

Inferencia Estadística

Dr. Edgar Jimenez
Dr. Ulises Márquez



Maestría en Cómputo
Estadístico

CIMAT Monterrey



Agradecimientos

La mayor parte de estas notas fueron preparadas por la Dra. Graciela González Farías.

En forma de agradecimiento, se enlistan personas que han contribuido de una u otra forma en la construcción de estas notas a través de los años:

- Víctor Muñiz
- Rogelio Ramos Quiroga
- Juan Antonio López
- Sigfrido Iglesias González
- Rodrigo Macías Paéz
- Benito Hernández Chaudary
- Todos los estudiantes que han colaborado con sugerencias y comentarios sobre estas notas desde 1998.

Estas notas son de uso exclusivo para enseñanza y no pretende la sustitución de los textos y artículos involucrados.

Temario

Objetivos del curso: Proporcionar las bases de la estadística inferencial, orientadas al manejo y análisis de datos.

- ➊ Variables aleatorias y distribuciones de probabilidad.
 - ➊ Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas.
 - ➋ Procesos de Poisson.
 - ➌ Distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas.
 - ➍ Métodos gráficos para la identificación de distribuciones.
 - ➎ Estimación de densidades vía kernels.
 - ➏ Desigualdades para variables aleatorias.
 - ➐ Distribuciones de probabilidad de vectores aleatorios.
 - ➑ Esperanzas condicionales y regresión.
 - ➒ Modelos jerárquicos, compuestos y mezclas de variables aleatorias.
 - ➓ Transformaciones de variables aleatorias.
 - ➑ Simulación de variables aleatorias.
 - ➒ Convergencia de variables aleatorias y el Teorema del Límite Central.

Temario

- ② Distribuciones muestrales y métodos de estimación.
 - ① Estimación puntual.
 - ② Distribuciones muestrales.
 - ③ Propiedades de los estimadores.
 - ④ Estimadores de momentos.
 - ⑤ Estimadores de máxima verosimilitud y sus propiedades.
 - ⑥ Estimación por intervalos.
 - ⑦ Método Bootstrap.
- ③ Pruebas de Hipótesis e intervalos de confianza.
 - ① Definición de conceptos.
 - ② Potencia de la prueba.
 - ③ Pruebas para dos poblaciones normales independientes.
 - ④ Pruebas para medias en muestras pareadas.
 - ⑤ Pruebas básicas de varianzas.
 - ⑥ Pruebas para proporciones.

Temario

- ④ Lecturas complementarias:
 - ① Cambio de variables para transformaciones de más de una variable
 - ② Maximización de la función de verosimilitud.
 - ③ Otras que los profesores del curso consideren apropiadas y que se le proporcionarán a lo largo del curso.
- ⑤ Temas optativos de modelos para presentaciones finales, por ejemplo:
 - ① Pruebas no-paramétricas clásicas.
 - ② Pruebas de permutaciones.
 - ③ Estimación no paramétrica (suavizadores y splines).
 - ④ Pruebas de bondad de ajuste.

Entre muchas otras opciones que se discutirán con el grupo un mes antes de la fechas de exámenes finales.

Evaluación y acreditación

- Un examen parcial de medio término, 29 de septiembre: 30 %.
- Evaluación de las tareas (de 2 tipos) y actividades en clase y asistencia: 40 %.
- Un examen final, consistente en una exposición donde se entrega un reporte y se hace una presentación de 1/2 hora. La presentación debe incluir antecedentes, metodología, un ejemplo práctico y compartir el código. Deberán entregar a los instructores y a sus compañeros el resumen. Adicionalmente, deberán dejar un ejercicio sobre el tema a sus compañeros que calificarán en forma honesta. La fecha del examen final es 4, 5 y 6 de diciembre: 30 %.

Las tareas tienen una frecuencia quincenal e incluyen TODOS los ejercicios dejados en las notas y requerirán en general el uso de recursos computacionales.

Textos

- **Larry Wasserman (2004) . All of Statistics, A concise course in Statistical Inference. Springer.**
- F.M. Dekking, C. Kraaikamp, H.P. Lopuhaa L.E. Meester (2005). A Modern Introduction to Probability and Statistics, Understanding Why and How. Springer text in Statistics.
- John A. Rice (1995). Mathematical Statistics and Data Analysis, Second Edition. Duxbury Press.
- Casella & Berger. (2002). Statistical Inference, Second Edition . Duxbury Press.
- Richard J. Larsen and Morris L. Marx (2011). An Introduction to Mathematical Statistics and its Applications. Fifth Edition. Prentice Hall.

Modelos probabilísticos

Modelos probabilísticos

Recordemos que una variable aleatoria discreta es aquella que sólo toma un número **contable** de valores (finito o infinito). Por ejemplo:

- El número de plantas con daños visibles producidos por una plaga.
- El número de individuos a favor de un partido político.
- El número de televisores con defectos en su selector de canales de un lote de 100 televisores.
- El número de personas en la fila en un centro de servicio al público, entre las 9 y 10 de la mañana.

Notamos que en cada una de esas situaciones uno lleva a cabo algún tipo de **conteo**.

Modelos probabilísticos

En un principio uno debería:

- Examinar cada caso;
- Ver cuáles son las **condiciones específicas** en que se realiza el muestreo;
- Establecer los supuestos de simplicidad que sean factibles; y,
- Determinar el modelo probabilístico que mejor describa el comportamiento de la característica bajo estudio (verificando su validez).

Modelos probabilísticos

Este procedimiento general ha dado lugar a un cierto número de modelos que aparecen frecuentemente en las aplicaciones. Así, lo que haremos aquí, es construir estos **modelos particulares** formando un catálogo básico que nos permita referenciar nuestras situaciones particulares a alguno de estos. En la construcción del catálogo, contemplamos varios puntos:

- 1 **Supuestos** necesarios para identificar el uso del modelo.
- 2 **Construcción** del modelo: función de probabilidad y de probabilidad acumulada.
- 3 **Momentos**: Media, Varianza, Función generatriz de momentos (cuando aplique).

Modelos de variables discretas

Distribución uniforme discreta

Cuando se tiene un número **finito** de resultados de un experimento, x_1, x_2, \dots, x_n , cada uno de ellos **igualmente probable**, se dice que se tiene una variable aleatoria que puede ser modelada por una distribución uniforme discreta. Notación:

$$X \sim U(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Se lee: X se distribuye como una variable aleatoria uniforme.

Este tipo de modelo aparece típicamente en la selección de **muestras al azar**.

El único parámetro de la distribución es n , el número posible de resultados.

Distribución uniforme discreta

Como la suma de todas las probabilidades debe ser uno y todos los valores son equiprobables, entonces la función de masa está dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1/n & \text{para } x = x_1, x_2, \dots, x_n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Bajo esta definición, claramente $f(x) \geq 0$ para toda x , y

$$\sum_{i=1}^n f(x_i) = n \left(\frac{1}{n} \right) = 1.$$

El caso más común de esta distribución es cuando la variable toma los valores enteros

$$\{1, 2, \dots, n\}.$$

El resto de los resultados los estableceremos para cuando la variable aleatoria uniforme toma estos valores.

Distribución uniforme discreta

El parámetro (valor que identifica unívocamente al modelo) de la distribución es n , el número total de objetos. Se dice en este caso que se trata de un espacio de **probabilidad equiprobable**.

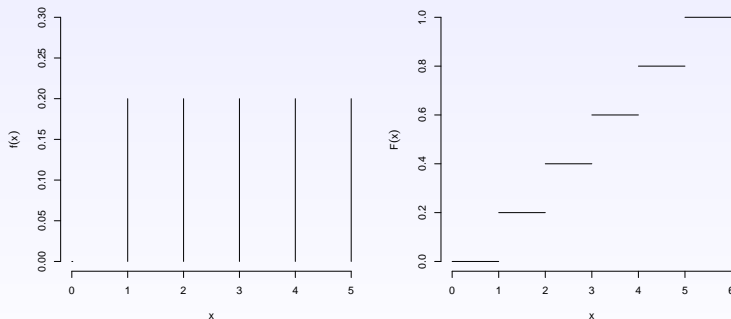


Figura: Distribución uniforme para $n = 5$.

Distribución uniforme discreta

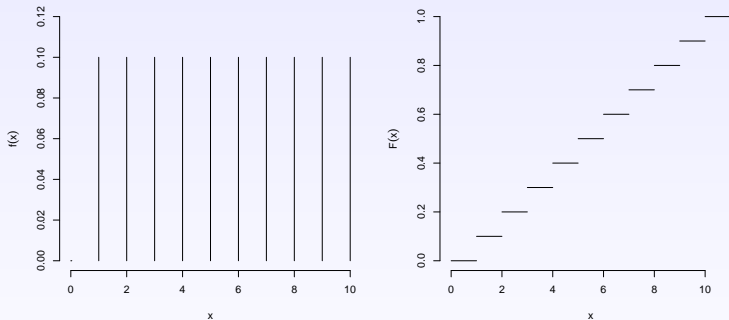


Figura: Distribución uniforme $n = 10$.

Distribución uniforme discreta

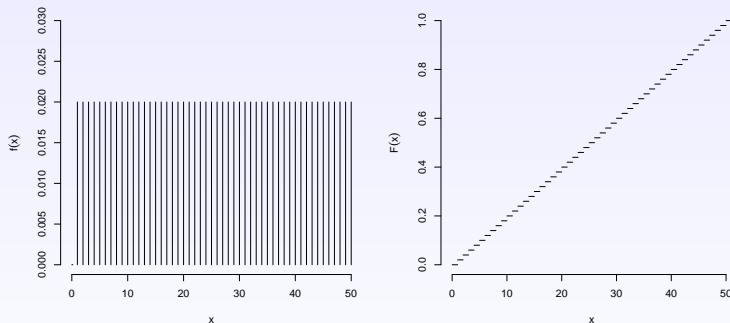


Figura: Distribución uniforme $n = 50$.

Distribución uniforme discreta

Media y Varianza:

$$E(X) = \sum_{x=1}^n x \frac{1}{n} = \frac{1+2+\cdots+n}{n} = \frac{n+1}{2},$$

y

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \sum_{x=1}^n x^2 \frac{1}{n} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \frac{2n^2+3n+1}{6} - \frac{n^2+2n+1}{4} \\ &= \frac{2(2n^2+3n+1) - 3(n^2+2n+1)}{12} = \frac{4n^2+6n+2-3n^2-6n-3}{12} \\ &= \frac{n^2-1}{12}. \end{aligned}$$

Distribución uniforme discreta

Función Generatriz de Momentos:

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x=1}^n e^{tx} \cdot f(x) = \sum_{x=1}^n e^{tx} \cdot \frac{1}{n} \\
 &= \frac{1}{n} \sum_{x=1}^n (e^t)^x = \frac{1}{n} \left[\frac{e^t - (e^t)^{n+1}}{1 - e^t} \right] = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^t(1 - e^{nt})}{1 - e^t}, \quad \forall t.
 \end{aligned}$$

Nota: $M_X(0) = 0$, aplicando la regla de L'Hopital.

Se puede consultar más información sobre la función característica en:
[en.wikipedia.org/wiki/Characteristic_function_\(probability_theory\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Characteristic_function_(probability_theory))

Distribución Bernoulli

Definamos un experimento en el cual hay únicamente dos posibles resultados: a uno de ellos le llamamos “éxito”, al otro “fracaso”. Este tipo de variables aparece frecuentemente en nuestros conteos, por ejemplo, si pensamos en clasificar nuestros productos como: defectuoso, no defectuoso; grande o pequeño; azul o blanco; sí o no, etc.

Generalmente le asignamos un valor de 1 al “éxito” y un valor de 0 al “fracaso”. Notemos que la asignación de los valores numéricos es arbitraria. Este procedimiento sirve de base para la construcción de otras distribuciones de gran utilidad.

