección poco se perderá en la respuesta, creando así una “cordillera de óptimos”.

**Ejemplo 9.3 (continuación)**

Interpretación del sistema descrito en las ecuaciones (9.17). El eje más grande de la superficie correspondiente a  $w_2 = 0.89x_1 + 0.45x_2$ , con lo que en esa dirección bajará el valor de la respuesta al crecer o decrecer conjuntamente los valores de los dos factores. El eje menor es en la dirección de  $w_1 = -0.45x_1 + 0.89x_2$ , que indica que bajará el valor de la respuesta en la medida que  $x_1$  suba y que  $x_2$  baje o viceversa. En la dirección del eje menor al alejarse del óptimo se tendrán caídas más rápidas en la respuesta que las mostradas al alejarse en la dirección del eje mayor.

El modelo ajustado y re - expresado es:

$$\hat{y} = \hat{y}_S - 0.225w_1^2 - 0.110w_2^2.$$

La magnitud de los coeficientes de los términos cuadráticos de las  $w_i$  se ven descritos en los ejes de la elipses concéntricas en la Fig. 9.4.

**9.6 Optimización de varias respuestas****9.6.1 Método de superposición de curvas de nivel**

En esta parte mostraremos mediante un ejemplo la utilidad de las curvas de nivel para determinar un óptimo común cuando existen dos respuestas medidas de manera simultánea. La idea es ajustar un modelo para cada una de las respuestas, enseguida se muestran las gráficas que describen las curvas de nivel de cada modelo. En éstas se podrán observar los óptimos individuales, posteriormente sobreponemos estas curvas de cada gráfica con el propósito de buscar un óptimo global para ambas respuestas.

**Ejemplo 9.4**

En un estudio a nivel de laboratorio se hace un experimento para encontrar condiciones adecuadas en las propiedades mecánicas de un plástico. En la elaboración del plástico se consideran dos factores, éstos son la polaridad de un solvente ( $X_1$ ) y el porcentaje de proteína ( $X_2$ ), otros factores tales como la temperatura, el tipo de plastificante y el pH se mantuvieron fijos. Se llevó a cabo un diseño central compuesto, en la Tabla 9.22 se presentan únicamente los valores codificados de los factores y las respuestas que miden la resistencia a la penetración ( $y_1$ ) y la elongación ( $y_2$ ) del plástico. Lo que se pretende es establecer un óptimo general para las respuestas.

$x_1$	$x_2$	Resistencia $y_1$	Elongación $y_2$
-1	-1	21	8.5
1	-1	15	13.4
-1	1	16	16.8
1	1	40	15.6
$-\sqrt{2}$	0	16	14.6
$\sqrt{2}$	0	21	15.8
0	$-\sqrt{2}$	13	9.3
0	$\sqrt{2}$	25	16.8
0	0	30	16.9
0	0	34	17.7
0	0	33	17.2
0	0	29	17

Tabla 9.22 Resultados del experimento en el Ejemplo 9.4

El modelo ajustado para la respuesta 1 es:

$$\hat{y}_1 = 31.5 + 3.13x_1 + 4.62x_2 - 5.44x_1^2 - 5.18x_2^2 + 7.5x_1x_2$$

el modelo es adecuado, no tiene falta de ajuste y tiene un coeficiente de determinación  $R^2 = 0.918$ , con un error estándar  $ES = 3.40$ . El valor óptimo es  $x_o = (1.19, 1.31)$  y es un máximo ( $\lambda_1 = -9.06, \lambda_2 = -1.56$ ) y  $\hat{y}_1(x_o) = 36.37$ . Las curvas de nivel de este modelo se describen a la izquierda en la Fig. 9.7, el punto  $x_o$  representa el óptimo.

De manera análoga para la respuesta 2 se tienen los resultados siguientes, el modelo ajustado es:

$$\hat{y}_2 = 17.2 + 0.68x_1 + 2.64x_2 - 1.14x_1^2 - 2.21x_2^2 - 1.53x_1x_2$$

el modelo es adecuado, no tiene falta de ajuste y tiene un coeficiente de determinación  $R^2 = 0.986$ , con un error estándar  $ES = 0.50$ . El valor óptimo es  $x_o = (-0.13, 0.64)$  y es un máximo ( $\lambda_1 = -2.61, \lambda_2 = -0.74$ ) y  $\hat{y}_2(x_o) = 18.0$ . Las curvas de nivel de este modelo se describen a la derecha en la Fig. 9.8, el punto  $x_o$  representa el óptimo.

A partir de las curvas de nivel para ambas respuestas en la Fig. 9.8 se puede notar que los puntos óptimos para ambas respuestas están separados. En la práctica, si el proceso se pone en el óptimo de la respuesta 1, entonces la elongación disminuye aproximadamente hasta 15. De manera similar si el proceso se adapta al óptimo en la respuesta 2, resulta que disminuye la resistencia a la penetración a 32.

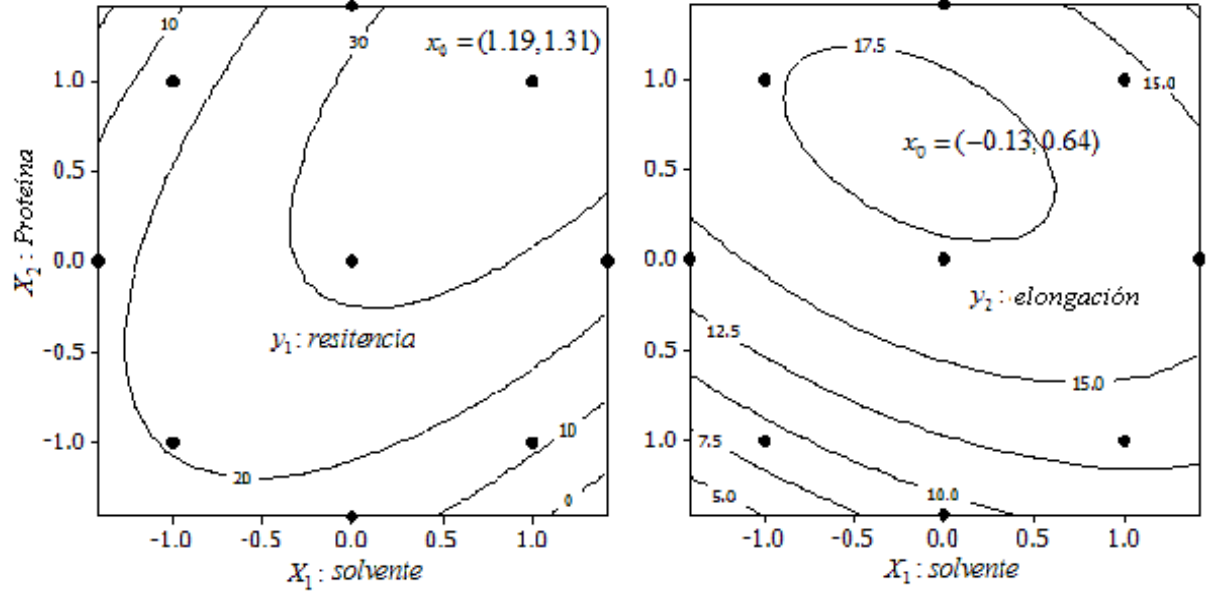


Fig. 9.7: A la izquierda curvas de nivel para  $y_1$  resistencia a la penetración y a la izquierda  $y_2$  elongación

### 9.6.2 Funciones de deseabilidad

Cuando se tienen tres o más respuestas la técnica de superposición puede no dar una idea clara de optimización conjunta. Existen varios métodos matemáticos para optimizar procesos con más de una respuesta, conocidos como métodos de optimización multirespuesta. Entre éstos están la función de distancia propuesto por Khuri y Colon (1981), la función de pérdida estudiado por Ames et. al. (1996) y la función de deseabilidad de cada variable respuesta que presentaron Derringer y Suich (1980).

Los métodos de optimización multirespuesta no necesariamente generan una solución óptima para cada respuesta individual, pero intentan cumplir con los requerimientos de cada respuesta “de la mejor manera posible”.

Si se tienen  $m$  variables respuestas, supongamos que se ajustaron modelos polinomiales de segundo orden en términos de  $p$  factores de control  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  (ya codificados),



$$\begin{aligned}
\hat{y}_1 &= \hat{\beta}_{01} + \sum_{i=1}^p \hat{\beta}_{i1} x_i + \sum_{i=1}^p \hat{\beta}_{ii1} x_i^2 + \sum_{i<j}^p \hat{\beta}_{ij1} x_i x_j \\
\hat{y}_2 &= \hat{\beta}_{02} + \sum_{i=1}^p \hat{\beta}_{i2} x_i + \sum_{i=1}^p \hat{\beta}_{ii2} x_i^2 + \sum_{i<j}^p \hat{\beta}_{ij2} x_i x_j \\
&\vdots \\
\hat{y}_m &= \hat{\beta}_{0m} + \sum_{i=1}^p \hat{\beta}_{im} x_i + \sum_{i=1}^p \hat{\beta}_{iim} x_i^2 + \sum_{i<j}^p \hat{\beta}_{ijm} x_i x_j.
\end{aligned} \tag{9.18}$$

tales que muestren ajustes adecuados en términos de  $R_{aj}^2$  altos y de no carencia de ajuste.

Aquí se presentará en cierto detalle el método de la función de deseabilidad de Derringer y Suich (1980). Es una propuesta que la mayoría de los paquetes estadísticos la incluyen tomando en cuenta su facilidad operativa y su alta eficiencia para encontrar un óptimo ad hoc, a través de especificar una función de deseabilidad para cada variable respuesta, por lo que las prioridades de la investigación experimental explícitamente se incluyen en el proceso de optimización simultánea.

### Ejemplo 9.5

Salcedo et al.(2002) llevaron a cabo un estudio para evaluar y optimizar el efecto del pH de extracción (7.8-9.2) y del pH de precipitación (4.3-5.7) en cuatro características para obtener aislados proteicos usando una variedad de semilla de amaranto. Los aislados proteicos se utilizan en pequeñas cantidades como ingredientes en la formulación de alimentos. La finalidad es optimizar este proceso para elevar el valor nutrimental de varios productos alimenticios elaborados a base de granos. Se desea obtener el máximo de las cuatro variables de respuesta, estas son el contenido de proteína (cp), índice de blancura (ib), empatía de transmisión (et) y temperatura de desnaturalización (td).

Después de realizar unos experimentos exploratorios, se propuso un diseño central compuesto. Los factores y sus niveles son:

Factores\Niveles		-1.41	-1	0	1	1.41
Extracción (pH)	$E(X_1)$	7.8	8.0	8.5	9.0	9.2
Precipitación (pH)	$P(X_2)$	4.3	4.5	5.0	5.5	5.7

Los resultados que se alcanzaron al realizar el experimento se muestran en la Tabla 9.23.

Tratamiento	Factor ( $x_1$ )	Factor ( $x_2$ )	$y_1$ :cp	$y_2$ :ib	$y_3$ :et	$y_4$ :td
1	-1	-1	81.26	26.90	2.66	100.23
2	1	-1	83.35	25.24	2.38	99.63
3	-1	1	78.26	24.29	6.32	99.20
4	1	1	81.72	18.12	6.73	99.43
5	-1.41	0	78.08	29.34	4.12	101.82
6	1.41	0	81.90	21.17	4.07	99.70
7	0	-1.41	80.30	30.10	1.55	99.39
8	0	1.41	78.00	27.27	6.85	99.71
9	0	0	75.82	28.34	3.21	99.82
10	0	0	75.93	27.68	3.21	99.82

Tabla 9.23 Respuestas de las cuatro variables en cada uno de los 10 tratamientos

El propósito es encontrar un óptimo común para las cuatro variables de respuesta. Los modelos - ver Tabla 9.24 - para el contenido de proteína y entalpía de transición resultaron significativos para un valor  $p < 0.01$ . El modelo para índice de blancura es significativo con un  $p < 0.05$  sin el término cuadráticos de la precipitación e interacción entre extracción y precipitación, además en este caso el coeficiente de determinación es  $R^2 = 0.73$  y no hay falta de ajuste. Observe que para la respuesta 2, los coeficientes de los factores precipitación y el cuadrático de la extracción apenas son significativos con un nivel de significancia descriptivo aproximado de 0.09. Aun ante esta situación, la significancia del modelo con  $p < 0.05$  y el  $R^2 = 0.73$  nos alcanza para el análisis de multi - respuesta aplicando la función de deseabilidad. Sin embargo, el modelo para la temperatura de desnaturalización es no significativo y ninguno de los factores tiene efecto. Para efectos del proceso un valor adecuado para este modelo es  $\hat{y}_4(x) \cong 100$ , por lo tanto este modelo no se incluye en la estimación de la función de deseabilidad.

Antes de estimar la deseabilidad global, conviene destacar algunas características que presentan en este ejemplo las variables de respuesta. El óptimo individual de la respuesta  $y_1$ :cp está en el punto  $(-0.29, 0.26)$  y éste es un mínimo  $y_1: (-0.29, 0.26) = 75.53$ , así que se puede usar la técnica de análisis de lomas para encontrar valores mayores para el contenido de proteína. La respuesta  $y_3$ :et también tiene un mínimo en  $(0.26, -1.68)$  y se observa que este punto está fuera de la región experimental,  $y_3: (0.26, -1.68) = 1.57$ . Nuevamente la técnica de lomas permitirá encontrar valores de interés para el experimentador. Para estas dos respuestas se puede aplicar la técnica de superposición para identificar un óptimo común. La respuesta  $y_2$  : ib (considerando todos los términos del modelo) tiene un punto óptimo máximo fuera de la región de experimental,

$y_2(-0.15, -1.55) = 29.53$ . Estas tres respuestas equivalen a los modelos de la expresión (9.18).

Factores\Variables	$y_1:\text{cp}^+$	$y_2:\text{ib}^{++}$	$y_3:\text{et}^+$	$y_4:\text{td}^\#$
Constante	75.88	28.01	3.21	99.82
Lineal				
$x_1$	1.37	-2.42	0.01*	-0.42*
$x_2$	-0.99	-1.72&	1.94	-0.10*
Segundo Orden				
$x_1^2$	2.45	-2.21&	0.54	0.34*
$x_2^2$	2.03	-0.50*	0.59	-0.27*
$x_1x_2$	0.34*	-1.13*	0.17*	0.21*
$R^2$	0.91	0.78	0.99	0.64

Tabla 9.24 Modelos significativos ( + ) para  $p < 0.01$ .y ( ++ ) para  $p < 0.05$  sin los coeficientes ( \* ). ( # ) Modelo no significativo  
 Coeficientes de regresión significativos para  $p < 0.05$  excepto ( \* )  
 y los coeficientes ( & ) son significativos para  $p < 0.1$

Los cuatro modelos ajustados se pueden evaluar en cualquier punto  $X = (x_1, x_2)$  de la región experimental y resultan 4 valores predichos para cada modelo, es decir:  $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3, \hat{y}_4$ .

### Cálculo de la función de deseabilidad

Un vez que se tienen los modelos ajustados adecuados se realiza el cálculo de la función de deseabilidad, en este caso considere como referencia la expresión (9.18). El siguiente paso es explicitar lo que el investigador desea por medio de una función  $d_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , los valores deseables de cada una de las variables respuesta; el valor de  $d_i$  estará en el intervalo  $[0, 1]$ , si  $d_i = 1$  cuando el valor de la respuesta  $i$ -ésima es lo más deseable, en cambio si  $d_i = 0$  se tiene un valor de la  $i$ -ésima respuesta no deseado.

Una función de deseabilidad puede especificarse con una o dos colas de deseabilidad, dependiendo de si la respuesta tiene un valor más deseable o si se desea maximizar o minimizar.

### Dos colas

Supongamos que un producto medido a través de la  $i$ -ésima variable respuesta, es aceptable si:

$$y_{LIE} < \hat{y}_i < y_{LSE}$$

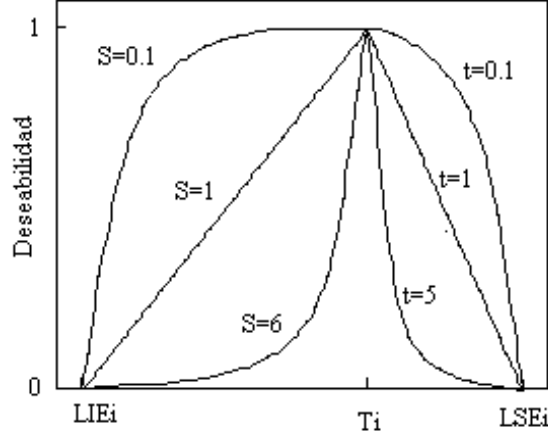


Fig. 9.8: Función de deseabilidad transformada en dos lados

$y_{LIE}$  límite de especificación inferior y  $y_{LSE}$  límite de especificación superior, y que en ese intervalo  $T_i$  es su valor más deseable. La cantidad  $d_i$ , se puede definir como:

$$d_i = \begin{cases} \left( \frac{\hat{y} - y_{LIE}}{T_i - y_{LIE}} \right)^s & y_{LIE} \leq \hat{y} \leq T_i \\ \left( \frac{\hat{y} - y_{LSE}}{T_i - y_{LSE}} \right)^t & T_i \leq \hat{y} \leq y_{LSE} \\ 0 & \hat{y} > y_{LSE} \text{ o } \hat{y} < y_{LIE} \end{cases} \quad (9.19)$$

donde  $s$  y  $t$  son exponentes que sirven para elegir la forma requerida de la deseabilidad. Los valores que se den a  $s$  y  $t$  se reflejan en la forma de la deseabilidad de cada respuesta. Si se toman grandes (digamos  $s, t \geq 10$ ) significa que la deseabilidad  $d_i$  sólo toma valores grandes cuando  $\hat{y}_i$  cae cerca de su valor objetivo. Si se toman valores pequeños para  $s$  y  $t$  ( $s, t \leq 0.1$ ) significa que cualquier valor de  $\hat{y}_i$  adentro del intervalo  $[LIE_i, LSE_i]$  es igualmente deseable. Finalmente, cuando no se tiene idea de grados de deseabilidad, se recomienda asignar el valor 1 a los exponentes, lo que sugiere un incremento lineal de la deseabilidad hacia el valor objetivo, Fig. 9.9.

### Una cola

Si la respuesta debe ser maximizada, pero se escoge un valor  $T_i$  tal que  $d_i = 1$  para cualquier  $\hat{y} > T_i$ . Supongamos además que cualquier  $\hat{y} < y_{LIE}$  es inaceptable, es

decir,  $d_i = 0$ . Entonces la función de deseabilidad está dada por:

$$d_i = \begin{cases} \left( \frac{\hat{y} - y_{LIE}}{T_i - y_{LIE}} \right)^s & \text{si } y_{LIE} \leq \hat{y} \\ 0 & \text{si } \hat{y} < y_{LIE} \end{cases} \quad (9.20)$$

Para el ejemplo 9.5 se requiere que las cuatro variables respuesta tengan un valor máximo. Considere la respuesta 1: contenido de proteína, un valor poco deseado es  $y_{LIE} = 70$  y un contenido de proteína mayor a  $T_i = 75$  es ideal. En este caso,  $d_1$  es:

$$d_1 = \begin{cases} \frac{\hat{y}_1 - 70}{75 - 70} & \text{si } y_{LIE} = 70 \leq \hat{y}_1 \\ 0 & \text{si } \hat{y}_1 < y_{LIE} = 70 \end{cases}$$

En el caso en que la respuesta deba ser minimizada y un valor  $T_i$  se selecciona de tal forma que si  $\hat{y} < T_i$ ,  $d_i = 1$ ; además  $y_{LSE}$  es valor a lo más considerado como aceptable. Así la función de deseabilidad está dada por:

$$d_i = \begin{cases} \left( \frac{\hat{y} - y_{LSE}}{T_i - y_{LSE}} \right)^s & \text{si } \hat{y}_i \leq y_{LSE} \\ 0 & \text{si } \hat{y}_i > y_{LSE} \end{cases} \quad (9.21)$$

### Optimización

Si se tienen  $m$  respuestas simultáneas por optimizar la deseabilidad global  $D$  que tome en cuenta a todas las variables respuesta a través de sus funciones de deseabilidad. El procedimiento propuesto por Derringer y Suich (1980) es maximizar  $D$  entendida como la media geométrica de  $d_1, d_2, \dots, d_m$ , es decir:

$$\max_{\mathbf{x}} D = \max_{\mathbf{x}} (d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_m)^{\frac{1}{m}} \quad (9.22)$$

mediante técnicas de optimización numérica.

Una generalización de la deseabilidad global es:

$$D = \left( d_1^{W_1} \times d_2^{W_2} \times \dots \times d_m^{W_m} \right)^{1/\sum W_i} \quad (9.23)$$

donde los pesos  $W_i$  son constantes que permiten balancear la importancia relativa de cada variable respuesta; mientras más grande es el peso dado a una variable en relación a las restantes, más grande será su peso en la optimización. Si todas son igualmente importantes,  $W_i = 1$  para  $i = 1, 2, \dots, k$ . Note que los exponentes  $s$  y  $t$  se pueden introducir como parte de los pesos  $W_i$ .

El punto de mayor deseabilidad es el punto  $\mathbf{x}'_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{p0})$  sobre el cual la función  $D$  es máxima (Derringer, 1994). Cabe decir que este método no toma en cuenta la aleatoriedad de  $\hat{y}_i$ , ni la calidad de los modelos, ni la habilidad del proceso para cumplir con las especificaciones. Por ello, se recomienda que una vez que haya sido encontrado  $\mathbf{x}$  que maximice a  $D$  se realicen corridas de confirmación.

**Ejemplo 9.6 (Aplicación de la función deseabilidad al ejemplo 9.5)**

Utilizando (9.22) se desea maximizar la deseabilidad en la región experimental común a las cuatro variables respuesta en el Ejemplo 9.9. Sin embargo, como se observó los modelos en la segunda y cuarta variable respuesta no resultaron estadísticamente significativos, y por ello se eliminaron del análisis de maximización de la deseabilidad. En las restantes variables respuesta el objetivo del investigador es maximizarlas y por ello se utilizará la expresión (9.20). En las columnas de la Tabla 9.25 se presentan las deseabilidades globales  $D$  en cada uno de los tratamientos, tanto los datos observados de las variables respuesta ( $D_O$ ) como en los datos predichos ( $D_P$ ) por cada uno de los modelos correspondientes.

Tratamiento	$y_1$ :cp	$y_2$ :ib	$y_3$ :et	$D_P$	$D_O$
1	81.26	26.90	2.66	0.338	0.389
2	83.35	25.24	2.38	0.335	0.396
3	78.26	24.29	6.32	0.458	0.540
4	81.72	18.12	6.73	0.804	0.875
5	78.08	29.34	4.12	0.454	0.381
6	81.90	21.17	4.07	0.688	0.620
7	80.30	30.10	1.55	0.115	0.0
8	78.00	27.27	6.85	0.602	0.538
9	75.82	28.34	3.21	0.048	0.0
10	75.93	27.68	3.21	0.048	0.068

Tabla 9.25 Cálculos de las función de deseabilidad predicha  $D_P$  y observada  $D_O$

Para fijar ideas, se presenta el cálculo de la función deseabilidad predicha y observada en el tratamiento 1. Los valores máximos y mínimos observados en el proceso son los que se usarán como referencia y estos son:

Valores	Mínimo	Máximo
$Y_1 : cp$	75.82	83.35
$Y_3 : et$	1.55	6.85

Las deseabilidades individuales para los valores predichos en las respuestas son:

$$d_1 = \frac{80.318 - 75.82}{83.35 - 75.82} = 0.597, \quad d_3 = \frac{2.562 - 1.55}{6.85 - 1.55} = 0.191.$$

De esta manera, la deseabilidad predicha para el primer tratamiento es:

$$D_P = (0.114)^{1/2} = 0.338.$$

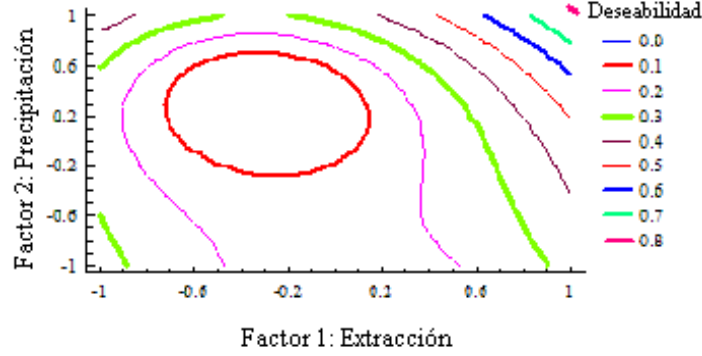


Fig. 9.9: Curvas de nivel para la función de deseabilidad

Las deseabilidades individuales para los valores observados en las respuestas son:

$$d_1 = \frac{81.26 - 75.82}{83.35 - 75.82} = 0.722, \quad d_3 = \frac{2.66 - 1.55}{6.85 - 1.55} = 0.209.$$

Así, la deseabilidad observada en el caso del tratamiento 1 es:

$$D_O = (0.151)^{1/2} = 0.389.$$

En este caso la  $D_P$  representa a las tres respuestas a la vez, y el objetivo es optimizar ésta para obtener máxima deseabilidad simultánea. Aplicando un algoritmo de optimización matemática se obtiene la máxima deseabilidad que es 1.0 y su valor correspondiente en la región experimental es el punto óptimo  $(x_1, x_2) = (1.309, 1.284)$ . Los valores de las respuestas 1 y 3 en el punto óptimo es  $y_1 : cp = 84.526$ , y  $y_3 : et = 7.886$ . Con el fin de completar la información, el valor en las otras dos respuestas evaluadas en el óptimo son  $y_2 : ib = 23.648$ ,  $y_4 : td = 99.82$ , ésta última representa su valor promedio.

