Tarea 2

Gustavo Hernández Angeles

21 de junio de 2023

Problema 1

Realice los siguientes ejercicios.

a. Demostrar que $\int_0^\infty f(x)dx = 1$ para la función $f(x) = \frac{1}{2}e^{-1/2x}$ para $x > 0$.

Solución. Utilizamos el cambio de variable $u = 1/2x$.

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-1/2x}dx = \int_0^\infty e^{-u}du$$
$$\int_0^\infty e^{-u}du = -e^{-u}\big|_0^\infty = 1 - \lim_{a\to\infty} e^{-a} = 1$$
$$\boxed{\int_0^\infty f(x)dx = 1}$$

b. Calcular $M_X(t)$ para la función anterior.

Solución. Por definición.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^\infty e^{tx} f(x)dx \tag{1.1}$$

Aplicandolo con nuestra función, haciendo el cambio de variable $u = (1/2 - t)x$.

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^\infty e^{tx}\frac{1}{2}e^{-1/2x}dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{(-1/2+t)x}dx = \int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-(1/2-t)x}dx$$
$$\int_0^\infty \frac{1}{2}e^{-(1/2-t)x}dx = \frac{1/2}{1/2-t}\int_0^\infty e^{-u}du = -\frac{1}{1-2t}e^{-u}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{1-2t}e^{-(1/2-t)x}\Big|_0^\infty$$

Nuestro interés particular en la función generatriz de momentos es donde $t = 0$, así que podemos hacer la suposición de que $t < 1/2$, entonces obtenemos:

$$\boxed{M_X(t) = \frac{1}{1-2t} \quad ; \quad t < 1/2}$$

c. Calcule $E(x),\ E(x^2),\ E(x^3),\ E(x^4)$

Solución. De las propiedades de la función generatriz de momentos:

$$M_X^n(0) = E(X^n) \tag{1.2}$$

- $E(X)$.
  En este caso, de la ecuación (1.2) con $n = 1$.

$$M_X'(t) = 2/(1-2t)^2$$

$$M_X'(0) = E(X) = 2/(1-2\cdot 0)^2$$

$$\boxed{E(X) = 2}$$

- $E(X^2)$.
  Con $n = 2$.

$$M_X''(t) = -4(1-2t)^{-3}(-2) = 8(1-2t)^{-3}$$
$$M_X''(0) = E(X^2) = 8(1-2(0))^{-3}$$
$$\boxed{E(X^2) = 8}$$

- $E(X^3)$.
  Con $n = 3$.

$$M_X'''(t) = 8(-3)(1-2t)^{-4}(-2) = 48(1-2t)^{-4}$$
$$M_X'''(0) = E(X^3) = 48(1-2(0))^{-4}$$
$$\boxed{E(X^3) = 48}$$

- $E(X^4)$.
  Con $n = 4$.

$$M_X''''(t) = 48(-4)(1-2t)^{-5}(-2) = 384(1-2t)^{-5}$$
$$M_X''''(0) = E(X^4) = 384(1-2(0))^{-5}$$
$$\boxed{E(X^4) = 384}$$

Problema 2

Tenga X la función de densidad de probabilidad.

a.
$$f_X(X) = \begin{cases} 1/4, & 0 < x < 1 \\ 3/8 & 3 < x < 5 \\ 0 & \text{En otro lado} \end{cases}$$

Encuentre la función de probabilidad acumulada de X.

Solución. Obtendremos la función de probabilidad acumulada para cada intervalo en el que está definida la función $f_X(x)$. Para $X < 0$:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = 0$$

Para 0<x<1:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = 1/4 \int_{0}^{x} dx = x/4$$

Para 1<x<3:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{1} f_X(t)dt + \int_{1}^{x} f_X(t)dt = 1/4$$

Para 3<x<5:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f_X(t)dt + \int_{0}^{1} f_X(t)dt + \int_{1}^{3} f_X(t)dt + \int_{3}^{x} f_X(t)dt =$$
$$= 1/4 + 3/8 \int_{3}^{x} dt = 1/4 + 3x/8$$

Para x>5:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{5} f_X(t)dt + \int_{5}^{x} f_X(t)dt = 1$$

Por lo tanto,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x/4, & 0 < x < 1 \\ 1/4, & 1 < x < 3 \\ 1/4 + 3x/8, & 3 < x < 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

b. Sea Y = 1/X. Encuentre la función de densidad de probabilidad $f_Y(y)$ para Y. Pista. Considere tres casos: $\frac{1}{5} \leq y \leq \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3} \leq y \leq 1$ y $y \geq 1$.

