Tarea 1. Álgebra Matricial. Gustavo Hernández Angeles. 23/08/24

Demostrar que los siguientes conjuntos son espacios vectoriales reales bajo las operaciones usuales de suma y producto.

a) $M_{m\times n}$

Sean $A, B, C \in M_{m\times n}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

i) Para $+: M_{m\times n} \times M_{m\times n} \to M_{m\times n}$

$A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$

$C = (c_{ij})$

$$\Rightarrow A+B = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$\boxed{A+B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}}$$

ii) Conmutatividad de + en $M_{m\times n}$:

La operación + sobre escalares cumple la conmutatividad.

$$\Rightarrow A+B = (a_{ij} + b_{ij}) = (b_{ij} + a_{ij}) = B + A$$

$$\boxed{\therefore A+B = B+A}$$

iii) Asociatividad de + en $M_{m\times n}$:

$$A+(B+C) = (a_{ij}) + (b_{ij} + c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})$$

$$(A+B)+C = (a_{ij} + b_{ij}) + (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij} + c_{ij})$$

$$\boxed{\therefore A+(B+C) = (A+B)+C}$$

iV) Elemento neutro + en $M_{m\times n}$:

Sea $A=(a_{ij})$, $E=(e_{ij}) \in M_{m\times n}$; $i=1,\dots,m$; $j=1,\dots,n$

Debe existir E t.q.:

$$A+E=A$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{11} & e_{1n} \\ e_{m1} & e_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+e_{11} & a_{1n}+e_{1n} \\ a_{m1}+e_{m1} & a_{mn}+e_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{1n} \\ a_{m1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}+e_{ij}=a_{ij}$$

$$e_{ij}=a_{ij}-a_{ij}=0$$

$$e_{ij}=0$$

$$\boxed{\therefore \forall A \in M_{m\times n}\ \exists E \in M_{m\times n} / \ A+E=0 \text{ con } E=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}$$

V) Elemento opuesto:

Sea $A, B \in M_{m\times n}$

$A=(a_{ij})$, $b=(b_{ij})$

$$A+B=E$$

$$\Rightarrow (a_{ij}+b_{ij})=(0)$$

$$b_{ij}=-a_{ij}$$

$$\Rightarrow B=\begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\therefore \forall A \in M_{m\times n}\ \exists B \in M_{m\times n} / \ A+B=E}$$

Vi) Asociatividad $\cdot$:

$$\alpha\cdot(\beta\cdot A)=(\alpha\cdot\beta)\cdot A$$

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}\beta a_{11} & \beta a_{1n}\\ \beta a_{m1} & \beta a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\beta a_{11} & \alpha\beta a_{1n}\\ \alpha\beta a_{m1} & \alpha\beta a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\alpha\beta a_{11} & \alpha\beta a_{1n}\\ \alpha\beta a_{m1} & \alpha\beta a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\beta a_{11} & \alpha\beta a_{1n}\\ \alpha\beta a_{m1} & \alpha\beta a_{mn}\end{pmatrix}$$

$\boxed{\therefore \text{Cumple asociatividad}}$

Vii) Elemento neutro:

Sea $e\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow eA=\begin{pmatrix}ea_{11} & ea_{1n}\\ ea_{m1} & ea_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{1n}\\ a_{m1} & a_{mn}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow ea_{ij}=a_{ij}$$

$$\boxed{e=1}$$

Viii) Propiedad distributiva respecto a la suma vectorial

$$\alpha(A+B)=\alpha\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha(a_{11}+b_{11}) & \cdots & \alpha(a_{1n}+b_{1n})\\ \alpha(a_{m1}+b_{m1}) & \cdots & \alpha(a_{mn}+b_{mn})\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha a_{11}+\alpha b_{11} & \cdots & \alpha a_{1n}+\alpha b_{1n}\\ \alpha a_{m1}+b_{m1}\alpha & \cdots & \alpha a_{mn}+\alpha b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n}\\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\alpha b_{11} & \cdots & \alpha b_{1n}\\ \alpha b_{m1} & \cdots & \alpha b_{mn}\end{pmatrix}$$

$$=\alpha A+\alpha B$$

$$\boxed{\therefore \alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B}$$

iX) Propiedad distributiva respecto a la suma escalar.

