CIMAT Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

CONACYT

Curso Propedéutico

Estadística

Junio 2023

Unidad Monterrey

Temario de clase de Estadística

- Conjuntos, operaciones de conjuntos, particiones, permutaciones, combinaciones.
- Experimentos, eventos.
- Variables aleatorias, espacio muestral, probabilidad, probabilidad condicional, independencia.
- Regla de Bayes.
- Medidas de localización, dispersión.
- Distribuciones de probabilidad discretas y continuas.

Método de evaluación

- 40% Tareas
- 60% Evaluación final

Qué se entiende por Estadística?

Estadística es la ciencia de coleccionar, organizar, presentar, analizar, e interpretar datos para ayudar a tomar mejores decisiones.

- Un **estadístico** se define como una información numérica, por ejemplo el *salario inicial promedio* de un graduado de cierta carrera, el numero de muertes anuales por accidentes automovilísticos.

- A la colección de estadísticos, ya sea en tablas, gráficos o valores numéricos se le llama **estadísticas**.

Los métodos estadísticos son utilizados en todas las áreas por ejemplo en marketing, compañías de seguro, control de calidad.

Tipos de estadística

<u>Estadística Descriptiva:</u> consiste en métodos para organizar, resumir y presentar los datos de una manera informativa.

Ejemplo 1: Mediante una encuesta se encontró que el 49% de las personas conocía el nombre del primer libro de la Biblia. El estadístico 49 describe el número de cada 100 personas que conocían la respuesta.

Ejemplo 2: Según reportes del consumidor, los propietarios de lavadoras Samsung reportaron 9 problemas por cada 100 máquinas durante 2009. La estadística 9 describe el número de problemas de cada 100 máquinas.

Tipos de estadística

Estadística inferencial: consiste de métodos para determinar alguna característica de una población, basándose en la información de una muestra.

- Una población es una colección de todos los posibles individuos, objetos, o mediciones de interés.

- Una muestra es un subconjunto, o parte, de la población de interés.

Inferencia estadística

Ejemplo: Cadenas de televisión monitorean constantemente la popularidad de sus programas tomando muestras de hogares para estimar sus preferencias a nivel nacional.

Ejemplo:

El departamento de contabilidad de una empresa selecciona una muestra aleatoria de 100 facturas y verifica la exactitud de cada una.

- En cinco de las facturas hubo errores; el departamento estima que el 5% de toda la población de facturas contienen un error

Tipos de Variables

- Existen dos tipos básicos de variables: Las variables cualitativas o atributos y las variables cuantitativas.

- **Variables cualitativas o atributos:** la característica o variable bajo estudio no es numérica.

Ejemplo Sin Orden: Género, religión, marca de automóvil, lugar de nacimiento, color de ojos, etc.

Ejemplo Con Orden: NSE: Alto, Medio, Bajo. Potencial de ventas Alto, Medio-Alto, Medio-Bajo, Bajo. Etc.

- **Variables cuantitativas:** la variable se reporta numéricamente.

Ejemplo: saldo de una cuenta corriente, minutos restantes en la clase, número de hijos en una familia.

Tipos de Variables

- Las variables cuantitativas se clasifican como discretas o continuas.

- **Variables discretas:** Sólo puede tomar valores dentro de un conjunto finito o infinito numerable.

- **Ejemplos**: el número de habitaciones en una casa (1,2,3,..., etc), la edad de una persona

Tipos de Variables

Variables continuas: puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo determinado.

Toman valores en una escala continua, es decir, entre dos valores observados de la escala siempre va a existir un valor intermedio que también podría tomar la variable.

Son el resultado de medir algo, y a diferencia de las variables discretas nunca pueden ser medidas con exactitud

Ejemplos: La estatura de una persona, el tiempo de vuelo de Monterrey al DF.

Resumen de los Tipos de variables

- DATOS
  - Cualitativos o atributos
    - Genero, Colores,
    - NSE, Potencial de ventas
  - Cuantitativos o numericos
    - discretos (ejem: número de niños en una guardería)
    - continuos (ejem: tiempo en realizar un examen)

Probabilidad objetiva y subjetiva

Existen dos enfoques para interpretar la probabilidad, la **probabilidad objetiva** y la **probabilidad subjetiva**, ambas interpretaciones se refieren a la manera de determinar la probabilidad de que ocurra un evento.

Probabilidad objetiva: probabilidad se determina mediante una evidencia objetiva sobre la ocurrencia de un evento y su valor no depende de quien hace la determinación.

- Cuando se asume que los resultados del experimento son igualmente probables, llamada **probabilidad clásica**

- Cuando la probabilidad se basa en las frecuencias relativas con que ocurre un evento similar en el pasado, en una gran cantidad de repeticiones del experimento, llamada **probabilidad frecuentista o empírica**

Probabilidad objetiva y subjetiva

Probabilidad subjetiva: la probabilidad de que un evento ocurra es determinada por un individuo basándose en información disponible y en la experiencia.

Ejemplos:

- Estimar la probabilidad de que los tigres lleguen a la final en el próximo torneo.
- Estimar la probabilidad de General Motors pierda su posición número 1 en unidades vendidas en un periodo de dos años.
- Estimar la probabilidad de que un terremoto ocurra en la ciudad de México este año.

Probabilidad clásica

Probabilidad clásica: Se basa en la suposición de que todos los resultados de un experimento son igualmente probables.

Desde el punto de vista clásico, la probabilidad de que un evento ocurra se calcula dividiendo el número de resultados que conforman el evento (resultados favorables) entre el número total de resultados igualmente probables (número de posibles resultados)

$$\text{Probabilidad de un evento} = \frac{\text{Número de resultados favorables}}{\text{Número de posibles resultados}}$$

Probabilidad clásica

Ejemplo: Considere el experimento de lanzar un dado de seis caras.

Cuál es la probabilidad de obtener un número par de puntos?

Ejemplo: En un juego de cartas, considere el experimento de extraer una carta, cuál es la probabilidad de obtener un as?

Ejemplo: Considere el experimento de lanzar dos monedas una vez, cuál es la probabilidad de obtener un aguila?

Probabilidad frecuentista o empírica

La probabilidad de que un evento ocurra a la larga se determina observando el número de veces que eventos similares ocurrieron en el pasado.

$$\text{Probabilidad del evento} = \frac{\text{Número de veces que ocurrió el evento en el pasado}}{\text{Número total de observaciones}}$$

Probabilidad frecuentista o empírica

Ejemplo: A lo largo de su carrera, la profesora Ávila ha otorgado 186 calificaciones de 100 a los 1200 estudiantes que ha tenido en su curso. ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante en su curso de este semestre reciba una calificación de 100?

Aplicando el concepto de probabilidad frecuentista, la probabilidad de que un estudiante reciba una calificación de 100 está dada por:

Probabilidad de obtener 100= 186/1200 = 0.155

Es decir, de acuerdo a la experiencia pasada, la probabilidad de que un estudiante obtenga un 100 es de 15.5%

Tipos de probabilidad

- Tipos de Probabildad
  - Probabilidad objetiva
    - Probabilidad clásica
    - Probabilidad empírica
  - Probabilidad subjetiva

Experimento, espacio muestral y evento

- En el estudio de la probabilidad se involucran tres conceptos básicos: **experimento, espacio muestral y los eventos o sucesos.**

- **Experimento:** Un proceso que se repite bajo condiciones estables y que conduce a la aparición de uno y sólo uno de varias resultados posibles.

- **Espacio muestral:** todos los resultados posibles del experimento, se denota mediante **S**

- **Evento:** Una colección de uno o más resultados de un experimento o un subconjunto del espacio muestral.

Experimento, espacio muestral y evento

Ejemplo

- Considere el experimento de lanzar un dado
- El espacio muestral será

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

- Consideremos el evento de que aparezca un número par

$$\text{Evento} = \{2, 4, 6\}$$

- Consideremos el evento de que aparezca un número mayor a 4

$$\text{Evento} = \{5, 6\}$$

Experimento, espacio muestral y evento

Ejemplo

Considere el experimento de lanzar dos monedas una vez

El espacio muestral será

$$S = \{AA, AS, SA, SS\}$$

Consideremos el evento de que aparezca un aguila.

$$\text{Evento} = \{AS, SA\}$$

Espacio muestral: discreto y continuo

Espacio muestral discreto: el número de resultados es finito o infinito numerable.