También se puede encontrar el óptimo de esta función mediante las curvas de nivel, tal como se describe en la Fig. 9.10.

#### Ejemplo 9.7 (continuación Ejemplo 9.4)

En este ejemplo como se vio se desea maximizar ambas variables respuesta por lo que se utiliza la función de deseabilidad (9.20). Supongamos que para  $\hat{y}_1 < 13$  es inaceptable y  $T = 25$ ; para  $\hat{y}_2$  supongamos que  $\hat{y}_2 < 8.5$  es inaceptable y  $T = 14$ . Resolviendo el problema de optimización (9.22) se tiene que  $x_1 =$

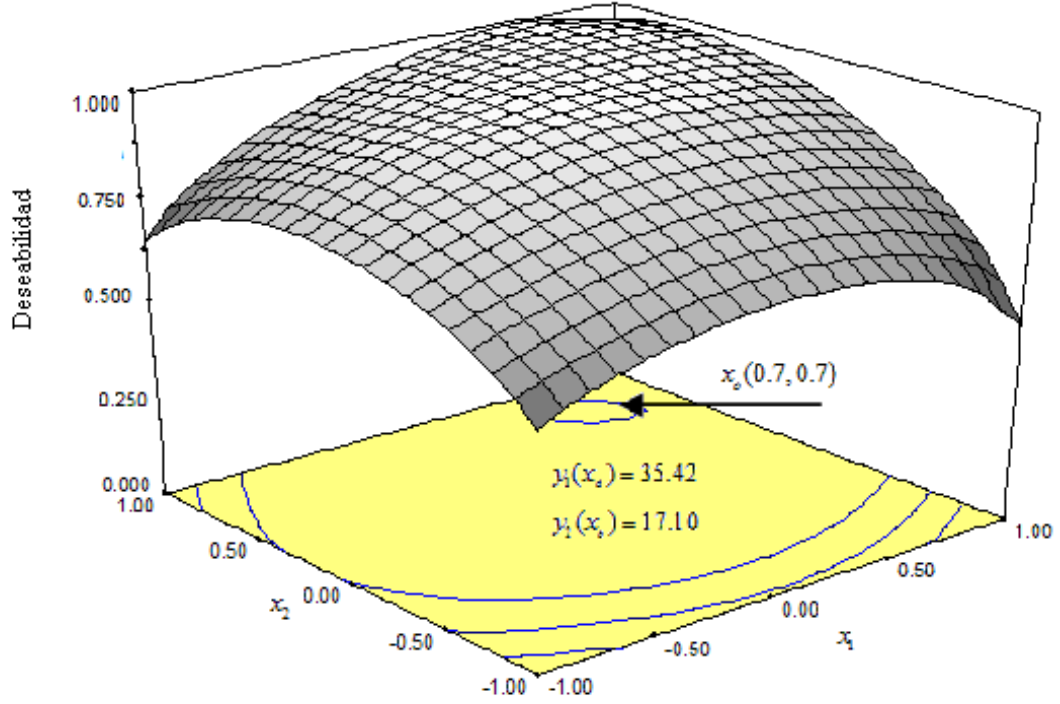


Fig. 9.10: Superficie y curvas de nivel para la función deseabilidad del Ejemplo 9.4

$0.7071$ ,  $x_2 = 0.7071$ , condiciones de optimalidad aproximada simultáneamente:  $x_o(0.7071, 0.7071)$ , los valores correspondientes para las respuestas en esos puntos son:  $y_1(x_o) = 35.42$  y  $y_2(x_o) = 17.1$ , Fig. 9.11. Las condiciones individuales de optimización eran para  $\hat{y}_1(1.19, 1.31)$  y para  $\hat{y}_2(-.13, .64)$ . Observando la Fig. 9.10 se puede apreciar el compromiso logrado a través de la optimización conjunta de ambas funciones de deseabilidad.

## 9.7 Optimización aplicada al diseño robusto

Vimos en el Capítulo 5 las ideas principales sobre el diseño robusto, en particular el diseño de parámetros que introdujo Taguchi (1986). Estas ideas se pueden considerar desde el punto de vista de la metodología seguida en este capítulo. Con referencia al doble arreglo ortogonal como se muestra en la Tabla 9.26, con la información experimental se ajustan por mínimos cuadrados los modelos de regresión para la media:  $\hat{y}_1 = \bar{y}$  y la varianza o desviación estándar:  $\hat{y}_2 = \ln S^2$ , éstos se expresan por:



$$\begin{aligned}\hat{y}_1 &= \hat{\beta}_0 + \mathbf{x}'\hat{\beta} + \mathbf{x}'\hat{B}\mathbf{x} \\ \hat{y}_2 &= \hat{\gamma}_0 + \mathbf{x}'\hat{\gamma} + \mathbf{x}'\hat{D}\mathbf{x}\end{aligned}\quad (9.24)$$

donde  $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_k)$   $k$  factores,  $\hat{\beta}_0$  la constante estimada,  $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_1, \dots, \hat{\beta}_k)'$  un vector de estimadores,  $\hat{B} = (\hat{\beta}_{11}, \dots, \hat{\beta}_{1k}, \hat{\beta}_{k1}, \dots, \hat{\beta}_{kk})$  matriz de estimadores de segundo orden,  $\hat{\gamma}_0$  la constante estimada,  $\hat{\gamma} = (\hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_k)$  un vector de estimadores,  $\hat{D} = (\hat{\gamma}_{11}, \dots, \hat{\gamma}_{1k}, \hat{\gamma}_{k1}, \dots, \hat{\gamma}_{kk})$  matriz de estimadores de segundo orden. El siguiente paso es optimizar ambas respuestas y por consiguiente se aplica las funciones de deseabilidad respectivas. Cabe notar que como regla general se desea que  $\hat{y}_2$  sea mínima. Una aplicación de este procedimiento se plantea en el Ejercicio 9.14.

			$Z_1$	$z_{11}$	$\dots$	$z_{r1}$	
			$\cdot$	$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	
			$Z_q$	$z_{1q}$	$\dots$	$z_{rq}$	
$X_1$	$\dots$	$X_k$					<i>Media</i> $\hat{y}_1 = \bar{y}$ $\hat{y}_2 = \ln S^2$
$x_{11}$	$\dots$	$x_{1k}$		$y_{11}$	$\dots$	$y_{r1}$	$\bar{y}_1$ $\ln S_1^2$
$\cdot$	$\dots$	$\cdot$		$\cdot$	$\dots$	$\cdot$	
$x_{n1}$	$\dots$	$x_{nk}$		$y_{n1}$	$\dots$	$y_{nr}$	$\bar{y}_n$ $\ln S_n^2$

Tabla 9.26. Estructura experimental en un arreglo doble ortogonal

### 9.7.1 Optimización en función de factores de ruido

Sin embargo, como fue mencionado en el Capítulo 5, una extensión relevante en esta dirección es considerar el modelo de regresión en función de factores de ruido. En ese sentido, usar un diseño experimental combinado como se muestra en la Tabla 9.27, resulta mucho más eficiente que el doble arreglo ortogonal porque se reducen de manera importante el número de pruebas experimentales - corridas. Además permite estudiar posibles efectos de interacción entre los factores de control y ruido.

$A$	$\dots$	$K$	$P$	$\dots$	$Q$	$y$
$x_{11}$	$\dots$	$x_{1k}$	$z_{11}$	$\dots$	$z_{1q}$	$y_{11}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_{n1}$	$\dots$	$x_{nk}$	$z_{n1}$	$\dots$	$z_{nq}$	$y_{n1}$

Tabla 9.27. Arreglo experimental combinado de factores de control y ruido

Los datos que se generan al llevar a cabo esta segunda estrategia experimental permiten obtener un modelo en función de los factores de control y ruido, éste se puede representar por una expresión como la que sigue:

$$y = \gamma_0 + \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{z}'\boldsymbol{\delta} + \mathbf{x}'\boldsymbol{\Theta}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\boldsymbol{\Delta}\mathbf{z} + \varepsilon, \quad (9.25)$$

donde  $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_k)$   $k$  factores de control,  $\mathbf{z}' = (z_1, \dots, z_q)$   $q$  factores de ruido,  $\gamma_0$  una constante, los vectores de los parámetros  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ ,  $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \dots, \delta_q)$ .  $\boldsymbol{\Theta} = (\beta_{11}, \dots, \beta_{1k}, \beta_{k1}, \dots, \beta_{kk})$  y  $\boldsymbol{\Delta} = (\delta_{11}, \dots, \delta_{1q}, \dots, \delta_{k1}, \dots, \delta_{kq})$  son las matrices de parámetros de segundo orden, y  $\varepsilon \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ . Bajo el supuesto de que  $\mathbf{z}$  es una vector aleatorio con media cero ( $E(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ ), y  $Var(\mathbf{z}) = \mathbf{V} = diag(\sigma_z^2)$ .

Para tener modelos equivalentes a los de la expresión (9.24) se calcula la esperanza y la varianza de la expresión (9.25), esto es:

$$E(y) = \gamma_0 + \mathbf{x}'\boldsymbol{\beta} + \mathbf{x}'\boldsymbol{\Theta}\mathbf{x} \quad (9.26)$$

y

$$Var(y) = (\boldsymbol{\delta} + \mathbf{x}'\boldsymbol{\Delta})'V(\boldsymbol{\delta} + \mathbf{x}'\boldsymbol{\Delta}) + \sigma_\varepsilon^2. \quad (9.27)$$

En este caso  $y_1$  y  $y_2$  representan a  $E(y)$  y  $\ln(Var(y))$  respectivamente. Por mínimos cuadrados se ajusta el modelo (9.25), se tienen los estimados  $\hat{y}_1 = \hat{E}(y)$  y  $\hat{y}_2 = \widehat{\ln Var(y)}$ . Un mínimo para la respuesta  $\hat{y}_2$ , se tiene cuando:

$$\hat{\boldsymbol{\delta}} + \mathbf{x}'\hat{\boldsymbol{\Delta}} = 0 \quad (9.28)$$

La idea es buscar un óptimo común para la media y la varianza.

### Ejemplo 9.6

En proceso de densificación mecánica ofrece la posibilidad de utilizar residuos agrícolas en la elaboración de alimento para ganado. Con el propósito de encontrar los factores que reduzcan el efecto del consumo de energía del proceso; se realizó un experimento con un diseño factorial  $2^4$ , se consideraron tres factores de control: la humedad, presión y tamaño de partícula y un factor de ruido: la temperatura. Los factores y sus niveles se muestran en la Tabla 9.28.

Factores y Niveles	Nivel uno (-1)	Nivel dos (1)
$x_1$ : Humedad (%)	10	22
$x_2$ : Presión (MPa)	30	90
$x_3$ : Tamaño de partícula (pulg)	1/8	3/4
$z$ : Temperatura $^{\circ}C$	Ambiente	100

Tabla 9.28 Factores y niveles en el experimento

Se realizó el experimento con los resultados presentados en la Tabla 9.29.

Trat	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$z$	$y$
1	-1	-1	-1	-1	18.14
2	1	-1	-1	-1	25.64
3	-1	1	-1	-1	18.36
4	1	1	-1	-1	24.15
5	-1	-1	1	-1	17.27
6	1	-1	1	-1	19.71
7	-1	1	1	-1	17.38
8	1	1	1	-1	20.83
9	-1	-1	-1	1	15.32
10	1	-1	-1	1	17.4
11	-1	1	-1	1	14.88
12	1	1	-1	1	17.58
13	-1	-1	1	1	22.16
14	1	-1	1	1	20.01
15	-1	1	1	1	21.65
16	1	1	1	1	20.69

Tabla 9.29 Diseño combinado de factores de control y ruido

Se ajustó por mínimos cuadrados el modelo (9.25) y se obtuvo:

$$\hat{y}_{xz} = 19.45 + 1.3x_1 + 0.5x_3 - 0.74z - 0.96x_1x_3 - 1.09x_1z + 1.9x_3z \quad (9.29)$$

Un modelo significativo con  $p = 0.0004$ , el cuadrado medio del error sin el factor 2 que no resultó significativo es:  $CM_{error} = 0.2507$  y con  $R^2 = 0.98$ . Se aplica la ecuación (9.26) al modelo anterior y se tiene:

$$E(\hat{y}) = 19.45 + 1.3x_1 + 0.5x_3 - 0.96x_1x_3 \quad (9.30)$$

Con el supuesto de que  $\sigma_z^2 = Var(z) = 1$ , la varianza de  $\hat{y}$  se tiene con la expresión (9.27) para este modelo es:

$$Var(\hat{y}) = \sigma_z^2(-0.74 - 1.09x_1 + 1.9x_3)^2 + 0.2507 \quad (9.31)$$

El objetivo es encontrar un óptimo común para las expresiones (9.30) y (9.31) en este caso mínimo para ambas respuestas. Considere  $\hat{y}_1 = E(\hat{y}_{xz})$  y  $\hat{y}_2 = Var(\hat{y}_{xz})$ , aplicando la función de deseabilidad para estos modelos con  $\hat{y}_{1LIE} = 15$ , y  $\hat{y}_{2LIE} = 0.5$ , se tiene que una solución mínima común en  $x_o = (-1, -1)$ , los valores óptimos son:  $\hat{y}_1(x_o) = 16.69$  y  $\hat{y}_2(x_o) = 1.56$ .

### Caso sin réplicas modelando los residuales.

En este último esquema experimental se pueden presentar casos en los que no existan factores de ruido o que no haya réplicas. Ante esa situación el modelo para  $\hat{Y}_2$  se propone  $\hat{Y}_2 = \log(abs(Y_{1i} - \hat{Y}_{1i}))$ , Chan y Mak (1995), donde  $Y_{1i}$  los son los resultados experimentales de cada tratamiento.

Los objetivos que comúnmente se plantean en la estrategia experimental son:

- Encontrar valores (niveles) de  $x_1, \dots, x_k$  en una región  $R_x$  que produzcan condiciones de operación óptimas, es decir que  $y$  alcance un valor máximo (mínimo). Es importante en la industria saber qué tan cerca está  $y$  de un valor objetivo o nominal  $T$  “ideal”, éste es determinado por el desarrollo tecnológico y características del proceso.
- Por otro lado, es importante minimizar la varianza en torno a esa respuesta óptima o valor objetivo. Para ello, es necesario estudiar los factores  $z_1, \dots, z_q$  en una región  $R_z$ .

#### 9.7.2 Esperanza de $(y - T)^2$

En un proceso es muy deseable que la respuesta  $y$  esté lo más cerca posible a un valor de referencia  $T$ , en esta situación si se aplica la esperanza a  $(y - T)^2$  se tiene un resultado interesante como el siguiente:

$$E(y - T)^2 = Var(y) + (E(y) - T)^2$$

esta relación también conocida como criterio de pérdida del error cuadrado y cuyo objetivo es optimizar esta expresión se tiene cuando se minimiza la varianza y la media tiende al valor objetivo  $T$ . El modelo matemático para optimizar esta esperanza se describe para tres situaciones diferentes como:

$$\left| \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \hat{Y}_2 \\ \text{Sujeto a} & \hat{Y}_1 = T \\ & X \in R \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \hat{Y}_1 \\ \text{Sujeto a} & \hat{Y}_2 = \sigma_0^2 \\ & X \in R, \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \hat{Y}_1 \\ \text{Sujeto a} & \hat{Y}_2 = \sigma_0^2 \\ & X \in R, \end{array} \right|$$

## 9.8 Ejercicios

**Ejercicio 9.1** En un estudio experimental realizado en un laboratorio no cuentan con un paquete estadístico para analizar los resultados del experimento. Pero se sabe que usted tiene habilidad para calcular los efectos para la variable solución  $X_1$  en dos niveles y el tiempo de reacción  $X_2$  en tres niveles, así que se le solicita estime los efectos que se piden a continuación. En la columna uno se da

la respuesta (característica de calidad) y en las siguientes columnas los niveles codificados de las variables.

1. Estime gráficamente el efecto del factor  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_{22}$ .
2. Indique gráficamente si la variable dos tiene efecto de variabilidad.

$x_1$	$x_2$	$y$
-1	-1	5.23
-1	-1	6.42
1	-1	1.38
1	-1	1.94
-1	0	11.57
-1	0	12.16
1	0	5.72
1	0	4.69
-1	1	12.68
-1	1	13.31
1	1	8.28
1	1	7.73

### Ejercicio 9.2

1. Se decide que usted tienen que realizar un estudio exploratorio para encontrar la región experimental en un nuevo producto, se realiza un diseño factorial  $2^2$  con dos réplicas, el modelo encontrado y que se ajusta adecuadamente es el siguiente:

$$\hat{y} = 42.875 + 10.38X_1 + 5.86X_2$$

Concentración	$X_1$	3%	5%
Tiempo	$X_2$	10	15

Indique cuál es la trayectoria ascendente, si se requiere incrementar el rendimiento para ese nuevo producto. Si se propone un incremento en la concentración de  $\Delta X_1 = 0.5\%$  ¿cuánto variará el tiempo?

2. Dada la función de respuesta:

$$Z = 72.0 + 3.6x_1 - 2.5x_2$$

Trace una gráfica de contornos de la respuesta y en el plano  $(x_1, x_2)$ .

Trace la trayectoria optimizante generada por esta función.

**Ejercicio 9.3** Un experimentador inicia un procedimiento considerando dos variables  $(X_1, X_2)$  en el punto central  $(90, 20)$  y efectúa cinco ensayos con los resultados anotados:

$X_1$	80	100	80	100	90
$X_2$	10	10	30	30	20
$y$	11	0	29	6	12

codifique las variables  $(X_1, X_2)$  y ajuste un modelo de primer orden a las datos. Determine la dirección de escalamiento ascendente. El experimentador realiza seis ensayos más:

$X_1$	64.5	47.5	39	30.5	43.25	34.75
$X_2$	38	50	56	62	53	59
$y$	43	58	72	62	65	68

¿Cuál de estos puntos está en la trayectoria ascendente determinada anteriormente? El experimentador decide hacer la siguiente combinación y las realiza:

$X_1$	43.25	34.75	34.75	43.25	39	39	39	39
$X_2$	53	59	53	59	56	56	56	56
$y$	65	68	71	68	71	72	72	73

Ajuste este modelo a los ocho ensayos y use las observaciones replicadas para probar la falta de ajuste. Evalúe con una gráfica el modelo con las ocho corridas. ¿Qué le recomendaría usted al experimentador para los siguientes pasos a realizar? ¿Va en una nueva dirección el escalamiento ascendente? ¿Se ajusta un modelo de segundo orden?

**Ejercicio 9.4** Con referencia al ejemplo 9.3:

- Encuentre el valor óptimo  $x_s$  y los valores correspondientes en la escala original de los factores en ese punto.
- Encuentre los valores propios y la ecuación canónica correspondiente.

**Ejercicio 9.5** El experimento realizado en una industria de plástico tiene por meta incrementar el rendimiento de la producción considerando el tiempo y la temperatura del proceso. Se realizó un experimento central compuesto, el siguiente modelo se ajustó adecuadamente con un coeficiente de determinación  $R^2 = 0.92$ . El modelo es:

$$\hat{y} = 82.17 - 1.01x_1 - 8.61x_2 + 1.40x_1^2 - 8.76x_2^2 - 7.2x_1x_2$$

los valores codificados se representan por las siguientes expresiones:

$$x_1 = \frac{(tiempo(hr) - 12)}{8} \quad x_2 = \frac{(temp(^{\circ}C) - 250)}{30}$$

Los valores característicos son:

$$\lambda_1 = -9.91 \quad \lambda_2 = 2.55$$

el valor crítico:

$$X_S = (-0.439, -0.311), \quad \text{con } \hat{y}_S = 83.73$$

$$\hat{y} = 83.73 - 9.91w_1^2 + 2.55w_2^2$$

Un amigo de esa industria le pide una asesoría para encontrar un valor de  $x_1$  y  $x_2$  que aumente el rendimiento ¿cómo le ayudaría? Recuerde que  $\mathbf{x}'\mathbf{x} \leq \mathbb{R}^2$ . La matriz de vectores característicos es:  $\begin{pmatrix} -.303 & -.953 \\ -.953 & 0.303 \end{pmatrix}$ , escriba la relación entre las variables  $w$  y las codificadas.

**Ejercicio 9.6** Un amigo en una universidad realizó un experimento para probar unas películas de plástico con la finalidad de estudiar sus propiedades en la envoltura de alimentos. Él estudió la dureza y la elasticidad de ese plástico, los modelos 1 y 2 describen los resultados. Él solicita que se encuentre un óptimo común si la dureza debe estar entre 1.2 y 1.4 unidades, y la elasticidad debe ser máxima. Usted le puede auxiliar usando las curvas de nivel que describen los modelos, las ecuaciones de estas curvas se dan a continuación:

Modelo 1:

$$\hat{y}_1 = 1.53 - 0.57x_1 - 0.52x_2 + .32x_1x_2 - 0.17x_1^2 - 0.1x_2^2$$

Información del reporte estadístico:

$R^2 = 0.95$ . No se rechaza la hipótesis nula: el modelo se ajusta adecuadamente con  $\alpha = 0.01$ . Todos los coeficientes de regresión son significativos. Los valores característicos son:

$$\lambda_1 = -0.30 \quad \lambda_2 = 0.03$$

Modelo 2:

$$\hat{y}_2 = 1.78 - 0.25x_1 - 0.08x_2 - 0.16x_1^2 - 0.08x_2^2$$

Información del reporte estadístico:

$R^2 = 0.98$ . No se rechaza la hipótesis nula: el modelo se ajusta adecuadamente con  $\alpha = 0.05$ . No es significativo el efecto de interacción. Los valores característicos son:

$$\lambda_1 = -0.18 \quad \lambda_2 = -0.08$$

**Ejercicio 9.7** En un proceso se tienen como factores principales  $x_1$  el voltaje y  $x_2$  el tiempo de función. Se evalúa el rendimiento ( $y$ ) del equipo. El diseño que se utilizó es uno central compuesto con dos replicaciones y los resultados se muestran enseguida:

Voltaje	Tiempo	$x_1$	$x_2$	$y(rep1)$	$y(rep2)$
50	150	-1	-1	7.5	8.1
120	150	1	-1	12.4	11.8
50	250	-1	1	13.6	12.4
120	250	1	1	16.5	15.3
13.5	200	$-\sqrt{2}$	0	8.6	9.4
134.5	200	$\sqrt{2}$	0	14.2	12.6
85	12.9	0	$-\sqrt{2}$	7.9	7.3
85	271	0	$\sqrt{2}$	16.5	17.4
85	200	0	0	15.7	17

1. Ajuste un modelo de segundo orden para las variables codificadas y realice el análisis correspondiente con la tabla del ANDEVA.
2. Prueba la falta de Ajuste del Modelo en 1.
3. Determine las coordenadas del punto crítico y determine su naturaleza.
4. Para qué valores del voltaje y tiempo se obtiene la respuesta máxima.