$$(\alpha+\beta)A = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a_{11} & \cdots & (\alpha+\beta)a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ (\alpha+\beta)a_{m1} & \cdots & (\alpha+\beta)a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11}+\beta a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n}+\beta a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1}+\beta a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn}+\beta a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a_{11} & \cdots & \beta a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta a_{m1} & \cdots & \beta a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \alpha A + \beta A$$

$$\boxed{\therefore (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A}$$

$\boxed{\therefore M_{m \times n} \text{ con las operaciones } + \text{ y } \cdot \text{ forma un espacio vectorial}}$

b) El conjunto de vectores $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en $\mathbb{R}^3$ con $3x - y - 4z = 0$

Sea $S = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} / 3x - y - 4z = 0 \}$

y sean $a, b, c \in S$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) P.D. $a + (b+c) = (a+b) + c$.

$$a + (b+c) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 + c_1 \\ b_2 + c_2 \\ b_3 + c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a_1 + b_1) + c_1 \\ (a_2 + b_2) + c_2 \\ (a_3 + b_3) + c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$= (a+b) + c$$

$$\therefore \ a + (b+c) = (a+b) + c \ //$$

ii) Existe un elemento 0 en S / $0 + a = a + 0 = a \ \forall a \in S$.

Hallemos 0, llamémoslo e por el momento.

$$e + a = \begin{pmatrix} e_1 + a_1 \\ e_2 + a_2 \\ e_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} e_1 + a_1 &= a_1 \Rightarrow e_1 = 0 \\ e_2 + a_2 &= a_2 \Rightarrow e_2 = 0 \\ e_3 + a_3 &= a_3 \Rightarrow e_3 = 0 \end{aligned}$$

Como vemos, este elemento es único y válido $\forall a \in S$

$$\therefore \ 0 = e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} //$$

iii) Cerradura (debería ser al inicio, se me olvidó)

Sea $a, b \in S$

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

De la definición del conjunto, tenemos que: $y = 3x - 4z$, así:

$$a+b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ 3a_1 - 4a_3 + 3b_1 - 4b_3 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ 3(a_1+b_1) - 4(a_3+b_3) \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ 3(a_1+b_1) - 4(a_3+b_3) \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$

Lo cual cumple la restricción impuesta por S

$\therefore a+b \in S$

iv) P.D. $a+b = b+a$

$$a+b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 + a_1 \\ b_2 + a_2 \\ b_3 + a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$\therefore a+b = b+a$

v) Dado $a \in S$ existe un $a' \in S / a + a' = 0 = a' + a$.

$$a + a' = a' + a = \begin{pmatrix} a_1 + a_1' \\ a_2 + a_2' \\ a_3 + a_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a_1 + a_1' = 0 \\ a_2 + a_2' = 0 \\ a_3 + a_3' = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a_1' = -a_1 \\ a_2' = -a_2 \\ a_3' = -a_3 \end{matrix}$$

Así:

$$a' = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ Para cada $a \in S \; \exists \; a' \in S / a + a' = 0$

vi) Cerradura para $\cdot : \mathbb{R} \times S \to S$

$$\alpha a = \alpha \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha(3a_1 - 4a_3) \\ \alpha a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ 3\alpha a_1 - 4\alpha a_3 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ 3(\alpha a_1) - 4(\alpha a_3) \\ \alpha a_3 \end{pmatrix}$$

$\therefore \alpha a \in S$

Vii) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$

$$\alpha(a+b) = \alpha\left[\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}\right] = \alpha\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(a_1+b_1) \\ \alpha(a_2+b_2) \\ \alpha(a_3+b_3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \alpha b_1 \\ \alpha a_2 + \alpha b_2 \\ \alpha a_3 + \alpha b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha b_1 \\ \alpha b_2 \\ \alpha b_3 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$= \alpha a + \alpha b$$

$\therefore \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$ //

Viii) $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$.