Distribución Bernoulli

Definamos $X = \#$ de “éxitos”, entonces

$$x = \begin{cases} 1 & \text{si } X = \text{“éxito”}, \text{ esto con probabilidad } p \\ 0 & \text{si } X = \text{“fracaso”}, \text{ esto con probabilidad } (1 - p) = q \end{cases}$$

o bien,

$$f(x) = p^x(1 - p)^{1-x}, \quad \text{para } x = 0, 1; \quad (\text{Distribución Bernoulli}).$$

Notación: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$. El único parámetro de la distribución de esta variable aleatoria es p , la probabilidad de éxito.

Distribución Bernoulli

Por ejemplo:

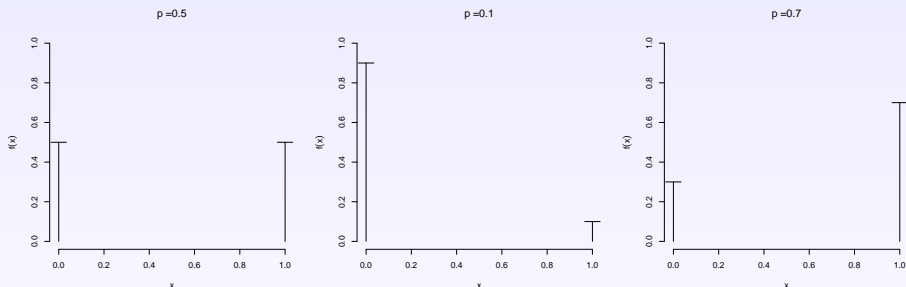


Figura: Función de densidad para $X \sim \text{Bernoulli}(p)$.

El experimento que guió al modelo, dos posibles resultados con probabilidades p y q ($p + q = 1$), se denomina **experimento Bernoulli**.

Distribución Bernoulli

Media y Varianza:

$$E(X) = \sum_{x=0}^1 x \cdot f(x) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^1 x^2 \cdot f(x) = 0^2 \cdot (1 - p) + 1^2 \cdot p = p$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = p - p^2 = p(1 - p) = pq$$

Función Generatriz de Momentos:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^1 e^{tx} \cdot f(x) = e^{t \cdot 0}(1 - p) + e^{t \cdot 1}p \\ &= (1 - p) + pe^t = q + pe^t, \quad \forall t. \end{aligned}$$

Distribución Binomial e Hipergeométrica

Para las siguientes distribuciones definiremos nuestra variable aleatoria de la siguiente manera:

$X = \#$ de “éxitos” en n observaciones.

X es el número de unos o “éxitos” que se presenten en la muestra de tamaño n . Lo que asigna un patrón distinto de comportamiento, es la **forma como se realizan (condiciones) las n observaciones.**

Distribución Binomial

Supongamos que podemos hacer:

- 1 n observaciones independientes.
- 2 la probabilidad de éxito en cada observación permanece constante, esto es, siempre es p .

En otras palabras, estamos asumiendo que nuestra población es suficientemente grande como para tomarla como “infinita” y que podemos garantizar la independencia entre observaciones, esto es, no obtenemos información adicional para predecir el siguiente resultado sólo porque ya observamos al (los) anterior (es). Esto refleja un comportamiento de procesos que lo podríamos denominar estable. Estas condiciones deben estar presentes al menos durante el período en que se realiza el estudio.

Distribución Binomial

Por ejemplo, pensemos en un proceso industrial, producción de mangueras para gas. Las clasificaremos como defectuosas (éxito) o no defectuosas, de acuerdo a si cumplen o no con el tamaño requerido. Se toma una muestra de tamaño tres y se hacen las mediciones de cada una de las mangueras.

- Asumimos que nuestra población son todas las mangueras que pasan por ese proceso ($\#$ muy grande),
- Se asume que no hay ninguna causa que motive desperfectos sistemáticos,
- También notemos que, bajo estas condiciones, la probabilidad de que una manguera no sea de las medidas requeridas deberá permanecer constante para las 3 observaciones y, más aún, esta probabilidad está dada por otro mecanismo independiente al conteo que nos atañe en este momento.

Distribución Binomial

Por ejemplo, p se podría determinar como una **proporción** observada a través del tiempo, o bien porque conozcamos la **ley** de fallas en cortes, de la maquinaria que se emplea. Para nuestros propósitos, p es un valor dado.

Notemos primero que el número posible de valores que puede tomar X es $\{1, 2, \dots, n\}$. Ahora obtengamos la ley de comportamiento asociada con esta variable:

$$\begin{aligned} P(X = 0) &= P(\text{ninguna manguera defectuosa en la muestra de } n = 3) \\ &= P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) \end{aligned}$$

donde X_i denota la i -ésima observación. Cabe notar que cada X_i toma el valor de 0 ó 1 con probabilidades constantes q y p , respectivamente. Esto es, cada X_i **representa una variable Bernoulli(p) y son independientes entre sí.**

Distribución Binomial

Entonces:

$$\begin{aligned} P(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 0) &= P(X_1 = 0)P(X_2 = 0)P(X_3 = 0) \\ &= qqq = q^3 = \binom{3}{0} q^3 \end{aligned}$$

A manera de ejercicio, puedes verificar que:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(\{X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0\} \cup \{X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0\} \cup \{X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1\}) \\ &= 3pq^2 = 3pq^2 = \binom{3}{1} pq^2, \quad \mathbf{1 \text{ "éxito"}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 0\} \cup \{X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1\} \cup \{X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 1\}) \\ &= 3p^2q = 3p^2q = \binom{3}{2} p^2q, \quad \mathbf{2 \text{ "éxitos"}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= P(\{X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1\}) \\ &= ppp = p^3 = \binom{3}{3} p^3, \quad \mathbf{3 \text{ "éxitos"}}. \end{aligned}$$

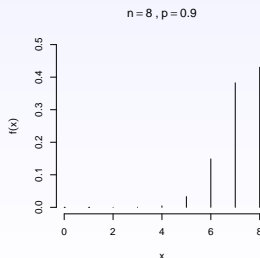
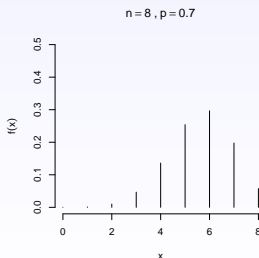
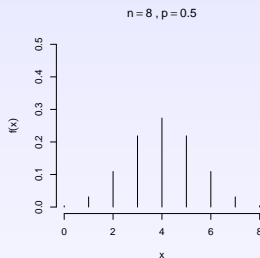
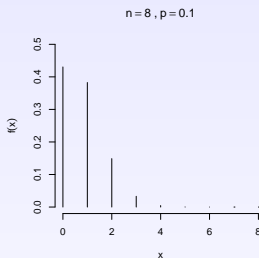
Distribución Binomial

Esto es, tenemos la **Distribución Binomial**

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{para } x = 0, 1, \dots, n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

En este caso se dice que X sigue una **distribución binomial con parámetros (n, p)** . Notación: $X \sim B(n, p)$.

Distribución Binomial



Distribución Binomial

Se puede verificar que la suma, sobre todos los valores de X , de $f(x)$ es uno haciendo uso del **Teorema del Binomio de Newton**:

$$(a + b)^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} a^{n-x} b^x,$$

en dónde si se reemplaza a por q y b por p se obtiene

$$(q + p)^n = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} q^{n-x} p^x = \sum_{x=0}^n f(x),$$

y como $q + p = (1 - p) + p = 1$, se concluye que

$$\sum_{x=0}^n f(x) = (1)^n = 1.$$

Distribución Binomial

Su **Función Generatriz de Momentos** es:

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E\left(e^{tX}\right) = \sum_{x=0}^n e^{tx} \cdot f(x) = \sum_{x=0}^n e^{tx} \cdot \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \\
 &= \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (e^t)^x p^x (1-p)^{n-x} = \sum_{x=0}^n \binom{n}{x} (e^t p)^x (1-p)^{n-x}.
 \end{aligned}$$

De acuerdo al binomio de Newton con $a = q$, $b = e^t p$:

$$M_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = (q + pe^t)^n.$$

Distribución Binomial

Media y Varianza

Utilizaremos la generatriz de momentos. Sabemos que $E(X) = M'_X(0)$ y $E(X^2) = M''_X(0)$, entonces

$$M'_X(t) = n(q + pe^t)^{n-1}(pe^t),$$

$$M'_X(0) = n(q + pe^0)^{n-1}(pe^0).$$

Puesto que $e^0 = 1$ y $p + q = 1$, tenemos:

$$M'_X(0) = n(1)^{n-1}p = np,$$

y, por lo tanto,

$$E(X) = np.$$

Distribución Binomial

Ahora,

$$M_X''(t) = n(q + pe^t)^{n-1}pe^t + pe^t [n(n-1)(q + pe^t)^{n-2}pe^t],$$
$$E(X^2) = M_X''(0) = np + n(n-1)p^2.$$

entonces

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = np + n(n-1)p^2 - (np)^2 \\&= np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p) \\&= npq.\end{aligned}$$

Distribución Binomial

La variable aleatoria Binomial como una suma de variables aleatorias Bernoulli

Hemos mencionado que cada X_i es una v.a. Bernoulli y que estas son independientes. Considera la variable aleatoria Y definida como la suma de n variables aleatorias Bernoulli(p), esto es, como la suma de ceros y unos producidos por los posibles resultados de las variables Bernoulli

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i, \quad \text{con } X_i \sim \text{Bernoulli}(p) \text{ e independientes entre sí.}$$

Podemos imaginarnos lo anterior como realizando n repeticiones de un experimento Bernoulli en el que cada resultado será independiente de los otros, un **muestreo aleatorio**.

Distribución Binomial

Recordando las propiedades del valor esperado y el valor que toma la esperanza de una v.a. *Bernoulli*(p) , tenemos que el valor esperado de Y es

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = \sum_{i=1}^n p = np$$

y su varianza

$$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right).$$

Veremos posteriormente que la varianza de una suma de variables aleatorias **independientes** es la suma de las varianzas de cada v.a. individual (multiplicada por el cuadrado de su coeficiente respectivo), entonces

$$V(Y) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = \sum_{i=1}^n pq = npq.$$

Distribución Binomial

Vemos que estos resultados coinciden con los de la v.a. Binomial(n, p) pero **no** es suficiente para afirmar que $Y \sim \text{Binomial}(n, p)$. Si su generatriz es la misma que la de una v.a. binomial podremos afirmar que Y es binomial:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E\left(e^{t\sum_{i=1}^n X_i}\right) = E\left(e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)}\right) \\ &= E\left(e^{tX_1} e^{tX_2} \dots e^{tX_n}\right), \end{aligned}$$

de nuevo, como las variables aleatorias X_i son independientes, el último término se puede escribir como

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E\left(e^{tX_1}\right) E\left(e^{tX_2}\right) \dots E\left(e^{tX_n}\right) \\ &= (q + pe^t)(q + pe^t) \dots (q + pe^t) = (q + pe^t)^n, \end{aligned}$$

que es idéntica a la generatriz de momentos de una binomial.

Distribución Binomial

Por lo tanto nuestra v.a. Y , producto de un muestreo determinado, es una v.a. $\text{Binomial}(n, p)$.

¿Qué se obtiene si en la sumatoria que define Y usamos $n = 1$?

Es muy importante recalcar el hecho de que cada posible resultado del experimento es una v.a. con las mismas propiedades: misma distribución, mismo parámetro, y que el resultado de cada una de ellas será independiente del resultado de las otras.

Estas condiciones se resumen diciendo que se realizó un **Muestreo Aleatorio**.

Distribución Hipergeométrica

Si cambiamos la forma en que se realiza el muestreo y mantenemos como nuestra v.a. a

$X = \#$ de “éxitos” en n observaciones,

nuestro modelo tiene que ser adaptado a las nuevas condiciones.

Supongamos que podemos hacer:

- n observaciones de un conjunto total de N posibles,
- la probabilidad de éxito en cada observación cambia “paso a paso”.

Ahora estamos asumiendo que nuestra población es finita (N) y no hay independencia entre observaciones, esto es, el resultado de cada observación será afectado por los resultados anteriores.

