Centro de Investigación en Matemáticas (CIMAT).
Unidad Monterrey
Inferencia Estadística

Tarea 1

Gustavo Hernández Angeles

27 de agosto de 2024

1 Problema 1

Un conjunto de bits se envían sobre un canal de comunicación en paquetes de 12. Si la probabilidad de que un bit sea corrompido sobre este canal es 0.1 y los errores son independientes:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no más de dos bits de un paquete se corrompan?

b) Si se envían 6 paquetes, ¿cual es la probabilidad de que al menos un paquete contenga 3 o mas bits corruptos?

c) Finalmente, si X denota el número de paquetes conteniendo 3 o más bit corruptos, ¿cuál es la probabilidad de que X excederá su media por más de dos desviaciones estándar?

SOLUCIÓN

Inciso a)

Sea W el número de bits corrompidos en el canal. Necesitamos la probabilidad de que se cumpla que máximo 2 bits sean corrompidos dentro de 12 observaciones con una probabilidad $p = 0.1$ de que un bit observado sea corrupto. Dado que los errores son independientes, W puede modelarse mediante la distribución binomial $W \sim B(n = 12, p = 0.1)$, buscando para el inciso a) $P(W <= 2)$.

$$P(W <= 2) = P(W = 0) + P(W = 1) + P(W = 2)$$
$$P(W <= 2) = \binom{12}{0}(0.1)^0(1 - 0.1)^{12} + \binom{12}{1}(0.1)^1(1 - 0.1)^{11} + \binom{12}{2}(0.1)^2(1 - 0.1)^{10}$$
$$P(W <= 2) = (1)(1)(0.9)^{12} + (12)(0.1)(0.9)^{11} + (66)(0.1)^2(0.9)^{10}$$

Obteniendo así

$$\boxed{\textbf{a)} \quad P(W <= 2) \simeq 0.889}$$

Inciso b)

Sea X el número de paquetes de bits que contienen 3 o más bits corruptos. Puesto que estamos determinando la cantidad de éxitos X dentro de un número de observaciones $k = 6$ con errores independientes, se propone $X \sim B(k, p_1)$, buscando $P(X >= 1)$ como respuesta al inciso.
Aún se necesita determinar la probabilidad de éxito p_1 para cada uno de los k paquetes de bits. W representa la cantidad de bits corruptos en un paquete, así que nuestro parámetro $p_1 = P(W >= 3)$.

$$p_1 = P(W >= 3) = \sum_{m=3}^{12} \binom{12}{m} p^m (1 - p)^{12-m}$$
$$p_1 \simeq 0.111$$

Ahora es posible calcular $P(X >= 1)$:

$$P(X >= 1) = \sum_{m=1}^{6} \binom{6}{m} p_1^m (1-p_1)^{6-m}$$
$$P(X >= 1) = \sum_{m=1}^{6} \binom{6}{m} (0.111)^m (0.889)^{6-m}$$

Dándonos como resultado

$$\boxed{\textbf{b)} \quad P(X >= 1) \simeq 0.506}$$

Inciso c)

Determinamos la media y la desviación estándar para $X \sim B(k = 6, p = 0.111)$ con:

$$\mu = E[x]$$
$$\sigma^2 = E[x^2] - E[x]^2$$

Calculando μ:

$$\begin{aligned}
\mu = E[x] &= \sum_{x=0}^{k} x \binom{k}{x} p^x (1-p)^{k-x} \\
&= \sum_{x=0}^{6} x \binom{6}{x} 0.111^x (0.889)^{6-x} \\
&\simeq 0.665
\end{aligned}$$

Ahora para σ^2:

$$\begin{aligned}
\sigma^2 = E[x]^2 &= \sum_{x=0}^{k} x^2 \binom{k}{x} p^x (1-p)^{k-x} \\
&= \sum_{x=0}^{6} x^2 \binom{6}{x} 0.111^x (0.889)^{6-x} \\
&\simeq 0.591
\end{aligned}$$

Y obteniendo la desviación estándar:

$$\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{\sigma^2} \\
&\simeq \sqrt{0.591} \\
&\simeq 0.769
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
P(X > \mu + 2\sigma) &= P(X > 0.665 + 2(0.769)) = P(X > 2.203) \\
&= P(X >= 3) = \sum_{m=3}^{k} \binom{k}{m} p^m (1-p)^{k-m} \\
&= \sum_{m=3}^{6} \binom{6}{m} (0.111)^m (0.889)^{6-m} \\
&\simeq 0.021
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\textbf{c)} \quad P(X > \mu + 2\sigma) \simeq 0.021}$$

2 Problema 2

Una caja contiene 12 manzanas frescas y 4 que están podridas. Si elige 3 al azar y X denota el número de manzanas frescas que tomó, encuentre la función de densidad de X y su esperanza.