**Ejercicio 9.8** El modelo que obtuvo un experimentador es el siguiente:

$$Y = 80 + 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_1^2 + 0.1x_2^2 + x_1x_2$$

Justifique que el punto crítico es un punto silla, ¿cuál es el valor de  $Y$  en el punto crítico? Encuentre un valor de  $x_1$  y  $x_2$  si se desea un valor mayor de la respuesta, evalúe  $Y$  en estos valores de  $x_1$  y  $x_2$ .



**Ejercicio 9.9** En una empresa se determina el siguiente modelo para la producción (%):

$$Y_p = 82 + 4x_1 + 8x_2 - 5x_1^2 - 9x_2^2 - 4x_1x_2$$

también se modela el costo de producción en pesos (por 10 en unidad producida):

$$Y_c = 80 + 4x_1 + 8x_2 + 2x_1^2 - 12x_2^2 - 12x_1x_2$$

Encuentre un óptimo común usando las curvas de nivel sobrepuestas. En qué valores se debe operar el proceso si se desea que la producción no sea menor de 80% y el costo no sea mayor de 74 (740) pesos.

**Ejercicio 9.10** (Box y Draper, 1987) Se desea estudiar el tiempo de falla (ciclos) de un equipo, se sabe teóricamente que la relación de falla es ciclo de  $falla = k\varphi_4^{-5}\varphi_3^{-3}$ . El diseño efectuado es un  $3^3$ ; siguiendo el orden estándar de este diseño se dan las respuestas: 674, 1414, 3636, 338, 1022, 1568, 170, 442, 1140, 370, 1198, 3184, 266, 620, 1070, 118, 332, 884, 292, 634, 2000, 210, 438, 566, 90, 220, 360.

$\varphi_1 = \text{longitud(mm)}$	$\varphi_2 = \text{amplitud de carga(mm)}$	$\varphi_3 = \text{carga(g)}$
$x_1 = \frac{\varphi_1 - 300}{90}$	$x_2 = \frac{\varphi_2 - 9}{1}$	$x_3 = \frac{\varphi_3 - 45}{5}$

Ajuste el modelo:

$$Y = \log Y = \gamma + \gamma_1 \log \varphi_3 + \gamma_2 \log \varphi_4 + \varepsilon$$

donde  $\varphi_4 = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}$  y pruebe la hipótesis

$$H_0 : \gamma_1 = -3, \gamma_2 = -5$$

contra la alternativa  $H_1$ : no se satisface  $H_0$ . ¿Esto justifica el modelo teórico descrito anteriormente?

**Ejercicio 9.11** Un estudiante quiere averiguar el rendimiento de germinación de una semilla, en el laboratorio somete las semillas a un proceso donde intervienen el tiempo ( $X_1$ ) en un rango 30 a 40 minutos, la temperatura ( $X_2$ ) entre 150 y 160 °C, la concentración de hipoclorito de sodio la deja fija al 0.30. Después pone a germinar las semillas en unas charolas apropiadas, el porcentaje obtenido en el estudio inicial se representa en la siguiente tabla, las variables tiempo y temperatura están codificadas.

$x_1$	$x_2$	$y$
-1	-1	37.8
1	-1	38.5
-1	1	39.4
1	1	40.0
0	0	38.8
0	0	39.0
0	0	39.2
0	0	38.7
0	0	39.1

1. Escriba el modelo, pruebe la hipótesis de falta de ajuste.

Con esta información y el modelo el estudiante aplicó la técnica de escalamiento ascendente para aumentar el rendimiento de germinación, una vez que encontró un cambio en el crecimiento de la respuesta consideró una nueva región experimental (el tiempo entre 80 y 90 y la temperatura entre 170 y 180), en ésta realizó un nuevo experimento, los datos obtenidos de esta nueva situación son:

$x_1$	$x_2$	$y$
-1	-1	77.6
1	-1	78.2
-1	1	79.1
1	1	80.4
0	0	80.5
0	0	80.7
0	0	80.5
0	0	81.1
0	0	80.8

1. Pruebe las hipótesis de falta de ajuste, ¿cómo interpreta su respuesta?
2. En el menú de resultados estadísticos del paquete se encuentra el de curvatura, ese valor comparado con sus resultados de la tabla del ANDEVA, ¿qué le indica?

Considerando la última región propuesta el estudiante llevó a cabo un experimento central compuesto  $2^k + 2k + n_o$  (factorial, más pruebas en los ejes y replicaciones al centro) con los siguientes resultados:

77.4, 79.2, 78.1, 80.6, 76.4, 79.4, 78, 79.9, 81.9, 81.5, 81.5, 81.7, 82.

1. Estime el modelo y determine las condiciones óptimas para este estudio.

**Ejercicio 9.12** Se realiza un estudio con el propósito de medir qué efecto tiene un ablandador de carne sobre la pérdida de peso en cada bistec, éstos tienen los mismos pesos iniciales (precocidos). Los factores principales  $X_1$  el tiempo de cocimiento y  $X_2$  la temperatura de cocimiento. Se evalúa la pérdida de peso ( $y$ ) en gramos. El experimento se llevó a cabo empleando un diseño central compuesto con dos replicaciones y los resultados se muestran enseguida:

Temp	Tpo	$y_1$	$y_2$
-1	-1	4.26	3.68
1	-1	1.34	1.98
-1	1	1.10	1.63
1	1	1.02	1.28
$-\sqrt{2}$	0	2.64	2.19
$\sqrt{2}$	0	1.39	2.11
0	$-\sqrt{2}$	3.49	3.44
0	$\sqrt{2}$	1.51	1.59
0	0	3.26	3.76
0	0	3.22	3.17
0	0	3.84	3.55
0	0	3.06	3.29
0	0	3.49	3.28

1. Ajuste un modelo de segundo orden para las variables codificadas y realice el análisis correspondiente con la tabla del ANDEVA.
2. Pruebe la falta de Ajuste del Modelo en 1.
3. Determine las coordenadas del punto crítico y determine su naturaleza.
4. ¿Para qué valores del tiempo y temperatura se obtiene la respuesta máxima?

**Ejercicio 9.13** En una planta química se produce una sustancia que se empleará para la manufactura de vinílico, los factores que influyen en la pureza de esta sustancia son la temperaturas (temp) de la torre y la presión. Con los datos que se proporcionan en la siguiente tabla:

1. Proporcione el modelo lineal para explicar la pureza de la sustancia.
2. Plantee las hipótesis para verificar la falta de ajuste y haga la prueba.
3. Haga una evaluación del modelo.

4. Determine la trayectoria optimizante.

Temp ( $X_1$ )	Presión ( $X_2$ )	Pureza ( $y$ )
150	1.1	82.8
190	1.1	84.7
150	1.3	83.5
190	1.3	85
170	1.2	84.1
170	1.2	84.5
170	1.2	83.9
170	1.2	84.3

**Ejercicio 9.14** Con el objeto de reducir el tiempo de cocción (ahorro de gas) de una variedad de frijol, se usaron como factores una concentración de bicarbonato de sodio  $\text{NaHCO}_3$  (% PV) y una concentración de cloruro de sodio  $\text{NaCl}$  (% PV), el tiempo de remojo se dejó fijo en ocho horas. Los datos reportados son:

$\text{NaHCO}_3$ ( $X_1$ )	$\text{NaCl}$ ( $X_2$ )	Tiempo
-1	-1	54
1	-1	32
-1	1	45
1	1	47
1.4142	0	53
-1.4142	0	50
0	1.4142	51
0	-1.4142	47
0	0	40
0	0	42
0	0	44
0	0	39
0	0	41

1. Proponga el modelo que mejor explique la respuesta.
2. Obtenga el óptimo y explique su naturaleza.
3. Con sus resultados que puede sugerir.

**Ejercicio 9.15** Un diseño de Box - Behnken se utilizó para evaluar un proceso químico, el número de impurezas generadas por el proceso tienen que ver con tres factores temperatura ( $x_1$ ), concentración de un catalizador ( $x_2$ ), y la función

de un agente ( $x_3$ ). En este proceso se consideraron dos factores de ruido un reagente químico ( $z_1$ ) proporcionado por una empresa y el tipo de limpieza ( $z_2$ ) de las columnas de destilación. Así que se realizó un doble arreglo ortogonal que consiste en el diseño Box - Behnken y un factorial  $2^2$ . En la tabla se muestran los resultados para la respuesta promedio de impurezas (se desea que tenga un valor mínimo) y la desviación estándar.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$z_1$ :-1	1	-1	1	$\bar{y}_i$	$S_i$
			$z_2$ :-1	-1	1	1		
-1	-1	0	57.81	37.29	47.07	42.87	46.26	8.68
1	-1	0	24.89	4.35	14.69	8.23	13.04	8.98
-1	1	0	13.21	9.21	11.19	10.10	11.00	1.63
1	1	0	13.39	9.15	11.23	10.30	11.02	1.80
-1	0	-1	27.71	20.24	24.32	22.28	23.64	3.19
1	0	-1	11.40	4.48	8.23	5.44	7.39	3.11
-1	0	1	30.65	18.40	24.45	20.24	23.49	5.44
1	0	1	14.94	2.24	8.49	5.44	7.51	5.59
0	-1	-1	42.68	22.42	30.30	21.64	29.26	9.76
0	1	-1	13.56	10.08	11.38	9.85	11.22	1.70
0	-1	1	50.60	13.19	30.97	18.84	28.4	16.55
0	1	1	15.21	7.44	11.82	9.78	11.06	3.29
0	0	0	19.62	12.29	14.54	13.14	14.9	3.28
0	0	0	20.60	11.49	13.49	12.06	14.41	4.21
0	0	0	20.15	12.20	13.89	14.06	15.08	3.49

1. Haga un estudio descriptivo preliminar para identificar el menor valor de impurezas con la menor variación.
2. Escriba el modelo de segundo orden completo para la media.
3. Haga la evaluación estadística del modelo estimado en el punto anterior y encuentre el valor óptimo para la media.
4. Escriba el modelo de segundo orden completo para la desviación estándar. Encuentre el valor óptimo para la desviación estándar.
5. Indique en qué punto se tiene una menor cantidad de impurezas, ayúdese con las curvas de nivel.
6. Determinar el valor óptimo del proceso considerando la menor cantidad de impurezas y menor variabilidad.

7. Considere el diseño como un factorial completo, el BB combinado con los niveles de los factores de ruido, ver Capítulo 5, apartado 5.10.4. Para homogeneizar la notación referirse a los de control con  $x$ ; a los factores de ruido con  $z$ .
8. A partir de este esquema, ahora puede detectar los efectos de interacción entre los factores de control y ruido. Encuentre el mejor modelo de segundo orden en función de los factores de control y ruido, pero además agregue los términos  $z_1x_2^2$  y  $z_1x_3^2$ , ¿qué observa? Idea: escriba el modelo:

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \mathbf{x}'\hat{\boldsymbol{\beta}} + \mathbf{x}'\hat{\mathbf{B}}\mathbf{x} + \hat{\gamma}_0 + \mathbf{z}'\hat{\boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{z}'\hat{\mathbf{D}}\mathbf{x}$$

donde  $\mathbf{x}' = (x_1, x_2, x_3)$ ;  $\mathbf{z}' = (z_1, z_2)$ ,  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  y  $\hat{\boldsymbol{\gamma}}$  son los estimadores de los parámetros de primer orden para los factores de control y ruido respectivamente.  $\hat{\mathbf{B}}$  y  $\hat{\mathbf{D}}$  son los estimadores de los parámetros de segundo orden para los factores de control y ruido. Suponga que  $\mathbf{z}$  es una variable aleatoria con esperanza  $E(\mathbf{z}) = 0$ , y  $Var(\mathbf{z}) = \Sigma_z$ .

- (a) Determine la esperanza de este modelo  $\hat{y}$  y optimice el modelo.
  - (b) Encuentra la varianza de este modelo  $\hat{y}$  y optimice el modelo.
  - (c) Encuentre el óptimo común para la media y la varianza.
9. Haga el análisis descriptivo mediante curvas, fije los valores de  $z_1$  y  $z_2$  donde considere que son más adecuados. Justifique su consideración.

**Ejercicio 9.16** Se realizó un estudio en un laboratorio con la finalidad de optimizar el índice de absorción de agua en la elaboración de hojuelas de trigo. Después de un trabajo previo de identificación de factores, el ingeniero consideró tres factores descritos aquí como  $X_1$ ,  $X_2$ , y  $X_3$ , el esquema experimental es un diseño central compuesto  $2^3 + 2(3) + n_0$ , es decir:

Trat	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$y$
1	-1	-1	-1	11.28
2	1	-1	-1	8.44
3	-1	1	-1	13.19
4	1	1	-1	7.71
5	-1	-1	1	8.94
6	1	-1	1	10.9
7	-1	1	1	11.85
8	1	1	1	11.03
9	$-\alpha$	0	0	8.26
10	$\alpha$	0	0	7.87
11	0	$-\alpha$	0	12.08
12	0	$\alpha$	0	11.06
13	0	0	$-\alpha$	7.98
14	0	0	$\alpha$	10.43

$n_o = 6$ , repeticiones al centro:  
10.14, 10.22, 10.53, 9.50, 11.53, 11.02

siguiendo el orden acostumbrado, la respuesta  $y$ :

Región de operación original.

Factores\Niveles	-1	1
$X_1$	2.03	5.21
$X_2$	1.07	2.49
$X_3$	1.35	3.49

Obtenga el reporte estadístico al ajustar un modelo de segundo orden y optimizar ese modelo. Con esa información conteste las siguientes preguntas:

1. Si el punto estrella  $\alpha = \sqrt{3}$ , encuentre el valor original de la variable  $X_3$ .
2. Plantee el modelo para los parámetros más significativos.
3. Evalúe e interprete el modelo. Justifique sus respuestas.
4. Plantee y desarrolle la prueba de hipótesis sobre el parámetro  $\beta_{11}$
5. Determine el valor óptimo de la respuesta.
6. Construya la ecuación (9.14) e interprete su naturaleza. Bajo esta situación diga dónde se encuentra la respuesta máxima.

7. ¿Qué variable cambia más rápido su valor? Explique en qué se basa para tomar su decisión.
8. ¿Cuál es el valor codificado de las variables en el tratamiento 10 ?
9. Encuentre el valor residual para el tratamiento 10.
10. ¿Cuál es la importancia de verificar si en un modelo existe falta de ajuste?

Información: el punto crítico o el valor de  $x$  que determinan las mejores condiciones de operación son:

$$x_0 = (-0.39, -0.17, -0.36)$$

los valores característicos son:

$$(-1.17, 0.65, 0.13)$$

**Ejercicio 9.17** En el desarrollo de una llanta, se consideran tres ingredientes  $X_1$  : nivel de sílica hidratado,  $X_2$  : nivel de un agente de selenio,  $X_3$  : nivel de azufre, es decir:

	Nivel bajo	Nivel alto
$X_1$	0.7	1.7
$X_2$	40	60
$X_3$	1.8	2.8

Las propiedades que se consideran con sus respectivas restricciones son las siguientes:

Respuestas	Restricciones
$Y_1$ : Índice de abrasión	$120 < Y_1$
$Y_2$ : Módulo 200	$1000 < Y_2$
$Y_3$ : Elongación a la ruptura	$400 < Y_3 < 600$
$Y_4$ : Dureza	$60 < Y_4 < 75$

Se propuso un diseño de composición central, el diseño y los resultados se muestran a continuación:



Tratamiento	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
1	-1	-1	1	102	900	470	67.5
2	1	-1	-1	120	860	410	65.0
3	-1	1	-1	117	800	570	77.5
4	1	1	1	198	2294	240	74.5
5	-1	-1	-1	103	490	640	62.5
6	1	-1	1	132	1289	270	67.0
7	-1	1	1	132	1270	410	78.0
8	1	1	-1	139	1090	380	70.0
9	-1.63	0	0	102	770	590	76.0
10	1.63	0	0	154	1690	260	70.0
11	0	-1.63	0	96	700	520	63.0
12	0	1.63	0	163	1540	380	75.0
13	0	0	-1.63	116	2184	520	65.0
14	0	0	1.63	153	1784	290	71.0
15	0	0	0	133	1300	380	70.0
16	0	0	0	133	1300	380	68.5
17	0	0	0	140	1145	430	68.0
18	0	0	0	142	1090	430	68.0
19	0	0	0	145	1260	390	69.0
20	0	0	0	142	1344	390	70.0

1. Ajuste cada uno de los modelos por el método de mínimos cuadrados.
2. Encuentre el óptimo individual de cada respuesta.
3. Aplique la función de deseabilidad para encontrar un óptimo común.
4. Utilizando curvas de nivel discuta las posibilidades de un óptimo.
5. Para la variable 2 identifique si algunos de los factores tiene efecto en la variabilidad.

**Ejercicio 9.18** Box y Draper (1987) presentan un ejemplo sobre la capacidad de una imprenta para imprimir tinta de color en unas etiquetas. Se considera que tres factores en tres niveles tienen efecto en la impresión de la tinta, estos son:

Factores	Nivel bajo	Nivel intermedio	Nivel alto
$X_1$ : velocidad	30	45	60
$X_2$ : presión	90	110	130
$X_3$ : distancia	12	20	28

Este diseño ha servido como referencia a diferentes autores para ilustrar los resultados que se obtienen al aplicar el método que proponen en la optimización de la media y la variabilidad, luego los compararán con los resultados obtenidos por otros autores. Aquí los usamos para hacer una comparación global de todos los resultados. El diseño es un factorial completo  $3^3$  con tres replicaciones denotadas por  $y_1$ ,  $y_2$ , y  $y_3$ . Los datos se muestran en la Tabla de abajo:

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\bar{y}_\mu$	$S_x$
-1	-1	-1	34	10	28	24.0	12.5
0	-1	-1	115	116	130	120.3	8.4
1	-1	-1	192	186	263	213.7	42.8
-1	0	-1	82	88	88	86.0	3.7
0	0	-1	44	178	188	136.7	80.4
1	0	-1	322	350	350	340.7	16.2
-1	1	-1	141	110	86	112.3	27.6
0	1	-1	259	251	259	256.3	4.6
1	1	-1	290	280	245	271.7	23.6
-1	-1	0	81	81	81	81.0	0.0
0	-1	0	90	122	93	101.7	17.7
1	-1	0	319	376	376	357.0	32.9
-1	0	0	180	180	154	171.3	15.0
0	0	0	372	372	372	372.0	0.0
1	0	0	541	568	396	501.7	92.5
-1	1	0	288	192	312	264.0	63.5
0	1	0	432	336	513	427.0	88.6
1	1	0	713	725	754	730.7	21.1
-1	-1	1	364	99	199	220.7	133.8
0	-1	1	232	221	266	239.7	23.5
1	-1	1	408	415	443	422.0	18.5
-1	0	1	182	233	182	199.0	29.4
0	0	1	507	515	434	485.3	44.6
1	0	1	846	535	640	673.7	158.2
-1	1	1	236	126	168	176.7	55.5
0	1	1	660	440	403	501.0	138.9
1	1	1	878	991	1161	1010.0	142.5

Como antecedente se sabe que un valor ideal para el proceso (objetivo) es de 500, con mínima variación. Antes de contestar, lea primero las preguntas para que se organice mejor en su respuesta.

1. Escriba el modelo de segundo orden completo para la media.

2. Haga la evaluación estadística del modelo estimado en el punto 1.
3. Escriba el modelo de segundo orden completo para la desviación estándar.
4. Si la matriz inversa  $\mathbf{B}$  en el modelo ajustado en el inciso 1 es:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.00143 & 0.01443 & 0.01266 \\ 0.01443 & -0.01907 & 0.00444 \\ 0.01266 & 0.00444 & -0.01463 \end{pmatrix}$$

Encuentre el óptimo  $x_0$ . Recuerde que la matriz  $\mathbf{B}$  contiene los términos de segundo orden en el modelo estimado.

5. Evalúe en ese óptimo el modelo que ajustó en inciso 1, es decir:  $\hat{y}(x_0)$ .
6. Trace las curvas de nivel en el paquete estadístico y bosquejelas en su hoja de respuestas, identifique la respuesta en el inciso 4. ¿Qué comentarios tiene al respecto si se quiere que la respuesta esté alrededor de 500?
7. Sobreponga las curvas de nivel de los modelos ajustados en los incisos 1 y 3. Indique cuáles podrían ser escenarios adecuados para obtener en promedio 500 y variación mínima.
8. Si los valores característicos para el modelo ajustado en el punto 1 son:  $vc = (-49.6, -37.1, 67.2)$ , diga la naturaleza del óptimo encontrado en el inciso 4. Escriba la ecuación canónica e interprétela.
9. Ajuste un mejor modelo para la media.
10. Ajuste un mejor modelo (hasta de segundo orden) para la desviación estándar y optimícelo.
11. Sustituya el óptimo encontrado en el inciso 10 en el modelo ajustado en el inciso 9. Optimice ese nuevo modelo.
12. Con la información en 10 (si es necesaria) y usando el modelo generado en el inciso anterior bosqueje las curvas de nivel.
13. Encuentre un intervalo de confianza para  $\hat{y}$  en el punto  $x_0^* = (1, 0, 0)$ , considerando el modelo ajustado en el inciso 9.

**Ejercicio 9.19**

Se realiza un proyecto para la elaboración de un queso y se desea conocer la combinación de los efectos de la cistina (cuajo):  $X_1$  y el cloruro de calcio:  $X_2$  en la texturización y en las características de agua - caliente dialisada en una concentración de proteína de suero en un gel. En este proceso experimental se aplicó un diseño central compuesto, cada factor  $X$  tiene cinco valores como se muestran en los renglones 2 y 3 en la Tabla A. Las características de la textura son medidas por la dureza:  $Y_1$ , cohesividad: (coherencia)  $Y_2$ , elasticidad:  $Y_3$ , y un índice de agua:  $Y_4$ . Este estudio fue desarrollado por Schmidt et. al. (1979) y el experto en este tipo de proceso consideró como objetivo alcanzar los máximos simultáneos para las cuatro variables. El diseño que se utilizó en este estudio fue el central compuesto.

Características reales de los factores de control $X$ .						
$X \backslash x$		$\alpha = -\sqrt{2}$	-1	0	1	$\alpha = \sqrt{2}$
$X_1$	Cloruro de calcio	2.6	8.0	21.0	34.0	39.4
$X_2$	Texturización	2.5	6.5	16.2	25.9	29.9

En la tabla siguiente se describe en las columnas correspondientes a  $x_1$  y  $x_2$  el diseño central compuesto para dos factores y en este caso  $n_o = 5$ , en las últimas cuatro columnas se muestran los valores de las cuatro respuestas para cada uno de los tratamientos.

Esquema experimental y las respuestas en cada tratamiento										
Tratamiento	cte.	$x_1$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$Y_1$	$Y_2$	$Y_3$	$Y_4$
1	1	-1	-1	1	1	1	2.48	0.55	1.95	0.22
2	1	1	-1	-1	1	1	0.91	0.52	1.37	0.67
3	1	-1	1	-1	1	1	.71	0.67	1.74	0.57
4	1	1	1	1	1	1	.41	0.36	1.20	0.69
5	1	$-\sqrt{2}$	0	0	2	0	2.28	0.59	1.75	0.33
6	1	$\sqrt{2}$	0	0	2	0	0.35	0.31	1.13	0.67
7	1	0	$-\sqrt{2}$	0	0	2	2.14	0.54	1.68	0.42
8	1	0	$\sqrt{2}$	0	0	2	0.78	0.51	1.51	0.57
9	1	0	0	0	0	0	1.50	0.66	1.80	0.44
10	1	0	0	0	0	0	1.66	0.66	1.79	0.50
11	1	0	0	0	0	0	1.48	0.66	1.79	0.50
12	1	0	0	0	0	0	1.41	0.66	1.77	0.43
13	1	0	0	0	0	0	1.58	0.66	1.73	0.47

1. Escriba el modelo para cada respuesta y haga el análisis estadístico respectivo con todo detalle.

2. Haga un diagrama de dispersión en conjunto para todas las respuestas y obtenga sus conclusiones.
3. Encuentre el óptimo individual para cada respuesta, suponga que el investigador desea obtener un máximo en cada una de las respuestas.
4. Ubique en un plano que comprende la región experimental cada óptimo, ¿qué se puede concluir?
5. Dé una solución óptima común para las cuatro respuestas usando la función de deseabilidad.
6. Haga un análisis gráfico para encontrar un óptimo común. Realice una discusión de lo que observa.
7. Describa la relación por pares de las variables de respuesta.