Distribución Hipergeométrica

Como **ejemplo**, considera un lote de 25 “botes” de leche comercial de 1 litro, cada uno susceptible de ser clasificado como en mal estado (éxito = agria) o en buen estado. Se toma una muestra de tamaño n , se considera la posibilidad de que se tengan k botes con leche agria y se hace la revisión de cada uno de los botes. Aquí $X = \#$ de botes con leche en mal estado.

- Nuestra población inicial son los 25 “botes”,
- La probabilidad de que un bote seleccionado contenga leche en mal estado cambiará conforme vamos haciendo el muestreo debido a que en el lote habrá inicialmente una cierta proporción de botes en mal estado ($\text{botes de leche en mal estado} / N \text{ total de botes en el lote}$) y al ir sacando los botes esta proporción se verá afectada por los resultados obtenidos con anterioridad. Esto es, se realiza un muestreo sin reemplazo.

Distribución Hipergeométrica

Este tipo de experimento es muy usado cuando en la revisión se tiene que destruir o alterar el objeto, en nuestro caso hay que abrir el bote de leche para revisarlo.

Considera lo siguiente: si $k = 4$, la proporción inicial es de $\frac{4}{25}$, pero si sacamos un bote la proporción cambia a $\frac{3}{24}$ ó $\frac{4}{24}$, dependiendo de si el que se sacó contenía leche en mal estado o no, respectivamente.

Distribución Hipergeométrica

Para poder establecer el conjunto de posibles valores de X , necesitamos conocer, en principio, la proporción exacta de botes en mal estado, esto es, cuántos botes hay en mal estado en el lote de 25, y cuántas observaciones se hacen (n):

- Si hay $k = 3$ botes con leche agria y se toman $n = 5$ botes para revisarlos, X podrá tomar los valores $\{0, 1, 2, 3\}$, i.e. $0 \leq x \leq k$; pero si se revisan $n = 2$, X podrá tomar los valores $\{0, 1, 2\}$, i.e. $0 \leq x \leq n$.
- Algo similar ocurriría si el lote fuera de $N = 10$ botes, si hubiesen $k = 4$ botes con leche agria y si se revisaran $n = 7$: puesto que se están revisando 7 y sólo hay 6 en buen estado, X podría ser $\{1, 2, 3, 4\}$, i.e. $n - (N - k) \leq x \leq k$. ¿Qué valores toma X si $k = 5$ y $n = 7$?

Observa que x **llega hasta el menor de los números n y k , y que el menor valor de x es 0 ó $n - (N - k)$** . Estos casos muestran que los valores de la v.a. dependerán de los valores de k , n y N .

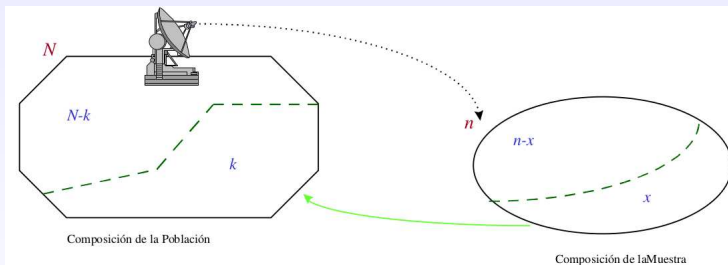
Distribución Hipergeométrica

Las condiciones de muestreo mencionadas suelen aplicarse en la práctica en problema de muestreo de **aceptación en control de calidad**, así como en la **estimación del tamaño de una población finita N en procesos de captura-recaptura**. (Ver [4] ejemplo 3.2.10 pág. 86, ejemplo 3.2.9 págs. 84-85. También te recomendamos (deberías leer) el capítulo 4, pág. 42 de [5], para muestreo de aceptación.)

No es de sorprender este tipo de aplicaciones ya que, como dijimos, al tomar n observaciones en las cuales habrá x “éxitos”, conoceremos la proporción $\frac{x}{n}$, la cual nos dará información de la verdadera proporción $\frac{k}{n}$.

Distribución Hipergeométrica

Esquemáticamente podemos imaginarnos los parámetros de la distribución hipergeométrica como en la siguiente figura



Población con N objetos		Muestra de n objetos tomados al azar
k elementos con cierta característica de interés	← Inferencia	x elementos con la característica de interés
$N - k$ sin la característica	← Inferencia	$n - x$ sin la característica de interés

Distribución Hipergeométrica

La ley de comportamiento asociada con nuestra v.a. se obtiene utilizando el enfoque de **frecuencia relativa** en el que contamos el número de casos favorables y dividimos entre el número de casos totales:

- Nos interesan x “éxitos” de un total de k posibles, y esto lo podemos hacer de $\binom{k}{x}$ formas; pero por cada uno de estos resultados, como se seleccionaron n , obtendríamos $n - x$ “fracasos” de un total de $N - k$ “fracasos” posibles, y esto lo podemos hacer de $\binom{N-k}{n-x}$ formas. Entonces, usando la regla multiplicativa, el número total de **casos favorables** es $\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}$.
- Al seleccionar n objetos de un total de N , podemos hacerlo de $\binom{N}{n}$ formas.

Distribución Hipergeométrica

Por lo tanto, la probabilidad de observar x “éxitos” en n pruebas está dada por la función de probabilidad ([Distribución Hipergeométrica](#)):

$$f(x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad \max\{0, n - (N - k)\} \leq x \leq \min\{n, k\}.$$

Sus parámetros son n , k y N . Notación $X \sim \text{Hiper}(N, k, n)$.

Distribución Hipergeométrica

En las siguientes gráficas se muestra la funciones de masa y de distribución acumulada de la distribución hipergeométrica para varios valores de los parámetros.

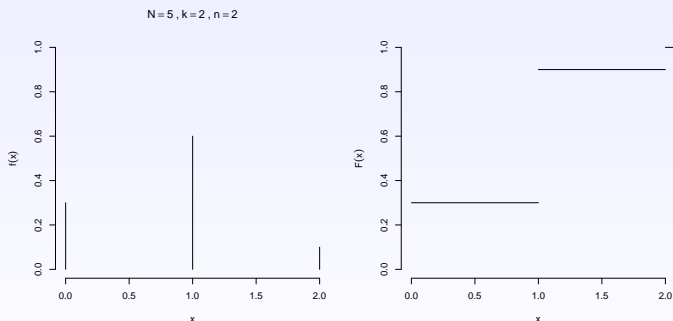


Figura: Funciones de masa y de distribución acumulada para $X \sim \text{Hiper}(5, 2, 2)$.

Distribución Hipergeométrica

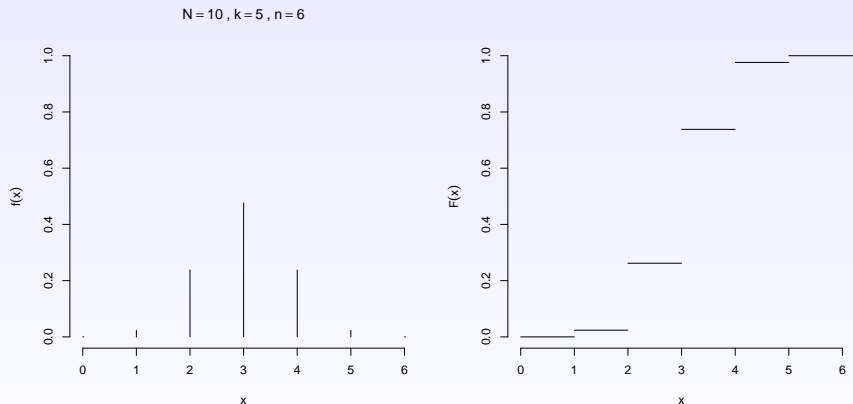


Figura: Funciones de masa y de distribución acumulada para $X \sim \text{Hiper}(10, 5, 6)$.

Distribución Hipergeométrica

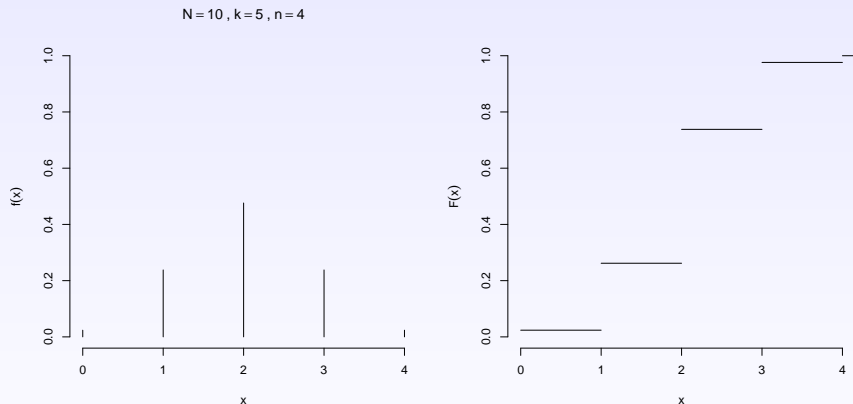


Figura: Funciones de masa y de distribución acumulada para $X \sim \text{Hiper}(10, 5, 4)$.

Distribución Hipergeométrica

Media y Varianza

La media y la varianza de una v.a. hipergeométrica están dados por:

$$E(X) = \frac{nk}{N}, \quad V(X) = \frac{nk}{N} \left(1 - \frac{k}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right).$$

Debido a la especial complejidad y a su poco uso práctico, no se muestra la función generatriz de momentos de la hipergeométrica. (Ver referencias adicionales en Clase 4).

Distribución Hipergeométrica

Aproximación de la distribución binomial a la distribución hipergeométrica

Existe una relación entre la distribución binomial y la hipergeométrica: bajo ciertas condiciones, una puede aproximar los valores de probabilidad de la otra.

Observa que, a partir del enfoque de probabilidad como frecuencia relativa, la razón $\frac{k}{N}$ representa la proporción de **éxitos** p , mientras que $1 - \frac{k}{N}$ la proporción de **fracasos** q , de lo cual las anteriores fórmulas pueden ser escritas como

$$E(X) = np, \quad V(X) = npq \left(\frac{N-n}{N-1} \right).$$

Distribución Hipergeométrica

Se puede apreciar una cierta similitud con la media y la varianza de la distribución binomial. Si N fuese muy grande, y el tamaño n de la muestra pequeño, tendríamos que

- el factor $\frac{N-n}{N-1}$ tendería a 1;
- p equivaldría a la probabilidad de “éxito” como en la distribución binomial, pudiéndose considerar como “**cuasi-fija**”, ya que no cambiaría mucho al ir realizando las observaciones;
- q equivaldría a la probabilidad de “fracaso”, con las mismas consideraciones que para p ; e,
- igualmente, podríamos considerar una “**cuasi-independencia**”, suponiendo que no tendríamos “rachas sistemáticas de resultados”, esto es, el resultado de una observación no nos daría información del resultado de la siguiente observación.

Distribución Hipergeométrica

Con las condiciones anteriores nuestro modelo sería aproximadamente binomial, y podemos usar esta distribución como una aproximación al modelo hipergeométrico.

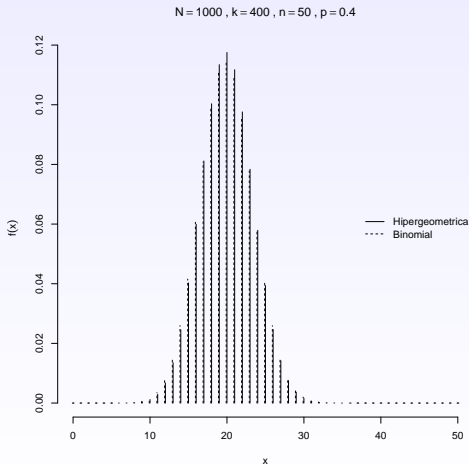
Es posible demostrar formalmente que si $p = k/N$ se mantiene constante entonces

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}} = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

La pregunta es: ¿qué tan grande deberá ser N comparada con n ? Se ha encontrado de la experiencia que cuando la proporción $\frac{n}{N}$ es del orden del 10 %, se tiene una buena aproximación, mejorando cuando $\frac{n}{N}$ disminuye.