SOLUCIÓN

Puesto que X denota el número de manzanas frescas seleccionadas en 3 elecciones, consideraremos una manzana fresca como un "éxito" y una manzana podrida como un "fracaso". Al realizar cada elección, las probabilidades para la siguiente elección cambian, lo que indica que las elecciones no son independientes (muestreo sin reemplazo). Además, estamos trabajando con una población finita $N = 12 + 4$ y la variable aleatoria X es discreta. Las condiciones que nos plantea el problema sugieren que $X \sim HG(N = 16, K = 12, n = 3)$. Recordando que los valores posibles de X están en un dominio de $\big[\,\text{máx}(0, n - (N - K), \text{mín}(n, K)\big] = \big[0, 3\big]$. Así, obtenemos la función de masa de la distribución hipergeométrica, y por tanto, de nuestro problema:

$$\boxed{f(x) = \frac{\binom{12}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{16}{3}}, \qquad x \in \{0, 1, 2, 3\}} \tag{2.1}$$

Determinando su esperanza, con 2.1:

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \sum_{x=0}^{3} x f(x) \\
&= \sum_{x=0}^{3} x \frac{\binom{12}{x}\binom{4}{3-x}}{\binom{16}{3}} \\
&= (0)\frac{\binom{12}{0}\binom{4}{3-0}}{\binom{16}{3}} + (1)\frac{\binom{12}{1}\binom{4}{3-1}}{\binom{16}{3}} + (2)\frac{\binom{12}{2}\binom{4}{3-2}}{\binom{16}{3}} + (3)\frac{\binom{12}{3}\binom{4}{3-3}}{\binom{16}{3}}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E[x] = 2.25}$$

3 Problema 3

Para el siguiente ejercicio es necesario el programa R.

a) Escriba un programa en `R` que reproduzca las gráficas de las funciones de distribución acumulada y de masa de la distribución uniforme que aparecen en las notas del curso. Las gráficas deben verse similares a las figuras presentadas en clase.

b) Lea en la documentación de `R`, o en cualquier otra fuente de información confiable, la explicación de la función `sample(x, size, replace=FALSE, prob=NULL)`. (No es necesario entregar algo para este ejercicio).

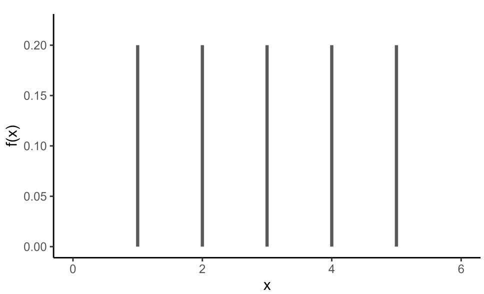
c) Usando la función `sample` simule una muestra de tamaño 10 000 de la distribución $U(1, ..., 10)$. Fijando la semilla en 13 (`set.seed(13)`), muestre los resultados de la simulación en una tabla de frecuencia, y calcule la media y la varianza. Sugerencia: Use la función `table`.

d) Grafique las frecuencias de la simulación anterior.

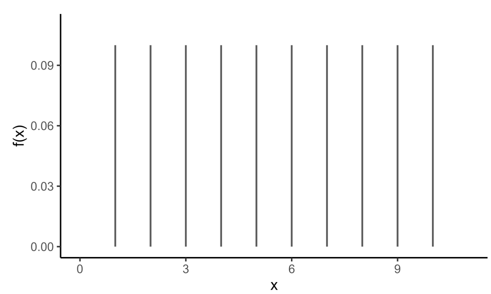
SOLUCIÓN

Inciso a)

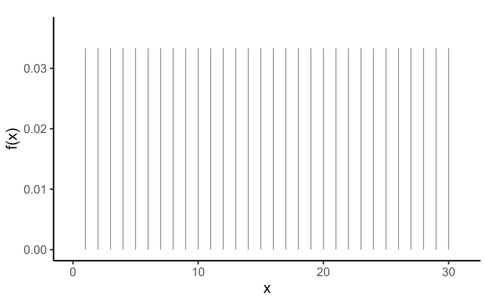
En la figura 3.1 se muestran las gráficas generadas para varios valores del parámetro n de la función de masa de la distribución uniforme $U(n)$. Es claro que a medida que n aumenta, la gráfica tiende a aproximarse a una de la distribución uniforme continua.



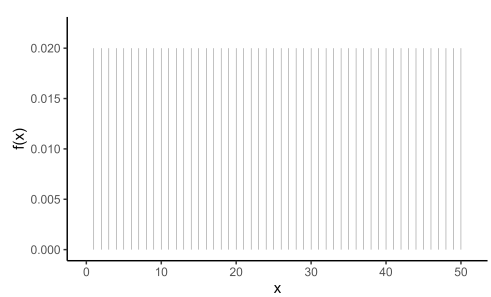
(a) $n = 5$.



(b) $n = 10$.



