Álgebra Matricial

Maestría en Cómputo Estadístico

CIMAT - MCE

Espacios vectoriales

Definición

Sea A un conjunto. Una operación en A es una función $f : A \times A \to A$.

Definición

Sea V un conjunto. Se dice que V es un espacio vectorial sobre K ($K = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) si existe una operación $+$ en V tal que

i) $v_1 + (v_2 + v_3) = (v_1 + v_2) + v_3$ *para cualesquiera* $v_1, v_2, v_3 \in V$

ii) *Existe un elemento* 0 *en* V *tal que* $0 + v = v + 0 = v$ *para todo* $v \in V$

iii) *Dado* $v \in V$ *existe un* $u \in V$ *tal que* $v + u = u + v = 0$

iv) $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$, $\forall v_1, v_2 \in V$.

Definición

(cont.) Existe además una función $\cdot : K \times V \to V$ *tal que*

i) $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2$ *para cualesquiera* $\alpha \in K$, $v_1, v_2 \in V$

ii) $(\alpha_1 + \alpha_2) \cdot v = \alpha_1 \cdot v + \alpha_2 \cdot v$ *para cualesquiera* $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, $v \in V$

iii) $\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot v) = (\alpha_1 \alpha_2) \cdot v$, *para cualesquiera* $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, $v \in V$

iv) $1 \cdot v = v$, $\forall v \in V$.

Ejemplo

$V = \mathbb{R}^n$.

Ejemplo

El espacio trivial $V = \{0\}$.

Ejemplo

$V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Definición

Sea V un espacio vectorial sobre K. $W \subset V$ es un subespacio de W si W es un espacio vectorial con las operaciones inducidas por V.

Proposición

Sea V un espacio vectorial sobre K, $W \subset V$, $W \neq \emptyset$. W es un subespacio de V si

i) *Si $w_1, w_2 \in W$ entonces $w_1 + w_2 \in W$*

ii) *Si $w \in W$, $\alpha \in K$ entonces $\alpha w \in W$*

Ejemplo

El subespacio trivial $W = \{0\}$ *de un espacio* V.

Ejemplo

Lineas en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo

Hiperplanos en $\mathbb{R}^n$

Proposición

Sea V un espacio vectorial. Si W_1, W_2 son subespacios de V entonces $W_1 \cap W_2$ es subespacio de V.

La unión de subespacios no es en general un subespacio.

Definición

Sea V un espacio vectorial, W_1, W_2 subespacios de V. La suma de W_1 y W_2 es

$$W_1 + W_2 = \{v \in V \mid v = w_1 + w_2, w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$$

Definición

Sea V un espacio vectorial, W, U subespacios de V. Se dice que V es suma directa de W y U si $V = W + U$ y $W \cap U = \{0\}$. en cuyo caso se escribe $V = W \oplus U$.

Proposición

$V = W \oplus U$ si y solo si todo $v \in V$ se escribe de manera única como $v = w + u$ con $w \in W$ y $u \in U$.

Definición

Sea V un espacio vectorial, W_i, $i = 1, \ldots, r$ subespacios de V. Se dice que V es suma directa de los subespacios W_i si todo $v \in V$ se escribe de manero única como $v = w_1 + \cdots + w_r$ con $w_i \in W_i$, lo cual se escribe como $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_r$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial, W_1, W_2 subespacios de V. Entonces $W_1 + W_2$ es un subespacio de V. De hecho, es el espacio más pequeño de V que contiene a $W_1 \cup W_2$.

Definición

Sea V un espacio vectorial y v_1, ..., v_n vectores en V. Si α_1, ..., α_n son escalares, el vector

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

es una combinación lineal de v_1, ..., v_n.

Definición

Sea V un espacio vectorial y $S \subset V$. El espacio generado por S es el conjunto

$$\mathrm{gen}(S) = \{v \in V \mid v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n, a_i \in S, \alpha_i \in K\}$$

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $S \subset V$, $S \neq \emptyset$. $\operatorname{gen}(S)$ *es un subespacio de V. Más aún, es el subespacio más pequeño que contiene a S.*

.

Definición

Sea V un espacio vectorial. Sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$. S es linealmente independiente si

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

implica que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Si el conjunto no es linealmente independiente se dice que es linealmente dependiente.

Proposición

Sea V un espacio vectorial. Si $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ y v_j, $1 \leq j \leq n$ se puede escribir como una combinación lineal de los otros elementos de S entonces $\operatorname{gen}(S \setminus \{v_j\}) = \operatorname{gen}(S)$.