Ejemplo: Consideremos el experimento de lanzar una moneda 5 veces y contar el número de aguilas.

El espacio muestral está dado por

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \text{ discreto y finito}$$

Ejemplo: El número de lanzamientos de una moneda hasta que aparezca el primer aguila

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots\}$$

El espacio muestral es discreto pero es infinito porque no hay límite para el número de lanzamientos

Espacio muestral: discreto y continuo

Espacio muestral continuo: el número de posibles resultados es infinito y no numerable.

Ejemplo: El experimento referente a la vida de una lámpara tiene un espacio muestral continuo, porque el resultado del experimento puede ser cualquier número real comprendido entre cero y el límite superior (10000 horas)

- Por lo general un espacio muestral es continuo cuando los resultados se obtienen por medición y no por conteo

Operaciones con eventos

- Los eventos se pueden combinar mediante operaciones para obtener nuevos eventos o conjuntos.

Unión de dos eventos

- Si A y B son dos eventos, $\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ es el evento que ocurre si y solo si ocurren A ó B (o ambos)

Intersección de eventos

- Si A y B son dos eventos, $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ es el evento que ocurre si y solo si ocurren A y B

Complemento de un evento

- Si A es un evento, A^c es el evento que ocurre si y solo si A no ocurre

Operaciones con eventos

Unión de colección de eventos

- Si $A_1, \dots, A_n$ es cualquier colección finita de eventos, entonces $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ es el evento que ocurre si y solo si *al menos uno* de los eventos A_i ocurre.

Intersección de colección de eventos

- Si $A_1, \dots, A_n$ es cualquier colección finita de eventos, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} \boldsymbol{A_i}$ es el evento que ocurre si y solo si *todos* los eventos A_i ocurren

- Se dice que dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente,

$$A \cap B = \phi$$

Operaciones con eventos

- Se dice que dos eventos A y B son mutuamente excluyentes si no pueden ocurrir simultáneamente,

$$A \cap B = \phi$$

- **Ejemplo:** Se prueba un artefacto electrónico y se anota el tiempo total de uso, digamos t.

a) Determine el espacio muestral del experimento.
b) Sean A, B y C tres eventos definidos como sigue:

$A = \{t | t < 100\}, \quad B = \{t | 50 \leq t \leq 200\}, \ C = \{t | t > 150\}.$

Determine $A \cup B,\ A \cap B,\ B \cup C,\ B \cap C,\ A \cap C,\ A \cup C, A^c, C^c$

Eventos independientes

Resultado: A y B son dos eventos independientes si y solo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Ejemplo: Se lanzan dos monedas, cuál es la probabilidad de que las dos monedas caigan sol?

Ejemplo: Consideremos un lote grande de artículos, digamos 10,000. Supongamos que el 10% de estos artículos son defectuosos y el 90% no. Se eligen dos artículos, cuál es la probabilidad de que ambos no sean defectuosos?

Eventos independientes

Ejemplo: Supongamos que lanzamos dos dados. Definimos los eventos A, B y C, como sigue:

A={el primer dado muestra un número par}

B={el segundo dado muestra un número impar}

C={ambos dados muestran números pares o impares}

Tenemos que

$$P(A)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2},\ P(B)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2},\ P(C)=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$$

Además

$$P(A\cap B)=P(A\cap C)=P(B\cap C)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$$

Eventos independientes

- Entonces se cumple que

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C)$$

- Por tanto los tres eventos son mutuamente independientes tomados por pares

- Sin embargo

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C)$$

- Por tanto los tres eventos no son independientes

Eventos independientes

Resultado: Decimos que tres eventos A, B y C son *mutuamente independientes* si solo si todas la siguientes condiciones se cumplen:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B), \qquad P(A \cap C) = P(A)P(C),$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C), \qquad P(A \cap B \cap C) = \mathrm{P(A)P(B)P(C)}$$

Probabilidad condicional

- La probabilidad condicional es la probabilidad de que un evento en particular ocurra, dado que ha ocurrido otro evento.

- Es decir, la probabilidad de que ocurra un evento se ve afectada por la ocurrencia de otro evento.

- **Probabilidad condicional**: Para dos eventos cualesquiera A y B en un espacio muestral **S**, tal que P(A)>0, la probabilidad de que el evento B ocurra dado que el evento A ocurrió se define como

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Probabilidad condicional

- **Ejemplo:** Supongase que una oficina tiene 100 computadoras. Algunas de ellas tienen Windows (E), mientras que otras tienen Linux (L). Además algunas son nuevas (N) mientras las otras son usadas (U). En la siguiente tabla se da el número de computadoras de cada categoría. Una persona entra en la oficina, y elige una computadora al azar y descubre que es nueva. Cuál es la probabilidad de que sea una máquina con Windows?

	W	L	
N	40	30	70
U	20	10	30
	60	40	100

Probabilidad condicional e independencia

Ejemplo. Supongamos que se lanza un dado normal dos veces. Definimos los eventos A y B como sigue:

A={el primer dado muestra un numero par}
B={el segundo dado muestra un 5 o un 6}

- Intuitivamente sabemos que los eventos A y B no están relacionados. Saber que B ocurre, no proporciona información acerca de la ocurrencia de A.

- El espacio muestral para el experimento está dado por

S={(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),
(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5)
(4,6),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5)
(6,6)}

Probabilidad condicional e independencia

Ejemplo (continuación)

Entonces

P(A)=18/36=1/2, P(B)=12/36=1/3, y $P(A \cap B)$=6/36=1/6

- Por lo tanto

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2} = \mathrm{P(A)}$$

De manera semejante

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{2} = P(B)$$

- En ambos casos, la probabilidad condicional de los eventos es igual a su probabilidad no condicional, como se esperaba

Probabilidad condicional e independencia

- Por lo tanto cuando los eventos A y B no están relacionados se cumple que

$$P(A|B) = P(A) \ y \ P(B|A) = P(B)$$

Entonces considerando la propiedad multiplicativa de probabilidades para $P(A \cap B)$, tenemos que

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = \mathrm{P(A)P(B)}$$
$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A) = \mathrm{P(B)P(A)}$$

- Concluimos que las probabilidades no condicionales son iguales a las probabilidades condicionales si y solo si

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Propiedad multiplicativa de probabilidades

- La consecuencia más importante de la definición de probabilidad condicional se obtiene escribiéndola de la siguiente manera:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A)$$

Lo que equivale a

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

- Esto se conoce como como la **propiedad multiplicativa de probabilidades.**

- Esta propiedad se puede aplicar para calcular la probabilidad simultánea de dos eventos A y B.

Propiedad multiplicativa de probabilidades

Ejemplo: Consideremos un lote de artículos, el cual consta de 20 artículos defectuosos y 80 sin defectos. Si elegimos 2 artículos al azar, sin sustitución, cuál es la probabilidad de que ambos artículos sean defectuosos?

Propiedad multiplicativa de probabilidades

La propiedad multiplicativa se puede generalizar a mas de dos eventos de la siguiente forma:

$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$=P$(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1, A_2) \cdots P(A_n|A_1,\ldots,$ $A_{n-1})$

Ejemplo: Considerando el ejemplo anterior, ahora supongamos que elegimos un tercer artículo del lote. Cuál es la probabilidad de que los tres artículos sean defectuosos?

Partición del espacio muestral

- Decimos que los eventos $B_1, B_2, \ldots, B_k$, representan una partición del espacio muestral **S**, si:

a) $B_i \cap B_j = \emptyset$ para todo i$\neq j$

b) $\bigcup_{i=1}^{k} B_i = S$

c) $\mathrm{P}(B_i) > 0$ para todo i

- En otras palabras, cuando se efectúa el experimento, ocurre uno y solo uno de los eventos B_i.