### Ejercicio 9.20

Se realizó un experimento para extraer aceite de cacahuete, la meta era encontrar la mayor producción. Se consideraron dos factores control  $X_1$  y  $X_2$  y dos de ruido  $Z_1$  y  $Z_2$ .

	Nivel bajo	Nivel alto
$X_1$ : Presión	450	550
$X_2$ : Razón de fluido	40	60
$Z_1$ : Temperatura	45	95
$Z_2$ : Tamaño partícula	1.3	4.0

Se propuso un diseño de factorial  $2^4$ , el diseño y los resultados se muestran a continuación.

Tratamiento	$x_1$	$x_2$	$z_1$	$z_2$	$y$
1	-1	-1	-1	-1	55.5
2	1	-1	-1	-1	75.0
3	-1	1	-1	-1	42.7
4	1	1	-1	-1	70.1
5	-1	-1	1	-1	43.4
6	1	-1	1	-1	65.3
7	-1	1	1	-1	32.0
8	1	1	1	-1	56.2
9	-1	-1	-1	1	68.1
10	1	-1	-1	1	81.0
11	-1	1	-1	1	61.2
12	1	1	-1	1	74.6
13	-1	-1	1	1	58.0
14	1	-1	1	1	71.0
15	-1	1	1	1	49.8
16	1	1	1	1	62.7

1. Escriba el modelo similar al de la expresión (9.25)
2. Encuentre las expresiones para la media (9.26) y la varianza (9.27) respectivamente y optimice.

## Capítulo 10

# Diseños de experimentos con mezclas

*La experiencia más bella que podemos tener es lo misterioso[...]. Aquél que es ajeno a las emociones, aquél que ya no puede detenerse y mirar con reverencia está muerto. Sus ojos están cerrados.*

*Albert Einstein*

### 10.1 Introducción

Muchos productos son resultado de un proceso de mezclado de varios ingredientes. Como un ejemplo inicial suponga que una empresa preocupada por mejorar sus productos alimenticios se ha comprometido en la revisión de la formulación de uno de los alimentos que produce. Suponga que una de las características de calidad de tal producto es su viscosidad final, denotada ésta por  $y$ . Suponga que una formulación está constituida de la mezcla de tres ingredientes ( $X_1, X_2, X_3$ ). Sucede que la viscosidad  $y$  depende no tanto de la cantidad de cada uno de los ingredientes en la formulación, sino de las proporciones (o porcentajes) de cada uno de los tres ingredientes como componentes de una unidad de producto (o 100%), es decir que  $y$  depende las proporciones respectivas de los tres ingredientes  $X_1, X_2, X_3$  tales que  $X_1 + X_2 + X_3 = 1$  (o 100% como porcentajes). El objetivo es estudiar entonces el efecto de cada componente sobre la viscosidad, las posibles interacciones sobre la viscosidad y por supuesto encontrar la mejor mezcla de un conjunto propuesto de mezclas. Cumplir tal objetivo implica responder dos preguntas: qué mezclas deben ser elaboradas y cómo analizar los datos de estas mezclas para obtener de manera eficiente información.

Lo anterior es un ejemplo real de aplicación de lo que se conoce como el diseño

y análisis estadísticos de experimentos con mezclas. Estos experimentos son muy comunes en múltiples contextos, como señala Cornell (2002) para formulaciones de pasteles, concretos para construir edificaciones, bebidas de frutas, recubrimiento de películas fotográficas, producción de cigarros, entre otras muchas posibilidades. En cada uno de estos ejemplos hay una o más propiedades del producto resultante que dependen críticamente de las proporciones de los ingredientes y de sus cantidades, específicamente: la esponjosidad del pastel, la dureza o fuerza de compresión del concreto, el sabor afrutado de la bebida, la estabilidad del color de las fotografías cuando son expuestas al calor y a la luz, el sabor y aroma de la mezcla de tabaco.

El trabajo estadístico inicial para el desarrollo de esta área del diseño de experimentos se debe a Scheffé (1958).

## 10.2 Definición del problema

Sea  $y$  que represente una característica de importancia medida sobre el producto con el mezclado de los ingredientes  $X_1, X_2, \dots, X_k$  que representan en general a las proporciones de  $k$  componentes a ser mezclados tales que:

$$0 \leq X_i \leq 1, \quad i = 1, \dots, k, \quad \sum_{i=1}^k X_i = 1 \quad (10.1)$$

Como se mencionó anteriormente, se debe de responder a dos preguntas, la primera corresponde al diseño del experimento, dada la restricción sobre las mezclas es intuitivamente clara la diferencia con el uso de los diseños factoriales presentada en capítulos anteriores. Los diseños de experimentos con mezclas siguen manteniendo el énfasis en una estructura factorial y no OFAT; sin embargo, la condición (10.1) implica restricciones sobre la ubicación de las corridas experimentales debido a la dependencia entre las  $X_i$ 's. Desde un punto de vista geométrico, (10.1) impone que el espacio factorial de mezclas de  $k$  componentes consista de todos los puntos sobre las fronteras o internos de lo que es llamado un *símplex regular* de  $(k - 1)$  dimensiones. Ejemplos de lo que son *símplex regulares* para  $k = 2, 3$  y  $4$  se muestran en la Figura 10.1.

Para  $k = 2$ , así si  $X_1 = x_1$ ,  $X_2 = 1 - x_1$ , dado que el *látice* es el intervalo  $[0, 1]$ . Note que la mezcla ( $X_1 = 0$ ,  $X_2 = 1$ ) o la mezcla ( $X_1 = 1$ ,  $X_2 = 0$ ) corresponden a las que se llaman *mezclas puras*, ( $X_1 = x_1$ ,  $X_2 = 1 - x_1$ ) con  $x_1 \neq 0, 1$ , son llamadas *mezclas binarias*. Para  $k = 4$ , que el *látice regular* es una *pirámide tetraédrica* y en la misma *lógica* tendríamos:



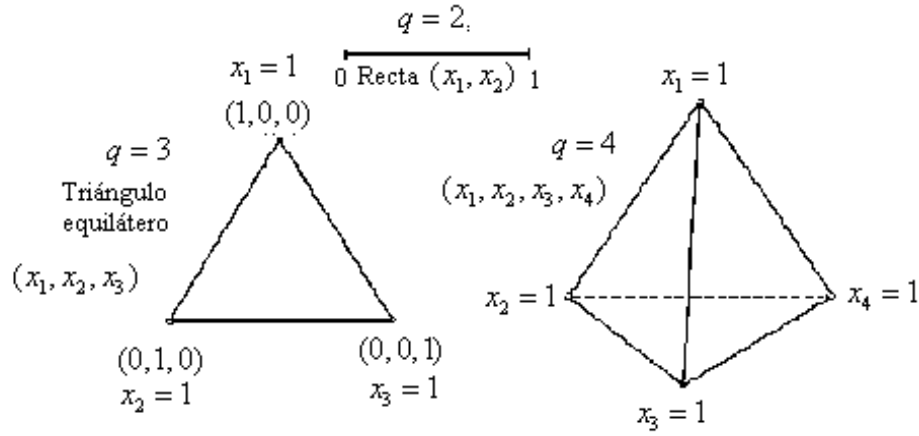


Fig. 10.1: Descripción geométrica del espacio factorial de mezclas para  $q = 2, 3$  y 4

Puras $X_i = 1, X_j = 0, j \neq i$
Binarias $(X_i = x_i, X_j = x_j)$ , $(x_i, x_j) \in (0, 1) \times (0, 1), x_i + x_j = 1$
Ternarias $(X_i = x_i, X_j = x_j, X_k = x_k)$ , $(x_i, x_j, x_k) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1), x_i + x_j + x_k = 1$
Cuaternarias $(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, X_4 = x_4)$ , $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1), x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1$

En la Fig. 10.2 se muestra el símplex para el caso de  $k = 3$ , donde se muestra el sistema coordinado respectivo para ubicar muestras dentro del símplex.

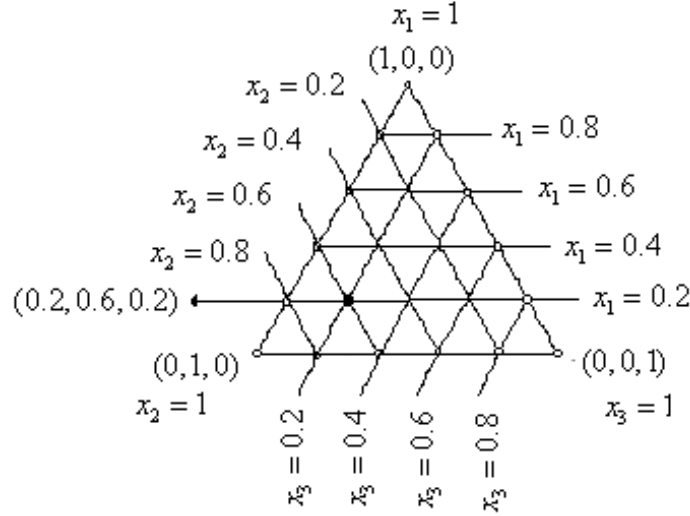
El problema de diseño de este tipo de experimentos es seleccionar las mezclas más adecuadas para responder al objetivo de este tipo de experimentos.

## 10.3 Diseños

Los tres tipos de diseño que son más usados son el diseño símplex - látice, el diseño símplex - centroide y el diseño axial.

### 10.3.1 Diseño símplex reticular (látice)

El nombre diseño símplex reticular se refiere a una colección de mezclas uniformemente espaciadas en un símplex. Con este diseño símplex reticular se corresponde

Fig. 10.2: Coordenadas dentro de un simplex  $k = 3$ 

un polinomio específico a ser ajustado mediante los datos generados en el experimento respectivo. Esto es, para poder estimar un polinomio de grado  $m$  en  $k$  componentes, el diseño simplex reticular denotado como  $\{k, m\}$  consiste de mezclas cuyas coordenadas están definidas para cada componente tomando  $m + 1$  valores equiespaciados de 0 a 1, esto es:

$$X_i = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1; i = 1, 2, \dots, k$$

sujetos a la restricción (10.1). Ejemplos: el simplex reticular  $(3, 2)$  consiste de los puntos:

$$(X_1, X_2, X_3) = \left\{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

estos puntos están en los vértices y en los lados del simplex; con este diseño se puede estimar un polinomio de grado dos. Para el simplex reticular  $(3, 3)$  los puntos son:

$$(X_1, X_2, X_3) = \left\{ \begin{array}{l} (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right), \\ \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right), \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{array} \right\}$$

con el que se puede estimar hasta un polinomio de grado tres. En general el número de mezclas de un diseño simplex reticular  $\{k, m\}$  es:

$$\frac{(k+m-1)!}{m!(k-1)!}$$

que permitirán estimar hasta un polinomio de grado  $m$ .

### 10.3.2 Diseños simplex centroide

Un diseño simplex centroide para  $k$  componentes es un diseño con mezclas de uno, de dos, ..., o de  $k$  componentes con proporciones que sean iguales. Así el diseño simplex centroide consiste de  $2^k - 1$  puntos:  $k$  permutaciones de  $(1, 0, \dots, 0)$ ;  $\binom{k}{2}$  permutaciones de  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0)$ , ...,  $\binom{k}{3}$  permutaciones de  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0, \dots, 0)$ , ..., etc., y el centroide  $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$ . Todas sus mezclas están localizadas en el centroide del láctice  $(k-1)$ -dimensional y en centroides de todos los simplex de menor dimensionalidad contenidos en el simplex  $(k-1)$ -dimensional. Este diseño permite estimar polinomios que tengan tantos parámetros como el número de mezclas incluidas en éste.

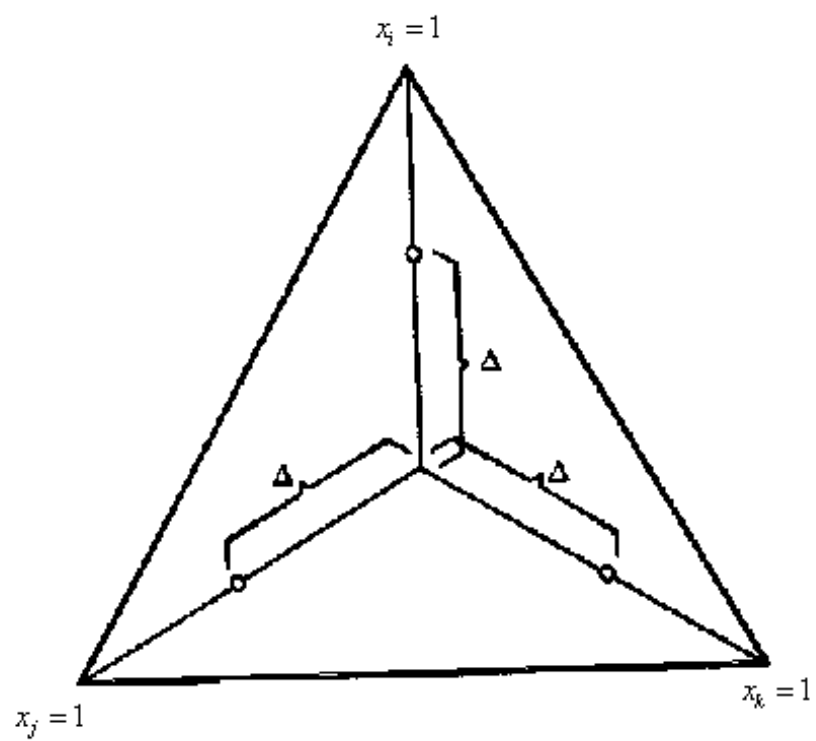
### 10.3.3 Diseños axiales

Mientras que para el diseño simplex láctice y diseños simplex centroide las mezclas en el diseño (excepto en el centroide) están localizadas en las fronteras del espacio factorial simplex, las mezclas en un diseño axial son principalmente mezclas de  $k$  componentes, es decir, la mayoría de las mezclas están dentro del simplex. Las mezclas en un diseño axial se muestran para el caso  $k = 3$  en la Fig. 10.3.

En la Fig. 10.3 se aprecia un diseño axial especial en el que sus mezclas se encuentran localizadas a una misma distancia  $\Delta$  del centroide  $(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \dots, \frac{1}{k})$  sobre los ejes del sistema coordinado del simplex. El eje de un componente  $i$  es la línea imaginaria que se extiende del punto base  $x_i = 0, x_j = 1/(q-1)$ , para toda  $j \neq i$ , al vértice donde  $x_i = 1, x_j = 0$ , para toda  $j \neq i$ . Este tipo de diseño es utilizado principalmente para estimar polinomios que no contengan interacciones entre los componentes de las mezclas.

## 10.4 Análisis de experimentos con mezclas: el polinomio canónico

Como hemos repasado en los capítulos anteriores, a un diseño experimental le corresponde un modelo estadístico para su correcto análisis. En general los diseños recién presentados permiten estimar parámetros desde polinomios lineales sin términos de interacciones, hasta polinomios que incluyen términos de interacción triple, que resultan suficientes en general en las aplicaciones. Antes de

Fig. 10.3: Diseño axial en  $k = 3$  componentes

presentar diversos modelos es necesario aclarar que el polinomio tradicional debe asumir cambios debidos a la estructura de dependencia (10.1), que implica que los parámetros estimados no sean únicos. Para visualizar tales cambios sin pérdida de generalidad, pensemos en el polinomio de primer orden sin interacciones

$$y = \beta_0 + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \varepsilon \quad (10.2)$$

Tomando en cuenta (10.1), por ejemplo:

$$X_k = 1 - \sum_{i \neq k} X_i \quad (10.3)$$

que sustituido en (10.2) se tiene que:

$$y = \beta_0 \left( \sum_{i=1}^k X_i \right) + \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \varepsilon = \sum_{i=1}^k \beta_i^* X_i + \varepsilon \quad (10.4)$$

con  $\beta_i^* = \beta_0 + \beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). El modelo (10.4) retiene la forma en los  $k$  componentes y cada  $\beta_i^*$  tiene un claro significado. A este polinomio se le llama polinomio canónico, en el que el parámetro de ordenada al origen desaparece. Este hecho puede confundir de entrada, pero esto ocurre en clara referencia a que  $y$  no depende de cantidades, sino de proporciones de los componentes de la mezcla.

Para obtener la forma canónica a partir de un modelo que incluya interacciones de dos componentes, se procede similarmente, pero agregando:

$$X_i^2 = X_i \left( 1 - \sum_{j \neq i} X_j \right)$$

El modelo canónico es:

$$y = \sum_{i=1}^k \beta_i^* X_i + \sum_{i < j} \sum_{j=1}^k \beta_{ij}^* X_i X_j + \varepsilon \quad (10.5)$$

con  $\beta_i^* = \beta_0 + \beta_i + \beta_{ij}$  y  $\beta_{ij}^* = \beta_{ij} - \beta_{ii} - \beta_{jj}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, k; i < j$ ). El modelo (10.5) se puede simplificar más multiplicando  $\sum \beta_i^* X_i$  por  $\sum X_i$  de la siguiente manera:

$$y = \sum_{i \leq j} \sum_{j=1}^k \delta_{ij} X_i X_j + \varepsilon \quad (10.6)$$

con  $\delta_{ii} = \beta_i^*$  y  $\delta_{ij} = \beta_{ij}^* + \beta_i^* + \beta_j^*$  ( $i, j = 1, 2, \dots, k; i < j$ ). Los modelos (10.5) y (10.6) son equivalentes y contienen el mismo número de parámetros. Otros dos modelos útiles en aplicaciones son el modelo cúbico completo (sin asteriscos a partir de ahora):

$$y = \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i < j}^k \beta_{ij} X_i X_j + \sum_{i < j}^k \delta_{ij} X_i X_j (X_i - X_j) + \sum_{i < j < k} \sum_{i < j < k}^k \beta_{ijk} X_i X_j X_k + \varepsilon \quad (10.7)$$

y el modelo cúbico especial:

$$y = \sum_{i=1}^k \beta_i X_i + \sum_{i < j}^k \beta_{ij} X_i X_j + \sum_{i < j < k} \sum_{i < j < k}^k \beta_{ijk} X_i X_j X_k + \varepsilon$$

La interpretación de los coeficientes en cada uno de estos polinomios es simple. Los coeficientes de componentes individuales representan el efecto de la "mezcla pura" respectiva. Así, si  $X_j = 0 \quad j \neq i$ ,  $\beta_i$  representa el efecto del componente  $i$  de la mezcla. Todos los demás coeficientes representan efectos no lineales de la mezcla de componentes; así, por ejemplo, si se desean valores grandes de  $y$ , si  $\beta_{ij}$  (de una mezcla binaria) fuera positivo implicaría un efecto sinérgico sobre  $y$  al mezclar el componente  $i$  con el componente  $j$ , pero si  $\beta_{ij}$  fuera negativo entonces resultaría un efecto antagónico entre el componente  $i$  y el componente  $j$  sobre  $y$ , es decir que al mezclarse el componente  $i$  con el componente  $j$  reducirían a  $y$  al compararse con mezclas puras del componente  $i$  y del componente  $j$ .

Los procedimientos de estimación de parámetros, validación y diagnóstico de los modelos polinomiales utilizados para estudiar experimentos con mezclas, son similares a los utilizados en el caso de los modelos polinomiales de la regresión clásica revisados en el Capítulo 8. Para el caso de pruebas de hipótesis de efectos principales de cada elemento de la formulación sólo es necesario notar que las hipótesis a contrastar para los parámetros  $\beta_i$  en los polinomios canónicos es de igualdad y no de nulidad, es decir, se prueba si éstos son iguales entre sí (y no si son iguales a cero). Sin embargo para todos los parámetros asociados a interacciones, las hipótesis a contrastar sí se refieren a la nulidad de éstos.

### Ejemplo 10.1

Este ejemplo es un clásico de la literatura de diseño de mezclas y lo propuso Cornell (1990). El experimento incluye a tres componentes: polietileno ( $X_1$ ), poliestireno ( $X_2$ ) y polipropileno ( $X_3$ ). Estos componentes se mezclan para formar una fibra de hilado que se utilizará en el estambre para el paño. Los diseñadores del producto sólo están interesados en las mezclas puras y en las binarias para

estos tres materiales. La respuesta de interés es la enlongación del estambre medido en kilogramos de la fuerza aplicada. Un diseño simplex reticular se usó en este estudio. Los datos se muestran a continuación:

	$X_1$	$X_2$	$X_3$	$y$
Punto				
1	1	0	0	11.0, 12.4
2	0	1	0	8.8, 10.0
3	0	0	1	16.8, 16.0
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	15.0, 14.8, 16.1
5	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	10.9, 9.7, 11.8
6	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	17.7, 16.4, 16.6

(10.8)

El análisis estadístico de este ejemplo está a continuación. El modelo a estudiar es:

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \varepsilon$$

Las hipótesis nula y alternativa para contrastar y así verificar si la respuesta depende de los componentes de la mezcla son:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_0, \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = 0$$

$$H_1 : \text{Al menos una de las igualdades no se cumple}$$

La tabla de análisis de varianza se muestra en la Tabla 10.1 para contrastar a estas hipótesis es

Fuente	gl	Suma de cuadrados	Cuadrado medio	$F$
Modelo	5	123.0	24.6	35.7
Error	9	6.2	0.68	$p < .0001$
Total	14	129.2		

Tabla 10.2 Tabla ANDEVA para el Ejemplo 10.1

donde el modelo bajo la hipótesis nula es:

$$y = \beta_0 + \varepsilon$$

con lo que  $\hat{\beta}_0 = \bar{y}$ . Respecto a la significancia de cada uno de los parámetros en el modelo, se tienen los siguientes resultados:

Coefficiente	Estimado	Error estándar	$t$	Valor $p$
$\beta_1$	11.7	0.59	19.94	<.0001
$\beta_2$	9.4	0.59	16.02	<.0001
$\beta_3$	16.4	0.59	27.94	<.0001
$\beta_{12}$	19	2.54	7.49	<.0001
$\beta_{13}$	11.4	2.54	4.5	.0015
$\beta_{23}$	-8.4	2.54	-3.31	.0090

Aparentemente el modelo ajustado es adecuado. Por otro lado si se ajusta el modelo sin interacciones se tiene que es significativo en lo global y con coeficientes significativos como muestra lo siguiente:

Coefficiente	estimado	error estándar	$t$	Valor $p$
$\beta_1$	14.95	1.37	10.91	<.0001
$\beta_2$	9.95	1.37	7.26	<.0001
$\beta_3$	15.91	1.37	11.61	<.0001

Sin embargo, el modelo sin interacciones tiene carencia de ajuste como lo muestra lo siguiente:

Fuente	$gl$	SC	CM	$F$	Valor $p$
Carencia ajuste	3	66.67	22.2	32.3	< .0001
Error puro	9	6.2	0.69		
Error total	12	72.87			

por lo que el modelo con interacciones es preferible.

## 10.5 Diseños con restricciones factoriales

En muchos casos son necesarias restricciones adicionales a (10.1), para garantizar factibilidad no sólo en el simplex sino en el contexto de aplicación. Así, en general, las restricción para el problema de mezclas son:

$$X_1 + X_2 + \dots + X_k = 1$$

y restricciones bilaterales:

$$L_i \leq X_i \leq U_i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

donde:



$$L_i \geq 0 \text{ y } U_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

También se pueden plantear restricciones unilaterales por ejemplo con cotas inferiores para cada componentes:

$$L_i \leq X_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

o restricciones unilaterales con cotas superiores:

$$0 \leq X_i \leq U_i, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

### Ejemplo 10.5

Suponga que en un diseño en mezclas de tres componentes se requiere que:

$$0.3 \leq X_1, \quad 0.4 \leq X_2, \quad \text{y} \quad 0.1 \leq X_3$$

Esto hace necesaria una redefinición de las componentes, llamados ahora L-seudocomponentes, de la siguiente forma:

$$W_i = \frac{X_i - L_i}{1 - L}$$

donde:

$$L = \sum_{i=1}^k L_i < 1$$

la suma de todas las cotas inferiores. En este ejemplo las pseudocomponentes son:

$$W_1 = \frac{X_1 - 0.3}{0.2} \quad W_2 = \frac{X_2 - 0.4}{0.2} \quad W_3 = \frac{X_3 - 0.1}{0.2}$$

Las componentes originales se pueden expresar como:

$$X_i = L_i + (1 - L)W_i$$

Aplicando esta expresión se tiene:

$$X_1 = 0.3 + 0.2W_1$$

$$X_2 = 0.4 + 0.2W_2$$

$$X_3 = 0.1 + 0.2W_3$$

Para ilustrar considere el punto  $W_1 = \frac{1}{2}$ ,  $W_2 = \frac{1}{2}$ , y  $W_3 = 0$ . En términos de las componentes originales, este punto es:

$$W_1 = 0.3 + 0.2 \left( \frac{1}{2} \right) = 0.4$$

$$W_2 = 0.4 + 0.2 \left( \frac{1}{2} \right) = 0.5$$

$$W_3 = 0.1 + 0.2 (0) = 0.1$$

### Ejemplo 10.6

El ejemplo incluye una mezcla de combustible  $X_1$ , un oxidante  $X_2$  y un aditivo  $X_3$  se juntan estos componentes para formar una sustancia que se utilizará en el sistema de escape de un avión. En este proceso se tienen tres variables de respuesta. Primero la razón de quemado, la desviación estándar de esta razón e índice de manufactura que refleja el costo y la dificultad asociada con producir una mezcla particular.