$$(\alpha+\beta)a = \begin{pmatrix} (\alpha+\beta)a_1 \\ (\alpha+\beta)a_2 \\ (\alpha+\beta)a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 + \beta a_1 \\ \alpha a_2 + \beta a_2 \\ \alpha a_3 + \beta a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta a_1 \\ \beta a_2 \\ \beta a_3 \end{pmatrix}$$

$\therefore (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$ //

ix) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$

$$\alpha(\beta a) = \alpha\begin{pmatrix} \beta a_1 \\ \beta a_2 \\ \beta a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\beta a_1 \\ \alpha\beta a_2 \\ \alpha\beta a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\alpha\beta)a_1 \\ (\alpha\beta)a_2 \\ (\alpha\beta)a_3 \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha\beta)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = (\alpha\beta)a$$

$\therefore \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ //

x) $\exists\, \gamma \in \mathbb{R} / \gamma a = a,\ \forall a \in S$.

$$\Rightarrow \gamma a = \begin{pmatrix} \gamma a_1 \\ \gamma a_2 \\ \gamma a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \gamma a_1 = a_1 \\ \gamma a_2 = a_2 \\ \gamma a_3 = a_3 \end{matrix} \Rightarrow \gamma = 1 \quad \forall a \in S$$ //

$\therefore$ El conjunto S forma un espacio vectorial //

c) El conjunto de polinomios de grado n. $P_n(x)$.

Sean $a, b, c \in P_n(x)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

i) Cerradura $+: P_n(x) \times P_n(x) \to P_n(x)$.

$$a+b = (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n)$$
$$= (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + \dots + (a_n+b_n)x^n$$

$\therefore a+b \in P_n(x)$ con $a_n, b_n \neq 0$

ii) $a+(b+c) = (a+b)+c$

$$a+(b+c) = a_0 + \dots + a_nx^n + [(b_0 + \dots + b_nx^n) + (c_0 + \dots + c_nx^n)]$$
$$= a_0 + \dots + a_nx^n + [(b_0+c_0) + \dots + (b_n + \dots + c_n)x^n]$$
$$= (a_0+b_0+c_0) + \dots + (a_n+b_n+c_n)x^n$$
$$= ((a_0+b_0)+c_0) + \dots + ((a_n+b_n)+c_n)x^n$$
$$= [(a_0+b_0) + \dots + (a_n+b_n)x^n] + (c_0 + \dots + c_nx^n)$$
$$= (a+b)+c$$

$\therefore a+(b+c) = (a+b)+c$

iii) Existe un $0 \in P_n(x)$ tal que $a+0 = 0+a = a \quad \forall a \in P_n(x)$.

- llamamos $e = \vec{0} = e_0 + \dots + e_nx^n$

$\Rightarrow e+a = (e_0+a_0) + \dots + (e_n+a_n)x^n = a_0 + \dots + a_nx^n$

$\Rightarrow e_i + a_i = a_i \; ; \; i = 0, 1, \dots, n$

$e_i = 0$

$\therefore \vec{0} = e = 0 + 0x + \dots + 0x^n = 0$

iv) $a+b = b+a$.

$$a+b = (a_0 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + \dots + b_nx^n) = (a_0+b_0) + \dots + (a_n+b_n)x^n$$
$$= (b_0+a_0) + \dots + (b_n+a_n)x^n = (b_0 + \dots + b_nx^n) + (a_0 + \dots + a_nx^n)$$
$$= b+a$$

$\therefore a+b = b+a$

V) Cerradura $\therefore \mathbb{R} \times P_n(x) \rightarrow P_n(x)$

$\Rightarrow \alpha a = \alpha(a_0 + \dots + a_n x^n) = \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \quad + \alpha a_n x^n$

$= (\alpha a_0) + \dots + (\alpha a_n) x^n \in P_n(x)$

$\therefore$ Se cumple la cerradura. //

Vi) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$

$\alpha(a+b) = \alpha[(a_0+b_0) + \dots + (a_n + b_n)x^n]$

$= \alpha(a_0 + b_0) + \dots + \alpha(a_n + b_n)x^n$

$= (\alpha a_0 + \alpha b_0) + \dots + (\alpha a_n + \alpha b_n)x^n$

$= (\alpha a_0 + \dots + \alpha a_n x^n) + (\alpha b_0 + \dots + \alpha b_n x^n)$