Solución.

Problema 3

Sea $M_x(t) = \frac{1}{n}\frac{e^t(1-e^{nt})}{1-e^t}$ que es la generatriz de momentos de una distribución uniforme discreta cuya función de distribución es $f(x) = 1/n$, demostrar que

a. $E(X) = \frac{n+1}{2}$

Solución. Podemos utilizar la función generatriz de momento para obtener este valor esperado,

$$E(X) = M_X'(0)$$

Obtenemos $M_X'(t)$,

$$M_X'(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{n}\frac{e^t(1-e^{nt})}{1-e^t} = \frac{e^t + ne^{(n+2)t} - (n+1)e^{(n+1)t}}{n(e^t-1)^2}$$

Al momento de intentar evaluar $t = 0$ nos encontramos con una indeterminación $0/0$. Para esto utilizamos la regla de L'Hopital.

$$M_X'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{e^t + n(n+2)e^{(n+2)t} - (n+1)^2e^{(n+1)t}}{2n(e^{2t}-e^t)}$$

Otra vez, vemos el mismo tipo de indeterminacion por lo que volvemos a aplicar la regla de L'Hopital,

$$M_X'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{e^t + n(n+2)^2e^{(n+2)t} - (n+1)^3e^{(n+1)t}}{2n(2e^{2t}-e^t)}$$

$$M_X'(0) = \frac{1+n(n+2)^2-(n+1)^3}{2n} = \frac{1+n^3+4n^2+4n-n^3-3n^2-3n-1}{2} = \frac{n^2+n}{2n}$$

$$M_X'(0) = \frac{n(n+1)}{2n}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{n+1}{2}}$$

b. $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$

Solución. Sabemos que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Podemos calcular $E(X^2)$ por su definición:

$$E(X^2) = \sum_{x=1}^{n} x^2\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n} x^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Entonces,

$$V(X) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left[\frac{n+1}{2}\right]^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4}$$
$$V(X) = \frac{2(n+1)(2n+1)-3(n+1)^2}{12} = \frac{(n+1)[4n+2-3n-3]}{12}$$
$$V(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{n^2-1}{12}}$$

Problema 4

Sea $X \sim N(3, 16)$ resuelve los siguientes incisos (ya sea por medio de tablas o paquete computacional).

a. Encuentre $P(X < 7)$.

Solución. Podemos realizar esto con ayuda de la tabla de integración de la distribución normal $Z \sim N(0,1)$. Con $z = (7-3)/16$,

$$P(X < 7) = F(z) = F(0.25) = 0.5987$$
$$\boxed{P(X < 7) = 0.5987}$$

b. Encuentre $P(X > -2)$.

Solución. Determinamos z de la forma $z = (-2-3)/16 = -0.3125$ y entonces,

$$P(X > -2) = F(-z) = F(0.3125) \simeq 0.627$$

$$\boxed{P(x > -2) = 0.627}$$

c. Encuentre x de tal manera que $P(X > x) = 0.05$.

Solución. En este caso podemos plantear el problema como sigue: Buscamos un z tal que $1 - F(z) = 0.05$, esto porque necesitamos un valor de x que sea mayor a la media $\mu = 3$, por lo que $z > 0$ siempre. Con esta igualdad obtenemos que $z = 1.65$. Desarrollando de manera general,

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = 1.65$$
$$x = 1.65\sigma + \mu = 1.65 \cdot 16 + 3$$
$$\boxed{x = 29.4}$$

d. Encuentre $P(0 \leq X < 4)$.

Solución. Podemos reescribir esta probabilidad como $P(X \leq 4) - P(X \leq 0)$. Así que determinamos estas probabilidades por separado de la siguiente forma, sea $z_1 = (0-3)/16 = -0.1875$, $z_2 = (4-3)/16 = 0.0625$, entonces

$$P(0 \leq X < 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 0) = F(z_2) - (1 - F(-z_1)) = 0.5239 - (1 - 0.5753) = 0.0992$$

$$\boxed{P(0 \leq X < 4) = 0.0992}$$