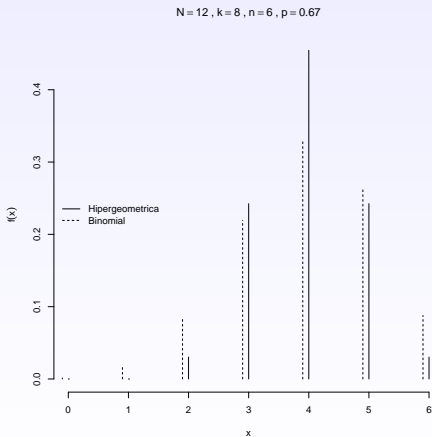
Distribución Hipergeométrica

Por ejemplo, tenemos que la aproximación binomial para $\text{Hiper}(1000, 400, 50)$ es excelente.



Distribución Hipergeométrica

En este segundo ejemplo la relación entre N y n es del 50 %, por lo que no se espera una buena aproximación entre las probabilidades asociadas bajo cada distribución.



Distribución Hipergeométrica

El factor $\frac{N-n}{N-1}$, cantidad que nos recuerda la finitud de N , es llamado el **factor de corrección para población finita**. ¿Cuál es $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N-n}{N-1}$, con n fija?

Nota: Entre los materiales del curso se encuentra un texto sobre métodos de captura y recaptura asociados a la distribución hipergeométrica y sobre como calcular los momentos de tal distribución. Es importante leerlos.

Distribución Geométrica y Binomial Negativa

En la mayoría de los procesos industriales existen procedimientos de “monitoreo” a través de gráficos de control. Para ello pueden emplearse diversos criterios, por ejemplo

- detener la producción (o ajustar el proceso) **hasta el momento en que se detecta el primer artículo defectuoso** (al obtener una “falsa alarma”),
- o bien, **hasta que se detectan un cierto número r con ($r > 1$)**, de artículos defectuosos.

Analizaremos el modelo correspondiente a un “éxito”, y posteriormente lo generalizaremos a r “éxitos”, para cualquier valor de r .

Distribución Geométrica

Aunque usamos el ejemplo de la línea de producción para introducir las v.a.'s de esta sección, también las definiremos en términos de la cantidad de experimentos Bernoulli realizados hasta obtener un determinado número de "éxitos".

Uno de los criterios arriba mencionados para mantener bajo control las líneas de producción es detener el proceso (o ajustarlo) hasta obtener un artículo defectuoso. Este criterio puede parecer un tanto estricto, pero si se sabe que el obtener un artículo defectuoso es un evento muy raro, esto es, hay una probabilidad pequeña de que ocurra; o bien, que la obtención de un artículo defectuoso es una situación en extremo crítica o costosa; es factible poner en marcha dicha política.

Distribución Geométrica

La variable aleatoria de interés en este caso es

$X = \#$ de observaciones **hasta obtener un éxito.**

Observa que **en ningún momento se está fijando el número de observaciones**, como en la binomial y la hipergeométrica, sino que más bien **el número de observaciones es la variable aleatoria de interés y lo que es fijo en este caso es el número de éxitos.**

La v.a. geométrica se define como el número de observaciones de variables aleatorias Bernoulli(p) independientes hasta obtener un éxito.

Distribución Geométrica

Nuestros supuestos son:

- 1 Cada vez que se realice una observación la probabilidad de que ocurra un “éxito” es fija e igual a p .
- 2 Las observaciones son independientes.
- 3 El número de observaciones puede continuar indefinidamente antes de encontrar el primer defectuoso.

Distribución Geométrica

El supuesto 1 equivale a decir que estamos pensando en hacer observaciones sobre el **mismo proceso** y, por lo tanto, todos sus elementos deben tener en principio las **mismas características**.

Por ejemplo, en la línea de producción, el proceso “**no sabe**” o “**no se acuerda**” de lo que ha pasado antes de la observación que se esté realizando, ya que los productos defectuosos ocurren por mero azar (una variación inherente e inevitable), no por alguna falla sistemática. Cuando uno detecta un artículo defectuoso, sabiendo que el modelo asigna una cierta probabilidad a ese evento, se toma una decisión respecto al proceso. Ver [15].

El supuesto 2 equivale a decir que el que una observación resulte o no en “éxito”, **no** da información sobre el resultado de la siguiente observación.

Distribución Geométrica

Bajo las condiciones y supuestos anteriores podemos deducir inmediatamente el mecanismo para asignar probabilidades, donde llamamos p a la probabilidad de “éxito” y por ende $(1 - p = q)$:

$$f(x) = q^{x-1}p, \quad x = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Distribución Geométrica})$$

Notación: $X \sim \text{Geom}(p)$. El único parámetro es p , la probabilidad de éxito.

A continuación se presentan algunas gráficas de funciones de distribución acumulada y de densidad para $\text{Geom}(p)$ y distintos valores de p .

Distribución Geométrica

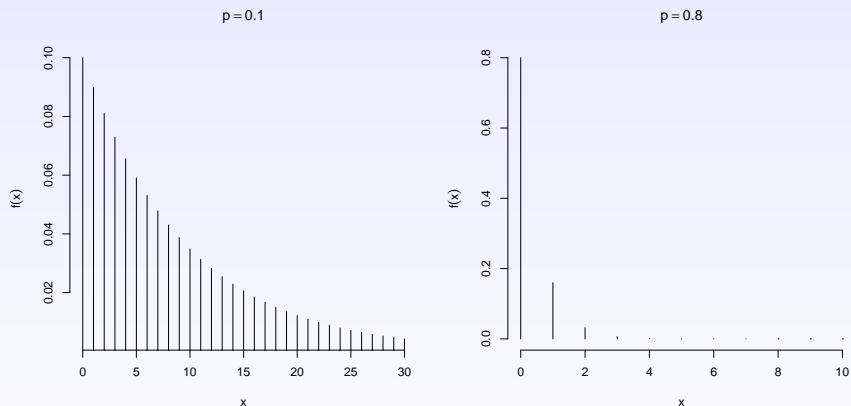


Figura: Funciones de masa para $\text{Geom}(0.1)$ y $\text{Geom}(0.8)$.

Distribución Geométrica

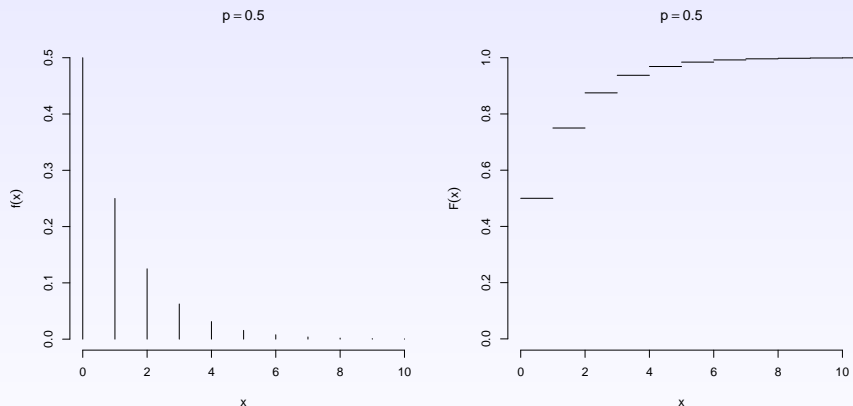


Figura: Funciones de masa y de distribución acumulada para $\text{Geom}(0.5)$.

Distribución Geométrica

Esta distribución regularmente se utiliza en la modelación de:

- 1 Fenómenos con **eventos raros**, i.e. aquéllos en los que p es **pequeña**.
- 2 **tiempos de espera** discretos.

Ejemplo del uso 1: cuando se quiere detectar una enfermedad rara, en lugar de muestrear mediante una campaña masiva toda la población, se puede ir muestreando aleatoriamente de uno en uno, y si conforme se realiza el muestreo no se detecta a nadie enfermo, se puede pensar que no hay problema; pero si se encuentra a alguien con la enfermedad, es motivo para hacer un muestreo más exhaustivo. Algo equivalente se considera en los errores de *transmisión en comunicaciones*, o cualquier sistema considerado como muy *confiable*.

Distribución Geométrica

Ejemplo del uso 2: cuando se tiene que inspeccionar un sistema para ver si está en buenas condiciones para seguir operando, las inspecciones se realizan programadamente cada cierto intervalo de tiempo fijo, y aún cuando una falla haya ocurrido en el lapso entre inspecciones se considera, que esta ocurre al momento de realizar la inspección (“**tiempo discreto**”). Entonces, la v.a. sería *el número de intervalos de tiempo que se tuvo que esperar hasta encontrar un “éxito”*. Nuevamente se espera que el defecto ocurra por la aleatoriedad inherente y no por desgaste.

Distribución Geométrica

Se ha dicho que el proceso “no sabe” o “no se acuerda” de lo que ha pasado antes de la observación que se esté realizando. Cuando un proceso tiene esta característica, se dice que “NO TIENE MEMORIA”. Lo mismo se aplica para la v.a. que describe al proceso.

Matemáticamente: si $X \sim \text{Geom}(p)$, calculemos la probabilidad de que un “éxito” ocurra para una X mayor que un cierto número de pruebas, denotado como la suma de dos números $a + b$, dado que se sabe que el éxito ocurre después de las a pruebas (a y b son enteros positivos). Si el resultado es independiente de que el éxito ocurra después de las primeras a pruebas significará que al proceso “no le importa” lo que haya ocurrido antes del valor que se esté observando.

Distribución Geométrica

En símbolos,

$$\begin{aligned}
 P(X > a + b | X > a) &= \frac{P(X > a + b, X > a)}{P(X > a)} \quad \text{pues } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
 &= \frac{P(X > a + b)}{P(X > a)} \quad \text{ya que } X > a + b \text{ es la intersección entre los dos intervalos del numerador} \\
 &= \frac{1 - P(X \leq a + b)}{1 - P(X \leq a)} \\
 &= \frac{1 - F(a + b)}{1 - F(a)}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, la función de distribución de una v.a. $\text{Geom}(p)$ es

$$F(x) = \sum_{n=1}^x q^{n-1} p = p \sum_{m=0}^{x-1} q^m = p \left(\frac{1 - q^x}{1 - q} \right) = 1 - q^x.$$

Distribución Geométrica

De lo anterior,

$$P(X > a+b | X > a) = \frac{1 - F(a+b)}{1 - F(a)} = \frac{q^{a+b}}{q^a} = q^b = 1 - F(b) = P(X > b);$$

esto es, X “**no tiene memoria**”.

Como ejemplos numéricos

$$P(X > 1 + 2 | X > 1) = P(X > 2),$$

$$P(X > 1 + 2 | X > 2) = P(X > 1),$$

$$P(X > 1 + 1 | X > 1) = P(X > 1).$$

Distribución Geométrica

Bosquejo: Otra forma de visualizar esto es pensando que se “recorre el valor más bajo posible de X ”.

En el primer ejemplo numérico es como si desechará el 1 como origen y pusiera mi origen en 2 (que ahora sería 1). *Esto equivale a decir que si están haciendo inspecciones cada hora para verificar la vida útil de algún componente, el hecho de saber que no ha fallado en la observación 100, por ejemplo, (esto es, después de 100 horas de uso) no nos dice nada para responder a la pregunta: ¿cuál será la probabilidad de que falle en las siguientes 20 horas? La probabilidad de que falle es la misma que cuando el componente es nuevo y te haces la misma pregunta: ¿cuál será la probabilidad de que falle en las siguientes 20 horas?*

Esto sólo tiene sentido si se está trabajando con un proceso que se encuentra en estado de estabilidad.