Ejemplo: En el lanzamiento de un dado

$B_1 = \{1,2\}$, $B_2 = \{3,4,5\}$ y $B_3 = \{6\}$ representa una partición de **S**, mientras que $C_1 = \{1,2,3,4\}$ y $C_2 = \{4,5,6\}$ no representan una partición de **S**

Probabilidad total

- Sea A algún evento con respecto a S y sea $B_1, B_2, \ldots, B_k$ una partición de S, por tanto podemos escribir

$$A = A \cap B_1 \cup A \cap B_2 \cup \cdots \cup A \cap B_k$$

- Todos los eventos $A \cap B_1, A \cap B_2, \ldots, A \cap B_k$ son mutuamente excluyentes

- Por tanto podemos aplicar la propiedad aditiva de probabilidades para estos eventos, obteniendo

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k)$$

Probabilidad total

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_k)$$

- Cada término $P(A \cap B_j)$ se puede expresar como $P\left(A \middle| B_j\right)P(B_j)$ y por tanto P(A) se puede expresar como:
- $P(A) = P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + \cdots + P(A|B_k)P(B_k)$
- Esta probabilidad es llamada la **probabilidad total**
- Este resultado es muy útil debido a que frecuentemente resulta difícil calcular P(A) directamente, sin embargo con la información adicional de que B_j ha ocurrido se puede calcular $P(A|B_j)$ y entonces usar la fórmula anterior

Probabilidad total

Ejemplo: Considere el lote de 20 artículos defectuosos y 80 sin defectos, de los cuales elegimos 2 artículos sin sustitución.

- Definiendo los eventos A y B como:

A={el primer artículo elegido es defectuoso}

B={el segundo artículo elegido es defectuoso}

- Calcule la probabilidad de que el segundo artículo elegido sea defectuoso usando la expresión de la probabilidad total.

Probabilidad total

Ejemplo: Cierto artículo es manufacturado por tres fabricas, digamos 1, 2 y 3. Se sabe que la primera produce el doble de artículos que la segunda y que ésta y la tercera producen el mismo número de artículos (durante un periodo de producción especificado). Se sabe también que el 2% de los artículos producidos por las primeras dos fabricas son defectuosos mientras que el 4% de los manufacturados por la tercera son defectuosos.
Se colocan juntos todos los artículos producidos en una fila y se elige uno al azar. Cuál es la probabilidad de que este artículo sea defectuoso?

Teorema de Bayes

- Siguiendo con el ejemplo anterior, supongamos que del depósito se elige un artículo y se encuentra que es defectuoso. Cuál es la probabilidad de que sea producido por la primer fábrica?

- Considerando los eventos definidos en el ejemplo, necesitamos calcular $P(B_1|A)$.

- Sean $B_1, B_2, \dots, B_k$ una partición del espacio muestral S. Sea A un evento asociado con S. Aplicando la definición de probabilidad condicional, se puede escribir

$$P(B_i|A) = \frac{P(A \cap B_i)}{P(A)} = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{k} P(A|B_j)P(B_j)}, \qquad i = 1,2, \dots, , k$$

- Este resultados se conoce como el **teorema de Bayes**

Teorema de Bayes

En el ejemplo anterior de las 3 fabricas, dado que si encontramos que el artículo seleccionado al azar es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la fábrica 1?

$$P(B_1|A) = \frac{P(A|B_1)P(B_1)}{P(A|B_1)P(B_1) + P(A|B_2)P(B_2) + P(A|B_3)P(B_3)}$$

$$= \frac{(.02)(1/2)}{(.02)\left(\frac{1}{2}\right) + (.02)(1/4) + (.04)(1/4)} = .40$$

Por tanto la probabilidad de que el artículo sea producido por la fábrica 1 dado que fue defectuoso es .40

Teorema de Bayes

- Al teorema de Bayes tambien se le conoce como **probabilidad de las causas.**

- Debido a que las B_i son una partición del espacio muestral, es decir uno de los eventos B_i debe ocurrir y solamente uno.

- Por tanto, el teorema nos da la probabilidad de un B_i particular (esto es, una causa) dado que el evento A ha ocurrido.

- Para aplicar el teorema debemos conocer los valores de las $\mathrm{P}(B_i)$.

- Muy a menudo esos valores no son conocidos y esto limita el uso del teorema.

Diagrama de árbol

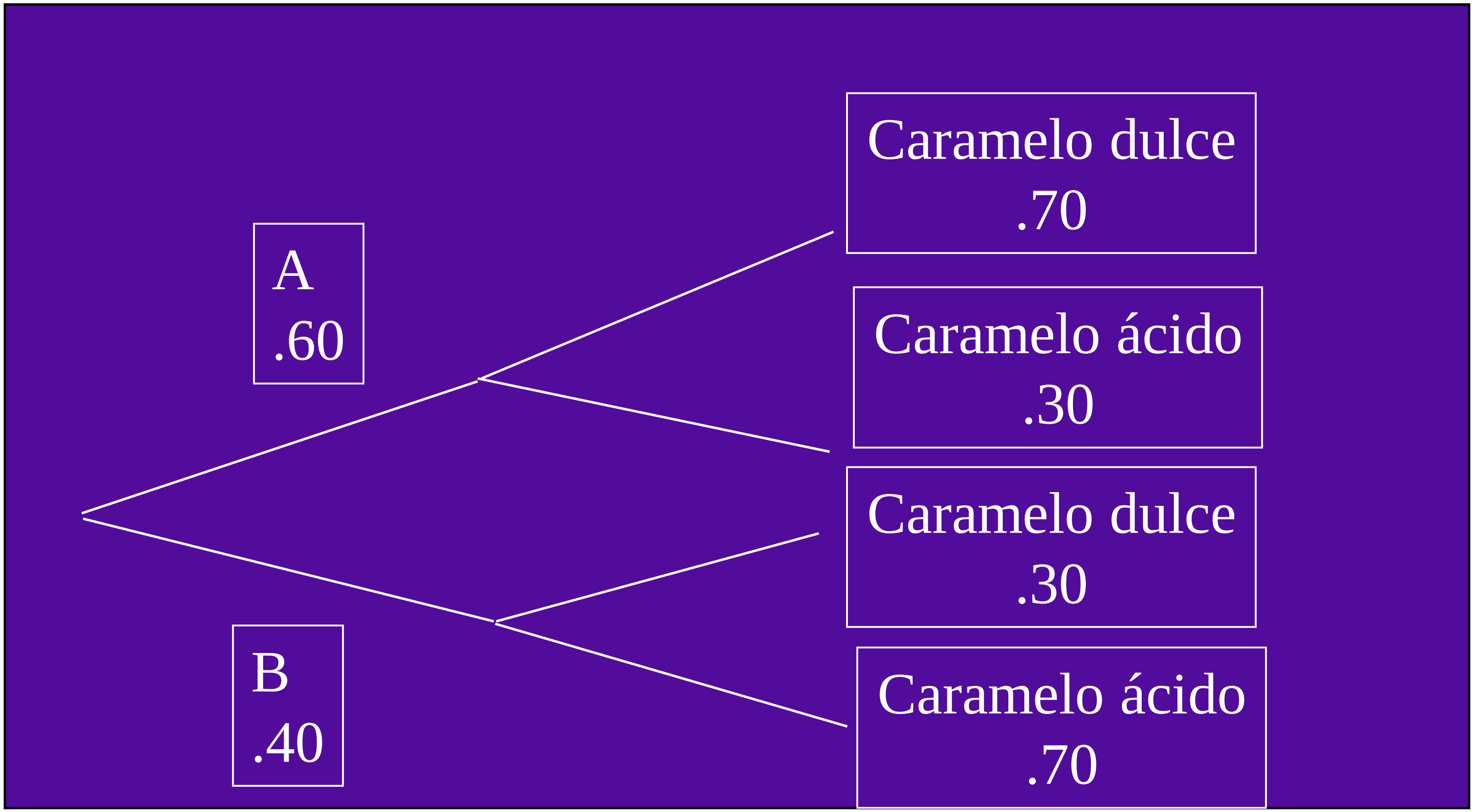
- Una herramienta muy útil para ilustrar las probabilidades condicionales y la regla multiplicativa así como entender el teorema de Bayes son los diagrama de árbol

Ejemplo: Supongamos que muchas cajas están llenas de caramelos de dos tipos, digamos A y B. El tipo A contiene 70% dulce y 30% ácido, mientras que en el tipo B dichos porcentajes son al revés. Aún más, supóngase que el 60% de todas las cajas de caramelos son del tipo A mientras que el resto son del tipo B.