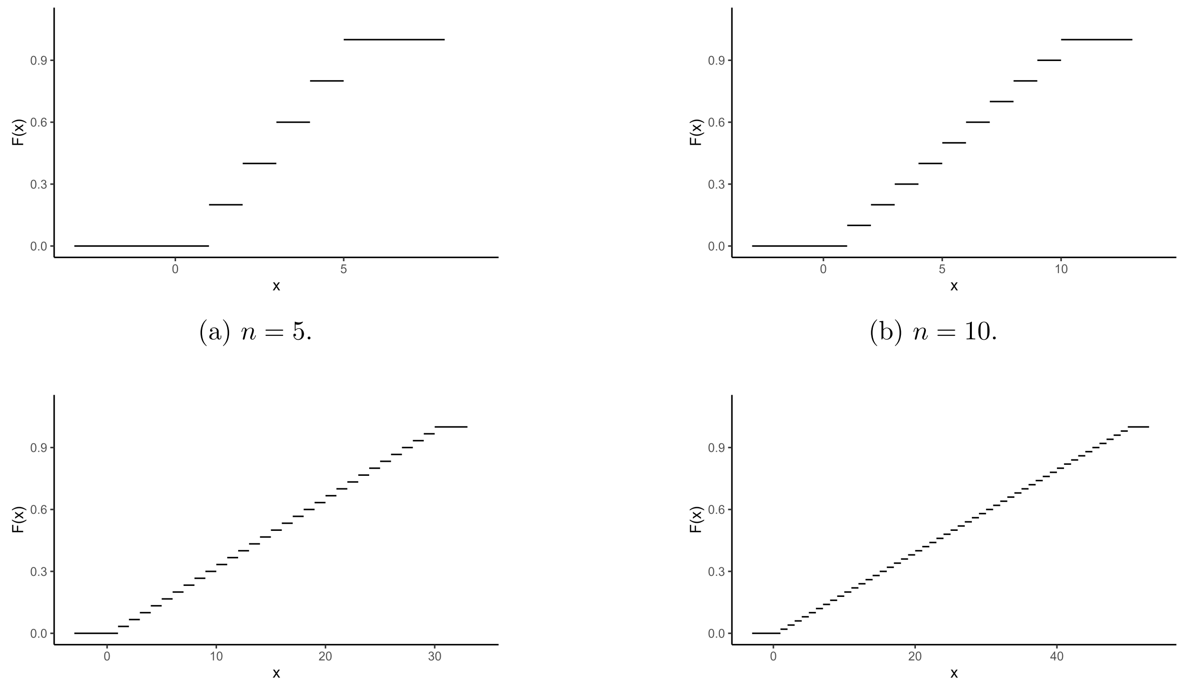
(c) $n = 30$.



(d) $n = 50$.

Figura 3.1: Funciones de masa de la distribución uniforme $f_U(x)$, variando el parámetro n.

Y por otro lado, las funciones de distribución acumulativas $F_U(x)$ para varios valores del parámetro n en la figura 3.2. Podemos ver que mientras el parámetro n incrementa, la gráfica tiende a ser una línea recta muy conocida en una distribución continua...



(a) $n = 5$. (b) $n = 10$.

(c) $n = 30$. (d) $n = 50$.

Figura 3.2: Funciones de distribución acumulada $F_U(x)$, variando el parámetro n.

Inciso c)

El resultado de la simulación se resume en la tabla de frecuencia (Fig 3.1):

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Frecuencias	1004	983	991	1021	1031	994	976	1032	1007	961

Cuadro 3.1: Tabla de frecuencias para $U(1, ..., 10)$ con una muestra de 10,000 observaciones.

Al computar la media μ y la varianza $\mathbf{Var}(x)$ con la muestra, se nos arrojan los siguientes resultados:

$$\mu \simeq 5.49 \qquad ; \qquad \mathbf{Var}(X) \simeq 8.18 \tag{3.1}$$

Haciendo la comparación con el valor teórico $\mu = 5.5$, $\quad \mathbf{Var}(x) = 6.75$, obtenemos un error relativo de 0.17 % y 21.2 % respectivamente.

Inciso d)

En la figura 3.3 se puede observar que la simulación se asemeja mucho a la distribución uniforme. En particular, podemos concluir que `R` es una buena herramienta para simular la distribución uniforme y nos puede ayudar a conocer la media con una buena fiabilidad.

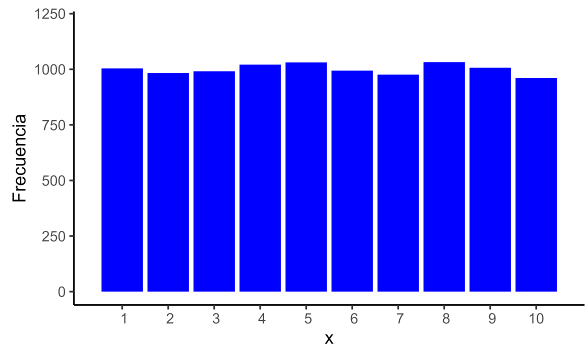


Figura 3.3: Resultado de la simulación: Frecuencias por cada valor de X en distribución uniforme. Muestra de 10,000 observaciones.