Las condiciones:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0.9$$

$$0.3 \leq X_1 \quad 0.2 \leq X_2 \quad 0.2 \leq X_3$$

Las tres componentes hacen el 90 % de la mezcla. El sistema para las pseudo-componentes es:

$$W_i = \frac{X_i - L_i}{0.9 - \sum_{i=1}^3 L_i}$$

Retornando a las componentes originales:

$$X_i = L_i + (0.9 - \sum_{i=1}^3 L_i) W_i$$

es decir:

$$W_1 = 0.3 + 1(0.2) = 0.5$$

$$W_2 = 0.2 + 1(0.2) = 0.2$$

$$W_3 = 0.2 + 0(0.2) = 0.2.$$

Es necesario siempre verificar que las restricciones no induzcan regiones inconsistentes; en alguno de los ejercicios al final de este capítulo se presentan formas de verificar esta consistencia. Además, dadas las restricciones sobre los componentes, es complejo identificar cuáles mezclas cumplen con todas las restricciones

impuestas y de éstas seleccionar un subconjunto que permita la estimación del modelo polinomial de interés. Actualmente en los paquetes estadísticos ya existen algoritmos computarizados para realizar estas tareas. Para mayores detalles consulte a Cornell (2002) que comenta un amplio conjunto de referencias al respecto.

## 10.6 Preguntas en un experimento con mezclas

En el contexto particular:

1. ¿Cómo se definen las mezclas factibles?
2. ¿Hay mezclas que consisten de ingredientes individuales, por sí mismos así como cualquier combinación de los  $k$  ingredientes?
3. ¿Hay al menos  $2 \leq r < k$  de los componentes con proporciones distintas de cero?
4. ¿Algunos componentes pueden estar ausentes ( $x_i = 0$ ) pero **no** más de  $k - r$  pueden estar ausentes en cualquier mezcla?
5. ¿Hay mezclas con todos los componentes? En otras palabras: ninguno de los componentes puede estar ausente en cualquier mezcla (forzando a las cotas inferiores  $0 < L_i \leq x_i$  para toda  $i = 1, 2, \dots, k$ ).
6. ¿Cuáles son los objetivos del experimento?, ¿se sabe cuáles componentes son los más activos y los menos activos? Si no: ¿se debe correr primero un experimento de tamizaje? Si se sabe cuáles son los más activos: ¿se sabe cuáles son sus propiedades cuando son mezclados?, ¿se sabe cómo cada uno afecta a las respuestas de interés tanto de manera conjunta como individualmente?
7. ¿Es razonable suponer que la superficie mezcla es suave de tal forma que algún modelo polinomial puede ser ajustado? ¿Qué tipo de polinomio ajustar, Scheffé en proporciones componentes o modelo estándar en un conjunto de variables independientes? ¿Otros modelos de mezclas?
8. ¿Cómo se define la región de mezclas factibles? Vale la pena una región simplex completa, y si así lo es, ¿un diseño látice puede usarse? Si la región no es un simplex completo sino más bien sólo una subregión del simplex, ¿cómo escoger a las mezclas?, ¿se deben considerar los llamados seudocomponentes?

9. ¿Hay otros factores tales como variables de proceso o cantidades de la mezcla que podrían tener influencia en las propiedades de la mezcla de componentes y, por lo tanto, que deban ser incluidas en el modelaje y en el diseño?
10. En la planeación del número total de mezclas para correr, ¿otras mezclas adicionales deben considerarse? Si así lo es, ¿dónde deben ubicarse?, ¿se pueden replicar algunas mezclas?, ¿es necesario el uso de bloques?

## 10.7 Factores de proceso

También se pueden incluir factores de control de proceso que puedan tener un efecto en la respuesta  $\eta$ . De esta manera las variables de mezclas  $X_i$ 's y los factores de control  $Z_1, Z_2, \dots, Z_p$  se pueden modelar:

$$\eta = \phi(X_1, X_2, \dots, X_k; Z_1, Z_2, \dots, Z_p; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s);$$

el modelo anterior se aproximará por un polinomial de bajo grado para detectar efectos de  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{Z}$  y sus interacciones. Para mayores detalles consulte Cornell (2002) capítulo 7.

Finalmente, también es posible considerar el diseño y análisis de experimentos con mezclas incorporando factores de control del proceso y factores de ruido a la Taguchi, como se desarrolla en Goldfarb *et al.* (2003).

## 10.8 Otros análisis para diseños con mezclas

### 10.8.1 Coeficientes polinomiales

Existe una correspondencia entre las mezclas en un diseño simplex reticular y el polinomio correspondiente por ajustar. Para estudiar esta correspondencia se presenta la siguiente notación específica:

$\eta_i$	respuesta esperada a una mezcla pura ( $i$ )
$\eta_{ij}$	respuesta esperada a una mezcla binaria ( $ij$ ) con proporciones iguales 50% : 50%
$\eta_{ijk}$	respuesta esperada a una mezcla ternaria ( $ijk$ ) en iguales proporciones 33.3%, 33.3%, 33.3%

Los subíndices de una respuesta esperada designan tres características:

1. El número de subíndices es igual al denominador en las fracciones usadas en la mezcla.

2. El número de subíndices distintos indica cuántos componentes están presentes en proporciones no cero en la mezcla.
3. El número de veces que un subíndice aparece indica la proporción relativa supuesta por el componente correspondiente en la mezcla.

Por ejemplo:  $\eta_{112}$  tres subíndices, mezclas de fracciones componentes de tamaño  $\frac{1}{3}$ ; 1, 2 aparecen; sólo componentes 1 y 2 aparecen en mezclas; dos 1's y un 2 implica  $x_1 = \frac{2}{3}$  y  $x_2 = \frac{1}{3}$ .

Similarmente se tiene:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$\eta_1$	1	0	0	1	0	0	0
$\eta_2$	0	1	0	0	1	0	0
$\eta_{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\eta_{23}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\eta_{123}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\eta_{112}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
$\eta_{233}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
$\eta_{1112}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	0
$\eta_{1223}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
$\eta_{1144}$	—	—	—	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$
$\eta_{2344}$	—	—	—	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\eta_{1234}$	—	—	—	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Por ejemplo  $\{3, 2\}$  implica:

$$\eta = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3$$

Sustituyendo:

$$\text{en } \eta_i, x_i = 1, \quad x_j = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad j \neq i$$

$$\text{en } \eta_{ij}, x_i = \frac{1}{2}, \quad x_j = \frac{1}{2}, \quad x_k = 0, \quad i < j, \quad k \neq i, j$$

Se tiene:

$$\eta_1 = \beta_1 \quad \eta_2 = \beta_2 \quad \eta_3 = \beta_3$$

$$\eta_{12} = \beta_1 \left( \frac{1}{2} \right) + \beta_2 \left( \frac{1}{2} \right) + \beta_{12} \left( \frac{1}{4} \right)$$

$$\eta_{13} = \beta_1 \left( \frac{1}{2} \right) + \beta_3 \left( \frac{1}{2} \right) + \beta_{13} \left( \frac{1}{4} \right)$$

$$\eta_{23} = \beta_2 \left( \frac{1}{2} \right) + \beta_3 \left( \frac{1}{2} \right) + \beta_{23} \left( \frac{1}{4} \right)$$

Que resolviéndolas resulta:

$$\begin{array}{ccc} \beta_1 = \eta_1 & \beta_{12} = 4\eta_{12} - 2\eta_1 - 2\eta_2 & \\ \beta_2 = \eta_2 & \beta_{13} = 4\eta_{13} - 2\eta_1 - 2\eta_3 & \\ \beta_3 = \eta_3 & \beta_{23} = 4\eta_{23} - 2\eta_2 - 2\eta_3 & \\ \uparrow & \uparrow & \\ \text{Mezclas puras} & \text{Desviaciones de la planaridad} & \\ \uparrow & & \\ \sum \beta_i \eta_i & \longleftarrow \text{Mezcla aditiva} & \end{array} \quad (10.9)$$

$q$  general

$$\beta_i = \eta_i, \quad \beta_{ij} = 4\eta_{ij} - 2(\eta_i + \eta_j)$$

Para el caso  $m > 2$  consulte a Gorman y Hinman (1962).

### 10.8.2 Estimación de parámetros en los polinomios $\{q, m\}$

Como vimos, los parámetros de polinomios  $\{q, m\}$  son expresables como funciones simples de respuestas esperadas en los puntos de los diseños simplex reticular. De ello se puede conjeturar que los parámetros se pueden estimar usando las mismas funciones pero ahora de las respuestas observadas. Para ver que así es, consideremos la estimación de los coeficientes de un polinomio  $\{3, 2\}$  a partir del diseño simplex reticular correspondiente, es decir, estimar los parámetros de:

$$\eta = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3$$

Denotemos por  $y_u$  las respuestas observadas, y supongamos que:

$$y_u = \eta_u + \varepsilon_u \quad \varepsilon_u \sim N(0, \sigma^2)$$

independientes

Utilizando la nomenclatura para  $\eta$  antes vista podemos escribir a las respuestas observadas:

$$y_i \rightarrow \eta_i \quad (\text{puras})$$

$$y_{ij} \rightarrow \eta_{ij} \quad (\text{binarias 50 : 50})$$

Con lo que igualando las expresiones (10.9) a los datos respectivos (10.8) se tiene:

$$\hat{\beta}_i = y_i$$

$$\hat{\beta}_{ij} = 4y_{ij} - 2(y_i + y_j), \quad i, j = 1, 2, \dots, q \quad i < j$$

$$\text{ó} \quad \frac{\hat{\beta}_{ij}}{4} = y_{ij} - \frac{y_i + y_j}{2}$$

Si  $r_i$ ,  $r_j$  y  $r_{ij}$  representan el número de réplicas en los puntos de diseño respectivos:

$$\hat{\beta}_i = \bar{y}_i = \left( \frac{\sum y_i's}{r_i} \right) \quad i = 1, 2, \dots, q$$

$$\hat{\beta}_{ij} = 4\bar{y}_{ij} - 2(\bar{y}_i + \bar{y}_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, q \quad i < j$$

Para el caso de un modelo cúbico y cuártico (o polinomio de grado cuatro) las fórmulas son presentadas en Cornell (2002).

Caso general:

$$\mathbf{y}_{N \times 1} = \mathbf{X}_{N \times p} \boldsymbol{\beta}_{p \times 1} + \boldsymbol{\varepsilon}_{N \times 1}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} \sim (\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I})$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

$$V(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\sigma^2$$

$$\text{Si } \boldsymbol{\varepsilon} \sim N(\mathbf{0}, \sigma^2)$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} \sim N(\boldsymbol{\beta}, (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\sigma^2)$$

$$V[\hat{y}(\mathbf{x})] = \mathbf{x}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}\sigma^2$$

Fuente	gl	SC	CM
Regresión	$p - 1$	$SSR = \sum_{u=1}^N (\hat{y}_u - \bar{y})^2 = \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{y} - \frac{(\mathbf{1}'\mathbf{y})^2}{N}$	$SSR/(p - 1)$
Residual	$N - p$	$SSE = \sum_{u=1}^N (y_u - \hat{y}_u)^2 = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \mathbf{b}'\mathbf{X}'\mathbf{y}$	$SSE/(N - p)$
Total	$N - 1$	$SST = \sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y})^2 = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \frac{(\mathbf{1}'\mathbf{y})^2}{N}$	

Tabla 10.2 ANDEVA del modelo de regresión de un diseño en mezclas

**Comparación de un modelo con  $\beta_0$  y un modelo sin  $\beta_0$**  Con  $\beta_0$ , suponga el siguiente modelo:

$$E[y] = \beta_0 + \sum_{j=1}^p \beta_j z_j \quad (10.10)$$

donde cada  $z_j$ ;  $j = 1, \dots, p$  puede ser una función lineal cuadrática u otra de las proporciones componentes  $x_i$ ;  $i = 1, \dots, k$ . Así  $p = k$  en el caso del modelo lineal,  $p = \frac{k(k+1)}{2}$  si el modelo es de segundo orden, etc. La hipótesis nula típica es que la respuesta no depende de las  $z'_j$ s.

$$H_0 : \beta_j = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, p. \quad (10.11)$$

Bajo  $H_0$  :

$$E[y] = \beta_0. \quad (10.12)$$

Por mínimos cuadrados  $\hat{\beta}_0 = \bar{y}$ , promedio de las  $N$  observaciones. Note que  $E[y] = \beta_0$  es un caso particular de  $E[y] = \beta_0 + \sum_{i=1}^p \beta_i z_i$ . Dado que para estimar (10.12) sólo se usa una sola combinación lineal de las  $N$  observaciones:

$$SST = \sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y})^2$$

que tiene  $(N - 1)$  grados de libertad:

$$SSR = \sum_{u=1}^N (\hat{y}_u - \bar{y})^2;$$

la suma de cuadrados de la regresión es la contribución explicada por el ajuste de (10.10). Los grados de libertad de esta suma de cuadrados son el número de parámetros independientes estimados para el modelo (10.10) después de que (10.12) ha sido ajustado.

Si las  $x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  en (10.10) son linealmente independientes, los grados de libertad de  $SSR$  serán  $p$ .

Sin  $\beta_0$  :

$$E[y] = \sum_{i=1}^p \beta_i x_i \quad \text{primer grado} \quad (10.13)$$

La hipótesis nula apropiada es que la respuesta no depende de la mezcla (al cambiar de una a otra):



$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = \beta_0 \quad (10.14)$$

Bajo  $H_0$  :

$$E[y] = \sum_{i=1}^p \beta_0 x_i = \beta_0 \sum_{i=1}^p x_i = \beta_0 \quad (10.15)$$

Por mínimos cuadrados  $\hat{\beta}_0 = \bar{y}$ , promedio de las  $N$  observaciones.

$$SSR = \sum_{u=1}^N (\hat{y}_u - \bar{y})^2$$

la suma de cuadrados de la regresión; el modelo (10.13) contiene  $(q-1)$  parámetros independientes y así SSR asociada tiene  $(q-1)$  grados de libertad. Si:

$$E[y] = \sum_{i=1}^p \beta_i x_i + \sum_{i < j}^p \sum \beta_{ij} x_i x_j \quad (10.16)$$

modelo de segundo orden. Una hipótesis relevante de corroborar es:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_q = \beta_0 \quad y \quad \beta_{ij} = 0, \quad i < j. \quad (10.17)$$

De nuevo los grados de libertad de la SSR correspondiente serían  $\frac{(p+2)(p-1)}{2}$ . De esta forma si se está probando (10.14), ó (10.17) por medio del ajuste de (10.13), ó (10.16) respectivamente, el análisis de varianza apropiado es el dado en la Tabla 10.2.

### 10.8.3 Verificar el grado del modelo ajustado

Dependiendo del diseño utilizado es posible que varios modelos atendiendo a un grado puedan ser ajustados. La pregunta relevante es: ¿con cuál modelo quedarse? Obviamente, por parsimonia siempre el modelo más simple es el mejor, si éste provee de una explicación satisfactoria del fenómeno modelado.

Una medida de bondad de ajuste de un modelo es:

$$R^2 = \frac{SSR}{SST}$$

con:

$$\begin{aligned}
SSR &= \sum_u (\hat{y}_u - \bar{y})^2 = \mathbf{b}' X' \mathbf{y} - \frac{(1' \mathbf{y})^2}{N} \\
SST &= \sum_u (y_u - \bar{y})^2 = \mathbf{y}' \mathbf{y} - \frac{(1' \mathbf{y})^2}{N}
\end{aligned}$$

Sin embargo, hay muchas características del proceso de recolección de datos que pueden influir en el valor de  $R^2$ . Aunque los polinomios ajustados (de Scheffé) no contienen un término constante, la  $SSR$  y la  $SST$  son corregidas ambas por el promedio global, que es un estimado de la respuesta esperada cuando las componentes de la mezcla no afectan a la respuesta.

Aun cuando  $SSR$  y  $SST$  no sean corregidos por el promedio global, el valor de  $R^2$  asociado con el ajuste de polinomios canónicos se ve inflado. Se propone entonces:

$$R_A^2 = 1 - \frac{SSE/(N-p)}{SST/(N-1)}$$

con

$$SSE = \sum_u (y_u - \hat{y}_u)^2 = \mathbf{y}' \mathbf{y} - \mathbf{b}' X' \mathbf{y}$$

$\frac{SSE}{N-p}$  estima la varianza del error del modelo  $y = \beta_0 + \varepsilon$ .

Para las pastas de pescado el modelo de segundo grado tiene  $R_A^2 = 0.379$  y el modelo de tercer grado especial  $R_A^2 = 0.929$ . Una prueba que compara dos modelos en los que uno de ellos contiene como subconjunto al otro, digamos que un modelo reducido a partir de otro se da mediante:

$$F = \frac{(SSE_{\text{reducido}} - SSE_{\text{completo}})/r}{SSE_{\text{completo}}/(N-p)} \sim F_{r, N-p}$$

$r$  es la diferencia en el número de parámetros en el modelo completo y en el modelo reducido. Si  $F$  es poco probable bajo  $F_{r, N-p}$  el modelo completo sería preferible.

Equivalentemente se puede pensar en una hipótesis general por constatar:

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{m}$$

donde  $\boldsymbol{\beta}$  es el vector de parámetros del modelo completo  $\Gamma$  y  $\mathbf{C}$  es una matriz que operacionaliza la reducción del modelo completo; por ejemplo, si

$$\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_{12}, \beta_{13}, \beta_{23})'$$

y se desea ver si:  $\beta_1 = \beta_2$  y  $\beta_{12} = \beta_{13}$

$$\mathbf{C}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{m}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Se puede demostrar que:

$$\begin{aligned} F &= \frac{(\mathbf{C}\mathbf{b}-\mathbf{m})'[\mathbf{C}(\mathbf{X}/\mathbf{X})^{-1}\mathbf{C}']^{-1}(\mathbf{C}\mathbf{b}-\mathbf{m})}{r\{SSE_{\text{completo}}/(N-p)\}} \\ &\sim F_{r, N-p} \end{aligned}$$

En el ejemplo de pastas de pescado, habiendo ajustado un modelo de segundo orden y deseando constatar  $H_0 : \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = 0$ ,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore F &= 0.16 \\ F_{3, 8, .05} &= 4.07 \end{aligned}$$

No se rechaza  $H_0$ , por lo que el modelo de primer grado es preferible al de segundo grado.

#### 10.8.4 Carencia de Ajuste

En el caso de las pastas de pescado el modelo de primer orden aparece como preferible al de segundo orden. Puede haber casos en que un modelo de orden superior es mejor que un modelo de orden inferior, por ello es importante que el diseño contenga corridas que permitan verificar tales casos, en general se habla así de carencia de ajuste.

#### Varios enfoques para verificar carencia de ajuste

1. Réplicas en puntos del diseño. Obtener réplicas en uno o más puntos del diseño, llevando a la partición de  $SSE$  en error puro y en carencia de ajuste. Este es el enfoque revisado en los capítulos anteriores.
2. Puntos de verificación adicionales a los puntos del diseño inicial. En este enfoque se consideran tres etapas:
  - I. Ajuste un modelo al diseño inicial.

- II. Observar al fenómeno en puntos de verificación diferentes a los del diseño inicial.
- III. Compare valores observados en los puntos de verificación con los valores generados por el modelo ajustado en la etapa I, si son muy diferentes es indicativo que el modelo ajustado muestra carencia de ajuste.

¿Cómo seleccionar los puntos de verificación?

Un criterio es seleccionarlos de tal forma que se maximice la probabilidad de rechazar (potencia) la no carencia de ajuste.

Esto depende de cómo se estime a  $\sigma^2$

Si  $\sigma^2$  se estima por datos externos o por réplicas en unos puntos del diseño inicial  $\mapsto \hat{\sigma}_{\text{ext}}^2$

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta_1 + \varepsilon \quad \text{reducido}$$

$$E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}\beta_1 + \underset{(N \times p_2)}{\mathbf{X}_2\beta_2} \quad \text{completo}$$

$$F = \frac{\mathbf{d}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{d}/k}{\hat{\sigma}_{\text{ext}}^2} \sim F_{R,\nu}$$

con  $\mathbf{d} = \mathbf{y}^* - \hat{\mathbf{y}}^*$ ,  $\mathbf{y}^*$  valores en  $k$  puntos de verificación y  $\hat{\mathbf{y}}^*$  los estimados correspondientes por modelo reducido ajustado con el diseño inicial y  $\nu$  grados de libertad de  $\hat{\sigma}_{\text{ext}}^2$ . Ahora:

$$E\left(\frac{\mathbf{d}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{d}}{k}\right) = \sigma^2 + \frac{\beta_2'\mathbf{A}_1\beta_2}{k}$$

$$\text{con } \mathbf{A}_1 = (\mathbf{X}_2^* - \mathbf{X}^*(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}_2)'\mathbf{V}^{-1}(\mathbf{X}_2^* - \mathbf{X}^*(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}_2)$$

Si  $p_2 = 1$   $\mathbf{A}_1$  es un escalar con  $k$  fijo, hay que seleccionar los  $k$  puntos de verificación de tal forma que  $\mathbf{A}_1$  se vea maximizada.

Si  $p_2 > 1$  rango  $(\mathbf{A}_1) = p_2$   
 Cota inferior para la “potencia” es:  
 $\mu_{\min} \beta_2'\beta_2 / 2\sigma^2$ ,  $\mu_{\min} \equiv \min$  eigenvalor de  $\mathbf{A}_1$   
 Seleccionar los  $k$  puntos para maximizar  $\mu_{\min}$ .

rango  $(\mathbf{A}_1) < p_2$

Sea  $\mu_{\min}^+$  el eigenvalor positivo más pequeño de  $\mathbf{A}_1$ .

Entonces seleccionar los  $k$  puntos de verificación que maximicen  $\mu_{\min}^+$ .

Si  $\sigma^2$  no se puede estimar de manera “externa”.

El cuadrado medio de residuales ( $MSE$ ) se usa para estimar  $\sigma^2$ , siendo este cuadrado medio de residuales tomado de la tabla ANDEVA del modelo

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}.$$

La estadística de prueba de carencia de ajuste es:

$$F = \frac{\mathbf{d}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{d}}{k \text{ MSE}}$$

donde:

$$E(\mathbf{d}'\mathbf{V}^{-1}\mathbf{d}/k) = \sigma^2 + \boldsymbol{\beta}_2'\mathbf{A}_1\boldsymbol{\beta}_2/k$$

Para el denominador:

$$E(MSE) = \sigma^2 + \frac{\boldsymbol{\beta}_2'\mathbf{A}_2\boldsymbol{\beta}_2}{N-p}$$

donde:

$$\mathbf{A}_2 = (\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}_2)'(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{X}_2).$$

$(p_2 \times p_2)$

Definiendo  $\lambda_2 = \frac{\boldsymbol{\beta}_2'\mathbf{A}_2\boldsymbol{\beta}_2}{2\sigma^2}$ , entonces cuando:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$   $F \sim F_{R,N-p}$ . Si  $\lambda_1 > 0$  y  $\lambda_2 > 0$ , entonces el cociente  $F$  tiene como distribución muestral una  $F$  doblemente no central con parámetros de **no** centralidad  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . La prueba  $F$  puede ser tanto unilateral como bilateral dependiendo de las propiedades de  $A_1$  y  $A_2$  en  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  respectivamente, así como en los grados de libertad  $k$  y  $N-p$ . Sea:

$$R = \frac{A_1}{k} - \frac{A_2}{N-p}$$

Si  $R > 0$ , la prueba  $F$  de carencia de ajuste tiene una región de rechazo en la cola superior de la distribución muestral. Si  $R < 0$ , la región de rechazo se ubica en la cola inferior de la distribución muestral. Los puntos para verificar carencia de ajuste en el primer caso ( $R > 0$ ) deben ser tales que maximicen  $\lambda_1$ . Los puntos para verificar carencia de ajuste en el segundo caso ( $R < 0$ ) deben ser tales que minimicen  $\lambda_1$ . Ver Shelton *et al.* (1983) para detalles en lo anterior, y Price (1977) para un algoritmo de búsqueda de puntos de verificación.