- Suponemos que una persona recibe una caja de dulces de tipo desconocido, y se le permite sacar una muestra y obtiene un caramelo dulce. Con esta información debe decidir si la caja que recibió es del tipo A o B.

Diagrama de árbol

El diagrama de árbol nos ayudará a analizar el problema



P(A)=.6, P(B)=.4, P(dulce|A)=.70,
P(ácido|A)=.3, P(dulce|B)=.3, P(ácido| B)=.7

Diagrama de árbol

- La pregunta es: que tipo de caramelo se le ha ofrecido dado que obtuvo un caramelo dulce? Entonces se debe comparar P(A|dulce) y P(B|dulce).

- Aplicando el teorema de Bayes tenemos que

- $P(A|dulce) = \frac{P(dulce|A)P(A)}{P(dulce|A)P(A)+P(dulce|B)P(B)} =$
$\frac{(.7).(6)}{(.7).(6)+(.3)(.4)} = \frac{.42}{.54} = .77$

- $P(B|dulce) = \frac{P(dulce|B)P(B)}{P(dulce|B)P(B)+P(dulce|A)P(A)} =$
$\frac{(.3).(4)}{(.3).(4)+(.7)(.6)} = \frac{.12}{.54} = .22$

- Por tanto la persona podría decidir que la caja es del tipo A

Diagrama de árbol

- Este resultado lo podemos deducir del arbol, haciendo un análisis de atrás para adelante en las trayectoria.

- Por ejemplo la primer trayectoria se puede leer ahora como: dado que el caramelo es dulce, que probabilidad hay de que sea del tipo A, y así con las otras 3 trayectorias.

- Para calcular P(A|dulce), dividimos la probabilidad de la trayectoria correspondiente (evento favorable) entre la suma de las probabilidades de las trayectorias que terminan en caramelo dulce (posibles resultados). De manera similar calculamos P(B|dulce)

- Las probabilidades de cada trayectoria se obtienen multiplicando las probabilidades de los ramales que la conforman (propiedad multiplicativa)

Métodos de conteo

- Bajo el enfoque clásico, la probabilidad de que ocurra un evento está dada por

$$\text{Probabilidad de un evento} = \frac{r}{k}$$

r=número de resultados favorables
k= número de posibles resultados del experimento

- Si el número de posibles resultados es pequeño, es relativamente fácil hacer una lista de ellos y contarlos, entonces **r** y **k** se obtienen de manera sencilla.

- Pero si hay un número grande de resultados posibles, es necesario contarlos sistematicamente utilizando métodos de conteo para obtener **r** y **k**

Combinaciones

- Consideremos nuevamente **n** objetos diferentes. Esta vez estamos interesados en contar el número de maneras de como podemos elegir **r** de esos **n** objetos *sin considerar el orden*.

- **Ejemplo:** tenemos los objetos a,b,c, d, y elegimos dos, r=2, queremos contar *ab, ac, ad, bc, bd* y *cd* .

- Es decir, **no** contamos por ejemplo *ba* debido a que son los mismos objetos que **ab** solo diferen en el orden.

- Para obtener el resultado general recordemos la fórmula de las permutaciones: el número de maneras de elegir **r** objetos entre **n** y permutar los **r** elegidos está dado por $\frac{n!}{(n-r)!}$

Combinaciones

- Sea **C** el número de maneras de elegir **r** entre **n**, si considerar el orden.

- Una vez que se han escogido los **r** artículos, hay **r!** maneras de permutarlos. Por tanto, aplicando de nuevo el principio de multiplicación junto con el resultado anterior, obtenemos

$$\mathrm{Cr}! = \frac{\mathrm{n}!}{(\mathrm{n}-\mathrm{r})!}$$

Por lo tanto el número de maneras de elegir **r** entre **n** objetos diferentes, sin considerar el orden, está dado por

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{n}!}{r!\,(\mathrm{n}-\mathrm{r})!}$$

Combinaciones

- Este número también aparece con mucha frecuencia en matemáticas y se emplea un símbolo especial para denotarlo, $\binom{n}{r}$, y que se lee como *las combinaciones de* ***n*** *elementos tomadas* ***r*** *a* ***r*.**

Es decir, $$\frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{r}!(\mathrm{n}-\mathrm{r})!} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}}$$

- Para nuestros propósitos $\binom{n}{r}$ se define solo si **n** es un entero positivo y si r es un entero tal que $0 \leq r \leq \mathrm{n}$. Sin embargo, podemos definir $\binom{n}{r}$ muy ampliamente para cualquier número real **n** y para cualquier entero no negativo r como sigue:

$$\binom{\mathrm{n}}{\mathrm{r}} = \frac{\mathrm{n}(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\mathrm{r}!}$$

Combinaciones

- Los números $\binom{n}{r}$ tienen muchas propiedades interesantes, entre ellas podemos mencionar las siguientes:

a) $$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$$

b) $$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$$

Combinaciones

Ejemplo: Supongamos que elegimos dos objetos al azar entre cuatro objetos clasificados como *a, b, c*, y *d*.

a) Si elegimos **sin sustitución**, el espacio muestral **S** se puede representar como

$$\mathbf{S}=\{(a,b),(a,c),(a,d),(b,c),(b,d),(c,d)\}$$

Es decir, hay $\binom{4}{2} = 6$ resultados posibles

- Cada uno de los resultados indica solo cuales fueron los dos objetos elegidos y *no* el orden en que se escogieron.

- En otras palabras, elegir **sin sustitución** los objetos equivale a elegirlos sin tomar en cuenta el orden.

Combinaciones

Ejemplo (continuación)

b) Si elegimos **con sustitución** los dos objetos, el espacio muestral **S'** se puede representar como

S'={(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d)
(c,a),(c,b),(c,c),(c,d),(d,a),(d,b),(d,c),(d,d)}

- En este caso, hay $4^2 = 16$ resultados posibles.

- Cada uno de los resultados indica cuales objetos se eligieron y el orden en que se eligieron.

- En otras palabras, elegir **con sustitución** los objetos equivale a elegirlos tomando en cuenta el orden.

- Por ejemplo en el lanzamiento de un dado dos veces, los resultados posibles implican un orden de aparición, en este caso tenemos $6^2 = 36$ resultados posibles.

Variables aleatorias

Una variable aleatoria es un valor numérico que es resultado de un experimento que, por azar puede tomar distintos valores.

Ejemplos:

- Si se cuenta el numero de empleados ausentes en el turno diurno del lunes, el resultado podría ser 0, 1, 2, 3,…. El número de ausencias es la variable aleatoria.
- El número de focos defectuosos que se produjeron durante la semana en una fábrica es una variable aleatoria
- El numero diario de conductores que son acusados de conducir bajo la influencia del alcohol en Monterrey

Variable aleatoria discreta

Definición: Sea X una variable aleatoria. Si el número de valores posibles de X es finito o infinito numerable, llamamos a X una variable aleatoria discreta. Esto es, se pueden anotar los valores posibles de X como $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$.

- En el caso finito la lista termina y en el caso infinito numerable la lista continua indefinidamente.

- **Ejemplo:** Sea X el número de caras cuando una moneda se lanza tres veces. Aquí los valores de X son x=0, 1, 2, 3.

Distribución de probabilidad discreta

Definición: Sea X una variable aleatoria discreta. Por tanto el número de valores posibles de X son a lo más x_1, x_2, x_3 ... infinito numerable. Con cada resultado posible x_i asociamos un número $\mathrm{p}(x_i) = \mathrm{P}(\mathrm{X} = x_i)$ llamado la probabilidad de x_i. Los números $\mathrm{p}(x_i)$, i=1,2,3,.. Deben satisfacer las condiciones siguientes

1. $p(x_i) \geq 0$, para todo i
2. $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

- La función *p* definida así se llama función de probabilidad (o función distribución puntual) de la variables aleatoria X

- La colección de pares $(x_i, p(x_i))$, i=1,2,3,…, se denomina **distribución de probabilidad** de X

Distribución de probabilidad discreta

Ejemplo: Considere un experimento aleatorio en el que una moneda se lanza en tres ocasiones. Sea **X** el número de caras que aparecen. En este caso **C** representa el resultado de una cara y **A** el resultado de un águila.