4 Problema 4

Para el siguiente ejercicio también necesitamos `R`.

a) Usando la función `sample`, simule 10 lanzamientos de una moneda equilibrada y cuente el número de águilas que obtiene. Repita este proceso 10^4 veces y muestre sus primeros 3 resultados. Grafique las frecuencias del número de águilas obtenidas en los 10^4 experimentos. También grafique las proporciones del número de águilas obtenidas.

b) Usando la función `dbinom` grafique la función de masa de una distribución $B(10, 0.5)$ sobre la gráfica de las proporciones que hizo en el inciso anterior.

c) Repita los dos incisos anteriores para una moneda desequilibrada que tiene probabilidad $p = 0.3$ de obtener un águila cuando se lanza. ¿Qué observa?

SOLUCIÓN

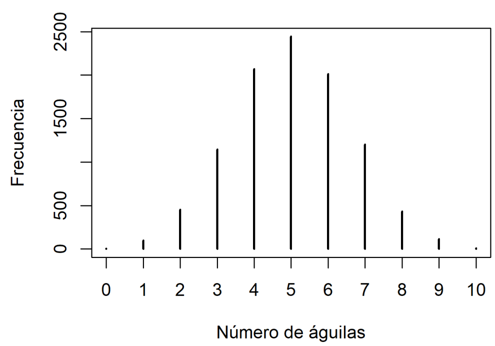
Inciso a)

La tabla 4.1 nos muestra los primeros 3 resultados de nuestra simulación. En esta simulación trabajamos con una moneda equilibrada; se lanza 10 veces, contamos el número de veces que cayó "águila" y guardamos este valor X. Este procedimiento se realiza 10,000 veces y hacemos una tabla de frecuencias con los valores de X.

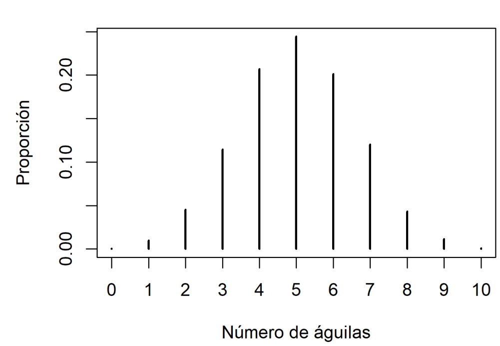
La figura 4.1 muestra las gráficas de la frecuencia y la de proporciones con que cada posible salida x ocurrió durante la simulación. Podemos observar que con los parámetros definidos (independencia, moneda equilibrada) las frecuencias conforman una campana de Gauss graficadas.

X	Frecuencia
5	2443
4	2072
6	2015

Cuadro 4.1: Primeros 3 resultados en la simulación. Para realizar la simulación se utilizó un ciclo iterativo `for` guardando el resultado en cada iteración en el vector `salida` y se realiza la tabla de frecuencias con `table()`. Para efectos de reproducibilidad, esta simulación tiene una semilla predefinida con `set.seed(13).`



(a)



(b)

Figura 4.1: Resultado de la simulación: (a) Gráfica de las frecuencias de ocurrencia contra el número de águilas. Se realizó con la función `plot(..., type = "h")`. Para (b), normalizamos las frecuencias multiplicandolas por 1/10,000.

Inciso b)

En un ejercicio de comparación, solaparemos los resultados de la función de masa de una distribución binomial $B(10, 0.5)$ con los de nuestra gráfica de proporción mostrados en la figura 4.1 en (b). En la figura 4.2 se muestra el resultado.

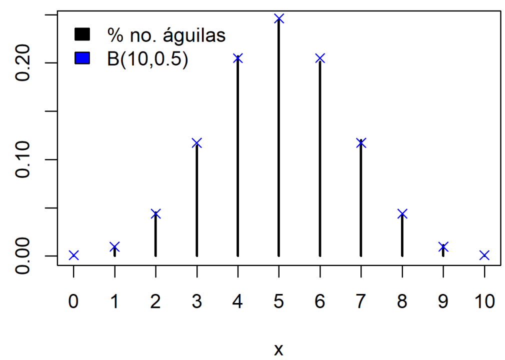
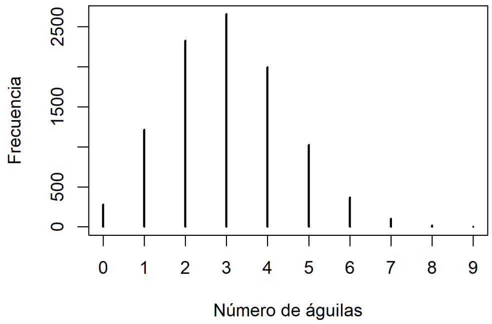


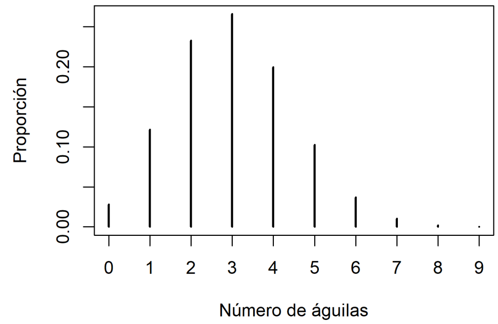
Figura 4.2: Una comparación entre la gráfica de proporción y la función de masa de la distribución binomial. Observamos que ambas gráficas poseen la misma forma y casi los mismos valores. Pienso que esto es debido a que el experimento que simulamos representa a una variable aleatoria $X \sim B(10, 0.5)$, esto debido a que los valores son discretos, contamos el número de éxitos en n tiradas y la moneda es equilibrada.