**Ejemplo 10.7** Para ilustrar el uso de puntos de verificación para probar carencia de ajuste.

Tres componentes en la mezcla para determinar si un edulcorante artificial puede ser usado en una bebida atlética deportiva.

Los edulcorantes son glicina, sacarina y un realzador. La cantidad fue fijada en 4% del volumen total (250 ml).

	Glicina	Sacarina	Realzador				
Mezcla	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$		$\hat{y}$	
1	1	0	0	10.1	10.7	10.4	
2	0	1	0	5.8	6.5	6.15	
3	0	0	1	4.2	3.6	3.9	
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	14.5	15.4	15.0	14.97
5	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	12.9	12.0	11.6	12.17
6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	11.6	13.0	12.2	12.27

Con estos datos se ajusta el modelo de segundo grado, resultando:

$$\hat{y}(\mathbf{x}) = \underset{(0.40)}{10.40}x_1 + \underset{(0.40)}{6.15}x_2 + \underset{(0.40)}{3.90}x_3 + \underset{(1.73)}{26.77}x_1x_2 + \underset{(1.73)}{20.07}x_1x_3 + \underset{(1.73)}{28.97}x_2x_3$$

$$\hat{\sigma}_{ext}^2 = 0.3206 \text{ (Error puro de réplicas)}$$

con  $15 - 6 = 9$  grados de libertad. Las predicciones usando tal modelo coinciden con los promedios de la respuesta en cada punto del diseño dado que con seis puntos se estiman seis parámetros en el modelo.

¿Carencia de ajuste dentro del simplex? Puntos de verificación:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$			
7	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	Centroide		
8	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	Mitad entre centroide y vértices		
9	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$	(note que son puntos axiales vistos		
10	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	estos conceptualmente más adelante).		
				$\hat{y}^*$	$y^*(20 \text{ personas})$	
				7	15.24	8.2
				8	14.62	17
				9	13.23	6
				10	11.55	7.2

$$\mathbf{d} = \mathbf{y}^* - \hat{\mathbf{y}}^* = (-7.04, 2.38, -7.23, -4.35)$$

$$\mathbf{V}^* \sigma^2 = \{\mathbf{I}_4 + \mathbf{X}^* (\mathbf{X}' \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^{*'}\} \sigma^2$$

$$F = \frac{\mathbf{d}' \mathbf{V}^{-1} \mathbf{d}}{4(0.3206)} = \frac{96.7714}{1.2824} = 75.26$$

$F_{4,9}$ ,  $\alpha = 0.01 = 6.42$  se rechaza que no haya carencia de ajuste en el interior del símplex. Utilizando todos los puntos se tiene el siguiente ajuste cuadrático.

$$\hat{y} = \underset{(1.92)}{11.52x_1} + \underset{(1.92)}{5.80x_2} + \underset{(1.92)}{3.99x_3} + \underset{(8.07)}{20.39x_1x_2} + \underset{(8.07)}{13.99x_1x_3} + \underset{(8.07)}{21.91x_2x_3}$$

con  $MSE = 99.6567$  con  $19 - 6$  gl. Error puro  $2.8854$  con  $9$  gl. Suma de cuadrados de carencia de ajuste es:  $99.6567 - 2.8854 = 96.7713$ ,  $13 - 9$  gl =  $4$  gl. Con lo que:

$$F = 75.46 > F_{4,9}, \alpha = 0.01 = 6.42$$

detectándose así carencia de ajuste. Se ajusta entonces el modelo cúbico especial:

$$\hat{y} = \underset{(1.39)}{11.25x_1} + \underset{(1.39)}{5.54x_2} + \underset{(1.39)}{3.73x_3} + \underset{(6.09)}{26.93x_1x_2} + \underset{(6.09)}{20.52x_1x_3} + \underset{(6.09)}{28.44x_2x_3} - \underset{(50.09)}{180.68x_1x_2x_3}$$

aún con carencia de ajuste.

### Ejemplo 10.8

$$0.3 \leq X_1, 0.4 \leq X_2, 0.1 \leq X_3$$

Esta redefinición de las componentes se llama  $L$ -seudocomponentes. Éstas seudocomponentes  $W_i$  se definen usando la siguiente transformación:

$$W_i = \frac{X_i - L_i}{1 - L}$$

donde:

$$L = \sum_{i=1}^k L_i < 1$$

Ésta es la suma de todas las cotas inferiores. Use la situación descrita para ilustrar la relación entre estas dos últimas expresiones. Las seudocomponentes son:

$$W_1 = \frac{X_1 - 0.3}{0.2}, \quad W_2 = \frac{X_2 - 0.4}{0.2}, \quad W_3 = \frac{X_3 - 0.1}{0.2}$$

Las componentes originales son:

$$X_i = L_i + (1 - L)W_i$$

Aplicando esta expresión se tiene:

$$X_1 = 0.3 + 0.2W_1$$

$$X_2 = 0.4 + 0.2W_2$$

$$X_3 = 0.1 + 0.2W_3$$

Para ilustrar considere el punto  $W_1 = \frac{1}{2}$ ,  $W_2 = \frac{1}{2}$ , y  $W_3 = 0$ . En términos de las componentes originales este punto es:

$$W_1 = 0.3 + 0.2\left(\frac{1}{2}\right) = 0.4$$

$$W_2 = 0.4 + 0.2\left(\frac{1}{2}\right) = 0.5$$

$$W_3 = 0.1 + 0.2(0) = 0.1$$

**Ejemplo 10.9** El ejemplo incluye una mezcla de combustible  $X_1$ , un oxidante  $X_2$  y un aditivo  $X_3$ , se juntan estos componentes para formar una sustancia que se utilizará en el sistema de escape de un avión. En este proceso se tienen tres variables de respuesta: primero la razón de quemado, la desviación estándar de esta razón y el índice de manufactura que refleja el costo y la dificultad asociada con producir una mezcla particular.

Las condiciones:

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0.9$$

$$0.3 \leq X_1 \quad 0.2 \leq X_2 \quad 0.2 \leq X_3$$

Las tres componentes hacen el 90 % de la mezcla. El sistema para las pseudo-componentes es:

$$W_i = \frac{X_i - L_i}{0.9 - \sum_{i=1}^3 L_i}$$

Retornando a las componentes originales,



$$X_i = L_i + (0.9 - \sum_{i=1}^3 L_i)W_i$$

es decir:

$$W_1 = 0.3 + 1(0.2) = 0.5$$

$$W_2 = 0.2 + 1(0.2) = 0.2$$

$$W_3 = 0.2 + 0(0.2) = 0.2$$

Restricciones en la cota superior en las componentes. Considere la siguiente situación:

$$X_1 \leq 0.4 \quad X_2 \leq 0.5 \quad X_3 \leq 0.3$$

Un caso particular se describe en la siguiente situación:

$$X_1 \leq 0.7 \quad X_2 \leq 0.5 \quad X_3 \leq 0.8$$

En este caso se tiene un símplex invertido.

En general cuando la restricción de la cota superior está presente  $X_1 \leq U$ , la región factible será un símplex invertido que está apoyado completamente dentro del símplex original o en el símplex sin restricciones si y sólo si:

$$\sum_{i=1}^k U_i - U_{\min} \leq 1$$

Aplice esta última expresión a los casos expuestos:

$$\sum_{i=1}^k U_i = 0.4 + 0.5 + 0.3 = 1.2$$

$$\sum_{i=1}^k U_i - U_{\min} = 1.2 - 0.3 < 1$$

La región factible es un símplex invertido.

$$\sum_{i=1}^k U_i = 0.7 + 0.5 + 0.8 = 2.0$$

$$\sum_{i=1}^k U_i - U_{\min} = 2.0 - 0.5 = 1.5 > 1$$

La región factible no es un símplex invertido. La relación entre las u-seudocomponentes y las originales se dan mediante las siguientes dos expresiones:

$$u_i = \frac{U_i - X_i}{\sum_{i=1}^k U_i - 1}, \quad i = 1, 2, \dots, k \quad \text{donde} \quad \sum_{i=1}^k U_i > 1$$

$$X_i = U_i - \left( \sum_{i=1}^k U_i - 1 \right) u_i$$

## 10.9 Ejercicios

**Ejercicio 10.1** El símplex es conocido en términos geométricos como una figura regular. ¿Qué es una figura regular?

Polígono: Una porción de un plano limitado por segmentos de recta (lados del polígono). Los polígonos se pueden clasificar por los ángulos:

- Equiángulo: cuando todos sus ángulos son iguales.
- Conexo: cuando no tiene ángulos internos entrantes.
- Cóncavo: cuando tiene ángulos internos entrantes.
- Polígono regular (conexo): es el que a la vez es equiángulo y equilátero.

**Ejercicio 10.2** Lista los componentes mezclas en un símplex láctice  $\{2,4\}$ . Lista las 20 mezclas de un símplex láctice  $\{4,3\}$ .

1.  $\{k, m\}$ ,  $k$  componentes cada uno en  $m + 1$  valores equiespaciados de 0 a 1,  $x_i = 0, \frac{1}{m}, \frac{2}{m}, \dots, 1 \quad i = 1, \dots, k$  con  $\binom{k+m-1}{m}$  puntos de diseño.  $\{2,4\}$  2 componentes cada uno en 5 valores equiespaciados,  $x_i = 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 1 \quad i = 1, 2, \binom{2+4-1}{4} = \binom{5}{4} = 5$

$$\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 1 \\ 2 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 3 & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ 4 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 5 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\{4,3\}, x_i = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20:$$

1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	11	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	12	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	13	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	14	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
5	1	0	0	0	15	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0
6	0	1	0	0	16	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0
7	0	0	1	0	17	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
8	0	0	0	1	18	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0
9	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	19	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
10	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	20	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

**Ejercicio 10.3** Gasolina A, Gasolina B y una mezcla 50% : 50% A : B.

- Determine si la mezcla A : B es Sinérgica, Antagónica o Aditiva.

	A	B	A : B
1	17	10	15
2	12	18	15
3	6	6	4
4	10	20	12
5	9	12	12

La lógica aquí es: si el promedio simple de las respuestas de cada componente es mayor al de la mezcla se dice que la mezcla es antagonista, y si viceversa se dice que la mezcla es sinérgica.

- 

	A	B	$(A+B)/2$		A : B	A : B es
1	17	10	13.5	<	15	sinérgica
2	12	18	15	=	15	aditiva
3	6	6	6	>	4	antagónica
4	10	20	15	>	12	antagónica
5	9	12	10.5	<	12	sinérgica

**Ejercicio 10.4** Muestre que para  $k = 3$  el modelo cúbico especial es:

$$\eta = \sum_{i=1}^k \beta_i x_i + \sum_{i < j}^k \beta_{ij} x_i x_j + \sum_{i < j < k} \beta_{ijk} x_i x_j x_k$$

Ajustado a un simplex láctice  $\{3,2\}$  con un punto centroide en  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ , entonces:

$$\beta_{123} = 27\eta_{123} - 12(\eta_{12} + \eta_{13} + \eta_{23}) + 3(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3)$$

$$k = 3$$

$$\eta = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \beta_{123} x_1 x_2 x_3$$

$$\begin{array}{l|l|l} \eta_1 = \beta_1 & \eta_{12} = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_2) + \frac{1}{4}\beta_{12} & \eta_{123} = \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + \\ \eta_2 = \beta_2 & \eta_{13} = \frac{1}{2}(\beta_1 + \beta_3) + \frac{1}{4}\beta_{13} & + \frac{1}{9}(\beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{23}) + \\ \eta_3 = \beta_3 & \eta_{23} = \frac{1}{2}(\beta_2 + \beta_3) + \frac{1}{4}\beta_{23} & \frac{1}{27}\beta_{123} \end{array}$$

$$\eta_{123} = \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) + \frac{1}{9}(\beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{23}) + \frac{1}{27}\beta_{123}.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \beta_{123} &= 27 \left[ \eta_{123} - \frac{1}{9}(\beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{23}) - \frac{1}{3}(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3) \right] \\ &= 27 \left[ \eta_{123} - \frac{1}{9}(\beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{23}) - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \eta_i \right] \end{aligned}$$

$$\eta_{12} = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) + \frac{1}{4}\beta_{12}$$

Entonces:

$$\beta_{12} = 4 \left[ \eta_{12} - \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) \right]$$

$$\eta_{13} = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_3) + \frac{1}{4}\beta_{13}$$

Entonces:

$$\beta_{13} = 4 \left[ \eta_{13} - \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_3) \right]$$

$$\eta_{23} = \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3) + \frac{1}{4}\beta_{23}$$

Entonces:

$$\beta_{23} = 4 \left[ \eta_{23} - \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3) \right]$$

por lo que:

$$\begin{aligned}\beta_{123} &= 27 \left\{ \eta_{123} - \frac{1}{9} \left[ 4 \left( \eta_{12} + \eta_{13} + \eta_{23} - \frac{1}{2}(2\eta_1 + 2\eta_2 + 2\eta_3) \right) \right] - \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \eta_i \right\} \\ &= 27\eta_{123} - 12[\eta_{12} + \eta_{13} + \eta_{23}] + 12 \sum_{i=1}^3 \eta_i - 9 \sum_{i=1}^3 \eta_i\end{aligned}$$

Respecto al ejemplo de elongación de tela en base a tres componentes, prediga la elongación en  $\mathbf{x} = (0.40, 0.30, 0.30)'$  y establezca un intervalo de confianza para  $\eta$  en  $\mathbf{x}$ .

$$\hat{y} = 11.7x_1 + 9.4x_2 + 16.4x_3 + 19x_1x_2 + 11.4x_1x_3 - 9.6x_2x_3$$

$$\hat{y}(0.40, 0.30, 0.30) = 15.20$$

$$V[\hat{y}] = s^2 \left( \sum_{i=1}^3 \frac{a_i^2}{r_i} + \sum_{i < j}^3 \sum \frac{a_{ij}^2}{r_{ij}} \right)$$

$$V[\hat{y}] = 0.1565$$

$$a_i = x_i(2x_i - 1), \quad a_{ij} = 4x_i x_j$$

$r_i$  réplicas en mezcla para  $i$ ,  $r_{ij}$  réplicas en mezcla binaria  $(i, j)$ .

$$\begin{aligned}\hat{y}(\mathbf{x}) - \Delta < \eta < \hat{y}(\mathbf{x}) + \Delta \\ \Delta = [t_{f, \mu^2}] \{ \hat{V}[\hat{y}(\mathbf{x})] \}^{1/2} \quad f \text{ grados de libertad de la estimación de } \sigma^2\end{aligned}$$

Con los datos:

$$\Delta = 0.895$$

$$\frac{\bar{Y}_{CHECK} - \hat{y}(\mathbf{x}_0)}{\sqrt{V[\hat{V}_{CHECK}] + \hat{V}[\hat{y}]}} \sim t_f$$

Supuesta como  $\sigma^2/2$ .

$\{3,2\}$  símplex ládice

$$\begin{aligned} b_1 = 5.5 &= \hat{\eta}_1 & \frac{1}{4}\hat{\beta}_{12} = 8.75 &= \left[\eta_{12} - \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2)\right] \\ \hat{\beta}_2 = 7.0 &= \hat{\eta}_2 & \frac{1}{4}\hat{\beta}_{13} = 2.25 &= \left[\eta_{13} - \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_3)\right] \\ \hat{\beta}_3 = 8.0 &= \hat{\eta}_3 & \frac{1}{4}\hat{\beta}_{23} = 4.5 &= \left[\eta_{23} - \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_3)\right] \end{aligned}$$

Usando (2.16) del texto: 12 corridas en  $(x_1, x_2, x_3)$  tres componentes. El modelo propuesto es:

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3 + \varepsilon.$$

Separando grados de libertad del error en LOF + error puro. Observe la varianza de  $\hat{\beta}_{ij}$ .

**Ejercicio 10.5** En un experimento de tecnología de alimentos (González Cataño, 2008) se desea estudiar formulaciones alternativas de los denominados análogos de queso. El interés radica en comprender cómo la substitución de caseína de leche por suero de leche wpc / almidón afecta características de calidad del queso. La formulación básica del producto consta de cuatro componentes: caseína, grasa, cierta combinación de suero de leche con almidón y agua. Se propuso un diseño de mezclas para estudiar los efectos principales de cada elemento de la formulación y sus interacciones dobles. El conjunto de datos abajo corresponde al diseño y a una de las variables respuesta medidas en el producto final denominada "fundido". Realice el ajuste del modelo e interprete los resultados.

caseína	grasa	agua	Mezcla (wpc-almidon)	Fundido
0.26	0.18	0.52	0.04	8.25
0.26	0.15	0.50	0.09	8.35
0.18	0.22	0.54	0.07	3.1
0.26	0.18	0.50	0.07	8.25
0.26	0.17	0.52	0.06	7.9
0.18	0.20	0.58	0.04	6.9
0.21	0.22	0.53	0.04	3.7
0.22	0.22	0.50	0.07	3.95
0.24	0.20	0.50	0.07	5.55
0.26	0.20	0.50	0.04	7.2
0.20	0.19	0.52	0.09	3.05
0.22	0.19	0.54	0.06	4.7
0.25	0.21	0.50	0.04	6.75
0.26	0.15	0.55	0.04	8.35
0.21	0.18	0.58	0.04	4.65
0.23	0.19	0.50	0.09	5.55
0.23	0.15	0.55	0.07	6.5
0.18	0.21	0.57	0.04	5
0.20	0.22	0.52	0.07	2.8
0.20	0.17	0.58	0.06	4.25
0.25	0.15	0.56	0.04	7.65
0.21	0.15	0.58	0.07	4.15
0.18	0.18	0.58	0.07	3.05
0.18	0.19	0.54	0.09	2.5
0.23	0.15	0.58	0.04	6.35
0.19	0.22	0.51	0.09	2.05
0.22	0.15	0.54	0.09	5.05
0.18	0.22	0.56	0.04	3.975
0.18	0.22	0.51	0.09	2
0.26	0.15	0.52	0.07	8.8
0.24	0.22	0.50	0.04	4.4
0.19	0.22	0.50	0.09	2
0.18	0.20	0.56	0.07	1.75
0.23	0.19	0.55	0.04	4.25
0.18	0.15	0.58	0.09	2.8

**Ejercicio 10.6**

Pastas de pescado fueron formuladas a partir de tres tipos de pescados marinos, denotas sus proporciones por:  $x_1, x_2, x_3$ . Para estudiar el comportamiento en la textura ( $y$ ) de las mezclas se utilizó un diseño simplex centroide como el que se muestra a continuación, con dos réplicas por mezcla.

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$	
1	0	0	2.02	2.08
0	1	0	1.47	1.37
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1.91	2.00
0	0	1	1.93	1.83
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1.98	2.13
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1.80	1.71
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1.46	1.50

Ajuste un modelo de segundo orden con términos en  $(x_1, x_2, x_3, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$ ; verifique su significancia global y de cada parámetro. Compare contra el modelo sin interacciones. Interprete y exprese recomendaciones prácticas en el contexto de la elaboración de pastas de pescado.

**Ejercicio 10.7**

Tres componentes en la mezcla para determinar si un edulcorante artificial puede ser usado en una bebida atlética deportiva. Los edulcorantes son glicina, sacarina y un realzador. La cantidad fue fijada en 4% del volumen total (250 ml). Se utilizó un diseño simplex reticular como el que se muestra a continuación.

	Glicina	Sacarina	Realzador			
Mezcla	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$y$		
1	1	0	0	10.1	10.7	
2	0	1	0	5.8	6.5	
3	0	0	1	4.2	3.6	
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	14.5	15.4	15.0
5	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	12.9	12.0	11.6
6	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	11.6	13.0	12.2

Con estos datos realice los ajustes de modelos pertinentes e interprete resultados.

**Ejercicio 10.8** Se realizó un proceso químico atacado con ácido para la fabricación de semiconductores. La solución para el grabado es una mezcla de tres tipos de ácido diferente. El objetivo es evaluar el efecto que provoca esta mezcla en la razón de grabado. El diseño fue un simplex aumentado. Se hicieron

repeticiones en las mezclas puras y en el centroide. Los datos que resultaron del experimento se muestran a continuación:

Punto	$X_1$ Ácido A	$X_2$ Ácido B	$X_3$ Ácido C	$y(A/m)$
1	1	0	0	540, 560
2	0	1	0	330, 350
3	0	0	1	295, 260
4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	610
5	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	330
6	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	425
7	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	710
8	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{6}$	640
9	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	460
10	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	800, 850

Ajuste el modelo lineal y cuadrático. Pruebe la significancia del modelo, la falta de ajuste, el efecto de las variables, el análisis de residuales y la optimización. Pruebe la hipótesis:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta, \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{23} = 0$$

$$H_1 : \text{Al menos una igualdad es falsa}$$



# Apéndices Técnicos

## Apéndice Técnico A

### Estimadores por mínimos cuadrados para un modelo de un factor

En esta sección derivamos la forma de obtener los estimadores de los parámetros del modelo (2.12);

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \mu + \delta_i + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \sim (0, \sigma^2) \text{ e independientes} \\ i &= 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, n_i; \end{aligned}$$

es decir, un modelo correspondiente a un diseño unifactorial con  $k$  niveles y  $n_i$  replicaciones y sin restricciones en la aleatorización de tratamientos. Los estimadores se obtendrán utilizando el principio de mínimos cuadrados:

$$\min_{\mu(\delta_i)} \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}^2 = \sum_{i,j} (y_{ij} - \mu - \delta_i)^2$$

Utilizando cálculo diferencial, los estimadores deben cumplir con las siguientes  $(k + 1)$  ecuaciones simultáneas:

$$\sum_{i,j} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\delta}_i) = 0 \quad (10.18)$$

$$\sum_{j=1}^{n_i} (y_{ij} - \hat{\mu} - \hat{\delta}_i) = 0, i = 1, \dots, k \quad (10.19)$$

Estas ecuaciones son linealmente dependientes por lo que es necesario para encontrar una solución única a tal sistema una condición sobre los estimadores que permita encontrar tal solución. Generalmente la condición que se añade es:

$$\sum_{i=1}^k \hat{\delta}_i = 0 \quad (10.20)$$

De (10.18) se obtiene que:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i,j} y_{ij} - n_i \sum_i \hat{\delta}_i}{k \sum_i n_i}$$

Utilizando la restricción (10.20), se tiene entonces que:

$$\hat{\mu} = \frac{\sum_{i,j} y_{ij}}{a \sum_i n_i} = \bar{y} \dots$$

De (10.19) se tiene:

$$\hat{\delta}_i = \bar{y}_{i.} - \hat{\mu} = \bar{y}_{i.} - \bar{y} \dots$$

Utilizando los estimadores obtenidos, el criterio de optimalidad equivale entonces a

$$\sum_{i,j} e_{ij}^2 = \sum_{i,j} (y_{ij} - \bar{y}_{i.})^2 \quad (10.21)$$

donde en este caso  $e_{ij}$ 's representan a los residuales correspondientes al modelo postulado. Note que (10.21) es la suma de cuadrados del error que estima a la varianza  $\sigma^2$  de los términos de error en el modelo.

Este procedimiento es aplicable a cualquiera de los modelos correspondientes a los diseños estadísticos revisados en este libro.

Finalmente hay que notar que la restricción adicional impuesta sobre los  $\hat{\delta}_i$ 's no sería necesaria si en lugar del modelo (2.12) se hubiera postulado el llamado modelo de medias por celda (*cell means model*).

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \mu_i + \varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{ij} \sim (0, \sigma^2) \text{ independientes} \\ i &= 1, \dots, k; j = 1, \dots, n_i \end{aligned}$$

En tal caso los estimadores requeridos por mínimos cuadrados sólo serían los correspondientes a las  $\mu_i$ 's.

