Tarea 3

Gustavo Hernández Angeles[1]

[1] *Universidad Autonoma de Nuevo Leon*

Publication date: 17/02/2023

Abstract—Utilizamos los métodos de integración numérica trapezoidal y de Simpson para resolver integrales y hacer la comparación con el valor analítico, o de no ser posible, con otros software de integración como WolframAlpha. Además, se utiliza GNUPLOT para obtener gráficas 3B (Buenas, bonitas y baratas) de las funciones a integrar.

Keywords— Fortran, Integración numérica

I. Problema 1

Resuelva la siguiente integral usando método de Simpson. Utilice diferentes valores de $a > 0$ y concluya que pasa con el valor calculado de la siguiente integral.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{1+a(1-\cos(x))^2}{(1+a\sin^2(x))\sqrt{1+2a(1-\cos(x))}}dx \qquad (1)$$

1. Haga una gráfica que muestre las 5 curvas correspondientes a 5 diferentes valores de a.

Para esto utilizamos GNUPLOT definiendo funciones de dos variables $f(x,a)$, donde a es únicamente la parametrización del problema. Así, con $a = \{1,2,3,4,5\}$:

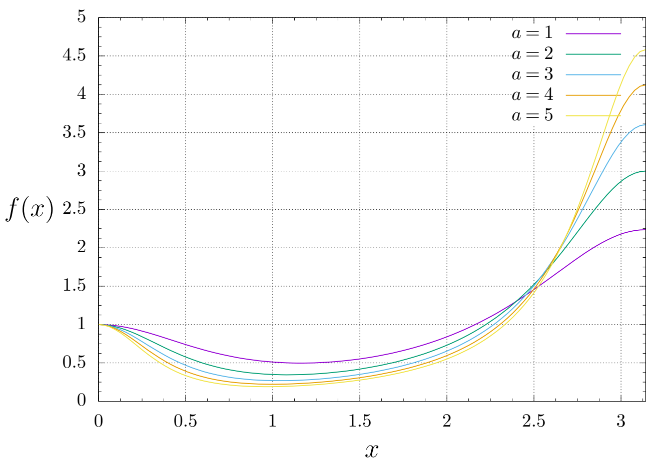


Fig. 1: $f(x)$ con distintos valores del parámetro a.

2. Haga una tabla que indique los valores de a usados y los correspondientes valores calculados de la integral para un mismo número de intervalos

Emplearemos el método de Simpson para resolver las integrales con 1000 subíntervalos. De las ejecuciones del código, los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Valor de a	Valor de I
1	3.14158654
2	3.14158630
3	3.14158416
4	3.14158368
5	3.14158297

Table 1: Tabulación de la integral con distintos valores de a.

Por lo que podemos observar, la integral parametrizada siempre dará el valor aproximado de π, corroborando con una calculadora de integrales en línea.

II. Problema 2

Resuelva analíticamente (donde sea posible) y de manera numérica las siguientes integrales.

1. $\int_0^2 \sin(x^2)dx$
2. $\int_{4.1}^5 \frac{5x+12}{x(x-4)}dx$
3. $\int_0^{3/2} x^2 e^x dx$
4. $\int_0^1 \arcsin(\theta)d\theta$
5. $\int_{0.9}^2 \frac{dx}{3x^2+6x-7}$
6. $\int_{0.1}^{0.6} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$

SOLUCION.
Se encontró la solución analítica a los problemas 2, 3, 4 y 6. El procedimiento se muestra en su respectivo inciso junto a la solución numérica. Para el resto, se muestra únicamente su solución numérica mediante Simpson con $n = 1000$.

a. $\int_0^2 \sin(x^2)dx$

1. Solución numérica

Se compara el resultado obtenido por el método de Simpson con el obtenido en una calculadora de integrales.

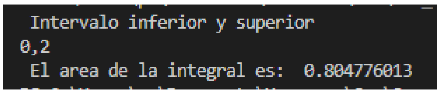


Fig. 2: Resultado obtenido por método de Simpson.