Inciso c)

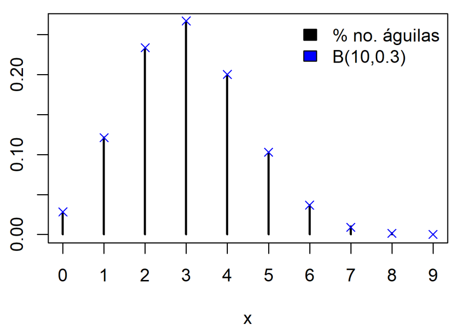
Ahora repetiremos el mismo procedimiento que en los anteriores dos incisos cambiando únicamente el parámetro $p = 0.5$ a $p = 0.3$. El resultado se muestra en la figura 4.3.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.3: Se cambia el parámetro p de la simulación haciendo que tenga un valor de 0.3. Las consecuencias se observan en (a) y (b) como una inclinación hacia la izquierda, centrando la curva en 3. En (c), la gráfica superpuesta es la función de masa de la distribución $B(10, 0.3)$. Nuevamente, las gráficas coinciden casi exactamente en los valores, haciendo más notoria la relación entre la simulación y la distribución binomial.

5 Problema 5

Una urna contiene 46 bolas grises y 49 bolas blancas. Usando la función `sample` en R, simule la extracción sin reemplazamiento de 20 de estas bolas y cuente el número de bolas grises que obtuvo. Repita este proceso 10^4 veces y grafique las frecuencias de bolas grises obtenidas en cada experimento. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 20 bolas de la urna 5 de ellas sean grises? También grafique la proporción de bolas grises obtenidas en los experimentos anteriores y sobre esta figura añada la correspondiente función de masa de la distribución Hipergeométrica asociada al experimento total. Brevemente discuta que observa.

SOLUCIÓN

En la figura 5.1, se muestran las frecuencias del número de bolas extraídas en cada experimento.

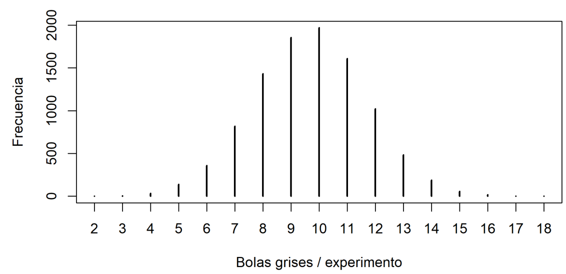


Figura 5.1: Frecuencia de bolas grises por cada experimento. Se forma a partir de 10^4 experimentos, cuyo proceso es el conteo de bolas grises en 20 extracciones en una urna que contiene 49 bolas blancas y 46 grises. Se empleó la función `sample(..., replace = FALSE)` de `R`.

Se estima la probabilidad de cada posible resultado mediante la gráfica de proporciones. Por las condiciones del problema, sabemos que la variable aleatoria que corresponde al "número de bolas grises obtenidas en un experimento" se distribuye como una hipergeométrica, cuyos parámetros son $N = 46 + 49$, $K = 46$ y $n = 20$. Entonces, en la figura 5.2 se grafican las proporciones obtenidas en los experimentos anteriores junto a la función de masa de la distribución hipergeométrica mencionada anteriormente.

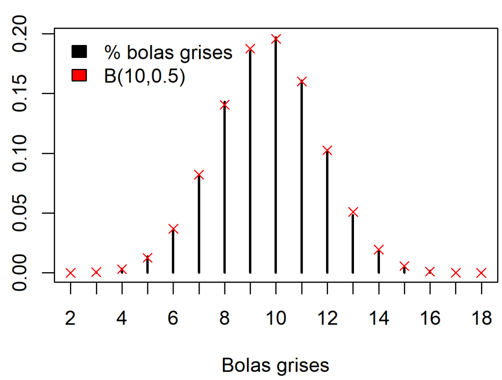


Figura 5.2: Una comparación entre la función de masa de la distribución $Hiper(95, 46, 20)$ con las proporciones obtenidas en los 10^4 experimentos. Vemos la exactitud con la que ambas gráficas convergen en estas simulaciones con grandes números de experimentos, pudiendo determinar valores de probabilidad. En particular, la **probabilidad de obtener 5 bolas grises en 20 extracciones** de la urna se estima en un 1.39 %.