- El espacio muestral para este experimento será:

S={AAA,AAC, ACA, ACC, CAA, CAC, CCA, CCC}.

- Entonces los posibles valores de X (número de caras) son x = 0,1,2,3.

Distribución de probabilidad discreta

Ejemplo (continuación)

- El resultado "cero caras" se produce una vez.
- El resultado "una cara" se produce tres veces.
- El resultado "dos caras" se produce tres veces.
- El resultado “tres caras" se produce una vez.

- De la definición de una variable aleatoria, X en este experimento, es una variable aleatoria discreta.

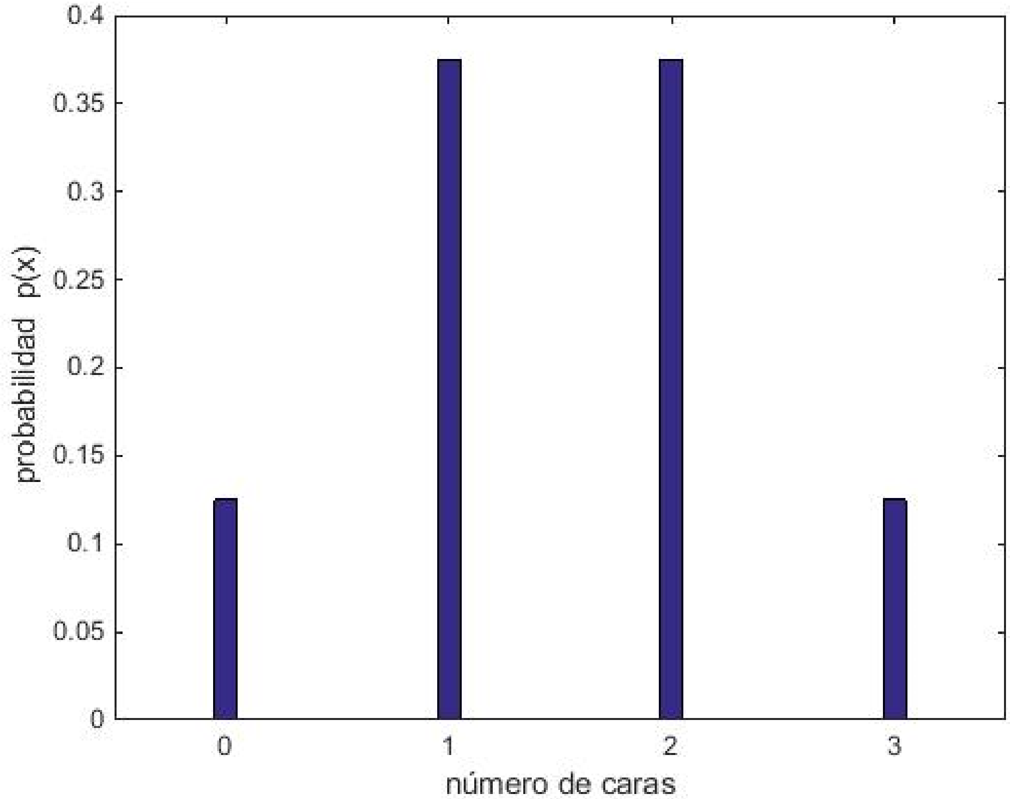
Distribuciones de probabilidad

- Una distribución de probabilidad es una lista de todos los resultados de un experimento y la probabilidad que se asocia a cada de ellos. Para el ejemplo tenemos,

Número de caras x	Probabilidad del resultado, p(x)
0	1/8 = .125
1	3/8 = .375
2	3/8 = .375
3	1/8 = .125
Total	8/8 = 1

Distribuciones de probabilidad

Gráfica de la distribución de probabilidades del ejemplo



Media y varianza de una variable aleatoria discreta

- Anteriormente se analizaron las medidas de tendencia central y de dispersion para un conjunto de datos no agrupados y para su distribución de frecuencias.

- La **media** informa de la tendencia central de los datos y la varianza describe la dispersion de ellos alrededor de su media.

- Del mismo modo, una distribución de probabilidades se resume mediante su media o valor esperado y su varianza.

Valor esperado o media de una variable aleatoria discreta

El valor esperado:

- En un valor típico que se usa para resumir una distribución de probabilidades.

- Representa el valor promedio de largo plazo de la variable aleatoria.

- Es un promedio ponderado en el que los valores posibles de la variable aleatoria se ponderan según las probabilidades correspondientes de ocurrencia.

Valor esperado de una variable aleatoria discreta

Definición: Sea X una variable aleatoria discreta con valores posibles $x_1, x_2, \ldots$ Sea $p(x_i) = P(X = x_i)$, i = 1,2, ... El valor esperado de X (o media de X), denotado por E(X), se define como

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p(x_i)$$

Ejemplo: Calcular el valor esperado de la variable X que representa el número de caras en el experimento de lanzar una moneda 3 veces.

En este caso E(X)=0(.125)+1(.375)+2(.375)+3(.125)=1.5

Valor esperado de una variable aleatoria discreta

Ejemplo: Un fabricante produce artículos de tal modo que el 10% son defectuosos y el 90% no lo son. Si se produce un artículo defectuoso, el fabricante pierde \$1, mientras que un artículo sin defectos le produce una utilidad de \$5. Si X es la utilidad neta por artículo, entonces X es una variable aleatoria. Calcular la media o valor esperado de X.

En este caso los posibles valores de X son -1 y 5
y $p(-1)=P(X = -1)=.10$, $p(5)=P(X=5)=.9$. Así

$$E(X)=-1(.10)+5(.90)=4.4$$

- Supongamos que se produce un gran número de artículos, entonces puesto que el fabricante perderá \$1 alrededor del 10% de las veces y ganará \$5 alrededor del 90% de las veces, él esperará ganar aproximadamente \$4.4 por artículo a la larga

Varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta

- La varianza mide la cantidad de propagación (variación) de una distribución de probabilidad

- La varianza de una variable aleatoria discreta se denota por

$$\sigma^2 = Var(X)$$

- La desviación estándar de una variable aleatoria discreta se obtiene tomando la raíz cuadrada de σ^2, es decir

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta

Definición: Sea X una variable aleatoria discreta con valores posibles $x_1, x_2, \ldots\ldots$ Sea p($x_i) = P(X = x_i), i = 1, 2, \ldots$ La varianza de X, denotada por σ^2=Var(X) se define como

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(x_i - E(X)\right)^2 p(x_i)$$

- La desviación estándar de X se obtiene tomando la raíz cuadrada de σ^2.

Ejemplo: Calcular la varianza y desviación estándar de la variable *X* que representa el número de caras en el experimento de lanzar una moneda 3 veces.

Varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta

Ejemplo: La oficina meteorológica clasifica el tipo de cielo que es visible en relación con los "grados de nubosidad". Se usa una escala con 11 categorías: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, en donde 0 representa un cielo perfectamente claro, 10 representa un cielo completamente cubierto, mientras que los otros valores representan diversas condiciones intermedias. Supongamos que tal clasificación se hace en una estación meteorológica determinada en un día y hora determinados. Sea X la variable aleatoria que toma uno de los 11 valores anteriores. Supongamos que la distribución de probabilidades de X es

$$p_0 = p_{10} = .05$$
$$p_1 = p_2 = p_8 = p_9 = .15$$
$$p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = .06$$

Determinar la varianza y desviación estándar de X

Varianza y desviación estándar de una variable aleatoria discreta

- La varianza de una variable aleatoria discreta denotada por

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i - E(X)\right)^2 p(x_i)$$

- También se puede escribir como

$$\sigma^2 = Var(X) = \sum_{i=1}^{\infty} {x_i}^2 p(x_i) - [\mathrm{E(X)}]^2$$

- Tiene la ventaja de evitar la mayor parte de las restas, siendo mas eficiente computacionalmente

Distribución de probabilidad binomial

Ejemplo: Supongase que los artículos que salen de una línea de producción se clasifican como defectuosos (D) o no defectuosos (N). Supongamos que se eligen al azar tres artículos de la producción de un día y se clasifican de acuerdo con este esquema.