## Apéndice Técnico B

### Valores esperados de las sumas de cuadrados en un modelo con un factor

$$\begin{aligned} SC_{total} &= SC_{error} + SC_{trata} \\ &\quad (\text{dentro}) \quad (\text{entre}) \end{aligned}$$

$$\frac{SC_{error}}{N-a} \text{ (dentro de cada tratamiento)}$$

$$N = \sum_{i=1}^a n_i$$

puede suponerse como un estimador de la varianza del error experimental  $\sigma^2$ .

$$\frac{SC_{trata}}{a-1}$$

estima a  $\sigma^2$  si las medias de tratamiento son iguales entre sí.

$$E \left[ \frac{SC_{error}}{N-a} \right] = \sigma^2$$

$$E \left[ \frac{SC_{trata}}{a-1} \right] = \sigma^2 + \frac{m}{a-1} E \left[ \sum_i (\mu_i - \frac{\sum_i \mu_{i'}}{a})^2 \right]$$

Caso balanceado:

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

$$SC_{trat} = n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2$$

$$\bar{y}_{i\bullet} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n y_{ij} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\mu_i + \varepsilon_{ij}) = \mu_i + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} = \mu_i + \bar{\varepsilon}_i$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{\bullet\bullet} &= \frac{1}{na} \sum_i \sum_j Y_{ij} = \frac{1}{na} \sum_i \sum_j (\mu_i + \varepsilon_{ij}) \\ &= \frac{1}{na} \sum_{i=1}^a n\mu_i + \frac{1}{na} \sum_j \sum_i \varepsilon_{ij} = \mu + \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet} \end{aligned}$$

$$\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet} = \mu_i + \bar{\varepsilon}_{i\bullet} - \mu - \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet}$$

$$(\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = (\mu_i - \mu)^2 + (\bar{\varepsilon}_{i\bullet} - \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet})^2 + 2(\mu_i - \mu)(\bar{\varepsilon}_{i\bullet} - \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet})$$

$$n \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet})^2 = n \sum_i (\mu_i - \mu)^2 + n \sum_i (\bar{\varepsilon}_{i\bullet} - \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet})^2 + 2 \sum_i (\mu_i - \mu)(\bar{\varepsilon}_{i\bullet} - \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet})$$

$$E [SC_{trat}] =$$

$$nE \left[ \sum_{i=1}^a (\mu_i - \bar{\mu})^2 \right] + nE \left[ \sum_i (\bar{\varepsilon}_{i\bullet} - \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet})^2 \right] + 2n \sum_{i=1}^a (\mu_i - \bar{\mu}) E \left[ \sum_i (\bar{\varepsilon}_{i\bullet} - \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet}) \right]$$

donde:

$$\begin{aligned} nE \left[ \sum_i (\bar{\varepsilon}_{i\bullet} - \bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet})^2 \right] &= nE \left[ \sum_i \bar{\varepsilon}_{i\bullet}^2 + a\bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet} - 2\bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet} \sum_i \bar{\varepsilon}_{i\bullet} \right] \\ &= n \left\{ \sum_i E[\bar{\varepsilon}_{i\bullet}^2] - aE[\bar{\varepsilon}_{\bullet\bullet}] \right\} = n \left\{ a\frac{\sigma^2}{n} - a\frac{\sigma^2}{na} \right\} \\ &= a\sigma^2 - \sigma^2 = \sigma^2(a-1) \end{aligned}$$

$$E \left[ \frac{SC_{trat}}{(a-1)} \right] = \frac{n}{a-1} E \left[ \sum_i (\mu_i - \bar{\mu})^2 \right] + \sigma^2$$

Bajo  $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_a$

$$E \left[ \frac{SC_{trat}}{(a-1)} \right] = \sigma^2$$

$SC_{error}$

$$y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_{i\bullet} - \bar{y}_{\bullet\bullet} &= \mu_i + \varepsilon_{ij} - \mu_i - \bar{\varepsilon}_{i\bullet} = \mu_i - \mu_i + (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i\bullet}) \\ y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet} &= (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i\bullet}) \\ (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2 &= (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i\bullet})^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2 &= \sum_i \sum_j (\varepsilon_{ij} - \bar{\varepsilon}_{i\bullet})^2 \\
&= \sum_i \sum_j (\varepsilon_{ij}^2 + \bar{\varepsilon}_{i\bullet}^2 - 2\varepsilon_{ij}\bar{\varepsilon}_{i\bullet}) \\
&= \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^2 + \sum_i \sum_j \bar{\varepsilon}_{i\bullet}^2 - 2 \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}\bar{\varepsilon}_{i\bullet} \\
&= \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^2 + n \sum_i \bar{\varepsilon}_{i\bullet}^2 - 2 \sum_i \bar{\varepsilon}_{i\bullet} \sum_j \varepsilon_{ij} \\
&= \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^2 + n \sum_i \bar{\varepsilon}_{i\bullet}^2 - 2n \sum_i \bar{\varepsilon}_{i\bullet}^2 \\
&= \sum_i \sum_j \varepsilon_{ij}^2 - n \sum_i \bar{\varepsilon}_{i\bullet}^2
\end{aligned}$$

$$E \left[ \sum_i \sum_j (y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet})^2 \right] = na\sigma^2 - n \frac{\sigma^2}{n} = na\sigma^2 - \sigma^2 = \sigma^2(na - 1)$$

$$E \left[ \frac{SC_{error}}{na - 1} \right] = \sigma^2$$

Por lo tanto:

$$\frac{E \left[ \frac{SC_{trat}}{a-1} \right]}{E \left[ \frac{SC_{error}}{na-1} \right]} = 1$$

Bajo  $H_0$ .

## Apéndice Técnico C

### Valores esperados de suma de cuadrados en un modelo bifactorial

El valor esperado de una variable aleatoria es el promedio de su valor. En el análisis de la varianza son importantes los valores esperados para el cuadrado medio del error y el cuadrado medio de los factores. Considere el siguiente modelo:

$$y_{ijk} = \mu + \delta_{A_i} + \delta_{B_j} + \delta_{AB_{ij}} + \varepsilon_{k(ij)}$$

$$i = 1, \dots, a \quad j = 1, \dots, b \quad k = 1, \dots, n$$

donde  $A$  y  $B$  son los factores con  $a$  y  $b$  niveles respectivamente. En este apéndice se presentan el valor de los cuadrados medios correspondientes a algunos modelos estudiados en el texto. Se han considerado factores con niveles fijos o aleatorios.

$A$  fijo,  $\sum \delta_A = 0$

$B$  aleatorio

$$SC_A = nb \sum_{i=1}^a (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2$$

$$\bar{y}_{i..} = \mu + \delta_{A_i} + \frac{1}{b} \sum_j \delta_{B_j} + \frac{1}{b} \sum_i \delta_{AB_{ij}} + \sum_j \sum_l \frac{\varepsilon_{l(ij)}}{bn}$$

$$\bar{y}_{...} = \mu + \frac{1}{a} \sum_J \delta_{A_i} + \frac{1}{b} \sum_j \delta_{B_j} + \frac{1}{ab} \sum_i \sum_j \delta_{AB_{ij}} + \frac{1}{abn} \sum_i \sum_j \sum_l \varepsilon_{l(ij)}$$

$$\begin{aligned} (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...}) &= \delta_{A_i} - \frac{1}{a} \sum \delta_{A_i} + \frac{1}{b} \sum_j \delta_{AB_{ij}} - \frac{1}{ab} \sum_i \sum_j \delta_{AB_{ij}} + \sum_j \sum_l \varepsilon_{l(ij)} \\ &\quad - \frac{1}{abn} \sum_i \sum_j \sum_l \varepsilon_{l(ij)} \end{aligned}$$

$$nb \sum_i (\bar{y}_{i..} - \bar{y}_{...})^2 = nb \sum_i \left( \delta_{A_i} + \frac{1}{bn} \sum_j \sum_l \varepsilon_{l(ij)} - \frac{1}{abn} \sum_i \sum_j \sum_l \varepsilon_{l(ij)} \right)^2$$

$$= nb \sum_i \left\{ \delta_{A_i}^2 + \left( \frac{1}{bn} \sum_j \sum_l \varepsilon_{l(ij)} - \frac{1}{abn} \sum_i \sum_j \sum_l \varepsilon_{l(ij)} \right)^2 - 2\delta_{A_i} \delta_A \right\}$$

donde:

$$\delta_A = \frac{1}{bn} \sum_j \sum_l \varepsilon_{l(ij)} - \frac{1}{abn} \sum_i \sum_j \sum_l \varepsilon_{l(ij)}$$

$$\begin{aligned} \delta_A^2 &= \left( \sum_i \sum_l \frac{1}{bn} \varepsilon_{l(ij)} \right)^2 + \frac{1}{(abn)^2} \left( \sum_i \sum_j \sum_l \varepsilon_{l(ij)} \right)^2 \\ &\quad - 2 \left( \sum_j \sum_l \frac{1}{bn} \varepsilon_{l(ij)} \right) \left( \frac{1}{abn} \sum_i \sum_j \sum_l \varepsilon_{l(ij)} \right) \end{aligned}$$

$$= \sum_j \sum_l \frac{1}{(bn)^2} \varepsilon_{l(ij)}^2 + \text{cruzados} + \frac{1}{(abn)^2} \left( \sum_i \sum_j \sum_l \varepsilon_{l(ij)}^2 + \text{cruzados} \right) - \frac{2}{ab^2c^2} \left( \sum_i \sum_j \varepsilon_{l(ij)}^2 + \text{cruzados y simples} \right)$$

$$\begin{aligned} E[SC_A] &= nb \left\{ \sum_i \delta_{A_i}^2 + \sum_i E(\delta_A^2) - 2 \sum_i \delta_{A_i} E(\delta_A) \right\} \\ &= nb \left\{ \sum_i \delta_{A_i}^2 + \frac{bn}{(bn)^2} \sigma_\varepsilon^2 + \frac{abn}{(abn)^2} \sigma_\varepsilon^2 - \frac{2bn}{ab^2n^2} \sigma_\varepsilon^2 \right\} \\ &= nb \left\{ \sum_i \delta_{A_i}^2 + \frac{a}{bn} \sigma_\varepsilon^2 + \frac{a\sigma_\varepsilon^2}{abn} - \frac{2a}{abn} \sigma_\varepsilon^2 \right\} \\ &= nb \sum_i \delta_{A_i}^2 + nb \left( \frac{a}{nb} - \frac{a}{abn} \right) \sigma^2 \\ &= nb \sum_i \delta_{A_i}^2 + nb \left( \frac{a^2 - a}{abn} \right) \sigma_\varepsilon^2 \\ &= nb \sum_i \delta_{A_i}^2 + (a - 1) \sigma_\varepsilon^2 \\ &= nb \sum_i \delta_{A_i}^2 + \frac{abn(a - 1)}{abn} \sigma_\varepsilon^2 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$E\left(\frac{SC_A}{gl}\right) = E(CM_A) = \sigma_\varepsilon^2 + \frac{nb}{a - 1} \sum_i \delta_{A_i}^2.$$

Así si el modelo es:

$$y_{ijk} = \mu + \delta_{A_i} + \delta_{B_j} + \delta_{AB_{ij}} + \varepsilon_{k(ij)}$$

$$i = 1, 2, \dots, a \quad j = 1, 2, \dots, b \quad l = 1, 2, \dots, n$$

$$\begin{aligned} \mu &\text{ es fijo} \\ \varepsilon_{l(ij)} &\sim \text{NID}(0, \sigma_\varepsilon^2) \end{aligned}$$

NID: normal e idénticamente distribuidos. Notación  $\Phi_A = \frac{nb}{a-1} \sum_i \delta_{A_i}^2$ .

Suposiciones		
Fijos(1)	Aleatorios(2)	Mixtos(3)
$\delta_{A_i's}$ fijos, $\sum \delta_{A_i} = 0$	$\delta_{A_i's}$ NID $(0, \gamma^2 \delta_A)$	$\delta_{A_i's}$ fijos $\sum \delta_{A_i} = 0$
$\delta_{B_j's}$ fijos, $\sum \delta_{B_j} = 0$	$\delta_{B_j's}$ NID $(0, \gamma^2 \delta_B)$	$\delta_{B_j's} \sim \text{NID} \left(0, \frac{\gamma^2}{AB}\right)$
$\delta_{AB_{ij}}$ fijos, $\sum \delta_{AB_{ij}} = 0$	$\delta_{AB_{ij}}$ NID $(0, \gamma^2 \delta_{AB})$	Pero $\sum_i \delta_{AB_{ij}} = 0$ $\sum_j \delta_{AB_{ij}} \neq 0$

### Cuadrados medios esperados e hipótesis

	Grados libertad	Fijos	Aleatorios	Mixtos
$\delta_{A_i}$	$a - 1$	$\sigma_\varepsilon^2 + nb\Phi_A$	$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{AB}^2 + nb\sigma_A^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{AB}^2$
$\delta_{B_j}$	$b - 1$	$\sigma_\varepsilon^2 + na\Phi_B$	$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{AB}^2 + na\sigma_B^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{AB}^2$
$\delta_{AB_{ij}}$	$(a - 1)(b - 1)$	$\sigma_\varepsilon^2 + n\Phi_{AB}$	$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{AB}^2$	$\sigma_\varepsilon^2 + n\sigma_{AB}^2$
$\varepsilon_{l(ij)}$	$ab(n - 1)$	$\sigma_\varepsilon^2$	$\sigma_\varepsilon^2$	$\sigma_\varepsilon^2$
Hipótesis que se prueban				
$H_{(1)} : \delta_{A_i} = 0 \forall_i$		$H_{(2)} : \sigma_A^2 = 0$	$H_{(3)} : \delta_{A_i} = 0 \forall_i$	
$H_{(1)} : \delta_{B_j} = 0 \forall_j$		$H_{(2)} : \sigma_B^2 = 0$	$H_{(3)} : \sigma_B^2 = 0$	
$H_{(1)} : \delta_{AB_{ij}} = 0 \forall_{ij}$		$H_{(2)} : \sigma_{AB}^2 = 0$	$H_{(3)} : \sigma_{AB}^2 = 0$	

Dependiendo de tales valores esperados el experimento inicialmente pensado podrá ser cambiado, por ejemplo, la prueba indicada por EMS's puede tener grados de libertad insuficientes o no, habrá pruebas conservadoras en donde el efecto no será claramente contrastable.

### Reglas para calcular esperanzas de cuadrados medios

$$y_{ijk} = \mu + \delta_{A_i} + \delta_{B_j} + \delta_{AB_{ij}} + \varepsilon_{k(ij)}$$

donde  $\delta_A$  es fijo y  $\delta_B$  aleatorio.



1. Escriba los términos del modelo con subíndices asociados hacia abajo en el lado izquierdo de una tabla, es decir, cada término del modelo como cabeza de fila en la tabla.

$$\begin{array}{c} \delta_{A_i} \\ \delta_{B_j} \\ \delta_{AB_{ij}} \\ \varepsilon_{k(ij)} \end{array}$$

2. Escriba los subíndices individuales en el modelo como cabezas de columnas de la tabla; sobre cada subíndice escriba  $F$  si los niveles del factor son fijos,  $R$  si son aleatorios. Arriba de tal denominación, escriba el número de niveles de cada subíndice:

	$a$	$b$	$n$
	$F$	$R$	$R$
	$i$	$j$	$l$
$\delta_{A_i}$			
$\delta_{B_j}$			
$\delta_{AB_{ij}}$			
$\varepsilon_{l(ij)}$			

3. Escriba 1 en cada casilla donde el subíndice en la cabeza de la columna esté contenido dentro de paréntesis en el término en la izquierda.

	$a$	$b$	$n$
	$F$	$R$	$R$
	$i$	$j$	$l$
$\delta_{A_i}$			
$\delta_{B_j}$			
$\delta_{AB_{ij}}$			
$\varepsilon_{l(ij)}$	1	1	

4. Escriba 0 en cada casilla donde el subíndice en la cabeza de columna sea fijo y esté también contenido en el término a la izquierda. Escriba 1 en cada casilla donde el subíndice en la cabeza de columna sea aleatorio y esté también contenido en el término a la izquierda.

	$a$	$b$	$n$
	$F$	$R$	$R$
	$i$	$j$	$l$
$\delta_{A_i}$	0		
$\delta_{B_j}$		1	
$\delta_{AB_{ij}}$	0	1	
$\varepsilon_{l(ij)}$	1	1	1

5. Rellene las casillas restantes con el número de niveles en la cabeza de columna correspondiente.

	$a$	$b$	$n$
	$F$	$R$	$R$
	$i$	$j$	$l$
$\delta_{A_i}$	0	$b$	$n$
$\delta_{B_j}$	$a$	1	$n$
$\delta_{AB_{ij}}$	0	1	$n$
$\varepsilon_{l(ij)}$	1	1	1

6. Para encontrar el valor esperado el cuadrado medio de cada término que tenga grados de libertad mayores a cero en el modelo:

- Sólo considere términos cuyos subíndices incluyan todos los subíndices en el término cuyo valor esperado se esté calculando. Calcule el coeficiente de este término cubriendo las columnas que contengan subíndices no en paréntesis en el término considerado (para  $\delta_{A_i}$  cubra columna  $i$ , para  $\varepsilon_{l(ij)}$  cubra columna  $l$ ).
- Multiplique los valores restantes en cada fila. Cada uno de estos productos es el coeficiente para el término correspondiente en el modelo, si el subíndice sobre el término es también un subíndice sobre el término del cual el valor esperado del cuadrado medio esté siendo calculado, la suma de estos coeficientes multiplicados por la varianza de sus términos correspondientes ( $\Phi$  si es fijo (todos los subíndices fijos) o  $\sigma$  si es aleatorio (al menos algún subíndice es aleatorio) es el valor esperado

del cuadrado medio del término bajo consideración.

	$a$	$b$	$n$	
	$F$	$R$	$R$	
	$i$	$j$	$l$	
$\delta_{A_i}$	0	$b$	$n$	$bn\Phi_A + \eta\sigma_{AB}^2 + \sigma_\varepsilon^2$
$\delta_{B_j}$	$a$	1	$n$	$an\sigma_B^2 + \sigma_\varepsilon^2$
$\delta_{AB_{ij}}$	0	1	$n$	$n\sigma_{AB}^2 + \sigma_\varepsilon^2$
$\varepsilon_{l(ij)}$	1	1	1	$\sigma_\varepsilon^2$

## 10.10 Apéndice Técnico D

### Contrastes

En la estimación del efecto de los factores y análisis de los diseños experimentales, los contrastes desempeñan un papel importante. Por ello es importante presentar el desarrollo matemático para obtener las fórmulas que justifican el análisis estadístico. Un contraste permite contrastar los promedios de diferentes poblaciones y se establece mediante:

$$\delta = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \dots + c_k\mu_k \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^k c_i = 0 \quad (10.22)$$

A partir de los datos que se obtienen al realizar el experimento, se estima el contraste por la siguiente expresión:

$$\hat{\delta} = c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2 + \dots + c_k\bar{y}_k \quad \text{tal que} \quad \sum_{i=1}^k c_i = 0 \quad (10.23)$$

La varianza del contraste se calcula por:

$$Var(\hat{\delta}) = Var(c_1\bar{y}_1 + c_2\bar{y}_2 + \dots + c_k\bar{y}_k) = \sum_{i=1}^k c_i^2 Var(\bar{y}_i) = \sigma^2 \sum_{i=1}^k \frac{c_i^2}{n_i} \quad (10.24)$$

Con el propósito de construir el estadístico de prueba es necesario estimar la suma de cuadrados del contraste, ésta se define mediante:

$$SC_{contraste} = \frac{\hat{\delta}^2}{\frac{Var(\hat{\delta})}{\sigma^2}} = \frac{\hat{\delta}^2}{\sum_{i=1}^k \frac{c_i^2}{n_i}} \quad (10.25)$$

Nota 1. Para un diseño  $2^k$  se puede considerar como un caso particular el cálculo en la diferencia de promedios, poniendo  $c_1 = -1$  y  $c_2 = 1$ , así  $\sum_{i=1}^2 c_i = 0$ , entonces el contraste es:  $\hat{\delta} = c_1 \bar{y}_1 + c_2 \bar{y}_2 = \bar{y}_2 - \bar{y}_1$ . Observe que  $\hat{\delta}$  representa el efecto del  $k$ -ésimo factor o de una interacción.

Se aplica la fórmula (10.25) para generalizar el contraste para el efecto de un factor o de la interacción:

$$SC_{efecto} = \frac{\hat{\delta}^2}{\frac{1^2}{n_1} + \frac{(-1)^2}{n_2}} = \frac{n \hat{\delta}^2}{2} = \frac{N \hat{\delta}^2}{4} \quad (10.26)$$

en el caso tratado  $n_1 = n_2 = n = 2^{k-1} = \frac{N}{2}$ , donde  $N$  es el número de tratamientos por réplicas, es decir  $N = t \times r$ .

Nota 2. Suponga un diseño  $2^3$  con tres réplicas, también se puede obtener el efecto de un factor o su interacción multiplicando la columna del promedio de respuestas por la columna que representa al factor o su interacción.

$$efecto_{efecto} = \frac{1}{2^{3-1}}(d_1 \bar{y}_{1\bullet} + d_2 \bar{y}_{2\bullet} + \dots + d_8 \bar{y}_{8\bullet}) = \frac{1}{2^{3-1}} \hat{\theta} \quad (10.27)$$

y la suma de cuadrados del factor es:

$$SC_{efecto} = \frac{\hat{\theta}^2}{\sum_{i=1}^8 \frac{c_i^2}{3}} = \frac{3}{8} \hat{\theta}^2 \quad (10.28)$$

El resultado anterior es equivalente al indicado en la expresión (10.26). Note que  $\hat{\delta}_{factor} = \frac{\hat{\theta}}{2^{k-1}}$ . En general para un factorial  $2^k$  con  $r$  réplicas (10.28) se expresa por:

$$SC_{efecto} = \frac{\hat{\theta}^2}{\sum_{i=1}^t \frac{c_i^2}{r}} = \frac{r}{2^k} \hat{\theta}^2 \quad (10.29)$$

Estimación por intervalo de confianza. El intervalo de confianza para estimar el efecto o interacción de un factor se establece por:

$$\hat{\delta} \pm t\left(\frac{\alpha}{2}, gl_{error}\right) ES_i(\hat{\delta}) \quad (10.30)$$

entonces es necesario estimar el error estándar  $ES_i(\hat{\delta})$ . Para obtener éste último, considere un diseño factorial  $2^k$ , el efecto de los factores o interacciones se expresa:

$$\hat{\delta}_{factor} = \frac{\hat{\theta}}{2^{k-1}}$$

La varianza de esta ecuación es:

$$Var(\widehat{\delta}_{factor}) = Var\left(\frac{\widehat{\theta}}{2^{k-1}}\right) = \frac{Var(\widehat{\theta})}{(2^{k-1})^2}$$

La varianza de  $\widehat{\delta}$  se estimó en la expresión (10.24). Sustituyendo ésta en la ecuación anterior se obtiene:

$$Var(\widehat{\delta}_{factor}) = \frac{\frac{\sigma^2}{r} \sum_{i=1}^k c_i^2}{(2^{k-1})^2} = \frac{\sigma^2 \sum_{i=1}^k c_i^2}{r(2^{k-1})^2} = \frac{\sigma^2 2^k}{r(2^{2k-2})} = \frac{\sigma^2}{r(2^{k-2})} \quad (10.31)$$

donde  $r$  es el número de réplicas, así el error estándar  $ES_i(\widehat{\delta})$  es:

$$ES_i(\widehat{\delta}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{r(2^{k-2})}} = \sqrt{\frac{CM_{error}}{r(2^{k-2})}} \quad (10.32)$$



# Referencias

Abramowitz, M. y Stegun, I.A. (Eds.). *Handbook of Mathematical Functions*. 7th Ed., Dover, New York, 1970.

Aguilera, J.M. y Kosikowski, F. *Soyben Extruded Product: A Response Analysis*. Journal of Food Science, 1976 Vol. 41, p.p. 647-651.

Ames, A. E., Mattucci, M., Stephen, M., Szonyi, G. y Hawkins, D. M. (1997). *Quality Loss Functions for Optimization Across Multiple Response Surfaces*. Journal of Quality Technology 29, p.p. 339-346.

Atkinson, A.C. y Riani, M. *Robust Diagnostic Regression Analysis*. Springer Verlag. 2000.