Distribución Geométrica

Media y Varianza

Ya que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2} \quad |z| < 1,$$

el valor esperado de $X \sim \text{Geom}(p)$ es

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{x=1}^{+\infty} x \cdot f(x) = \sum_{x=1}^{+\infty} x \underbrace{(1-p)^{x-1}}_q p = p \sum_{x=1}^{+\infty} x q^{x-1} \\ &= p \left(\frac{1}{(1-q)^2} \right) = p \left(\frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

Distribución Geométrica

Para el cálculo de la varianza, nos queda

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2, \\ E(X^2) &= E(X^2 - X + X) = E(X^2 - X) + E(X) \\ &= E(X(X - 1)) + E(X), \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} E(X(X - 1)) &= \sum_{x=1}^{+\infty} x(x - 1) \cdot f(x) = \sum_{x=1}^{+\infty} x(x - 1)q^{x-1}p \\ &= p \sum_{x=1}^{+\infty} x(x - 1)q^{x-1} = pq \sum_{x=1}^{+\infty} x(x - 1)q^{x-2} \\ &= pq \left(\frac{2}{(1 - q)^3} \right) = pq \left(\frac{2}{p^3} \right) = \frac{2(1 - 2p)}{p^2}. \end{aligned}$$

Distribución Geométrica

La cantidad $E(X(X - 1))$ recibe el nombre de **Segundo Momento Factorial**, de aquí tenemos que

$$E(X^2) = E(X(X - 1)) + E(X) = \frac{2(1 - p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2 - 2p + p}{p^2} = \frac{2 - p}{p^2},$$

y entonces

$$V(X) = \frac{2 - p}{p^2} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{2 - p - 1}{p^2} = \frac{1 - p}{p^2}.$$

Distribución Geométrica

Función Generatriz de Momentos:

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E(e^{tX}) = \sum_{x=1}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x) = \sum_{x=1}^{+\infty} e^{tx} \cdot q^{x-1} p = p \sum_{x=1}^{+\infty} (e^t)^x \cdot q^{x-1} \\
 &= pe^t \sum_{x=1}^{+\infty} (e^t)^{x-1} \cdot q^{x-1} = pe^t \sum_{x=1}^{+\infty} (e^t q)^{x-1} \underset{(j=x-1)}{=} pe^t \sum_{j=0}^{+\infty} (e^t q)^j,
 \end{aligned}$$

usando la identidad $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, para $|z| < 1$, nos queda

$$M_X(t) = pe^t \left(\frac{1}{1 - qe^t} \right) = \frac{pe^t}{1 - qe^t} \quad \text{si } |qe^t| < 1.$$

Distribución Geométrica

Ejemplo: Una tienda ofrece un premio a las personas que logren juntar las cinco letras de la palabra “valor”; para ello, se les regala una letra al azar de entre las cinco en cada compra que realicen. Lo que interesa aquí es la **cantidad de viajes necesarios (compras)** para juntar las cinco letras distintas.

Se podría pensar que la v.a. de interés, $X = \#$ de viajes necesarios hasta juntar las cinco letras de la palabra “valor”, es geométrica ya que:

- cada resultado es **independiente** del anterior,
- el número posible de viajes, realizados entre cada consecución de letras distintas, se puede considerar como **“infinito”**.

Distribución Geométrica

Sin embargo, la probabilidad de un “éxito” cada vez que compre **irá cambiando**: la primera vez la probabilidad de juntar una letra es 1; la segunda vez que compre ya tendrá en su poder una letra, con lo que la probabilidad de “éxito” cambiaría de 1 a la probabilidad de que reciba una letra distinta de la que se le dio inicialmente y esta sería $4/5$ (4 favorables de 5 posibles); y así seguiría hasta obtener otro “éxito” (letra distinta), con lo que p cambiaría a $3/5$, etc.

Entonces, se puede pensar que en cada viaje la probabilidad es mantenida fija hasta que haya “éxito”, y juntando esto con los dos supuestos anteriores, se tendrían v.a.’s geométricas (exceptuando la primera), con p 's distintas, cada vez que se lograra un “éxito”. Se puede visualizar lo anterior usando una recta numérica:



Distribución Geométrica

Así, nuestra v.a. de interés podría considerarse como la **suma de todos los viajes a la tienda**, esto es, la suma de cada una de las v.a.'s geométricas definidas:

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5,$$

donde $X_i \sim \text{Geom}(p_i)$ $i = 2, 3, 4, 5$, con $p_2 = 4/5$, $p_3 = 3/5$, $p_4 = 2/5$, $p_5 = 1/5$. Entonces, podemos encontrar el **número esperado de viajes** calculando

$$\begin{aligned} E(X) &= E\left(\sum_{i=1}^5 X_i\right) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) + E(X_5) \\ &= 1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} + \frac{1}{p_5} = 1 + \frac{1}{4/5} + \frac{1}{3/5} + \frac{1}{2/5} + \frac{1}{1/5} \\ &= 11.42 \text{ viajes,} \end{aligned}$$

esto es, entre 11 ó 12 viajes.

Distribución Geométrica

Ejemplo: Para el Sorteo Tec, si cada vez se expenden 150,000 boletos y 4 automóviles como premio, ¿en cuántos sorteos en promedio hay que participar hasta sacarse un automóvil? ¿Cuánto hay que invertir en promedio si cada boleto cuesta 1,050 pesos?

Como p es fija, hay independencia y “podemos” comprar boletos por siempre, entonces con $X = \#$ de participaciones hasta sacarse un automóvil, $E(X) = \frac{150,000}{4} = 37,500$. Además, habría que invertir $1,050 \times 37,500 = 39,375,000$ pesos.

Con dos rifas por año, uno esperaría ganarse un auto en unos ¡18,750 años! Cuántos años tendrías que participar en promedio si quieres ganarte la casa del primer premio?

Distribución Binomial Negativa

Considera nuevamente el ejemplo del premio al juntar las letras de la palabra “valor”, pero suponte que las probabilidades de éxito p_i se mantienen **constantes** (por ejemplo pensando que el premio se da a la persona que junte 5 letras “V”, con lo que p_i siempre sería $1/5$). Como antes, la variable aleatoria $X = \text{\# de viajes necesarios hasta obtener 5 “éxitos”}$, entonces

$$X = \sum_{i=1}^5 X_i, \text{ donde } X_i \sim \text{Geom}(p) \text{ son independientes y } p \text{ constante.}$$

Esto es equivalente al segundo criterio mencionado para la detención o ajuste de un proceso (ver diapositiva 56): hasta obtener r (por ejemplo 3) artículos defectuosos (debido tal vez a lo costoso de parar la línea al obtener el primer defectuoso), en donde

Distribución Binomial Negativa

- cada **éxito** tiene la **misma** probabilidad p , ya que se trata del mismo proceso y se asume que éste es estable (no hay fallas sistemáticas),
- cada X_i es **independiente**;

en este caso la variable aleatoria de interés es

$X = \#$ de observaciones **hasta** encontrar r “éxitos”,

la cual se puede redefinir como

$$X = \sum_{i=1}^r X_i, \text{ donde cada } X_i \sim \text{Geom}(p) \text{ es independiente y } p \text{ constante.}$$

La v.a. X definida como la suma anterior se dice que sigue una distribución **Binomial Negativa**: $X \sim \text{BN}(r, p)$. Aquí, inclusive $X_1 \sim \text{Geom}(p)$.

Distribución Binomial Negativa

A continuación se muestra un dibujo similar al hecho para la distribución geométrica (ver diapositiva 76), aquí obs = observaciones y Geo=Geom:



Media y Varianza

El valor esperado de la v.a. $X \sim \text{BN}(r, p)$ es

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^r X_i\right) = \sum_{i=1}^r E(X_i) = \sum_{i=1}^r \frac{1}{p} = \frac{r}{p};$$

para la varianza usamos el hecho de que las X_i 's son **independientes**

$$V(X) = V\left(\sum_{i=1}^r X_i\right) = \sum_{i=1}^r V(X_i) = \sum_{i=1}^r \frac{1-p}{p^2} = r \left(\frac{1-p}{p^2}\right).$$

Distribución Binomial Negativa

Función Generatriz de Momentos

Usando la estructura de suma se tiene que la función generatriz de momentos de una distribución $BN(r,p)$ está dada por

$$\begin{aligned}M_X(t) &= E(e^{tX}) = E\left(e^{t\sum_{i=1}^r X_i}\right) = E\left(e^{tX_1+tX_2+\dots+tX_r}\right) \\&= E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_r}) \\&= \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right) \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right) \dots \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right) = \left(\frac{pe^t}{1-qe^t}\right)^r,\end{aligned}$$

para $|qe^t| < 1$.

Distribución Binomial Negativa

Recalquemos los supuestos:

- Cada vez que se realice una observación la probabilidad de que ocurra un éxito es fija e igual al valor p :

Nuevamente, el proceso “no sabe” o “no se acuerda” de lo que ha pasado antes de la observación que se esté realizando. Cuando uno detecte artículos defectuosos, sabiendo la probabilidad que el modelo asigna a ese caso, se toma una decisión respecto al proceso. Ver[15].

- Las observaciones son independientes.

Como antes, el que una observación haya sido o no “éxito”, no da información sobre el resultado de la siguiente observación.

- El primer posible valor de la variable aleatoria es r .

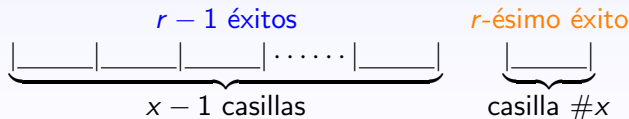
Puesto que la condición es encontrar r defectuosos, se tienen que realizar mínimo r pruebas.

- El número de observaciones puede continuar indefinidamente antes de encontrar el r -ésimo defectuoso.

Distribución Binomial Negativa

Una forma de obtener explícitamente a la función de probabilidad de la v.a. Binomial Negativa se da a continuación.

El evento de que el r -ésimo “éxito” ocurra en $X = x$ equivale a pensar que en las $x - 1$ observaciones anteriores hay $r - 1$ “éxitos”, los cuales pudieron ocurrir en cualquiera de las anteriores $x - 1$ observaciones. Si agrupamos en casillas las observaciones, lo anterior puede visualizarse de la siguiente manera



Distribución Binomial Negativa

Debido a la **independencia** sólo se tienen que multiplicar las probabilidades de cada casilla para obtener la probabilidad de r “éxitos” en x pruebas:

- En la última prueba hay “éxito” con probabilidad p .
- Los $r - 1$ “éxitos” anteriores pueden ocurrir en cualquier orden. El número de maneras en que $r - 1$ “éxitos” se pueden acomodar en $x - 1$ casillas está dado por $\binom{x-1}{r-1}$, y cada uno de ellos tiene asignada una probabilidad p .
- Hay $(x - 1) - (r - 1) = x - r$ fracasos cada uno con probabilidad $(1 - p)$.

Distribución Binomial Negativa

Entonces, la probabilidad de obtener r éxitos en x pruebas es

$$\begin{aligned}P(X = x) &= p \left[\binom{x-1}{r-1} p^{r-1} \right] (1-p)^{x-r} \\&= \binom{x-1}{r-1} (1-p)^{x-r} p^r,\end{aligned}$$

con $x = r, r+1, r+2, \dots$

Esta es la **Distribución Binomial Negativa** cuyos **parámetros** son r y p .
Notemos que n sigue siendo aleatorio.

Distribución Binomial Negativa

Relación entre una v.a. $X \sim B(n, p)$ con una v.a. $Y \sim \text{BN}(r, p)$

Recuerda que

X = # de éxitos en n pruebas Bernoulli independientes,

Y = # de observaciones hasta tener r éxitos en pruebas Bernoulli independientes.

Consideremos la probabilidad de que en los n intentos se observen a lo más $r - 1$ “éxitos”, esto es,

$$P(X \leq r - 1).$$

Observemos que en los n intentos hay a lo más $r - 1$ éxitos si y sólo si en los n intentos se observan menos de r éxitos, es decir que la probabilidad anterior es igual a la probabilidad

$$P(Y > n).$$

Distribución Binomial Negativa

Entonces

$$P(X \leq r - 1) = P(Y > n) = 1 - P(Y \leq n).$$

Cabe recalcar que esto **no** es una aproximación, es una identidad.

Ejemplo: Si un proceso nos da **dos** equipos con defectos “severos” se detiene la producción. La probabilidad de ese tipo de defectos es **0.05**.
¿Cuál es la probabilidad de hacer más de 10 equipos sin detener la producción?

La variable aleatoria es $Y = \#$ de equipos revisados hasta obtener 2 con defectos “severos”.