- El espacio muestral **S** para este experimento, se puede escribir como

  S={DDD,DDN,DND,NDD,NND,NDN,DNN,NNN}

- Supongamos que con probabilidad .2 un artículo es defectuoso y por tanto con probabilidad .8 un articulo es no defectuoso

Distribución de probabilidad binomial

- Supongamos que esas probabilidades son iguales para cada artículo

- Supongamos que la clasificación de cualquier artículo particular es independiente de la clasificación de cualquier otro artículo

- Usando estas suposiciones, se deduce que las probabilidades asociadas con los diversos resultados del espacio muestral son las siguientes:

$$(.2)^3, (.8)(.2)^2, (.8)(.2)^2, (.8)(.2)^2, (.2)(.8)^2, (.2)(.8)^2, (.2)(.8)^2, (.8)^3$$

Distribución de probabilidad binomial

- Deseamos saber cuántos artículos defectuosos se encuentran en los tres artículos (sin considerar el orden en que ocurrieron).

- Entonces consideramos la variable aleatoria X que asigna a cada uno de los resultados de **S** el número de artículos defectuosos encontrados. Por tanto el conjunto de valores posibles de X es {0,1,2,3}.

Distribución de probabilidad binomial

- Entonces, obtenemos la distribución de probabilidad para X, $p(x_i) = P(X = x_i)$:

- X=0 si y sólo si ocurre NNN
- X=1 si y sólo si ocurre DNN,NDN ó NND
- X=2 si y sólo si ocurre DDN,DND ó NDD
- X=3 si y sólo si ocurre DDD

Por lo tanto

$$p(0)=P(X=0)=(.8)^3, p(1)=P(X=1)=3(.2)(.8)^2,$$
$$p(2)=P(X=2)=3(.2)^2(.8), p(3)=P(X=3)=(.2)^3$$

- Nótese que la suma de estas probabilidades es 1

Distribución de probabilidad binomial

La situación presentada en el ejemplo se puede generalizar de la siguiente manera

Definición: Consideremos un experimento ε y sea A un evento asociado a ε. Supongamos que P(A)=p y por tanto $P(A^C) = 1 - p$. Consideremos **n** repeticiones independientes de ε. Por tanto el espacio muestral consiste en todas las sucesiones posibles $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, en donde cada a_i es A ó A^C, según que ocurra A ó A^C en la i-ésima repetición de ε. Además supongamos que p es la misma para todas las repeticiones. Definamos la variable aleatoria X como el *número de veces que ocurrió el evento* A en las **n** repeticiones.

- La variable aleatoria **X** se conoce como *variable aleatoria binomial* con parámetros **n** y p.
- En forma equivalente se dice que *X tiene una distribución binomial*

Distribución de probabilidad binomial

Resultado: Sea X una variable aleatoria binomial basada en **n** repeticiones. Entonces la distribución de probabilidad de X está dada por

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}, \qquad k=0,1,2,\dots.n.$$

Donde

n: número de repeticiones del experimento (independientes)

k: numero de veces que ocurrió el evento (variable discreta)

$\binom{n}{k}$: las combinaciones posibles de obtener *k* de **n** repeticiones

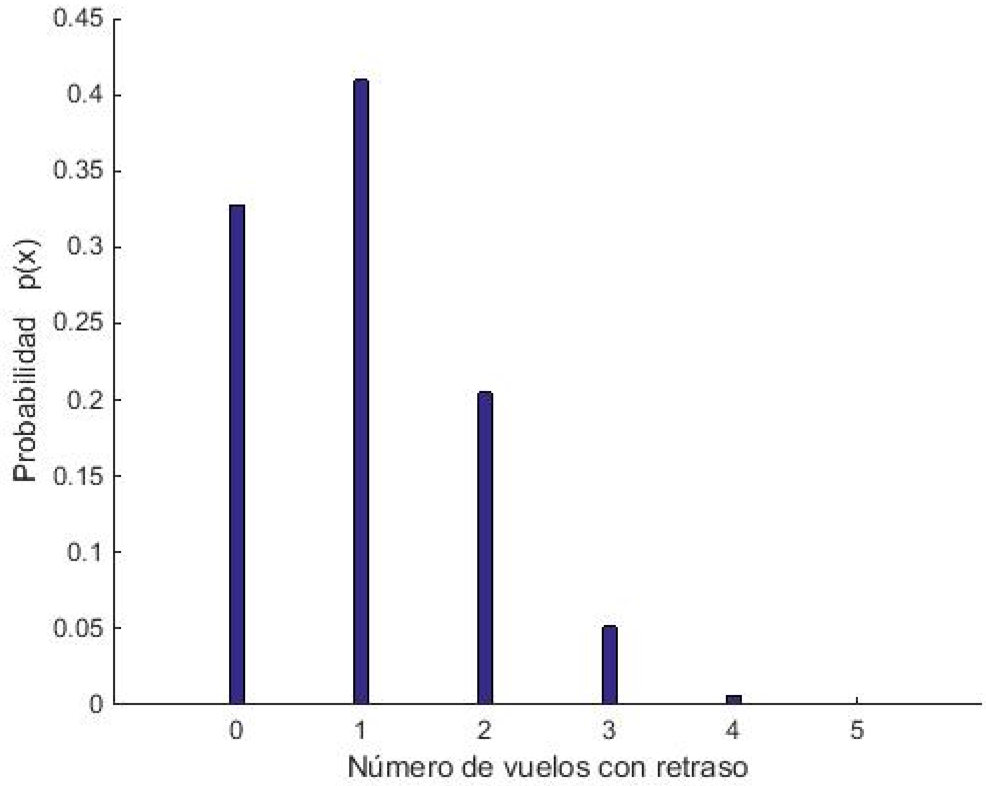
p: la probabilidad de que A ocurra (no cambia en todas las repeticiones)

Distribución de probabilidad binomial

Ejemplo: Cada día, una línea aérea tiene cinco vuelos desde Monterrey a Guadalajara. Suponga que la probabilidad de que alguno de los vuelos se retrase es de .20. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los vuelos se retrase el día de hoy? ¿ Cuál es la probabilidad de que exactamente uno de los vuelos se retrase este día.

Distribución de probabilidad binomial

Distribucion de probabilidad binomial del ejemplo, n=5, p=.20



Distribución de probabilidad binomial

- La distribución de probabilidad binomial es una distribución teórica que puede calcularse mediante la expresión anterior.

- Sin embargo para un **n** grande los cálculos pueden volverse tediosos.

- Existen tablas de la distribución binomial donde se dan las probabilidades de *X=0,1,2,3*. …., para varios valores de **n** y **p**