Proposición

Sea V *un espacio vectorial y sea* $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$*. Si* S *contiene un subconjunto linealmente dependiente, entonces* S *es linealmente dependiente.*

Proposición

Sea V *un espacio vectorial y sea* $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$*. Si* S *es linealmente independiente, entonces cualquier subconjunto de* S *también es linealmente independiente.*

$\{0\}$ *es siempre linealmente dependiente, por lo que un conjunto linealmente independiente no puede contener a* 0*.*

Proposición

Sea V un espacio vectorial y sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$.

1. *Si S es linealmente independiente y $v \in V$, entonces $S \cup \{v\}$ es linealmente independiente si y solo si $v \notin \mathrm{gen}(S)$.*
2. *Si $v_1 \neq 0$, S es linealmente dependiente si y solo si $v_j \in \mathrm{gen}\{v_1, \ldots, v_{j-1}\}$ para algún $2 \leq j \leq n$.*

Proposición

Sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^m$. Si $n > m$ entonces S es linealmente dependiente.

Definición

Sea V un espacio vectorial, $W \subset V$ un subespacio. Una base de W es un subconjunto de W linealmente independiente que genera V.

Proposición

Sea V un espacio vectorial y sea $S = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ un subconjunto linealmente independiente. Si $v \in \operatorname{gen}(S)$ y $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, entonces $\alpha_i = \beta_i$, $i = 1, \ldots, n$, es decir la expresión lineal de v como combinación lineal de los vectores en S es única.

Definición

Sea V *un espacio vectorial y sea* $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ *una base. Si* $v \in V$*, las coordenadas de* v *respecto a* $\mathcal{B}$ *son los escalares* α_i*,* $i = 1, \ldots, n$*, que aparecen en*

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

Proposición

Sean V *un espacio vectorial,* W *un subespacio de* V*,* $S = \{v_1, \ldots, v_r\}$ *un subconjunto de* W *linealmente independiente y* $W = \mathrm{gen}\{w_1, \ldots, w_s\}$*. Entonces* $s \geq r$*.*

Proposición

Si $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ son dos bases del mismo espacio V, entonces $\#(\mathcal{B}_1) = \#(\mathcal{B}_2)$.

Definición

Sea V un espacio vectorial. La dimensión de V es el número de vectores en cualquier base de V.

Observemos que a una base no se le pueden quitar vectores que generen el espacio ni agregar vectores para mantener los vectores linealmente independientes.

Definición

Sea V un espacio vectorial. La dimensión de V, $\dim V$, es el número de vectores en una base, y por lo tanto cualquiera, de V.

Definición

Sea V un espacio vectorial. La dimensión de V, $\dim V$, es el número de vectores en una base, y por lo tanto cualquiera, de V.

Proposición

Sea V un espacio vectorial, $\dim V = r$, $S \subset V$. Si $V = \mathrm{gen}(S)$, entonces existe un $\mathcal{B} \subseteq S$ tal que $\mathcal{B}$ es base de V.

Proposición

Sea V un espacio vectorial, $\dim V = r$, $S \subset V$. Si S es linealmente independiente, entonces existe $\mathcal{B} \supseteq S$ tal que $\mathcal{B}$ es base de V.

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $W \subset V$ un subespacio. Entonces $dim W \leq dim V$.

Proposición

Sea V un espacio vectorial y $W \subset V$ un subespacio. Si $dim W = dim V$, entonces $V = W$.

Si un espacio vectorial V es de dimensión finita n y $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $\mathcal{B}_2 = \{u_1, \ldots, u_n\}$ son dos bases distintas, entonces un vector $v \in V$ tendrá distintas coordenadas dependiendo de la base usada. Es decir

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i u_i$$

Es posible encontrar una relación entre ambas coordenadas.

Proposición

Si $(v_i)_{\mathcal{B}_2}$ *es el vector (en* $\mathbb{R}^n$*) de coordenadas de* v_i *con respecto a la base* $\mathcal{B}_2$*,* $v_{\mathcal{B}_1}$ *es el vector de coordenadas de* v *con respecto a la base* $\mathcal{B}_1$ *y* $v_{\mathcal{B}_2}$ *es el vector de coordenadas de* v *con respecto a la base* $\mathcal{B}_2$ *, entonces existe una matrix invertible* A *dada por* $A = ((v_1)_{\mathcal{B}_2} \cdots (v_2)_{\mathcal{B}_2})$ *(es decir, tiene los vectores de coordenadas como columnas) tal que*

$$v_{\mathcal{B}_2} = A v_{\mathcal{B}_1}$$

A es la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$.

$$A_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2}$$

Proposición

Si A es la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$ entonces A^{-1} es la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}_2$ a la base $\mathcal{B}_1$.

$$A_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{B}_1} = (A_{\mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_2})^{-1}$$