6 Problema 6

Sea X una variable aleatoria con función de distribución F dada por

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{para } x<0 \\ 1/2 & \text{para } 0\le x<1/4 \\ 3/4 & \text{para } 1/4\le x<3/4 \\ 1 & \text{para } 3/4\le x \end{cases} \tag{6.1}$$

Determine la función de probabilidad de X.

SOLUCIÓN

Se grafica la función de distribución F para observar de mejor forma el comportamiento de la función de probabilidad (Figura 6.1). Lo que se observa es una función de tipo escalón que contiene las fronteras izquierda de cada escalón, lo que nos indica que la variable aleatoria X es discreta y puede tener los valores $X=\{0,1,2\}$ (correspondientes a las fronteras izquierdas de cada escalón).

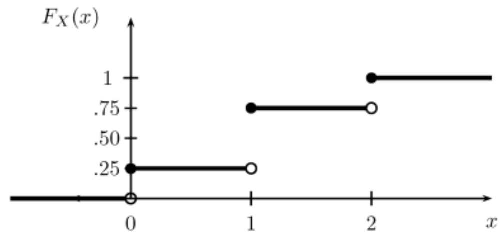


Figura 6.1: Función acumulativa de distribución (Problema 6).

Se observa fácilmente en la gráfica que $f(0)=0.25$. Para $f(1)$, realizamos la resta $F(1)-F(0)=0.5$, por lo que $f(1)=0.50$. Finalmente, para $f(2)$ se realiza el mismo procedimiento: $f(2)=F(2)-F(1)=1-0.75=0.25$. Así:

$$f(x)=\begin{cases} 1/4 & \text{para } x=0 \\ 1/2 & \text{para } x=1 \\ 1/4 & \text{para } x=2 \end{cases} \tag{6.2}$$

7 Problema 7

Sea X una variable aleatoria con valores en $[0,1]$ y función de distribución $F(x)=x^2$. ¿Cuál es la densidad de X? Calcule las siguientes probabilidades: I) $P(1/4\le X\le 3/4)$; II) $P(X>1/2)$; III) $P(X\le 3/4)$.

SOLUCIÓN

Debido a que tenemos bien definido el dominio de nuestra variable aleatoria, con un único intervalo en donde está definida $F(x)$, podemos realizar directamente una operación inversa a la integral para obtener la función de densidad de probabilidad de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{d}{dx}F(x) \\
&= \frac{d}{dx}\left(x^2\right) \\
&= 2x
\end{aligned}
$$

Resultando en

$$
f(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } x \in [0,1] \\ 0 & \text{de otra forma.} \end{cases} \tag{7.1}
$$

Inciso I

Para determinar la probabilidad $P(1/4 \leq X \leq 3/4)$ realizamos la integral definida entre los límites especificados.

$$
\begin{aligned}
P(1/4 \leq X \leq 3/4) &= \int_{1/4}^{3/4} 2x dx \\
&= x^2 \Big|_{1/4}^{3/4} = 9/16 - 1/16 \\
&= 8/16 = 1/2
\end{aligned}
$$

Resultando en $P(1/4 \leq X \leq 3/4) = 0.5$.

Inciso II

Realizamos la integral correspondiente a $P(X > 1/2)$:

$$
\begin{aligned}
P(X > 1/2) &= \int_{1/2}^{\infty} 2x dx = \int_{1/2}^{1} 2x dx + \int_{1}^{\infty} 0 dx \\
&= x^2 \Big|_{1/2}^{1} = 1 - 1/4 \\
&= 3/4
\end{aligned}
$$

Resultando en $P(X > 1/2) = 0.75$.

Inciso III

Realizamos ahora la integral correspondiente para obtener $P(X \leq 3/4)$:

$$\begin{aligned}
P(X \leq 3/4) &= \int_{-\infty}^{3/4} 2xdx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{3/4} 2xdx \\
&= x^2 \Big|_0^{3/4} = 9/16 - 0 \\
&= 9/16
\end{aligned}$$

Y por lo tanto, $P(X \leq 3/4) = 9/16$.

8 Problema 8

Un lote muy grande de componentes ha llegado a un distribuidor. Se puede decir que el lote es aceptable solo si la proporción de componentes defectuosos es cuando mucho 0.10. El distribuidor decide seleccionar aleatoriamente 10 componentes y aceptar el lote solo si el número de componentes defectuosos en la muestra es cuando mucho 2. ¿Cuál es la probabilidad de que el lote sea aceptado cuando la proporción real de defectuosos es 0.01, 0.05, 0.10, 0.20?

