Tarea 1

Gustavo Hernández Angeles

18 de junio de 2023

Problema 1

Supon que se lanza una moneda normal hasta que se obtienen dos caras. Describe el espacio muestral S. ¿Cuál es la probabilidad de que requieran exactamente k lanzamientos?

Solución. Denotemos a las caras por A y las cruces por B. Supongamos que se hacen n lanzamientos hasta que se obtengan dos caras. El experimento parará hasta obtener dos caras, es decir, el último lanzamiento siempre resultará en O, mientras que los lanzamientos anteriores pueden ser ordenados de $(n-1)!/(n-2)! = n-1$ maneras. El espacio muestral tendrá la siguiente forma.

$$S = \{AA, BAA, ABA, BBAA, BABA, ABBA, ...\}$$

Para obtener la probabilidad de que se requieran k lanzamientos, suponemos que en cada lanzamiento existe una probabilidad p de que salga cara. Deben haber $k-2$ fracasos y 2 éxitos en el experimento. Entonces con $p = 0.5$:

$$P(2 \text{ caras en } k \text{ lanzamientos}) = {}^{k-1}C_1 p^2 (1-p)^{k-2}$$

$$\boxed{P(2 \text{ caras en } k \text{ lanzamientos}) = (k-1)0.5^k}$$

Problema 2

Existen tres cartas. Una es verde en ambos lados, la segunda es roja en ambos lados y la tercera es roja de un lado y verde de otro. Escogemos una carta al azar (y también se ve un lado al azar). Si el lado que vemos es verde, ¿cuál es la probabilidad de qué el otro lado también sea verde?

Solución. Denotemos la carta completamente verde por C_v, la carta completamente roja por C_r y la carta con ambos colores por C_a, y denotemos el color del lado de la carta por V y R para verde y rojo respectivamente. De la redacción podemos obtener que:

$$
\begin{aligned}
P(C_v) = P(C_r) = P(C_a) = 1/3 \\
P(V|C_v) &= 1 \\
P(R|C_v) &= 0 \\
P(V|C_r) &= 0 \\
P(R|C_r) &= 1 \\
P(V|C_a) &= 1/2 \\
P(R|C_a) &= 1/2
\end{aligned}
$$

Para obtener $P(C_v|V)$ utilizaremos el teorema de Bayes.

$$
P(C_v|V) = \frac{P(C_v)P(V|C_v)}{\sum_{k=1}^{3} P(C_k)P(V|C_k)}
$$

$$
P(C_v|V) = \frac{(1/3)(1)}{(1/3)(1) + (1/3)(0) + (1/3)(1/2)}
$$

$$
\boxed{P(C_v|V) = \frac{2}{3}}
$$

Problema 3

Supon que se lanza una moneda normal hasta que se haya obtenido al menos una cara y una cruz al menos una vez.

a. Describe el espacio muestral Ω.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que se requieran tres lanzamientos?

Solución. Denotando las caras por A y las cruces por B. Podemos armar el espacio muestral como una unión de dos conjuntos $S = C_1 \cup C_2$, donde

$$
\begin{aligned}
C_1 &= \{AB, AAB, AAAB, \dots, AAA...B, ...\} \\
C_2 &= \{BA, BBA, BBBA, \dots, BBB...A, ...\}
\end{aligned}
$$

Podemos observar que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Por lo tanto, la probabilidad de la unión de dos eventos que pertenece cada uno a C_1 y a C_2 será la suma de sus probabilidades. En cada conjunto, queremos obtener la probabilidad de que ocurran 2 fallos antes del primer éxito, para el conjunto C_1 el éxito será B y para el conjunto C_2 el éxito será A. Considerando una probabilidad $P(A) = P(B) = p = 0.5$ y la distribución binomial negativa.

$$P(\text{Requerir 3 lanzamientos}) = nb(2; 1, p) + nb(2; 1, 1 - p)$$
$$P(\text{Requerir 3 lanzamientos}) = {}^{2}C_0 p(1 - p)^2 + {}^{2}C_0 p^2(1 - p)$$
$$P(\text{Requerir 3 lanzamientos}) = p(1 - p)^2 + p^2(1 - p) = p(1 - p)[(1 - p) + p] = p(1 - p)$$

$$\boxed{\therefore \quad P(\text{Requerir 3 lanzamientos}) = 0.25}$$

Problema 4

La probabilidad de que un niño tenga ojos azules es de 1/4.Asuma independencia entre los niños. Considere una familia de 5 niños.

a. Si se sabe que al menos un niño tiene ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres tengan azules?

b. Si se sabe que el menor tiene ojos azules, ¿cuál es la probabilidad de que al menos tres tengan azules?