$= \alpha(a_0 + \dots + a_n x^n) + \alpha(b_0 + \dots + b_n x^n)$

$= \alpha a + \alpha b$

$\therefore \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$ //

Vii) $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$

$(\alpha+\beta)a = (\alpha+\beta)(a_0 + \dots + a_n x^n)$

$= (\alpha+\beta)a_0 + \dots + (\alpha+\beta)a_n x^n$

$= (\alpha a_0 + \beta a_0) + \dots + (\alpha a_n + \beta a_n)x^n$

$= (\alpha a_0 + \dots + \alpha a_n x^n) + (\beta a_0 + \dots + \beta a_n x^n)$

$= \alpha(a_0 + \dots + a_n x^n) + \beta(a_0 + \dots + a_n x^n)$

$= \alpha a + \beta a$

$\therefore (\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$ //

Viii) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$

$\alpha(\beta a) = \alpha(\beta(a_0 + \dots + a_n x^n)) = \alpha(\beta a_0 + \dots + \beta a_n x^n)$

$= \alpha\beta a_0 + \dots + \alpha\beta a_n x^n = \alpha\beta(a_0 + \dots + a_n x^n)$

$= (\alpha\beta)a$

$\therefore \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ //

IX) $1 \cdot v = v$, $\forall v \in P_n(x)$.

Sea e nuestro elemento neutro, $a \in P_n(x)$.

$\Rightarrow ea = ea_0 + \dots + ea_n x^n = a_0 + \dots + a_n x^n$

$\Rightarrow ea_i = a_i \;;\; i = 0, 1, \dots, n$

$\Rightarrow e = 1 \quad \forall a \in P_n(x)$

X) Dado $a \in P_n(x)$ $\exists$ un $b \in P_n(x) / a + b = 0 = b + a$.

$a + b = (a_0 + b_0) + \dots + (a_n + b_n)x^n = 0$

$\Rightarrow a_i + b_i = 0 \;;\; i = 0, 1, \dots, n$

$\Rightarrow b_i = -a_i$

$\Rightarrow b = (-1)a$

$\therefore$ Para cada $a \in P_n(x)$ existe un $b \in P_n(x) / a + b = 0$ con $b = -a$

$\boxed{\therefore P_n(x) \text{ forma un espacio vectorial}}$

2. Determine si los siguientes conjuntos forman subespacios vectoriales.

a) $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0 \right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Para esto sólo debemos probar las cerraduras para $+$ y $\cdot$.

i) Sea $a, b \in H$

$\Rightarrow a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$

Cuyos elementos sumados:

$(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) = (a_1 + a_2 + a_3) + (b_1 + b_2 + b_3)$

$= 0 + 0 = 0$

$\therefore a+b \in H$

ii) $\alpha \in \mathbb{R}$. $\alpha a \in H$?

$\alpha a = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \alpha a_3 \end{pmatrix}$; $\alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3 = \alpha(\underbrace{a_1 + a_2 + a_3}_{0})$

$\Rightarrow \alpha a_1 + \alpha a_2 + \alpha a_3 = 0$

$\therefore \alpha a \in H$

$\therefore$ H forma un subespacio de $\mathbb{R}^3$

b) $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : x - 2y = 0 \right\}$ de $\mathbb{R}^2$

i) Cerradura para +:

Sea $a, b \in H$

$\Rightarrow a+b = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$

Verificamos la restricción:

$(a_1+b_1) - 2(a_2+b_2) = \ldots$

$\ldots = (a_1 - 2a_2) + (b_1 - 2b_2) = \ldots$

$\ldots = 0 + 0 = 0$ ✓

$\therefore a+b \in H$

ii) Cerradura para αa con $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\alpha a = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \end{pmatrix}$

$\alpha a_1 - 2\alpha a_2 = \alpha(\underbrace{a_1 - 2a_2}_{0}) = 0$

$\therefore \alpha a \in H$

$\therefore$ H forma un subespacio de $\mathbb{R}^2$.