SOLUCIÓN

En este caso, la variable aleatoria X es el número de articulos defectuosos en 10 observaciones. La redacción del problema nos sugiere que tenemos una población **muy grande** en la cual realizamos las observaciones, haciendo a las 10 observaciones independientes. Además, se nos dan las proporciones reales de los artículos defectuosos, tratando a la probabilidad de que un articulo sea defectuoso como una **probabilidad constante**. Por lo tanto, se modelará la variable aleatoria siguiendo una distribución binomial, esto es, $X \sim B(n = 10, p)$, buscando la probabilidad $P(X \leq 2)$ para cada valor de p.

p = 0.01

De forma general, podemos escribir para nuestra variable aleatoria

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \tag{8.1}$$

En este caso, evaluaremos con la función de masa de la distribución $B(10, 0.01)$:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

Evaluando $P(X \leq 2)$:

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&= \binom{10}{0}(0.01)^0(0.99)^10 + \binom{10}{1}(0.01)^1(0.99)^9 + \binom{10}{2}(0.01)^2(0.99)^8 \\
&\simeq (0.9044) + (0.0914) + (0.0042) \\
&\simeq 0.9998
\end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore \text{La probabilidad de que acepten el lote es de: } 99.98\,\%.}$$

p = 0.05

Se realiza el mismo procedimiento que en el inciso anterior, cambiando únicamente el parámetro $p = 0.05$.

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&= \binom{10}{0}(0.05)^0(0.95)^10 + \binom{10}{1}(0.05)^1(0.95)^9 + \binom{10}{2}(0.05)^2(0.95)^8 \\
&\simeq (0.5987) + (0.3151) + (0.0746) \\
&\simeq 0.9885
\end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore \text{La probabilidad de que acepten el lote es de: } 98.85\,\%.}$$

p = 0.10

Realizamos el mismo proceso para hallar $P(X \leq 2)$, ahora con $p = 0.10$.

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&= \binom{10}{0}(0.10)^0(0.90)^10 + \binom{10}{1}(0.10)^1(0.90)^9 + \binom{10}{2}(0.10)^2(0.90)^8 \\
&\simeq (0.3487) + (0.3874) + (0.1937) \\
&\simeq 0.9298
\end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore \text{La probabilidad de que acepten el lote es de: } 92.98\,\%.}$$

p = 0.20

Finalmente, vemos la probabilidad $P(X \leq 2)$ cuando $p = 0.20$.

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&= \binom{10}{0}(0.20)^0(0.80)^10 + \binom{10}{1}(0.20)^1(0.80)^9 + \binom{10}{2}(0.20)^2(0.80)^8 \\
&\simeq (0.1074) + (0.2684) + (0.3020) \\
&\simeq 0.6778
\end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore \text{La probabilidad de que acepten el lote es de: } 67.78\,\%.}$$

9 Problema 9

Sea $G = \{1, 2, 3\}$, $H = \{4, 5, 6\}$. Lanzamos dos dados y sean los eventos $A =$ "el primer dado cae en H"; $B =$ "el segundo dado cae en H"; $C =$ "un dado cae en G y el otro en H"; $D =$ "el total es cuatro", $E =$ "el total es cinco" y $F =$ "el total es siete". ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas? I) A y F son independientes. II) A y D son independientes. III) A y E son independientes. IV) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. V) A y C son independientes. VI) C y E son independietes. VII) $P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$. VIII) A, C y E son independientes. Justifique sus respuestas.

SOLUCIÓN

Recordemos la definición de independencia para realizar los siguientes problemas.

Definición 1. *Dos eventos A y B son **independientes** si*

$$\mathbb{P}(AB) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \tag{9.1}$$

Inciso I

A y F son independientes.
Para calcular probabilidades haremos uso del hecho de que el espacio muestral Ω es finito. Además,

$$\Omega = \{(i, j)/i, j \in \{1, 2, ..., 6\}\} \tag{9.2}$$

Con $|\Omega| = 36$, definiremos la probabilidad de cualquier evento K como:

$$\mathbb{P}(K) = \frac{|K|}{|\Omega|} \tag{9.3}$$

Habiendo dicho esto, podemos verificar la independencia mediante la definición dada. Primero, hallamos que $A \cap F = \{(4, 3), (5, 3), (6, 1)\}$ y entonces

$$\mathbb{P} = |A \cap F|/|\Omega| = 3/36 = 1/12$$

Por otro lado, para calcular la probabilidad de A realizamos un conteo. Para el primer dado, existen 3 salidas obligatorias para que se cumpla A que corresponden a H, mientras que el segundo dado es libre de tomar cualquier valor del 1 al 6. Así, tenemos $3 \cdot 6 = 18$ formas en que A se cumpla.

$$\mathbb{P}(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \tag{9.4}$$

Para calcular la probabilidad de F es más fácil ver que solo los pares $\{(1, 6), (2, 5), (3, 4)\}$, junto a sus permutaciones, corresponden a F. Entonces $|F| = 6$ y $\mathbb{P}(F) = 6/36 = 1/6$. Verificamos,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(A \cap F) &= \frac{1}{12} \\ &= \left(\frac{1}{12}\right)\left(\frac{1}{6}\right) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(F)\end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore \text{La proposición I) es verdadera.}}$$

Inciso II

Los eventos A y D son independientes.