Tabla de la distribución binomial

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k}$$

n	k	.01	.05	.10	.15	.20	.25	.30	1/3	.35	.40	.45	.49	.50
2	0	.9801	.9025	.8100	.7225	.6400	.5625	.4900	.4444	.4225	.3600	.3025	.2601	.2500
	1	.0198	.0950	.1800	.2550	.3200	.3750	.4200	.4444	.4550	.4800	.4950	.4998	.5000
	2	.0001	.0025	.0100	.0225	.0400	.0625	.0900	.1111	.1125	.1600	.2025	.2401	.2500
3	0	.9703	.8574	.7290	.6141	.5120	.4219	.3430	.2963	.2746	.2160	.1664	.1327	.1250
	1	.0294	.1354	.2430	.3251	.3840	.4219	.4410	.4444	.4436	.4320	.4084	.3823	.3750
	2	.0003	.0071	.0270	.0574	.0960	$\boxed{.1406}$	.1890	.2222	.2389	.2880	.3341	.3674	.3750
	3	.0000	.0001	.0010	.0034	.0080	.0156	.0270	.0370	.0429	.0640	.0911	.1176	.1250
4	0	.9606	.8145	.6561	.5220	.4096	.3164	.2401	.1975	.1785	.1296	.0915	.0677	.0625
	1	.0388	.1715	.2916	.3685	.4096	.4219	.4116	.3951	.3845	.3456	.2995	.2600	.2500
	2	.0006	.0135	.0486	.0975	.1536	.2109	.2646	.2963	.3105	.3456	.3675	.3747	.3750
	3	.0000	.0005	.0036	.0115	.0256	.0469	.0756	.0988	.1115	.1536	.2005	.2400	.2500
	4	.0000	.0000	.0001	.0005	.0016	.0039	.0081	.0123	.0150	.0256	.0410	.0576	.0625
5	0	.9510	.7738	.5905	.4437	.3277	.2373	.1681	.1317	.1160	.0778	.0503	.0345	.0312
	1	.0480	.2036	.3280	.3915	.4096	.3955	.3602	.3292	.3124	.2592	.2059	.1657	.1562
	2	.0010	.0214	.0729	.1382	.2048	.2637	.3087	.3292	.3364	.3456	.3369	.3185	.3125
	3	.0000	.0011	.0081	.0244	.0512	.0879	.1323	.1646	.1811	.2304	.2757	.3060	.3125
	4	.0000	.0000	.0004	.0022	.0064	.0146	.0284	.0412	.0488	.0768	.1128	.1470	.1562
	5	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0010	.0024	.0041	.0053	.0102	.0185	.0285	.0312
6	0	.9415	.7351	.5314	.3771	.2621	.1780	.1176	.0878	.0754	.0467	.0277	.0176	.0156
	1	.0571	.2321	.3543	.3993	.3932	.3560	.3025	.2634	.2437	.1866	.1359	.1014	.0938
	2	.0014	.0305	.0984	.1762	.2458	.2966	.3241	.3292	.3280	.3110	.2780	.2437	.2344
	3	.0000	.0021	.0146	.0415	.0819	.1318	.1852	.2195	.2355	.2765	.3032	.3121	.3125
	4	.0000	.0001	.0012	.0055	.0154	.0330	.0595	.0823	.0951	.1382	.1861	.2249	.2344
	5	.0000	.0000	.0001	.0004	.0015	.0044	.0102	.0165	.0205	.0369	.0609	.0864	.0938
	6	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0007	.0014	.0018	.0041	.0083	.0139	.0156
7	0	.9321	.6983	.4783	.3206	.2097	.1335	.0824	.0585	.0490	.0280	.0152	.0090	.0078
	1	.0659	.2573	.3720	.3960	.3670	.3115	.2471	.2048	.1848	.1306	.0872	.0603	.0547
	2	.0020	.0406	.1240	.2097	.2753	.3115	.3177	.3073	.2985	.2613	.2140	.1740	.1641
	3	.0000	.0036	.0230	.0617	.1147	.1730	.2269	.2561	.2679	.2903	.2918	.2786	.2734
	4	.0000	.0002	.0026	.0109	.0287	.0577	.0972	.1280	.1442	.1935	.2388	.2676	.2734
	5	.0000	.0000	.0002	.0012	.0043	.0115	.0250	.0384	.0466	.0774	.1172	.1543	.1641
	6	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0013	.0036	.0064	.0084	.0172	.0320	.0494	.0547
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0005	.0006	.0016	.0037	.0068	.0078
8	0	.9227	.6634	.4305	.2725	.1678	.1001	.0576	.0390	.0319	.0168	.0084	.0046	.0039
	1	.0746	.2793	.3826	.3847	.3355	.2670	.1977	.1561	.1373	.0896	.0548	.0352	.0312
	2	.0026	.0515	.1488	.2376	.2936	.3115	.2965	.2731	.2587	.2090	.1569	.1183	.1094
	3	.0001	.0054	.0331	.0839	.1468	.2076	.2541	.2731	.2786	.2787	.2568	.2273	.2188
	4	.0000	.0004	.0046	.0185	.0459	.0865	.1361	.1707	.1875	.2322	.2627	.2730	.2734
	5	.0000	.0000	.0004	.0026	.0092	.0231	.0467	.0683	.0808	.1239	.1719	.2098	.2188
	6	.0000	.0000	.0000	.0002	.0011	.0038	.0100	.0171	.0217	.0413	.0703	.1008	.1094
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0012	.0024	.0033	.0079	.0164	.0277	.0312
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0002	.0002	.0007	.0017	.0033	.0039
9	0	.9135	.6302	.3874	.2316	.1342	.0751	.0404	.0260	.0207	.0101	.0046	.0023	.0020
	1	.0830	.2985	.3874	.3679	.3020	.2253	.1556	.1171	.1004	.0605	.0339	.0202	.0176
	2	.0034	.0629	.1722	.2597	.3020	.3003	.2668	.2341	.2162	.1612	.1110	.0776	.0703
	3	.0001	.0077	.0446	.1069	.1762	.2336	.2668	.2731	.2716	.2508	.2119	.1739	.1641
	4	.0000	.0006	.0074	.0283	.0661	.1168	.1715	.2048	.2194	.2508	.2600	.2506	.2461
	5	.0000	.0000	.0008	.0050	.0165	.0389	.0735	.1024	.1181	.1672	.2128	.2408	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0006	.0028	.0087	.0210	.0341	.0424	.0743	.1160	.1542	.1641
	7	.0000	.0000	.0000	.0000	.0003	.0012	.0039	.0073	.0098	.0212	.0407	.0635	.0703
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0009	.0013	.0035	.0083	.0153	.0176
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0001	.0003	.0008	.0016	.0020
10	0	.9044	.5987	.3487	.1969	.1074	.0563	.0282	.0173	.0135	.0060	.0025	.0012	.0010
	1	.0914	.3151	.3874	.3474	.2684	.1877	.1211	.0867	.0725	.0403	.0207	.0114	.0098
	2	.0042	.0746	.1937	.2759	.3020	.2816	.2335	.1951	.1757	.1209	.0763	.0495	.0439
	3	.0001	.0105	.0574	.1298	.2013	.2503	.2668	.2601	.2522	.2150	.1665	.1267	.1172
	4	.0000	.0010	.0112	.0401	.0881	.1460	.2001	.2276	.2377	.2508	.2384	.2130	.2051
	5	.0000	.0001	.0015	.0085	.0264	.0584	.1029	.1366	.1536	.2007	.2340	.2456	.2461
	6	.0000	.0000	.0001	.0012	.0055	.0162	.0368	.0569	.0689	.1115	.1596	.1966	.2051
	7	.0000	.0000	.0000	.0001	.0008	.0031	.0090	.0163	.0212	.0425	.0746	.1080	.1172
	8	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0004	.0014	.0030	.0043	.0106	.0229	.0389	.0439
	9	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0005	.0016	.0042	.0083	.0098
	10	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0000	.0001	.0003	.0008	.0010

Distribución de probabilidad binomial

Ejemplo: 5% de los engranes que produce una máquina Carter Bell automática y de alta velocidad, son defectuosos.¿cuál es la probabilidad de que ninguno de 6 engranes seleccionados al azar sea defectuoso?, ¿exactamente uno?, ¿exactamente dos?, ¿exactamente tres?, ¿exactamente cuatro?, ¿exactamente cinco?, ¿exactamente seis de los seis?

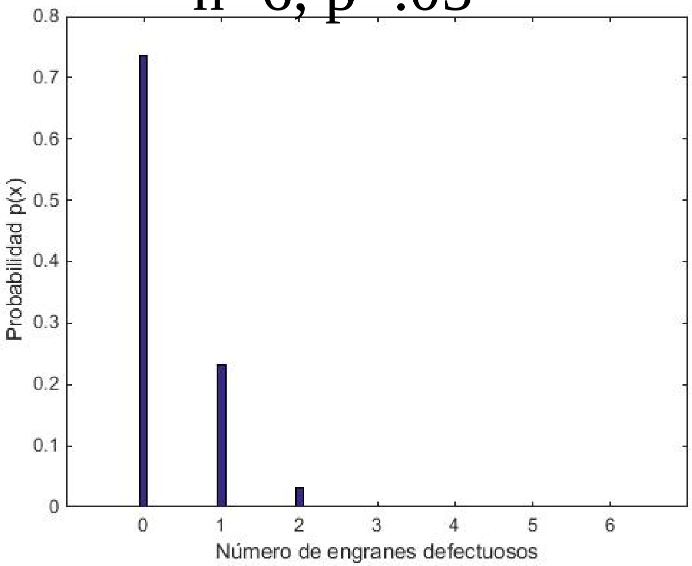
Distribución de probabilidad binomial

Algunas observaciones sobre las distribuciones binomiales.