Barba, A. P. *Procedimiento Enzimático para Producir Harinas de Amaranto de alto Contenido Proteína y Jarabes con Potencial Edulcorante*. Tesis de Maestría. CINVESTAV, IPN. Irapuato, Gto., 1989.

Barker, T. B. *Quality by Experimental Design*. Marcel Dekker. New York, 1989.

Bates, D.M. y Watts, D.G. *Nonlinear Regression Analysis and its Applications*, Wiley, New York, 1988.

Beetner, G., Tasao, T. Frey, A. y Harper. *Degradation of Thiamine and Riboflavin During Extrusion Processing*. Journal of Food Science, 1974, 39, 207-208.

Box, G. (1996). *Split Plot Experiments*. Quality Engineering, 8(3), 515-520.

Box, G.E.P. and Behnken, D.W. *Some New Three Level Designs for the Study of Quantitative Variables*. Technometrics, 1960, 2, 455-475. Correcciones, 1961, 3, 576.

Box, G.E.P. y Cox, D.R. *An Analysis of Transformations* (with discussion) J. Rotal Stat. Soc., B, 1964, 26, 211-246.

Box, G.E.P. y Draper, N.R. *Empirical Model Building and Response Surface*, John Wiley & Sons, New York, 1987.

Box, G.E.P., y Hunter, W.G. y Hunter, J.S. *Statistics for Experiments*, John Wiley & Sons, New York 1978.

Box, G.E.P. y Meyer, R.D. *Dispersion Effects From Fractional Design*. Technometrics, 1986 28(1), 19-27.

- Box, G.E.P. y Wilson, K.B. *On the Experimental Attainment of Optimum Conditions*. Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B, 1951, 13, 1-45.
- Burdick, R.K., Borror, C.M., y Montgomery, D.C. *A review of methods for measurement systems capability analysis*. Journal of Quality Technology, 35, 342-354.
- Conover, W.J., Johnson, M.E. y Johnson, M.M. *A Comparative Study of Tests for Homogeneity of Variances, with Applications to the Outer Continental Shelf Bidding Data*. Technometrics, 1981, 23, 351-361.
- Carmer, S.G., y Walter, W.M. *Pairwise Multiple Comparisons of Treatment Means in Agronomic Research*. Journal of Agronomic Education, 1985 14, 19-26.
- Chan, L.K. and Mak, T.K.(1995). *A Regression Approach for Discovering Small Variation around a Target*. Appl. Statist. 44, No. 3, pp. 369-377.
- Chew, V. *Testing Differences among Means: Correct Interpretation and Some Alternatives*. Hort Science, 1980, 15(4), 467-470.
- Derringer, G.C. y Suich, R. *Simultaneous optimization of several response variables*. Journal of Quality Technology, 1980, 12, 214-219.
- Derringer, G.C. *A Balancing Act: Optimizing a Product's Properties*. Quality Progress, 1994, 51-58.
- Draper, N.R. y Smith H. *Applied Regression Analysis*. 3rd.ed., John Wiley & Sons, New York, 1998
- Fabian, V. *On the problem of interactions in the analysis of variance*. Journal of the American Statistical Association, 199, 86, No. 414, 362-367.
- González Cataño, F. *Determinación de la estabilidad de mezclas de almidón de maíz y concentrado de proteína de suero modificadas por extrusión a través del cálculo de las isotermas de sorción, y desarrollo de un análogo de queso tipo asadero utilizando una de estas mezclas*. Tesis de licenciatura en Químico en Alimentos. Facultad de Química, Universidad Autónoma de Querétaro. 2008.
- Gorman J.W. y Hinman J.E. *Simplex - lattice designs for multicomponent systems*. Technometrics, 4, 463-487, 1962.
- Guzmán, M.H., Paredes-L.O. and Domínguez-D.J. *Optimization of an Enzymatic Procedure for the Hydrolytic Depolymerization of Starch by Response Surface Methodology*. Food Science and Technology, 1993, 26, 28-33
- Haaland, P.D. *Experimental Design in Biotechnology*. Marcel Dekker, New York, 1989.
- Harrington, E. C. JR. (1965). *The Desirability Function*. Industrial Quality Control, 21, 494-498.
- Hicks, C. R. *Fundamental Concepts in the Design of Experiments*. 2th, ed. Holt Rinehart and Winston, New York, 1986.
- Hill, W. y Hunter, W. *A Review of Response Surface Methodology*. Technometrics, 1966, 18(4).



Hinkelman, K. y Kempthorne, O. *Design and analysis of experiments*. Vol 1. Wiley-Interscience Publication, New York, 1994.

Hsu, J.C. *Multiple Comparison: Theory and Methods*. Chapman & Hall, London, 1996.

Ilo, S., Berghofer, E. y Liu, Y. *Extrusion Cooking of Rice Flour and Amaranth Blends*. Lebensm. Wiss.u. Technol., 1999 32, p.p. 79-88. Academic Press.

Jones, D. *Use, misuse, and role of Multiple-Comparison Procedures in Ecological and Agricultural Entomology*. Environmental Entomology, 1984, 13, 635-649.

Juárez, G.M. *Conservación y Aprovechamiento Agroindustrial de la Jícama*. Reporte Interno. CINVESTAV, IPN. Irapuato, Gto, 1991.

Kennedy, Jr. W.J. y Gentle, J.E. *Statistical Computing*. Marcel Dekker, Inc. New York, 1980.

Khuri, A. y Colon, M. *Simultaneous Optimization of Multiple Responses Represented by Polynomial Regression Functions*. *Technometrics* 1981, 23, 363-375.

Khuri, A. Y. y Cornell, J.A. *Response Surface Design and Analysis* Marcel Dekker, Inc. New York, 1987.

Lenth, R.V. *Quick and easy analysis of unreplicated factorials*. *Technometrics*, 1989, 31, 469-473.

León - González, F., Castaño - Tostado E. y Mercado - Silva E. *Modelaje estadístico de ajo bajo diferentes condiciones de almacenamiento*. Reporte interno 2002, Universidad Autónoma de Querétaro, Posgrado de Alimentos.

Li H. y Mee R.W. *Better foldover fractions for resolution III  $2^{k-p}$  designs*. *Technometrics*, 2002, 44(3), 278-283.

Logothetis N. y Wayn H.P. *Quality Through Design*. Oxford Science Publications, Great Britain, 1989.

Loske A.M., Alvarez, U. M., Hernández - Galicia C., Castaño - Tostado E. y Prieto, F.E. *Bactericidal effect of underwater shock waves on Escherichia Coli ATCC 10536 suspensions*. *Innovative Food Sci. and Emerging Technol.* , 2002, 3(4), 321-327, Elsevier. ISSN 1466-8564

Lunani, M, Nair, V.N. y Wasserman, G.S. *Graphical Methods for Robust Design with Dynamic Characteristics*. *Journal of Quality Technology*, 1997, 29, 327-338.

McLean, R.A. y Anderson, V.L. *Applied Factorial and Fractional Designs*. Marcel Dekker, New York, 1984.

Méndez Albores J.A., Arámbula Villa G., Loarca Piña G., Castaño Tostado E. y Moreno Martínez E. *Aflatoxins fate during the nixtanalization of contaminated corn by two tortilla - making processes*. *Journal of Stored Products Research* 40(1): 87-94. 2003.

Méndez Ramírez, I. *Comparación de medias de población*. Comunicaciones

Técnicas vol. 3 Serie Azul no. 17. Instituto de Investigaciones en Matemáticas Aplicadas y en Sistemas, UNAM, 1976.

Milliken, G. A. *Analysis of Repeated - Measures Designs. In Statistical Methodology in the Pharmaceutical Sciences*. Ed. D.A. Berry, Statistics: textbooks and Monographs, vol. 104. Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.

Miller A. *Analysis of Parameter Design Experiments for Signal-Response Systems*. Journal of Quality Technology, 2002, 139-151.

Montgomery, D. *Design and Analysis of Experiments*. 2nd. ed., John Wiley & Sons,. New York, 1984.

Montgomery, D. y Peck, E.A. *Introduction to linear Regression Analysis*. John Wiley & Sons, New York, 1982.

Mora E. R., Paredes L.O. and Domínguez D.J. *Optimization of a Germanation Procedure by Response Surface Methodology*. H. Agrie. Food Chem. 1991 39, 851-854

Motycka R., Richards D., and Bechtel P. *Response Surface Methodology. A approach to the Optimization of Boneless Ham Yield*. Journal of Food Science, 1984 49, 1386-1389.

Myres, R. H. *Response Surface Methodology*. Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1971.

Myres, R. H. *Rotatable Design in Product Development*. Food Tech. 1979 33, p.p. 74.

Myres, R. H. y Montgomery, D. *Response Surface Methodology*. John Wiley & Sons, New York, 1995.

Mullen, K. y Ennis, D.M. *Rotable Designs in Product Development*. Food Technol., 1979 33(7), 74-75.

Nelson, W. *Applied Life Data Analysis*. John Wiley, New York, 1982.

Neter, J., Kutner, M.H., Nachtsheim, Ch. J. and Wasserman, W. *Applied Linear Statistical Models*. 4th Ed., Irwin, Chicago, 1996.

Peace, G. S. *Taguchi Methods: A Hands-on Approach*. Addison-Wesley Publishing Company, New York, 1993.

Petres, J. y Czukor, B. *Investigation of Effects of Extrusions on Antinutritional Factors in Soybeans Employin Response Surface Analysis*. die Nahrung, 1989 33, 275-281. Hungary.

Phadke, M.S. *Quality Engineering Using Robust Design*. Prentice Hall. New Jersey, 1993.

Preece, D.A. *Latin Squares, Latin cubes, Latin Rectangles, etc*. In Encyclopedia of Statistical Sciences, 4, 504-510. Kotz, S. and Johnson, N.L. (Eds.). John Wiley & Sons. New York, 1993.

Price W.L. A controlled random search procedure for global optimization. *Computer Journal*, 1977 20, 367-370.

Salcedo, Ch. B. Osuna, C. J. Guevara, L. F. Domínguez D. J. y Paredes, L. O. *Optimization of Isoelectric Precipitation Method to Obtain Protein Isolates from Amaranth Seeds*. J.Agric. Food Chem., 2002, 50, 6515-6520.

Saville, D.J. *Multiple Comparison Procedures: The Practical Solution*. The American Statistician, 1990, 44, 174-180.

Schmidt, R.H., Illingworth, B.L., Deng J.D. and Cornell J.A. Multiple Regression and Response Surface Analysis of the Effects of Calcium Chloride and Cysteine on Heat-Induced Whey Protein Gelation, *J. Agric. Food Chem.*, 1979, 27, 529-532.

Seber G.A.F. *Linear Regression Analysis*. John Wiley & Sons. New York, 1978.

Shelton, J.T., Khuri A.I. y Cornell J.A. Selecting check points for testing lack of fit in response surface models. *Technometrics*, 1983 25, 357-365.

Shih, M.C., Hou, H.J. and Chang, K.C. *Process Optimization for Soft Tofu*. Journal Food Science, 1997 62(4), 333-337.

Sprott, D.A. *Statistical Inference in Science*. Springer Verlag. New York, 2000.

Taguchi, G. *Introduction to Quality Enginnering*. Asian Productivity Organization, 1986.

Taguchi, G. *System of Experimental Design*. Vols. 1 and 2 Traducción publicada por UNIPUB, 1987.

Trejo, C.E. *Elaboración por Extrusión de Proteína Vegetal Texturizada a partir de Harina Desengrasada de Cacahuete*. Tesis UNAM, 1984.

Vargas, J.M., Hernández, D., Paredes, O., Domínguez, J. y Carabez, A. *Efecto del Tratamiento Térmico - alcalino sobre Almidón de Amaranto. Un Análisis de Superficie de Respuesta*. Reporte Congreso de ATAM, S.L.P., México, 1988.

Verbeke G. y Molenberghs G. *Linear Mixed Models for Longitudinal Data*. Springer Verlag, 2000.

Wu, C.F. J. y Hamada, M. *Experiments: Planning, Analysis, and Parameter Design Optimization*. John Wiley & Sons, 2000.

Yandell, B.S. *Practical Data Analysis for Designed Experiments*. Chapman & Hall, London, 1997.



# Tablas

1. Tabla A Distribución normal estándar;  $1 - \Phi(z) = P(Z \geq z) = \alpha$
2. Tabla B Distribución  $t$ -Student; para  $P(t \geq t(gl, 1 - \alpha)) = \alpha$
3. Tabla C Distribución  $\chi^2$  para  $P(\chi^2 \geq \chi^2(gl, 1 - \alpha)) = \alpha$
4. Tabla D Distribución  $F$  para  $P(F \geq F(\nu_1, \nu_2, 1 - \alpha)) = \alpha$ , sólo para  $\alpha = 0.05$
5. Tabla E Distribución  $H$  para  $P(H \geq H(\nu_1, \nu_2, 1 - \alpha)) = \alpha$
6. Tabla F Rangos estudentizados  $q$  para  $P(q \geq q(k, f, 1 - \alpha)) = \alpha$
7. Tabla G Prueba de Dunnett  $d$  para  $P(d \geq d(k, f, 1 - \alpha)) = \alpha$

Nota. Las tablas se generaron aplicando el lenguaje de programación Gauss (1997)<sup>(1)</sup> para windows nt/95 versión 3.2.35, y el paquete estadístico Statgraphics<sup>(2)</sup> plus (1995) versión 2 en windows. A continuación se citan las referencias donde el lector interesado puede consultar las fórmulas o algoritmos para obtener los valores correspondientes a las distribuciones: Kennedy y Gentle (1980). Las tablas se presentan en forma sintética, como hemos indicado con anterioridad, los paquetes estadísticos proporcionan el nivel de significancia descriptivo o valor  $p$  y a partir de ese se pueden sacar las conclusiones estadísticas. También, a partir de los paquetes se puede estimar la probabilidad de referencia.

(1) Gauss. Mathematical and Statistical System, Volume II. Command Reference. Aptech Systems, Inc. Maple Valley Wa.

(2) Statgraphics Plus. Version 2. Manugistics.

z	.00	.01	.05	.09
0.0	.500	.496	.480	.464
0.5	.309	.301	.291	.278
1.0	.159	.156	.147	.138
1.5	.067	.066	.061	.056
2.0	.029	.022	.020	.018
2.5	.006	.006	.005	.005
3.0	.001	.001	.001	.001

Tabla A Distribución normal estándar;  $1 - \Phi(z) = P(Z \geq z) = \alpha$

$\alpha \backslash gl$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0.05	6.31	2.90	2.35	2.13	2.02	1.94	1.90	1.86	1.83	1.81	1.80
0.025	12.71	4.30	3.18	2.78	2.57	2.45	2.37	2.31	2.26	2.23	2.20
0.01	31.82	6.97	4.54	3.75	3.37	3.14	3.00	2.90	2.82	2.76	2.72

$\alpha \backslash gl$	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
0.05	1.78	1.77	1.76	1.75	1.75	1.74	1.73	1.73	1.73	1.72	1.72
0.025	2.18	2.16	2.15	2.13	2.12	2.11	2.01	2.09	2.09	2.08	2.07
0.01	2.68	2.65	2.62	2.60	2.58	2.57	2.55	2.54	2.53	2.52	2.51

$\alpha \backslash gl$	23	24	25	26	27	28	29	30	40	60	120
0.05	1.71	1.71	1.71	1.71	1.70	1.70	1.70	1.70	1.68	1.67	1.66
0.025	2.07	2.06	2.06	2.06	2.05	2.05	2.05	2.04	2.02	2.00	1.98
0.01	2.50	2.49	2.49	2.48	2.47	2.47	2.46	2.46	2.42	2.39	2.36

Tabla B  $t$ -Student; para  $P(t \geq t(gl, 1 - \alpha)) = \alpha$ . redondeada a dos decimales

$\alpha \backslash gl$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0.05	3.84	5.99	7.81	9.49	11.1	12.6	14.1	15.5	16.9	18.3
0.025	5.02	7.38	9.35	11.1	12.8	14.4	16.0	17.5	19.0	20.5
0.01	6.63	9.21	11.3	13.3	15.1	16.8	18.5	20.1	21.7	23.2

$\alpha \backslash gl$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.05	19.7	21.0	22.4	23.7	25.0	26.3	27.6	28.9	30.1	31.4
0.025	21.9	23.3	24.7	26.1	27.5	28.8	30.2	31.5	32.9	34.2
0.01	24.7	26.2	27.7	29.1	30.6	32.0	33.4	34.8	36.2	37.6

$\alpha \backslash gl$	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
0.05	32.7	33.9	35.2	36.4	37.7	38.9	40.1	41.3	42.6	43.8
0.025	35.5	36.8	38.1	39.4	40.6	41.9	43.2	44.5	45.7	47.0
0.01	38.9	40.3	41.6	43.0	44.0	45.6	47.0	48.3	49.6	50.9

Tabla C Distribución  $\chi^2$  para  $P(\chi^2 \geq \chi^2(gl, 1 - \alpha)) = \alpha$ 

$gl_2 \backslash gl_1$	1	2	3	4	5	6
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70

Tabla D Distribución  $F$  para  $P(F \geq F(\nu_1, \nu_2, 1 - \alpha)) = 0.05$   
 $gl_1$  : grados de libertad numerador,  $gl_2$  para el denominador

$gl_2 \backslash gl_1$	1	2	3	4	5	6
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17
$\infty$	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10

Tabla D (Continúa). Distribución  $F$  para  $P(F \geq F(\nu_1, \nu_2, 1 - \alpha)) = 0.05$   
 $gl_1$  : grados de libertad numerador,  $gl_2$  para el denominador

$gl \backslash k$	2	3	4	5	6
2	39.0	87.5	142	202	266
3	15.4	27.8	39.2	50.7	62.0
4	9.60	15.5	20.6	25.2	29.5
5	7.15	10.8	13.7	16.3	18.7
6	5.82	8.38	10.4	12.1	13.7
7	4.99	6.94	8.44	9.70	10.8
8	4.43	6.00	7.18	8.12	9.03
9	4.03	5.34	6.31	7.11	7.80
10	3.72	4.85	5.67	6.34	6.92
12	3.28	4.16	4.79	5.30	5.72
15	2.86	3.54	4.01	4.37	4.68
20	2.46	2.95	3.29	3.54	3.76
30	2.07	2.40	2.61	2.78	2.91
60	1.67	1.85	1.96	2.04	2.11
$\infty$	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Tabla E Distribución  $H$  para  $P(H \geq H(k, \nu, 1 - \alpha)) = 0.05$   
 $k$  : tratamientos,  $gl$  grados de libertad. Prueba de Harley.



gl\k	2	3	4	5	6	7
1	18.1	26.7	32.8	37.2	40.5	43.1
2	6.09	8.28	9.80	10.9	11.7	12.4
3	4.50	5.88	6.83	7.51	8.04	8.47
4	3.93	5.00	5.76	6.31	6.73	7.06
5	3.64	4.60	5.22	5.67	6.03	6.33
6	3.46	4.34	4.90	5.31	5.63	5.89
7	3.34	4.16	4.68	5.06	5.35	5.59
8	3.26	4.04	4.53	4.89	5.17	5.40
9	3.20	3.95	4.42	4.76	5.02	5.24
10	3.15	3.88	4.33	4.66	4.91	5.12
12	3.08	3.77	4.20	4.51	4.75	4.95
15	3.01	3.67	4.08	4.37	4.59	4.78
20	2.95	3.58	3.96	4.24	4.45	4.62
24	2.92	3.53	3.90	4.17	4.37	4.54
30	2.89	3.48	3.84	4.11	4.30	4.46
60	2.83	3.40	3.74	3.98	4.16	4.31
$\infty$	2.77	3.32	3.63	3.86	4.03	4.17

Tabla F Rango Studentizado;  $P(q \geq q(k, \nu, 1 - \alpha)) = 0.05$   
 $k$  : tratamientos, gl. grados de libertad

gl\k	2	3	4	5	6	7
5	3.03	3.29	3.48	3.62	3.73	3.82
6	2.86	3.10	3.26	3.39	3.49	3.57
7	2.75	2.97	3.12	3.24	3.33	3.41
8	2.67	2.88	3.02	3.13	3.22	3.29
9	2.61	2.81	2.95	3.05	3.14	3.20
10	2.57	2.76	2.89	2.99	3.07	3.14
12	2.50	2.68	2.81	2.90	2.98	3.04
15	2.44	2.61	2.73	2.82	2.89	2.95
20	2.38	2.54	2.65	2.73	2.80	2.86
24	2.35	2.51	2.61	2.70	2.76	2.81
30	2.32	2.47	2.58	2.66	2.72	2.77
60	2.27	2.41	2.51	2.58	2.64	2.69
$\infty$	2.21	2.35	2.44	2.51	2.57	2.61

Tabla G Valores para la prueba bilateral de Dunnett  
 $P(d \geq d(k, \nu, 1 - \alpha)) = 0.05$   $k$ : tratamientos,  $gl$ : grados de libertad

# Índice

- aberrancia
  - criterio de, 159
  - mínima, 158
- aleatorización, 4
- análisis de varianza, 29
- arreglo
  - externo, 177
  - interno, 177
  - uno solo, 181
- bloque
  - ortogonal, 293
- bloqueo, 5
- característico
  - valor, 328
  - vector, 328
- cociente señal a ruido, 173
- codificación, 267
- coeficiente
  - determinación, 283
- comparaciones
  - planeadas, 77
- contraste, 88
  - ortogonal, 90
- cuadrado medio
  - de tratamientos, 30
  - del error, 30
- curvas de nivel, 320
- descomposición de suma de cuadrados,
  - 36
- diseño, 23
  - aumentado, 165
  - balanceado, 30
  - Box - Behnken, 290
  - central compuesto, 295
  - desbalanceado, 30
  - rotable, 298
  - sin réplicas, 118
    - pseudo error, 122
- efecto, 4, 29
  - anidado, 247
  - confundido, 149
  - cuadrático, 213
  - de dispersión, 180
  - de localización, 180
  - estandarizado, 126
  - estimado, 29
  - interacción, 4
    - control - ruido, 174
  - lineal, 213
  - principal, 4
- error
  - de restricción, 254
  - experimental, 8
    - parcelas divididas, 233
  - por familia de comparaciones, 78
  - puro, 285
- estructura, 3
  - alias, 150
  - de tratamientos
    - factorial, 101
  - desdoblada, 164
    - alternativa, 166

- diseño, 4
- tratamientos, 3
- factor, 3
  - control de, 13
  - de ajuste, 173
  - de ruido, 13
    - compuesto, 185
  - señal, 182
- falta de ajuste, 285
- forma canónica, 327
- fracción, 147
  - generador, 147
  - principal, 156
- gráfico
  - de probabilidad
    - Normal, 120
    - semi Normal, 120
  - lineal de efectos, 176
- inexactitud, 18
- inferencia
  - estadística, 17
  - práctica, 17
- intervalo de confianza
  - en parcelas divididas, 239
- Intervalos de Confianza, 78
- metodología de superficie de respuesta, 311
- nivel, 3
- objetivo, 12
- orden estándar, 111
- palabra
  - de definición, 158
  - patrón de, 158
- polinomios
  - ortogonales, 213
- principio
  - de jerarquía, 146
  - de mínimos cuadrados, 132
  - de parcelas divididas, 232
  - de parsimonia, 120
- protocolo, 12
- prueba
  - de Bartlett, 43
  - de Box - Meyer, 181
  - de Dunnett, 82
  - de Hartley, 43
  - de Hsu, 84
  - de Kruskal Wallis, 66
  - de Lenth, 122
  - de Levene, 44
  - de Scheffé, 88
  - de Tukey, 80
- punto
  - axial, 296
  - estacionario, 325
- réplica, 9
  - al centro, 296
- réplicas
  - determinación del número, 46
  - submuestra, 11
- residual, 38
- resolución
  - máxima, 158
- restricciones
  - a la aleatorización, 48
- subgrupo de contrastes, 158
- suma de cuadradas
  - de falta de ajuste, 285
- suma de cuadrados
  - del modelo, 282
- Taguchi, 172
- tratamiento, 3
- trayectoria
  - optimizante, 314

unidad experimental, 4

valor p, 27

variable

    fundamental, 331

    respuesta, 12

variación intraindividual, 244

Este libro terminó de imprimir en el mes de diciembre de 2010 en los talleres gráficos de la  
Universidad Autónoma de Querétaro  
(Prolongación Pino Suárez 467-E, Col. Ejido Modelo, Querétaro, Qro.)  
Se tiraron 1000 ejemplares, más sobrantes para su reposición.