Distribución Binomial Negativa

Supuestos:

- probabilidad **fija** e igual a p (no hay fallas sistemáticas)
- resultados **independientes**

Entonces $Y \sim \text{BN}(r = 2, p = 0.05)$, de donde

$$P(Y > 10) = 1 - P(Y \leq 10) = 1 - \sum_{y=2}^{10} \binom{y-1}{2-1} (0.05)^2 (0.95)^{y-2} = 0.914.$$

Utilizando la relación con la distribución binomial, para

$X \sim B(n = 10, p = 0.05)$ tenemos que

$$P(Y > 10) = P(X \leq 2 - 1) = \sum_{x=0}^1 \binom{10}{x} (0.05)^x (0.95)^{10-x} = 0.914.$$

Distribución Binomial Negativa

Los cálculos de la generatriz de momentos, media y varianza se pueden obtener a partir de la función de probabilidad de la binomial negativa, aunque de hecho ya lo hicimos mediante la representación en sumas de la distribución binomial negativa. Por completez se incluye el siguiente este material.

Deduciremos la generatriz de momentos para obtener la media y la varianza de $X \sim \text{BN}(r, p)$. Para calcular la generatriz de momentos se utilizarán los siguientes resultados:

$$\binom{n}{z} = \binom{n}{n-z}, \quad (1)$$

$$(1-x)^{-r} = \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+r-1}{j} x^j, \quad \text{para } |x| < 1. \quad (2)$$

Distribución Binomial Negativa

La generatriz de momentos es entonces

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E(e^{tX}) = \sum_{x=r}^{+\infty} e^{tx} \cdot f(x) = \sum_{x=r}^{+\infty} e^{tx} \binom{x-1}{r-1} q^{x-r} p^r \\
 &= p^r \sum_{x=r}^{+\infty} e^{tx} \binom{x-1}{r-1} q^{x-r} = p^r (e^t)^r \sum_{x=r}^{+\infty} \binom{x-1}{r-1} (qe^t)^{x-r} \\
 &= p^r (e^t)^r \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+r-1}{r-1} (qe^t)^{x-r} \quad j = x - r \\
 &= (pe^t)^r \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+r-1}{(j+r-1)-(r-1)} (qe^t)^{x-r} \quad \text{de (1)} \\
 &= (pe^t)^r \sum_{j=0}^{+\infty} \binom{j+r-1}{j} (qe^t)^{x-r} \\
 &\stackrel{\text{de (2)}}{=} (pe^t)^r (1 - qe^t)^{-r} = \frac{(pe^t)^r}{(1 - qe^t)^r} = \left(\frac{pe^t}{1 - qe^t} \right)^r, \quad |qe^t| < 1.
 \end{aligned}$$

Distribución Binomial Negativa

Por lo tanto

$$M_X(t) = \left(\frac{pe^t}{1 - qe^t} \right)^r, \quad \text{para } |qe^t| < 1.$$

Cuando $r = 1$ la binomial negativa es equivalente a la Geométrica; es decir, la binomial negativa se puede considerar como una generalización de la geométrica. Así,

$$\mu = \mu'_1 = E(X) = M'_X(t)|_{t=0},$$

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= r \left(\frac{pe^t}{1 - qe^t} \right)^{r-1} \frac{(1 - qe^t)pe^t - pe^t(-qe^t)}{(1 - qe^t)^2} \\ &= r \left(\frac{pe^t}{1 - qe^t} \right)^{r-1} \frac{pe^t - pqe^{2t} + pqe^{2t}}{(1 - qe^t)^2} = r \left(\frac{pe^t}{1 - qe^t} \right)^{r-1} \frac{pe^t}{(1 - qe^t)^2}, \\ &= \frac{r(pe^t)^r}{(1 - qe^t)^{r+1}}. \end{aligned}$$

$$M'_X(0) = \frac{r(pe^0)^r}{(1 - qe^0)^{r+1}} = \frac{rp^r}{(1 - q)^{r+1}} = \frac{rp^r}{p^{r+1}} = \frac{r}{p}.$$

Distribución Binomial Negativa

Por lo tanto,

$$E(X) = r/p.$$

Por otra parte,

$$\mu'_2 = E(X^2) = M''_X(t)|_{t=0},$$

$$M''_X(t) = \frac{(1 - qe^t)^{r+1} r \cdot r(pe^t)^{r-1} pe^t - r(pe^t)^r (r+1)(1 - qe^t)^r (-qe^t)}{[(1 - qe^t)^{r+1}]^2},$$

$$\begin{aligned} M''_X(0) &= \frac{(1 - q)^{r+1} r^2 p^{r-1} p - r p^r (r+1)(1 - q)^r (-q)}{(1 - q)^{2(r+1)}} \\ &= \frac{p^{r+1} r^2 p^r + r(r+1) p^r p^r q}{p^{2r+2}} \\ &= \frac{p^{2r+1} r^2 + r(r+1) p^{2r} q}{p^{2r+2}} = \frac{r p^{2r} (rp + (r+1)q)}{p^{2r+2}} \\ &= \frac{r \left(\overbrace{rp + rq}^r + q \right)}{p^2} = \frac{r(r+q)}{p^2}. \end{aligned}$$

Distribución Binomial Negativa

Así que

$$E(X^2) = \frac{r(r+q)}{p^2}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{r(r+q)}{p^2} - \left(\frac{r}{p}\right)^2 \\ &= \frac{r(r+q) - r^2}{p^2} = \frac{r^2 + rq - r^2}{p^2} = \frac{rq}{p^2} = \frac{r(1-p)}{p^2}, \end{aligned}$$

lo que implica

$$V(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Distribución Binomial Negativa

A modo de resumen, notemos lo siguiente:

- Notemos que en un contexto teórico el valor de r puede ser **distinto de un número entero**.
- Además, la variable aleatoria BINOMIAL, cuando $n = 1$, nos da una variable aleatoria que tiene distribución Bernoulli; es decir, la Bernoulli es un caso particular de la binomial.
- Similarmente, una variable aleatoria BINOMIAL NEGATIVA, con $r = 1$, nos da una variable aleatoria con distribución GEOMÉTRICA; es decir, la geométrica es un caso particular de la binomial negativa.

Distribución Poisson

Supóngase ahora que estamos interesado en el número de “éxitos”, pero ahora preguntándonos por la posibilidad de que ocurran en un cierto **intervalo de tiempo o espacio**, por ejemplo

- Número de defectos en una plancha de acero de 1 m^2 ,
- Número de bacterias en 1 cm^3 de agua potable,
- Número de entregas de materia prima entre las 8:00 A.M. y la 1:00 P.M.,
- Número de llamadas que llegan a un conmutador en un minuto.

En estos casos interesa la variable aleatoria

$X = \#$ de “éxitos” obtenidos en un cierto **intervalo (temporal o espacial)**.

Distribución Poisson

Nuestros supuestos son:

- El número promedio de “éxitos”, λ (la intensidad), sobre el intervalo dado se mantiene constante.

Se considera que el comportamiento es estable. Incluso, si se estuviera interesado en un múltiplo t (no necesariamente entero) del intervalo original, el valor λ_1 correspondiente será $\lambda_1 = \lambda t$.

- Los éxitos aparecen en forma aleatoria en intervalos de la misma magnitud, los intervalos no se traslapan y son independientes entre ellos.

Se considera que si en un sub-intervalo del intervalo dado ocurre un determinado número de “éxitos”, no implica que en otro sub-intervalo de la misma amplitud tendrá ese mismo número, mayor que él, o menor. Sólo se espera que en promedio se tenga el mismo número.

Distribución Poisson

*Observa que no se hace un número de pruebas hasta obtener “éxitos”, sino que se cuenta el número de éxitos obtenidos en un **continuo** espacial o temporal y por ende, cuando el intervalo tiende a cero la probabilidad de éxito también tiende a cero.*

- El número posible de “éxitos” es **infinito**.

Distribución Poisson

Mecanismo para asignación de probabilidades

Supongamos que tenemos un proceso Poisson y lo observamos en un cierto intervalo, digamos de una unidad, y asumimos que λ es el número promedio de éxitos en esa unidad observada.

Por otra parte, consideremos esa misma unidad y que:

- Se realizan 10 observaciones y se cuenta el número de “éxitos”, cada uno con probabilidad p , obtenidos en 10 subdivisiones. Es natural pensar que hay una probabilidad relativamente pequeña de observar más de un éxito, en cada subdivisión.
- Se realizan 10 observaciones y se cuenta el número de “éxitos”, cada uno con probabilidad p (más pequeña que en el anterior caso), obtenidos en mil subdivisiones del intervalo de tal manera que p será tan pequeña que hay una probabilidad de cero de observar más de un éxito, en cada subdivisión.

Distribución Poisson

El número de “éxitos” Y en n pruebas independientes con probabilidad p se puede modelar ahora como una v.a. Binomial, cuya media es $E(Y) = np$, que debe coincidir con el número promedio de éxitos λ en el intervalo considerado.

Notemos que $\lambda = np$ implica que $p = \lambda/n$ y como λ es fija, p será más y más pequeña a medida que n crece. Esto nos lleva a establecer el siguiente resultado:

La distribución de Y es **Poisson** con $\lambda = np$ constante, cuando el número de observaciones tiende a infinito en el intervalo, con p siendo más pequeña conforme n aumenta.

Distribución Poisson

Demostración:

Si $X \sim B(n, p)$, entonces

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad np = \lambda \rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{n!}{x!(n-x)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-(x-1))(n-x)!}{x!(n-x)!} \frac{\lambda^x}{n^x} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-x} \\ &= \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right)}{x!} \lambda^x \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \\ &= \frac{1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right)}{x!} \lambda^x \left[\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}\right]^{-\lambda} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x}. \end{aligned}$$

Distribución Poisson

Por otro lado,

- $1 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{x-1}{n}\right) \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow +\infty$
- $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-x} \rightarrow 1$ cuando $n \rightarrow +\infty$
- $x!$ y λ^x quedan igual

El único término faltante es $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}$. Observe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}$ tiene la forma $1^{-\infty}$ que es una forma indeterminada.

Distribución Poisson

Sea $y = \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}}$, entonces

$$\log(y) = -\frac{n}{\lambda} \log\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right) = \frac{-\log\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)}{\frac{\lambda}{n}}.$$

De aquí tenemos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-\log\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)}{\frac{\lambda}{n}}, \quad \text{forma indeterminada del tipo } \frac{0}{0};$$

aplicando la Regla de L'Hopital

$$\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{\frac{1}{(1-\lambda/n)} \cdot \left(\frac{\lambda}{n^2}\right)}{\left(-\frac{\lambda}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log(y) = 1$$

Distribución Poisson

Ahora, usando el hecho de que si f es una función continua se cumple

$$\lim_{x \rightarrow a} f(y) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} y\right);$$

y, por ser la función logaritmo natural una función continua, tenemos

$$\log\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y = e.$$

De aquí que

- $\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda}} \rightarrow e$, cuando $n \rightarrow \infty$.

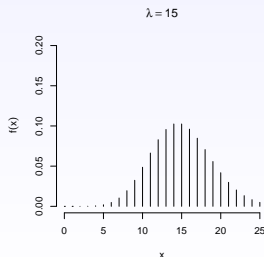
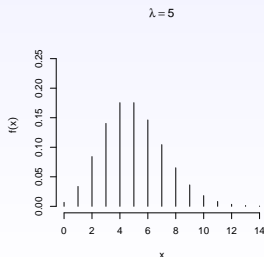
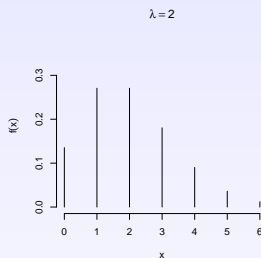
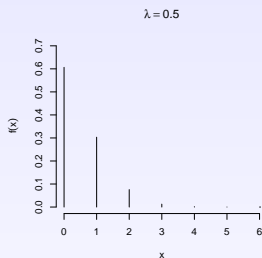
Distribución Poisson

Usando todos los resultados anteriores tenemos que la función de probabilidad de la **Distribución Poisson** está dada por

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad \text{para } x = 0, 1, 2, \dots$$

Notación: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$. El único parámetro del modelo es λ .