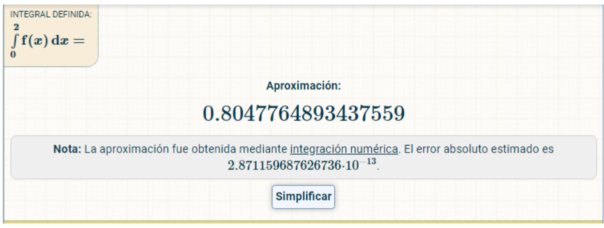


Fig. 3: Resultado obtenido por la calculadora.

Comparando nuestro resultado con el de la calculadora, existe un error del orden de 10^{-7}.

b. $\int_{4.1}^5 \frac{5x+12}{x(x-4)}dx$

1. Solución analítica

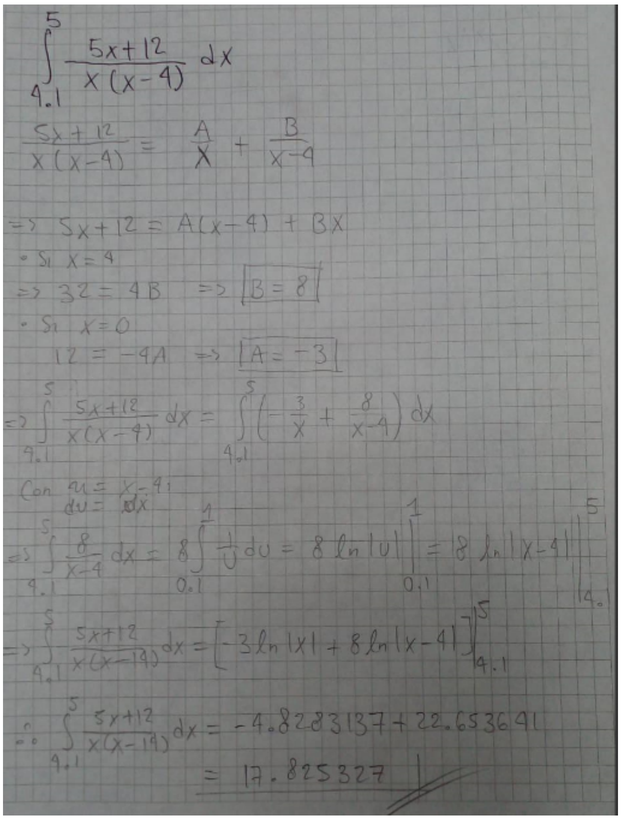


Fig. 4: Solución analítica

2. Solución numérica

Por método de Simpson con $n = 1000$ se obtiene el siguiente resultado.

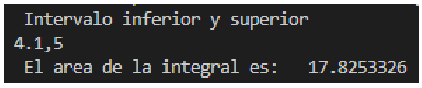


Fig. 5: Resultado mediante el método de Simpson

Comparando respuestas con la solución analítica, el orden del error aproximadamente de 10^{-7}.

