Gustavo Hernández Angeles.
Tarea 1. Matemáticas PMCE 15/06/23

1. Determinar cuál de las siguientes declaraciones son verdaderas o falsas.

a) Si A y B son matrices tal que AB es cuadrado, entonces A y B deben ser cuadrados

Sea $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{n,m}$

$\Rightarrow AB \in M_{m,m}$, que es cuadrado

Sin embargo A y B no son cuadrados

$\boxed{\text{Falso}}$

b) Las matrices A^TA y AA^T están siempre definidas, independientemente del tamaño de A.

Sea $A \in M_{n,m} \Rightarrow A^T \in M_{m,n}$

$\Rightarrow A^T_{m\times n} A_{n\times m} = B_{m\times m}$ ✓

y $A_{n\times m} A^T_{m\times n} = C_{n\times n}$ ✓

$\boxed{\text{Verdadero}}$

c) Las matrices A^TA y AA^T son siempre cuadradas, ind. del tamaño de A.

$\boxed{\text{Verdadero}}$ (Inciso anterior)

d) Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$

$\boxed{\text{Falso}}$

e) Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces $(A+B)^2 = A^2 B^2$

$\boxed{\text{Falso}}$

f) Si A y B son matrices tal que $AB = O$ y $A \neq O$ entonces $B = O$.

$\boxed{\text{Falso}}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B$$

$$\Rightarrow AB = O$$

g) Si A es una matriz cuadrada para la cual $A^2 = I$, entonces $A = I$ o $A = -I$

Si A es la matriz elemental de permutación:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$\boxed{\text{Falso}}$

h) Si A es una matriz cuadrada para la cual $A^2 = A$, entonces $A = I$ o $A = O$.

Con $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

$\boxed{\text{Falso}}$

i) Si $A \in M_{n,m}$ y $b \in \mathbb{R}^n$ es un vector columna, entonces Ab es una combinación de filas de A

El producto no está definido, ya que, en general, $m \neq 1$.

$\boxed{\text{Falso}}$

2. Suponga $A \in M_{2,2}$, $B \in M_{2,5}$ y $C \in M_{5,2}$ son matrices. Determinar cuál de las siguientes expresiones tienen sentido. Si lo tienen, ¿cuál es el tamaño de las matrices resultantes?

a) AB: Es posible y $AB \in M_{2,5}$

b) AC: No es posible.

c) $A - B$: No es posible.

d) ABC : Es posible y $ABC \in M_{2\times 2}$

e) $A+BC$: Es posible y es de 2×2.

f) A^7 : Es posible y es de 2×2.

g) B^2 : No es posible.

h) BB^T : Es posible y es de 2×2

i) $B^TB + C^TC$: No es posible

j) $\underbrace{(A + C^TC)}_{2\times 2}\underbrace{(B + C^T)}_{2\times 5}$: Es posible y es de 2×5

3. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Calcular A^{1000}.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

$$A^3 = A$$
$$\Rightarrow A^4 = A^2$$
$$A^6 = A^4 = A^2$$
$$\vdots$$

$$\Rightarrow A^{2n} = A \; ; \; \text{con } n = 500 \Rightarrow A^{1000} = A^2$$

$$\boxed{\therefore A^{1000} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

4. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcular A^2. $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Calcular A^3. $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) Encontrar una fórmula general para A^k con $k \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}$

De los incisos anteriores podemos inferir

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y tiene sentido advirtiendo que A es la matriz elemental que representa la operación de eliminación

5. Determinar cuál de las siguientes declaraciones son verdaderas o falsas.

a) La matriz identidad $n \times n$ es invertible. $\boxed{\text{Verdadero}}$

b) Si A y B son matrices invertibles, entonces también $A+B$

$\boxed{\text{Falso}}$ Si $A = I$ y $B = -I$, que son invertibles

$\Rightarrow A+B = 0$, no es invertible.

c) Si A y B son matrices invertibles, entonces también AB.

$\boxed{\text{Verdadero}}$ $\det(AB) = \det A \cdot \det B \neq 0$

d) Si $A^6 = I \Rightarrow A$ es invertible

$\boxed{\text{Verdadero}}$ $\det(A^6) = (\det A)^6 = \det I = 1$

$|\det A| = 1 \neq 0$

e) Si $A^7 = 0 \Rightarrow A$ no es invertible.

$\boxed{\text{Verdadero}}$ $\det(A^7) = (\det A)^7 = \det 0 = 0$

$\det A = 0$

f) Si A y B son matrices tal que $AB = 0$ y A es invertible, entonces $B = 0$. $\boxed{\text{Verdadero}}$

$$AB = 0$$
$$A^{-1}AB = 0$$
$$IB = 0$$
$$B = 0$$

g) Si A, B, y X son matrices invertibles, tal que $XA = B$, entonces $X = A^{-1}B$

$\boxed{\text{Falso}}$

$$XA = B$$
$$XAA^{-1} = BA^{-1}$$
$$XI = BA^{-1}$$
$$X = BA^{-1}$$

En general, $BA^{-1} \neq A^{-1}B$