Distribución Poisson



Distribución Poisson

¿Qué podemos aprender del procedimiento anterior?

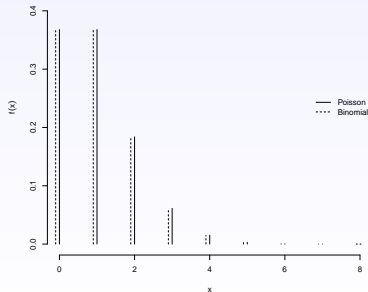
- 1 La fórmula para asignar probabilidades, como siempre, es **válida bajo una serie de supuestos que debemos verificar se cumplan razonablemente** en nuestros estudios particulares. Por otro lado, es el resultado de un proceso matemático no necesariamente intuitivo, como lo había sido en los casos anteriores.
- 2 Aunque **no siempre se tiene que pensar que un modelo Poisson proviene de una variable binomial tomada en circunstancias límite** como se mostró arriba, sí nos deja una herramienta de aproximación muy útil. Más aún, la aproximación es utilizada a favor nuestro en el sentido de que, **los cálculos bajo una Poisson son, en general, más simples que con una binomial.**

Distribución Poisson

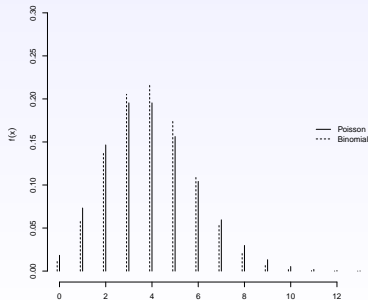
La variable aleatoria Poisson se puede usar para calcular probabilidades binomiales en forma aproximada cuando n es muy grande y p es pequeña.

Ejemplos: La aproximación es buena cuando $n \geq 20$ y $p \leq 0.05$. Cuando $n \geq 100$ y $np < 10$ la aproximación es excelente.

$\lambda = 1 \quad n = 100, p = 0.01$



$\lambda = 4 \quad n = 20, p = 0.2$



Distribución Poisson

Función generatriz de momentos:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{tx} f(x) = \sum_{x=0}^{+\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{+\infty} \frac{\lambda^x e^{tx}}{x!}.$$

Recordando el desarrollo en series de potencias de la función exponencial

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots,$$

obtenemos

$$M_X(t) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t - 1)}.$$

Distribución Poisson

Ahora, utilizando la relación entre $M_X(t)$ y $E(X^r)$, obtenemos la media y la varianza

$$\begin{aligned} E(X) &= \mu = \mu'_1 = M'_X(t)|_{t=0} \\ \Rightarrow M'_X(t) &= e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t \Rightarrow M'_X(0) = e^{\lambda(e^0-1)} \cdot \lambda e^0 = \lambda. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $E(X) = \lambda$.

Ahora,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \mu'_2 = M''_X(t)|_{t=0} \\ \Rightarrow M''_X(t) &= e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t + \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} \cdot \lambda e^t \Rightarrow M''_X(0) = \lambda + \lambda^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $E(X^2) = \lambda + \lambda^2$.

Distribución Poisson

Entonces

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$

Nota: Demuestre que $C_X(t) = \log M_X(t)$, $C'_X(0) = \mu$, $C''_X(0) = \sigma^2$.

Usando lo anterior

$$C_X(t) = \log \left(e^{\lambda(e^t - 1)} \right) = \lambda(e^t - 1),$$

de donde

$$\begin{aligned} C'_X(t) &= \lambda e^t &\Rightarrow & C'_X(0) = \lambda e^0 = \lambda = \mu \\ C''_X(t) &= \lambda e^t &\Rightarrow & C''_X(0) = \lambda e^0 = \lambda = \sigma^2 \end{aligned}$$

Distribución Poisson

Ejemplo. Sabiendo que, según las condiciones de un bosque, se esperan encontrar 2 chapulines por m^2 : ¿qué tan grande debe ser el radio de una región circular de muestreo dentro del bosque para que la probabilidad de encontrar al menos un chapulín sea de 0.99?

Solución: En este caso, $X = \#$ de chapulines en una área circular determinada de πr^2 . La v.a. X se distribuye Poisson($\lambda = 2 \frac{\text{chapulines}}{m^2} \cdot \pi r^2$). (¿Porqué?) Así,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X \leq 0) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{(2\pi r^2)^0 e^{-2\pi r^2}}{0!} = 0.99,$$

entonces

$$e^{-2\pi r^2} = 0.01 \quad \Rightarrow \quad r = 0.8561 \, m.$$

Distribución Poisson

Ejemplo. Una compañía renta máquinas fotocopadoras. Se sabe que el número de reportes por averías por semana que recibe es una v.a. Poisson($\lambda = 2 \frac{\text{averías}}{\text{semana}}$). a) ¿Cuál es la probabilidad de no recibir queja en una semana? b) ¿Cuál es la probabilidad de recibir más de tres reportes dado que ya se recibió una queja? c) ¿Cuál es la probabilidad de recibir menos de seis quejas en un mes?

Solución:

$Y = \#$ de quejas por semana.

- Se pide $P(Y = 0) = 2^0 e^{-2} / 0! = 0.1354$.
- Aquí lo que interesa es $P(X > 3 | X \geq 1) = \frac{P(X > 3, X \geq 1)}{P(X \geq 1)} = \frac{P(X > 3)}{P(X \geq 1)} = \frac{1 - F(3)}{1 - F(0)} = \frac{1 - 0.857}{1 - 0.1354} = 0.1654$.
- En este caso $\lambda = 4 \cdot 2 = 8$, ya que en un mes hay 4 semanas. Entonces, $Y = \#$ de quejas en un mes, es Poisson($\lambda = 8$), así

$$P(Y < 6) = P(Y \leq 5) = F(5) = 0.191.$$

Distribución Poisson

Estos ejemplos muestran la importancia de las unidades que se están manejando para el intervalo de interés.

La distribución de probabilidad Poisson es derivada en el libro de Meyer, en una forma muy interesante, además de remarcar su importancia como “proceso” y no sólo como modelo probabilístico. Se discute más adelante.

Distribución Binomial Negativa: Sobredispersión

La distribución binomial negativa es útil para modelar datos de conteos con **sobredispersión**. En este contexto, decimos que un conjunto de datos de conteo exhiben sobredispersión si muestran mayor variabilidad de la que se esperaría con una distribución Poisson.

En la práctica, la sobredispersión aparece en datos de conteo que surgen en epidemias o en dinámicas poblacionales y es causada por la aleatoriedad en el movimiento de la población o en las tasa de contacto, o por deficiencias en el modelo para capturar adecuadamente en la dinámica poblacional.

Es posible incluir a la sobredispersión como un parámetro en la función de masa de una binomial negativa, para esto es necesario realizar la siguiente reparametrización.

Distribución Binomial Negativa: Sobredispersión

Sea $Y \sim \text{BN}(r, p)$, entonces

$$P(Y = y) = \binom{y-1}{r-1} p^r (1-p)^{y-r} \quad y = r, r+1, \dots,$$

si tomamos $H = Y - r$, $y = h + r$, la ecuación anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned} P(H = h) &= \binom{h+r-1}{r-1} p^r (1-p)^h \\ &= \frac{\Gamma(h+r)}{\Gamma(r)h!} p^r (1-p)^h \quad h = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Poniendo $X = H$, $x = h$, $k = r$, la igualdad anterior es equivalente a

$$P(X = x) = \frac{\Gamma(k+x)}{\Gamma(r)x!} p^k (1-p)^x \quad x = 0, 1, \dots$$

Distribución Binomial Negativa: Sobredispersión


La esperanza m de X está dada por $m = (1 - p)k/p$, lo que implica que $p = k/(m + k)$. Así,

$$\begin{aligned}
 P(X = x) &= \frac{\Gamma(k + x)}{\Gamma(r)x!} p^k (1 - p)^x \\
 &= \frac{\Gamma(k + x)}{\Gamma(r)x!} \left(\frac{k}{m + k} \right)^k \left(\frac{m}{m + k} \right)^x \\
 &= \frac{\Gamma(k + x)}{\Gamma(r)x!} \left(1 + \frac{m}{k} \right)^{-k} \left(\frac{m}{m + k} \right)^x \quad x = 0, 1, \dots
 \end{aligned}$$

Se puede ver que

$$E(X) = \mu = m$$

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 = m + \frac{m^2}{k}.$$

Tendremos sobredispersión cuando $\sigma^2 > \mu$ (sobredispersión relativa a la Poisson). El parámetro k se conoce como el **parámetro de dispersión**. 

Procesos de Poisson

Consideremos una fuente de material radiactivo que emite partículas α .

Definamos a X_t como el número de partículas emitidas durante un periodo de tiempo específico $[0, t]$.

Vamos a hacer algunas hipótesis acerca de la variable aleatoria (discreta) X_t que nos permitirán determinar la distribución de probabilidades de X_t . La posibilidad de estas hipótesis se justifica por el hecho de que la evidencia empírica sostiene una cantidad considerable de resultados teóricos que vamos a derivar.

Observa que la variable aleatoria X_t puede tomar los valores $\{0, 1, 2, \dots\}$. Pongamos $p_n(t) = P(X_t = n)$, $n = 0, 1, \dots$

Procesos de Poisson

Las hipótesis sobre X_t que vamos a enunciar son cinco:

- 1 El número de partículas emitidas durante **intervalos de tiempo no sobrepuestos** son variables aleatorias **independientes**.
- 2 Si Y_t se define es igual al número de partículas emitidas durante $[t_1, t_1 + t]$, para cualquier $t_1 > 0$, las variables aleatorias X_t y Y_t tienen la **misma** distribución de probabilidades.

*En otras palabras, la distribución del número de partículas emitidas durante cualquier intervalo **depende sólo de la longitud del intervalo y no de los puntos extremos**.*

- 3 $p_1(\Delta t)$ es igual aproximadamente a $\lambda \Delta t$, si Δt es suficientemente pequeña, donde λ es una constante positiva. Es decir que **$p_1(\Delta t) \sim \lambda \Delta t$** . También supondremos que $\Delta t > 0$.

*Esta hipótesis expresa que **si el intervalo es suficientemente pequeño, la probabilidad de obtener exactamente una emisión durante ese intervalo es directamente proporcional a la longitud del intervalo**.*

Procesos de Poisson

Recordatorio de notación: $a(\Delta t) \sim b(\Delta t)$ significa que $a(\Delta t) = b(\Delta t) + o(\Delta t)$ para una función indeterminada $o(\Delta t)$ que representa el resto y satisface $o(\Delta t)/\Delta t \rightarrow 0$ cuando $\Delta t \downarrow 0$.

Continuación de las hipótesis:

- 4 $\sum_{k=2}^{\infty} p_k(\Delta t) \sim 0$. Nótese que esto implica que $p_k(\Delta t) \rightarrow 0$, $k \geq 2$.
Esto significa que la probabilidad de obtener dos o más emisiones en un intervalo suficientemente pequeño es despreciable.
- 5 $X_0 = 0$, o de manera equivalente $p_0(0) = 1$.
Esto equivale a una condición inicial para el modelo que estamos describiendo.

Las cinco hipótesis anteriores harán posible que deduzcamos una expresión para $p_n(t) = P(X_t = n)$, como veremos más adelante.