c. $\int_0^{3/2} x^2 e^x dx$

1. Solución analítica

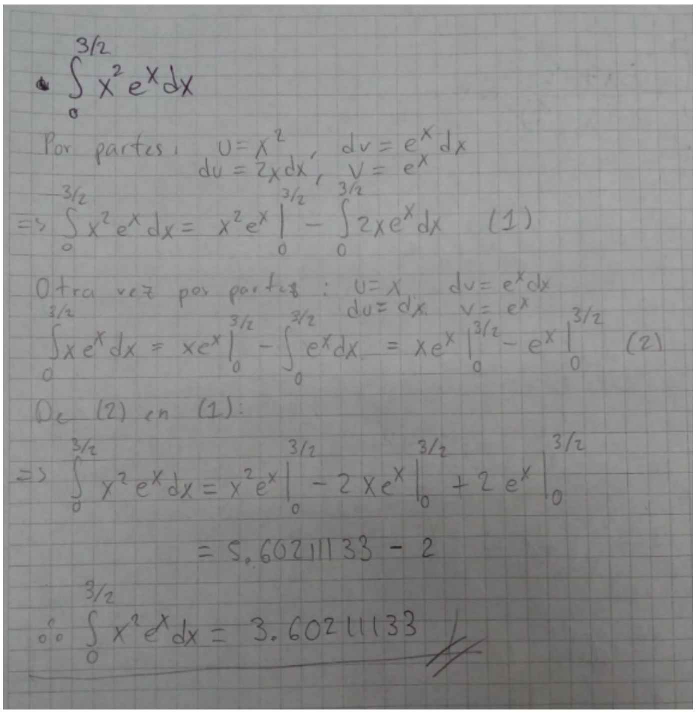


Fig. 6: Solución analítica

2. Solución numérica

Por método de Simpson con $n = 1000$ se obtiene el siguiente resultado.

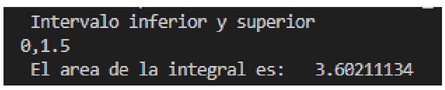
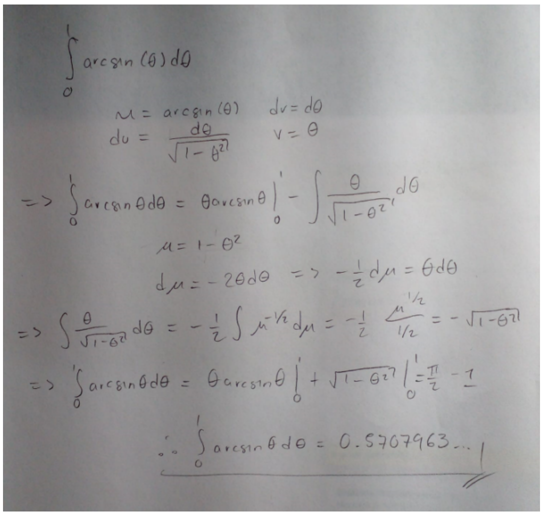


Fig. 7: Resultado mediante el método de Simpson

Comparando respuestas con la solución analítica, el orden del error aproximadamente de 10^{-9}.

d. $\int_0^1 \arcsin(\theta)d\theta$

1. Solución analítica



$$\int_0^1 \arcsin(\theta)\, d\theta$$

$$u = \arcsin(\theta) \quad dv = d\theta$$

$$du = \frac{d\theta}{\sqrt{1-\theta^2}} \quad v = \theta$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \arcsin\theta\, d\theta = \theta \arcsin\theta \Big|_0^1 - \int \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\, d\theta$$

$$\mu = 1-\theta^2$$

$$d\mu = -2\theta d\theta \Rightarrow -\frac{1}{2}d\mu = \theta d\theta$$

$$\Rightarrow \int \frac{\theta}{\sqrt{1-\theta^2}}\, d\theta = -\frac{1}{2}\int \mu^{-1/2} d\mu = -\frac{1}{2}\frac{\mu^{1/2}}{1/2} = -\sqrt{1-\theta^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \arcsin\theta\, d\theta = \theta\arcsin\theta\Big|_0^1 + \sqrt{1-\theta^2}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$\therefore \int_0^1 \arcsin\theta\, d\theta = 0.5707963...$$

Fig. 8: Solución analítica

2. Solución numérica

Por método de Simpson con $n = 1000$ se obtiene el siguiente resultado.

```
 Intervalo inferior y superior
0,1
 El area de la integral es:  0.570799887
```

Fig. 9: Resultado mediante el método de Simpson

Comparando respuestas con la solución analítica, el orden del error aproximadamente de 10^{-6}.

e. $\int_{0.9}^2 \frac{dx}{3x^2+6x-7}$

Se compara el resultado obtenido por el método de Simpson con el obtenido en una calculadora de integrales.