3. Compruebe si los siguientes conjuntos de vectores generan $\mathbb{R}^2$.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = S$

Veamos su espacio generado:

$$gen(S) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2\alpha - \beta = x \\ 2\alpha - \beta = y \end{matrix}$$

Restamos ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{c} 2\alpha - \beta = x \\ \underline{2\alpha - \beta = y} \\ 0 = x - y \\ x = y \end{array}$$

$$\Rightarrow gen(S) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / x = y ; x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

$\therefore$ S no genera a $\mathbb{R}^2$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} = S$

Veamos su espacio generado:

$$gen(S) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} ; \alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \alpha_0 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} 2\alpha_0 - \alpha_1 = x \\ \alpha_0 - \alpha_1 = y \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & x \\ 1 & -1 & y \end{array} \right) \begin{matrix} \\ (-2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & y \\ 0 & 1 & x - 2y \end{array} \right) \begin{matrix} \\ (1) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x - y \\ 0 & 1 & x - 2y \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_0 = x - y \\ \alpha_1 = x - 2y \end{matrix}$$

Ya que no existe restricción alguna en los valores de x y y, estos pueden tomar cualquier valor.

$\therefore gen(S) = \mathbb{R}^2$

4. Verifique si los siguientes conjuntos de vectores son linealmente independientes

a) $\left\{\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$

Sea $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, de la def. de independencia lineal:

$$\alpha_0\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix} -11 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 9\alpha_0 - 11\alpha_1 &= 0 \\ -8\alpha_0 - 3\alpha_1 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -11 & 0 \\ -8 & -3 & 0 \end{array}\right)(1)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 9 & -11 & 0 \\ 1 & -14 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -14 & 0 \\ 9 & -11 & 0 \end{array}\right)(-9) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -14 & 0 \\ 0 & 115 & 0 \end{array}\right)(1/115)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -14 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)(14) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = 0$$

$\therefore \left\{\begin{pmatrix} 9 \\ -8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -11 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$ son L.I.

b) $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}\right\}$

$$\alpha_0\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_1\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 0 \\ 2 & 12 & 0 \end{array}\right)(-2) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha_0 + 6\alpha_1 = 0$$

$$\alpha_0 = -6\alpha_1 \;;$$

$\alpha_0 \neq 0 \;;\; \alpha_1 \neq 0$ en general

$\therefore \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}\right\}$ son L.D.

c) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

De la definición:

$$\alpha_0 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)^{(-1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{(-1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = 0$$

$\therefore \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ son L.I. //

5. Determine una base y la dimensión para los siguientes espacios vectoriales.

a) $H = \{(x,y) : 2x + 3y = 0\}$

Sea un $(x,y) \in H$ y las operaciones $+$ y $\cdot$ usuales.
Buscamos a (x,y) como una combinación lineal de su base. Usando la definición de H.

$$(x,y) = \left(x, -\frac{2}{3}x\right) = x\left(1, -\frac{2}{3}\right)$$

Ya que podemos escribir cualquier (x,y) como una combinación lineal de $(1, -2/3)$, y $\{(1,-2/3)\}$ es L.I.

$\Rightarrow \{(1, -2/3)\}$ es base de H //

y $\dim H = 1$ //, ya que su base es de un vector.

b) $H = \{(x,y,z) : x - 2y + z = 0\}$

Sean $(x,y,z) \in H$:

$$(x,y,z) = (2y - z, y, z) = (2y, y, 0) + (-z, 0, z)$$
$$= y(2,1,0) + z(-1,0,1)$$

$\Rightarrow \{(2,1,0),(-1,0,1)\}$ generan a H.

Verificamos su independencia lineal; sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha(2,1,0)+\beta(-1,0,1)=(0,0,0)$$

$$(2\alpha-\beta, \alpha, \beta)=(0,0,0)$$

$$\Rightarrow \alpha=\beta=0 \Rightarrow \{(2,1,0),(-1,0,1)\} \text{ son } LI.$$

$\therefore \{(2,1,0),(-1,0,1)\}$ forma una base de H

y $\dim H = 2$