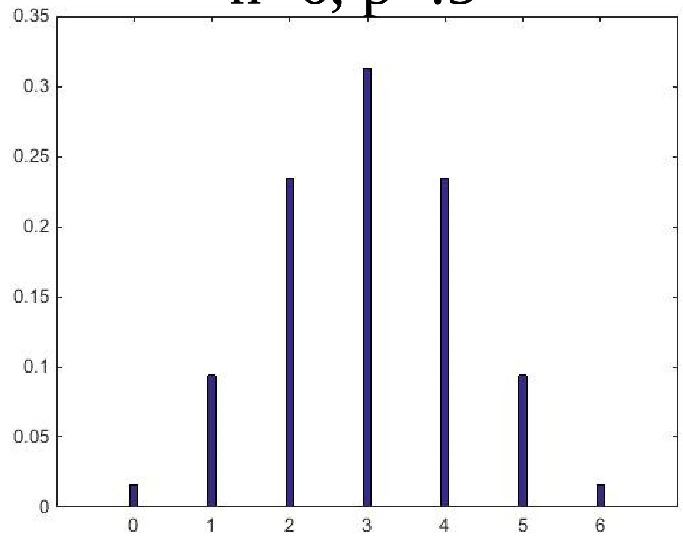
- Si **n** permanence igual pero *p* aumenta, la forma de la distribución cambia
- Si *p* es pequeña (digamos .05) la distribucion de probabilidades tiene un sesgo positivo.
- A medida que *p* se aproxima a .5. la distribución de probabilidades se vuelve más simétrica.
- A medida que *p* aumente de .5 y se acerque a .95, la distribución de probabilidad adquiere un sesgo negativo.
- Si *p* permanece fijo pero **n** aumenta, la forma de la distribución binomial es cada vez más simétrica
- Cuando **n** es grande (digamos > 30) y *p* es muy cercana a .5, la distribución binomial se puede aproximar por la *distribución normal*

Distribución de probabilidad binomial

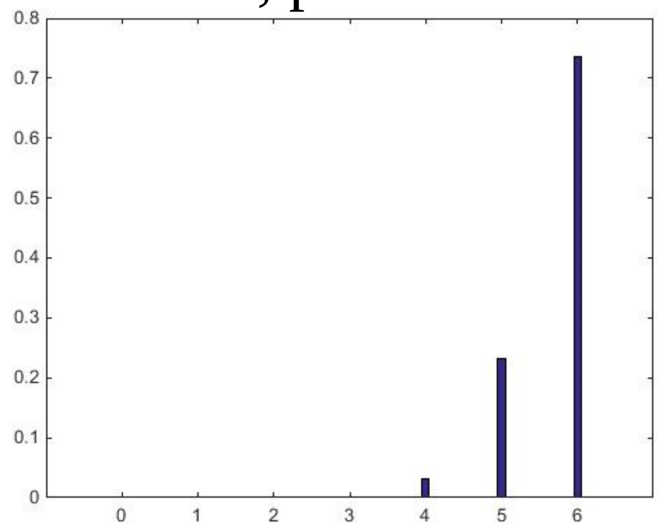
n=6, p=.05



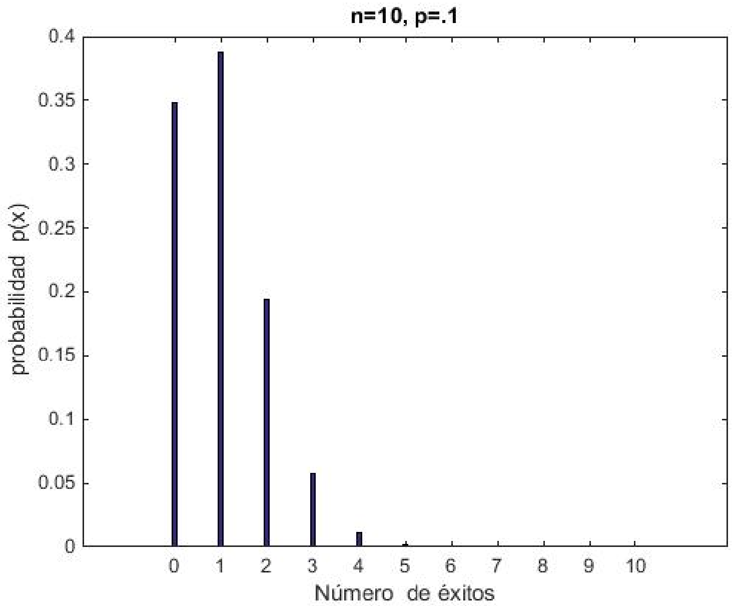
n=6, p=.5

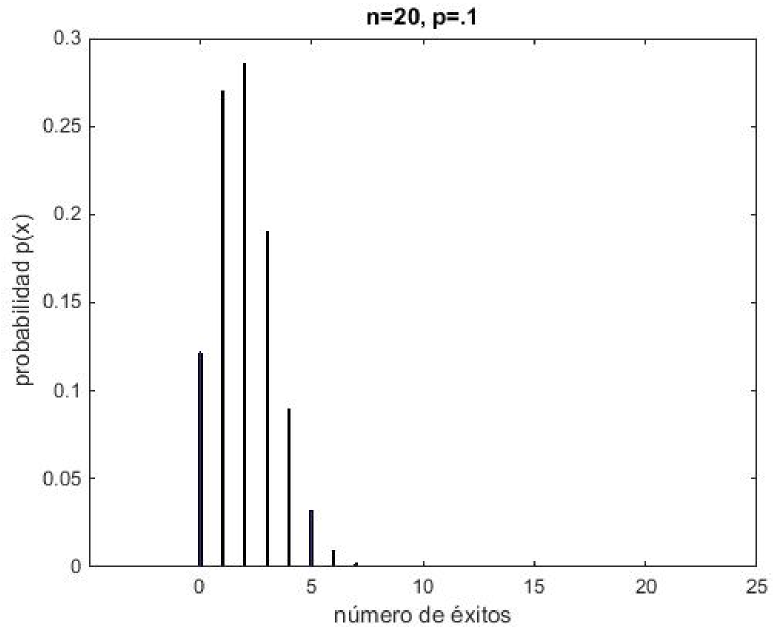


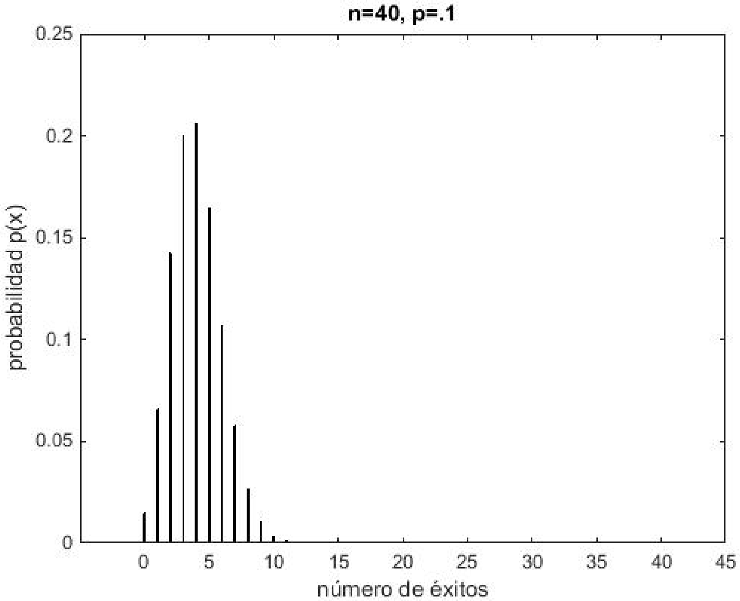
n=6, p=.95



Distribución de probabilidad binomial







La media y la varianza de la distribución binomial

- Sea X una variable aleatoria que tiene una distribución binomial (distribuida binomialmente) con parámetros p, basada en **n** repeticiones de un experimento.

- Entonces la *media o valor esperado de* X está dado por

$$\mu = E(X) = np$$

- La varianza de X está dada por

$$\sigma^2 = Var(X) = np(1-p)$$

CIMAT

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C.

Unidad Monterrey
CIDICS, Campus de la Salud, UANL Ave. Carlos Canseco s/n
Col Mitras Centro, Monterrey N.L., México, C.P.66460 México
Tel +52 (81) 8329 4000 Ext 1778
cimat@cimat.mx / www.cimat.mx