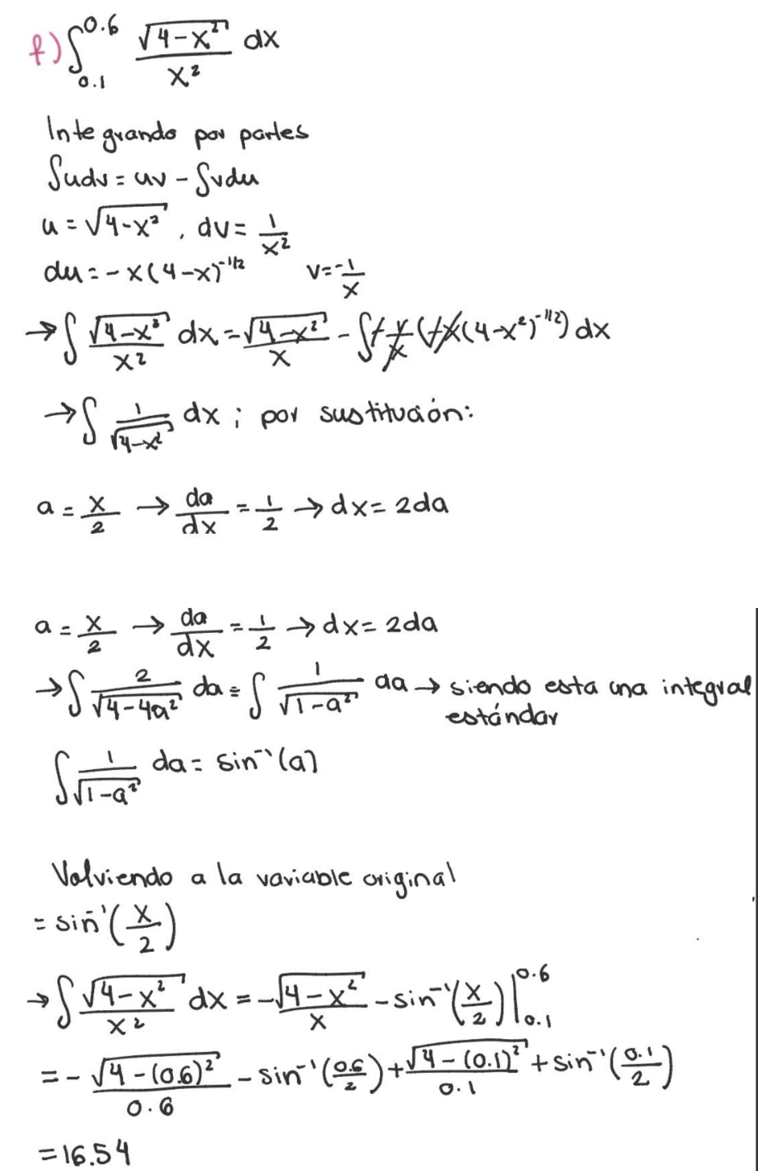
```
 Intervalo inferior y superior
0.9,2
 El area de la integral es:  0.228413671
```

Fig. 10: Resultado obtenido por método de Simpson.

Fig. 11: Resultado obtenido por la calculadora.

Comparando nuestro resultado con el de la calculadora, existe un error del orden de 10^{-7}.

f. $\int_{0.1}^{0.6} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}$



f) $\int_{0.1}^{0.6} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\, dx$

Integrando por partes

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$u = \sqrt{4-x^2}, \quad dv = \frac{1}{x^2}$$

$$du = -x(4-x)^{-1/2} \quad v = -\frac{1}{x}$$

$$\rightarrow \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \int \cancel{-}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}}(\cancel{+}\cancel{x}(4-x^2)^{-1/2})\, dx$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx \text{ ; por sustitución:}$$

$$a = \frac{x}{2} \rightarrow \frac{da}{dx} = \frac{1}{2} \rightarrow dx = 2da$$

$$a = \frac{x}{2} \rightarrow \frac{da}{dx} = \frac{1}{2} \rightarrow dx = 2da$$

$$\rightarrow \int \frac{2}{\sqrt{4-4a^2}}da = \int \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}da \rightarrow \text{siendo esta una integral estándar}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}da = \sin^{-1}(a)$$