Solución.

a. Para el primer inciso utilizaremos la distribución binomial, donde la probabilidad de cada éxito es de $p = 1/4$, el experimento tiene $n = 4$ repeticiones y nuestra variable aleatoria X es el número de niños con ojos azules. En este caso, debemos obtener $P(X \geq 2)$ ya que sabemos que uno de los niños ya tiene los ojos azules.

$$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$
$$P(X \geq 1) = {}^{4}C_2 p^2(1 - p)^2 + {}^{4}C_3 p^3(1 - p) + {}^{4}C_4 p^4$$
$$P(X \geq 1) = 6p^2(1 - p)^2 + 4p^3(1 - p) + p^4$$

$\therefore$ La probabilidad de que al menos 3 niños tengan los ojos azules dado que al menos 1 los tiene es del 26.17 %

b. Para este inciso utilizaremos la distribución binomial negativa con el número de fracasos $X \leq 2$, la misma probabilidad $p = 1/4$ y teniendo en cuenta que el número de ensayos $r + X = 5$.

$$P(X \leq 2) = nb(2; r = 3, p = 0.25) + nb(1; r = 4, p = 0.25) + nb(0; r = 5, p = 0.25)$$
$$P(X \leq 2) = {}^{4}C_2 p^3(1 - p)^2 + {}^{4}C_3 p^4(1 - p) + {}^{4}C_4 p^5$$
$$P(X \leq 2) = 6p^3(1 - p)^2 + 4p^4(1 - p) + p^5$$

$\therefore$ La probabilidad de que al menos 3 niños tengan los ojos azules dado el último niño los tiene es del 6.54 %

Problema 5

Suponga que el 30 % de usuarios de computadora usan una Macintosh, 50 % usan Windows y el 20 % usan Linux. Suponga que el 65 % de los usuarios de Mac han tenido un virus, 82 % de los usuarios de Windows lo han tenido y en el caso de Linux es de 50 %. Seleccionamos a un usuario al azar y sabemos que su computadora tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que sea un usuario de Windows?

Solución. Denotemos al evento usuario de Windows por W, al evento usuario de Linux por L, al evento usuario de Macintosh por M y al evento de que el usuario tenga virus por V. De la redacción podemos obtener la siguiente información.

$$\begin{aligned} P(W) &= 0.5 \\ P(M) &= 0.3 \\ P(L) &= 0.2 \\ P(V|W) &= 0.82 \\ P(V|M) &= 0.65 \\ P(V|L) &= 0.5 \end{aligned}$$

Queremos obtener $P(W|V)$, para esto utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(W|V) = \frac{P(W)P(V|W)}{P(W)P(V|W) + P(L)P(V|L) + P(M)P(V|M)}$$
$$P(W|V) = \frac{(0.5)(0.82)}{(0.5)(0.82) + (0.3)(0.65) + (0.2)(0.5)}$$

$$\boxed{P(W|V) \simeq 0.5816}$$

Problema 6

Suponga que A y B son eventos independientes. Muestre que A^c y B^c son eventos independientes.

Solución. Como A y B son eventos independientes, se cumple la siguiente ecuación.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) \tag{6.1}$$

Veamos primero si un evento A es independiente del complemento del evento B, dados que A y B son independientes. Con ayuda de la ecuación 6.1

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A)P(B^c|A) = P(A)(1 - P(B|A)) \\ P(A \cap B^c) &= P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c) \\ P(A \cap B^c) &= P(A)P(B^c) \end{aligned}$$

Por lo tanto, el evento A y el evento B^c son independientes. Continuamos haciendo ahora el desarrollo de $P(A^c \cap B^c)$.

$$P(A^c \cap B^c) = P(B^c)P(A^c|B^c) = P(B^c)(1 - P(A|B^C))$$
$$P(A^c \cap B^c) = P(B^c)(1 - P(A)) = P(B^c)P(A^c)$$

$$P(A^c \cap B^c) = P(B^c)P(A^c) \tag{6.2}$$

$$\boxed{\therefore \quad A^c \text{ y } B^c \text{ son eventos independientes.}}$$

Problema 7

Demuestre que $P(ABC) = P(A|BC)P(B|C)P(C)$.

Solución. En este caso podemos denotar el evento $ABC = A \cap B \cap C$ y debido a asociatividad tenemos que $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$. Por probabilidad condicional, tenemos:

$$P(A \cap B \cap C) = P(A \cap (B \cap C)) = P(A|B \cap C)P(B \cap C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B|C)P(C)$$

$$\boxed{\therefore \quad P(ABC) = P(A|BC)P(B|C)P(C)}$$