Podemos ver que $D = \{(1,3),(3,1),(2,2)\}$, y que además, $A \cap D = \{\emptyset\} \Rightarrow \mathbb{P}(A \cap D) = 0$. También vemos que, usando la ecuación 9.3, $\mathbb{P}(D) = 3/36 = 1/12$. Entonces $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(D) > 0 = \mathbb{P}(A \cap D)$, y por tanto,

$$\boxed{\therefore \text{ La proposición II) es falsa.}}$$

Inciso III

***A* y *E* son independientes.**

El evento E corresponde a aquellos pares que sumen un total de 5. Entonces $E = \{(4,1),(2,3),(3,2),(1,4)\}$ y

$$\mathbb{P}(E) = 4/36 = 1/9 \tag{9.5}$$

Además, $A \cap E = \{(4,1)\}$ y entonces

$$\mathbb{P}(A \cap E) = 1/36$$

Lo cual es distinto de $\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(E) = 1/18$. Haciendo que A y E no sean independientes.

$$\boxed{\therefore \text{ La proposición III es falsa.}}$$

Inciso IV

$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

Podemos calcular la cardinalidad de C mediante un conteo. El primer dado tiene 3 posibilidades para estar dentro de H, el segundo dado tiene otras 3 de estar dentro de G, contando a sus permutaciones. Entonces, existen $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ formas en que se cumpla C.

$$\mathbb{P}(C) = 18/36 = 1/2 \tag{9.6}$$

Aquí, al igual que en incisos anteriores, se asume que ambos lanzamientos de dados son independientes y que están equilibrados. Por lo que podemos asumir que el evento B es equivalente a A en cardinalidad y por tanto, en probabilidad.

Es fácil ver que no se pueden cumplir los 3 eventos, ya que C nos dice que al menos un dado debe caer en G, mientras que A y B en conjunto lo impiden. $A \cap B \cap C = \{\emptyset\}$ y entonces:

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = 0$$

Mientras que $\mathbb{P}(A), \mathbb{P}(B), \mathbb{P}(C) > 0$.

$$\boxed{\therefore \text{ La proposición IV es falsa.}}$$

Inciso V

A y C son independientes.

La única posibilidad de que se de $A \cap C$ es que la primera cara caiga en H y la segunda en G. Así, el primer dado tiene 3 formas de cumplir H y el segundo dado tiene también 3 formas de cumplir G. Por lo tanto la cardinalidad de $A \cap C$ es de 9, y su probabilidad

$$P(A \cap C) = 9/36 = 1/4$$

Además, de las ecuaciones 9.4 y 9.6 tenemos que

$$\begin{aligned} P(A)P(B) &= (1/2)(1/2) = 1/4 \\ &= P(A \cap C) \end{aligned}$$

$$\boxed{\therefore \text{ La proposición V es verdadera.}}$$

Inciso VI

C y E son independientes.

$C \cap E$ nos indica que la suma total debe ser 5 y que un dado debe caer en H y otro en G. Las combinaciones que cumplen esto son $\{(4,1),(1,4)\}$. Entonces,

$$P(C \cap E) = 2/36 = 1/18$$

Y recordando las probabilidades de C y E en las ecuaciones 9.6 y 9.5, respectivamente.

$$\begin{aligned} P(C)P(E) &= (1/2)(1/9) = 1/18 \\ &= P(C \cap E) \end{aligned}$$

Entonces, C y E son independientes.

$$\boxed{\therefore \text{ La proposición VI es cierta.}}$$

Inciso VII

$P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$.

Recordando las probabilidades de A, C y E en las ecuaciones 9.4, 9.6 y 9.5, respectivamente, tenemos que

$$P(A)P(C)P(E) = (1/2)(1/2)(1/9) = 1/36$$

El evento $A \cap C \cap E$ nos dice que el primer dado debe caer en H, el segundo debe caer en G y deben sumar 5. Entonces $A \cap C \cap E = \{(4, 1)\}$ y luego

$$P(A \cap C \cap E) = 1/36 = P(A)P(C)P(E)$$

$$\boxed{\therefore \text{ La proposición VII es correcta.}}$$

Inciso VIII

A, C y E son independientes.

Aunque en un principio creí que esto era cierto, no lo es. La forma de determinar independencia en conjuntos de más de 2 eventos es mediante la **independencia mutua**, la cual requiere que cualquier evento dentro del conjunto sea independiente de cualquier intersección de los otros eventos. Además, también existe la **independencia a pares**, que es precisamente lo que hemos hecho hasta ahora

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_k) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_k) \quad \forall i, k; i \neq k \tag{9.7}$$

La independencia a pares es necesaria pero no suficiente para determinar una independencia mutua. Podemos utilizar este hecho para nuestro problema, ya que en el inciso III vimos que los eventos A y E no son independientes. Esto hace que la independencia a pares no se cumpla para este conjunto, y por tanto, tampoco la independencia mutua.

$$\boxed{\therefore \text{ La proposición VIII es incorrecta.}}$$