Volviendo a la variable original

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\rightarrow \int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{4-x^2}}{x} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\Bigg|_{0.1}^{0.6}$$

$$= -\frac{\sqrt{4-(0.6)^2}}{0.6} - \sin^{-1}\left(\frac{0.6}{2}\right) + \frac{\sqrt{4-(0.1)^2}}{0.1} + \sin^{-1}\left(\frac{0.1}{2}\right)$$

$$= 16.54$$

Fig. 12: Solución analítica

1. Solución numérica

Por método de Simpson con $n = 1000$ se obtiene el siguiente resultado.

```
 Intervalo inferior y superior
0.1,0.6
 El area de la integral es:   16.5405235
```

Fig. 13: Resultado mediante el método de Simpson

Comparando respuestas con la solución analítica, el orden del error aproximadamente de 5×10^{-7}.

III. Problema 3

Se elaboró el código para encontrar el área entre dos funciones de forma general, únicamente dando como propuesta un intervalo donde se encuentran las raíces. El código se muestra a continuación.

```fortran
program Simpsonintegral
    integer :: n,j
    real*4 :: x2,xi,xf,h,a1,sum=0,f,i=0
    call intervaloraizsub(xi,xf)
    write(*,'(a,f10.6,a1,f10.6,a2)')'El intervalo acotado es aproximadamente [',xi,',',xf,'].'
    n=1000
    h = 1.0*abs(xf-xi)/n
    a1 = (h/3.0)*(f(xi)+f(xf))
    do j=1,n-1
        x2 = xi + h*j
        if (mod(j,2).eq.1) then
            sum = sum + 4.0*f(x2)
        else
            sum = sum + 2.0 * f(x2)
        end if
        i = h/3.0 * sum + a1
    end do
    write(*,*)'El area de la integral es:',i
    stop
end
! **************** Funciones que acotan el area *****************
function g(x)
    g = exp(-x/10.)*(250*x)/(6+x)
    return
end
function p(x)
    p = exp(x)
    return
end
! ***** Se define la funcion positiva del area |g(x)-p(x)| *******
function f(x)
    real :: x
    if (g(x).gt.p(x)) then
        f = g(x)-p(x)
    else
        f = p(x)-g(x)
    end if
    return
end
! Definimos la subrutina para encontrar las intersecciones de la grafica, hallando los
! intervalos donde la diferencia de las funciones son 0, con ayuda del programa para encontrar
! raices dadas un intervalo.
subroutine intervaloraizsub(x00,xnn)
    real*4 :: a,b, liminf(10), limsup(10),raiz(10),g,p,sign
    integer :: n, count, i, ceros
    real*4, dimension(:), allocatable :: x
    write(*,*)'Inserte el intervalo donde se encuentren las intersecciones[a,b]: '
    read*,a,b
    dx = 0.001
    n = int((b-a)/dx) !Numero de pasos
    count = 0 ! Contador de intervalos encontrados
    m = 0 !Raices exactas encontradas
    allocate(x(n)) ! Aloja en la memoria el vector con n componentes
    ! Llenar el array
    x(1) = a
    do 1 j = 2,n
        x(j) = a + (j-1.)*dx
    1 continue
    ceros=0
    ! Verificamos el numero de raices
    do i=1,n-1
        sign = (g(x(i))-p(x(i)))*(g(x(i+1))-p(x(i+1)))
        if (sign.lt.0.) then
            count = count + 1
            liminf(count) = x(i)
            limsup(count) = x(i+1)
        else if (sign==0.0.and.f(x(i))==0.0) then
            ceros = ceros+1
            raiz(ceros) = x(i)
        endif
    enddo
    deallocate( x ) ! Se desaloja
    x00 = limsup(count-1)
    xnn = liminf(count)
end subroutine
```

a. Encuentre el área entre las dos funciones

Son dadas las siguientes funciones para encontrar el área:

$$f(x) = \frac{250x}{6+x} e^{-x/10} \tag{2}$$

$$g(x) = e^{x} \tag{3}$$

Para saber el área acotada por las funciones necesitamos el intervalo en donde posiblemente se encuentren las intersecciones, para esto graficamos las funciones en GNUPLOT:

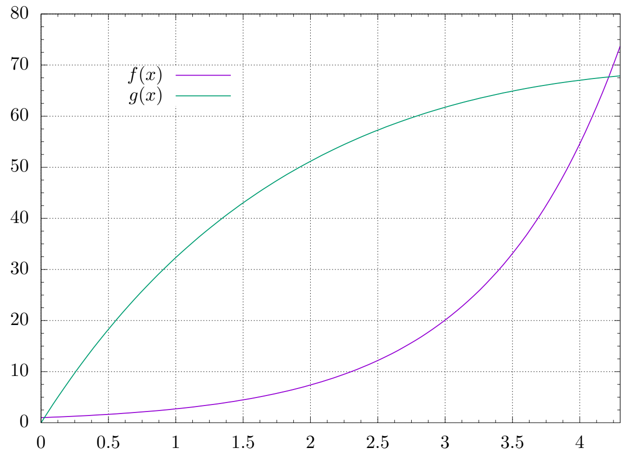


Fig. 14: Gráfica de las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

Podemos determinar una buena propuesta de intervalo como $[0, 4.3]$. Introduciendo esta información en el programa, ejecutamos:

```
 Inserte el intervalo donde se encuentren las intersecciones[a,b]:
0,4.3
El intervalo acotado es aproximadamente [  0.025000,  4.214000].
 El area de la integral es:   129.717239
```

Fig. 15: Área entre las funciones mediante Simpson.

Comparando con el resultado de una calculadora de integrales:

INTEGRAL DEFINIDA:

$\int_{0.025}^{4.215} \mathbf{f(x)}\,\mathbf{dx} =$

Aproximación:

129.7172243255968

Fig. 16: Área entre las funciones mediante calculadora.

Nuestro resultado numérico cuenta con un error del orden de 10^{-7} respecto al valor evaluado en la calculadora.

b. Integral doble

Podemos proponer la misma área del ejercicio anterior como una integral doble de la siguiente forma:

$$I = \int_{0.02476}^{4.215} \int_{g(x)}^{f(x)} dydx = \int_{0.02476}^{4.215} \int_{e^{x}}^{\frac{250x}{6+x}e^{-x/10}} dydx \tag{4}$$

De esta forma, podemos utilizar el código IntegralDoble.f90 y el resultado es el siguiente:

```
La integral desde      0.02480000 a      4.12500000 es
       129.46379089
obtenida con N = 800 y M = 800
```

Fig. 17: Área utilizando IntegralDoble.f90

IV. Problema 4

Resuelva la integral siguiente usando el método de Simpson y el programa IntegralDoble.f90

$$I = \int_{1}^{e} \int_{\ln(x)}^{2\ln(x)} dydx \tag{5}$$

a. Método de Simpson

Analíticamente uno puede demostrar que el valor de la integral es $I = 1$. Introduciendo los datos en el programa para el Método de Simpson resulta:

```
 Intervalo inferior y superior
1,2.71828182
 El area de la integral es:   1.00000024
```

Fig. 18: Solución por método de Simpson.

Por lo que existe un error relativo de 2×10^{-7}.

b. Método de Integral Doble

Teniendo como input los extremos para y las funciones $\ln(x)$ y $2\ln(x)$, podemos ejecutar el programa en el intervalo dado, resultando:

```
La integral desde      1.00000000 a      2.71828175 es
       0.99999964
obtenida con N = 800 y M = 800
```

Fig. 19: Solución por Integral Doble.

Consiguiendo un error relativo del orden de 3×10^{-7}.

V. Problema 5

Realizar un programa en FORTRAN que calcule el factorial del número 5000

a. *Código*

```fortran
program fact

    integer :: n , j, a(0:20000) = 0, len , c , num

    ! Se define el numero a sacar el factorial, el contador de las multiplicaciones iniciando en 2,
    ! El primer elemento del arreglo, de forma auxiliar, se escoje a 1.
    ! Otras variables auxiliares c y num se definen como 0 al inicio de cada ciclo.
    write(*,'(a)',advance='no')'Factorial del numero: ';read*,n
    j = 2
    a(0) = 1
    len  = 1
    c = 0
    num = 0

    ! Se inicia el ciclo while que se mantiene hasta que se realicen todas las multiplicaciones

    do while (j <= n)
        c = 0
        num = 0

        ! Se inicializa un segundo ciclo que introduce en el arreglo el c-esimo digito en cada ciclo.
        do while (c < len)
            a(c) = a(c)*j
            a(c) = a(c) + num
            num = a(c)/10
            a(c) = mod(a(c),10)
            c = c + 1
        end do

        ! En este ciclo se modifica el ultimo elemento del arreglo en el ciclo actual, el cual seguira
        ! cambiando conforme continue el ciclo mayor.
        do while (num /=  0)
            a(len) = mod(num,10)
            num = num/10
            len = len + 1
        end do
        j = j + 1
    end do

    ! Se imprimen los resultados desde el ultimo digito hasta el primero, cuidando
    ! que la variable len no sea mayor al tamano del arreglo
    len =  len  - 1
    do while (len >= 0)
        write(*,'(i0)',advance='no') a(len)
        len = len - 1
    end do

end program fact
```

b. *Resultados*

Podemos probar distintos números grandes que, sin un algoritmo para el cálculo de factoriales grandes, no se podrían obtener. Esta barrera empieza alrededor del 100!. Por lo que a continuación se proponen distintos ejemplos de números mayores a 100.

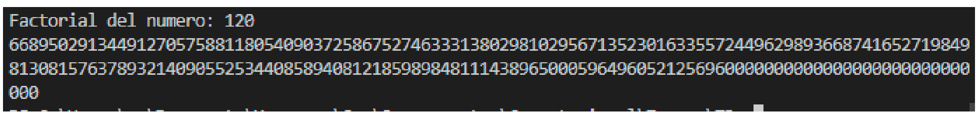


Fig. 20: Computando para 120!.

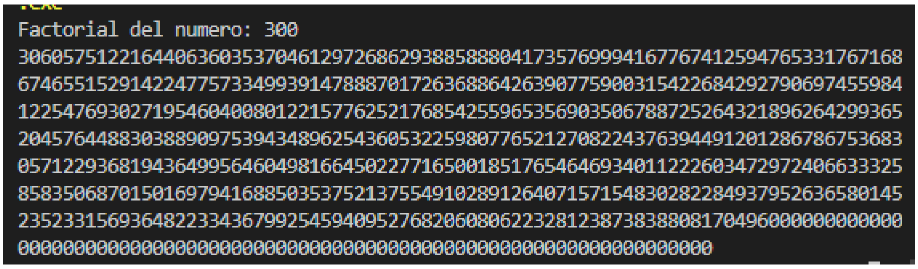


Fig. 21: Computando para 300!.

Fig. 22: Computando para 5000! (resultado recortado).

Podemos corroborar con la calculadora factorial de aquí que en los primeros ~ 100 dígitos son iguales, y concluir que funciona.

VI. Conclusión

En esta tarea he aprendido sobre cómo hacer, a lo que se le llama funciones lambda en Python, en FORTRAN en el programa de Integral Doble. Apliqué programas de tareas pasadas como subrutinas en los problemas planteados en la presente tarea e intenté graficar áreas entre funciones en GNUPLOT fracasando rotundamente :). En el código del factorial pude aprender con más claridad la utilidad de la función módulo como una de las funciones más ocultas pero también infravaloradas en todos los lenguajes de programación. También aprendí a que el compilador no salte de renglón por cada línea que escriba en la terminal, pero eso qué.