Procesos de Poisson

Saquemos algunas conclusiones de las hipótesis anteriores:

- ① Las hipótesis 1 y 2 juntas implican que la variable aleatoria $X_{\Delta t}$ y $X_{t+\Delta t} - X_t$ son variables aleatorias independientes con la misma distribución de probabilidades.
- ② De las hipótesis 3 y 4 podemos concluir que

$$p_0(\Delta t) = 1 - p_1(\Delta t) - \sum_{k=2}^{\infty} p_k(\Delta t) \sim 1 - \lambda \Delta t.$$

- ③ Podemos escribir

$$\begin{aligned} p_0(t + \Delta t) &= P(X_{t+\Delta t} = 0) \\ &= P(X_t = 0 \text{ y } X_{t+\Delta t} - X_t = 0) \\ &= p_0(t)p_0(\Delta t) \\ &\sim p_0(t)(1 - \lambda \Delta t) \end{aligned}$$

Procesos de Poisson

Continuación de las conclusiones de las hipótesis anteriores:

4 Luego tenemos

$$\frac{p_0(t + \Delta t) - p_0(t)}{\Delta t} \sim -\lambda p_0(t).$$

Haciendo $\Delta t \downarrow 0$, lo anterior implica

$$p_0'(t) = -\lambda p_0(t) \iff \frac{p_0'(t)}{p_0(t)} = -\lambda.$$

Resolviendo la ecuación diferencial anterior llegamos a

$$p_0(t) = \exp(-\lambda t).$$

Así, nuestras hipótesis nos han conducido a una expresión para $P(X_t = 0)$.

Procesos de Poisson

Continuación de las conclusiones de las hipótesis anteriores:

5 Considerando $p_n(t + \Delta t) = P(X_{t+\Delta t} = n)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
 p_n(t + \Delta t) &= P(X_{t+\Delta t} = n) = \sum_{x=0}^n P(X_t = x, X_{t+\Delta t} = n) \\
 &= \sum_{x=0}^n P(X_t = x, X_{t+\Delta t} - X_t = n - x) \\
 &= \sum_{x=0}^n P(X_t = x) \cdot P(X_{t+\Delta t} - X_t = n - x) = \sum_{x=0}^n p_x(t) p_{n-x}(\Delta t) \\
 &= \sum_{x=0}^{n-2} p_x(t) p_{n-x}(\Delta t) + p_{n-1}(t) p_1(\Delta t) + p_n(t) p_0(\Delta t)
 \end{aligned}$$

Usando las hipótesis 3 y 4 y la conclusión 2, obtenemos

$$p_n(t + \Delta t) \sim p_{n-1}(t) \lambda \Delta t + p_n(t) (1 - \lambda \Delta t).$$

Procesos de Poisson

5 Continuación: Luego tenemos

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} \sim \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t).$$

Haciendo $\Delta t \downarrow 0$, como en la consecuencia anterior, obtenemos

$$p'_n(t) = \lambda p_{n-1}(t) - \lambda p_n(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

Definamos $q_n(t) = e^{\lambda t} p_n(t)$. Así el sistema de ecuaciones diferenciales anterior se transforma en $q'_n(t) = \lambda q_{n-1}(t)$, $n = 1, 2, \dots$. Puesto que $p_0(t) = e^{-\lambda t}$, encontramos que $q_0(t) = 1$. Nótese que también $q_n(0) = 0$, para $n > 0$. Así, recursivamente obtenemos

$$q'_1(t) = \lambda, \text{ y por tanto } q_1(t) = \lambda t;$$

$$q'_2(t) = \lambda q_1(t) = \lambda^2 t, \text{ y por tanto } q_2(t) = \frac{(\lambda t)^2}{2}.$$

Procesos de Poisson

- 5 Continuación: En general, $q'_n(t) = \lambda q_{n-1}(t)$ y por tanto $q_n(t) = (\lambda t)^n / n!$. Recordando la definición de q_n , finalmente obtenemos

$$p_n(t) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad n=0,1,2,\dots$$

Hemos demostrado así que el número de partículas emitidas durante el intervalo de tiempo $[0, t]$ de una fuente radioactiva, con las suposiciones hechas anteriormente, es una variable aleatoria con una distribución de Poisson con parámetro λt .

Procesos de Poisson

Observaciones sobre lo que hicimos arriba:

- a) Es importante darse cuenta de que **la distribución de Poisson apareció como una consecuencia de ciertas suposiciones que hicimos**. Esto significa que cada vez que dichas suposiciones sean válidas (o al menos lo sean aproximadamente) la distribución de Poisson debe usarse como un modelo apropiado.

Resulta que hay una gran cantidad de fenómenos para los cuales es adecuado el modelo de Poisson:

- *Representemos por X_t el número de llamadas telefónicas que llegan a una central telefónica durante un periodo de tiempo de longitud t . Las suposiciones anteriores se satisfacen aproximadamente, en especial durante el “periodo congestionado” del día. Luego, X_t tiene una distribución de Poisson.*
- *Representemos por X_t el número de electrones que salen del cátodo de un tubo al vacío. Nuevamente las suposiciones son apropiadas y, por tanto, X_t tiene una distribución de Poisson.*

Procesos de Poisson

Observaciones sobre lo que hicimos arriba:

- La constante λ apareció originalmente como una constante de proporcionalidad en la hipótesis 3.

Vale la pena mencionar las siguientes interpretaciones de λ :

- Si X_t representa el número de ocurrencias de un evento durante un intervalo de tiempo de longitud t , entonces, $E(X_t) = \lambda t$ y, por tanto, $\lambda = E(X_t)/t$ representa la razón esperada con la cual se emiten las partículas.*
- Si X_v representa el número de ocurrencias de algún evento dentro de un volumen especificado V , entonces $E(X_v) = \lambda V$, por lo tanto, $\lambda = E(X_v)/V$ representa la densidad esperada con la cual aparecen las estrellas.*

Procesos de Poisson

Observaciones sobre lo que hicimos arriba:

- e) Es importante señalar que nuestra exposición **no se refirió sólo a una variable aleatoria X que posee una distribución de Poisson, sino que para cada $t > 0$, encontramos que X_t tenía una distribución de Poisson con un parámetro dependiente de t . Tal colección (infinita) de variables aleatorias también se conoce como proceso de Poisson.**

De igual forma, se genera un proceso de Poisson cada vez que ocurre un evento en algún intervalo de tiempo de modo que se satisfagan las hipótesis 1 hasta 5.

Procesos de Poisson

Ejemplo: Una complicada maquinaria, cuando funciona perfectamente, puede producir una utilidad de C dólares por hora ($C > 2$) a una compañía. Sin embargo, esta máquina tiene una tendencia a fallar en momentos inesperados e impredecibles. Supóngase que el número de fallas durante cualquier periodo de longitud t horas es una variable aleatoria con una distribución de Poisson con parámetro t .

Si la máquina falla x veces durante t horas, la pérdida ocasionada (la improductividad de la máquina más la reparación) es igual a $x^2 + x$ dólares. Luego, la utilidad total P durante cualquier periodo de t horas es igual a $P = Ct - (X^2 + X)$, donde X es la variable aleatoria que representa el número de fallas de la máquina.

Procesos de Poisson

Ejemplo (cont): Por tanto, P es una variable aleatoria, y podría ser interesante elegir t (lo que está a nuestra voluntad) de manera tal que la utilidad esperada sea maximizada. Tenemos

$$E(P) = Ct - E(X^2 + X).$$

Por lo estudiado sobre la distribución Poisson sabemos que $E(X) = t$ y $E(X^2) = t + t^2$. Luego se deduce que $E(P) = Ct - 2t - t^2$. Para encontrar el valor de t , para el cual se maximiza $E(P)$, diferenciamos $E(P)$ e igualamos a cero la expresión resultante. Obtenemos $C - 2 - 2t = 0$, obteniendo $t = \frac{1}{2}(C - 2)$ horas.

Procesos de Poisson

Ejemplo: Sea X_t igual al número de partículas emitidas por una fuente radiactiva durante un intervalo de tiempo de longitud t . Supóngase que X_t tiene una distribución de Poisson con parámetro αt . Se instala un instrumento para anotar el número de partículas emitidas. Supóngase que hay una probabilidad constante p de que cualquier partícula emitida no se cuente. Si R_t es igual al número de partículas contadas durante el intervalo específico, cuál es la distribución de probabilidades de R_t ?

Para $X_t = x$ dada, la variable aleatoria R_t tiene una distribución binomial con parametros $(x, 1 - p)$. Esto es,

$$P(R_t = k | X_t = x) = \binom{x}{k} (1 - p)^k p^{x-k}.$$

Procesos de Poisson

Ejemplo (cont.): Usando la fórmula de probabilidad total,

$$\begin{aligned}
 P(R_t = k) &= \sum_{x=k}^{\infty} P(R_t = k | X_t = x) P(X_t = x) \\
 &= \sum_{x=k}^{\infty} \binom{x}{k} (1-p)^k p^{x-k} e^{-\alpha t} \frac{(\alpha t)^x}{x!} \\
 &= \left(\frac{1-p}{p} \right)^k \frac{e^{-\alpha t}}{k!} \sum_{x=k}^{\infty} (p\alpha t)^x \frac{1}{(x-k)!} \\
 &= \left(\frac{1-p}{p} \right)^k \frac{e^{-\alpha t}}{k!} \sum_{i=0}^{\infty} (p\alpha t)^{i+k} \frac{1}{i!} = \left(\frac{1-p}{p} \right)^k \frac{e^{-\alpha t}}{k!} (p\alpha t)^k e^{p\alpha t} \\
 &= e^{-\alpha t(1-p)} \frac{(\alpha t(1-p))^k}{k!}.
 \end{aligned}$$

Es decir que R_t tiene una distribución de Poisson con parámetro $(1-p)\alpha t$.

Procesos de Poisson

Theorem

Si $\{N(s), s \geq 0\}$ es un proceso de Poisson, entonces

- 1 $N(0) = 0$.
- 2 $N(t + s) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$.
- 3 $N(t)$ tiene incrementos independientes.

Recíprocamente, si 1, 2 y 3 valen, entonces $\{N(s), s \geq 0\}$ es un proceso de Poisson.

Procesos de Poisson

Una forma más compleja, pero más realista es pensar que λ cambia con el tiempo.

Eso es fácil de imaginar, piensa por ejemplo en: # de llegadas de clientes a un banco en un período de una hora. Claramente, si tomamos períodos de observación entre las 9-10 a.m. comparados con 12-1 p.m., no tendríamos porque esperar que el número promedio de clientes fuera el mismo.

Lo mismo si el día de la semana es lunes, o viernes o peor aún, día de pago.

Procesos de Poisson

Ejemplo. En el contexto de la fuente de material radioactivo (diapositiva 115), ahora cambiemos la hipótesis 3 a que la probabilidad de que exactamente un evento ocurra en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ es $\alpha(t) \cdot \Delta t + O(\Delta t)$, para Δt pequeño.

Repitiendo el procedimiento que se hizo para las hipótesis originales, se puede mostrar que el número de eventos que ocurren durante el intervalo $[t_1, t_2]$ sigue una distribución Poisson con parámetro

$$\lambda = \int_{t_1}^{t_2} \alpha(t) dt.$$

La ocurrencia de eventos en el tiempo en una situación como esta es llamada: **Proceso Poisson No-homogéneo.**

Procesos de Poisson

Ejemplo: Un artículo (“Inference Based on Retrospective Ascertainment”, J. Amer. Stat. Assoc., 1989, pp. 360-372) consideró la siguiente función de intensidad:

$$\alpha(t) = e^{a+bt}$$

como apropiada para eventos que involucran la transmisión del virus del SIDA a través de transfusiones sanguíneas.

Supongamos que $a = 2$ y $b = 0.6$ (tiempo en años)

- 1 ¿Cuál es el número esperado de eventos en el intervalo $[0,4]$? ¿En el $[2,6]$?
- 2 ¿Cuál es la probabilidad de que a lo más 15 eventos ocurran en el intervalo $[0, 0.9907]$?

Procesos de Poisson

Solución.

- 1 Como se trata de un proceso Poisson, λ sigue representando al valor medio (hecho que puede demostrarse), por lo que sólo nos restaría evaluar λ para cada intervalo:

$$\text{En } [0,4]: \lambda = \int_{t1}^{t2} \alpha(t)dt = \int_0^4 e^{2+0.6t} dt = 123.44$$

$$\text{En } [2,6]: \lambda = \int_{t1}^{t2} \alpha(t)dt = \int_2^6 e^{2+0.6t} dt = 409.82$$

- 2 Primero obtengamos el valor de λ en este intervalo:

$$\lambda = \int_0^{0.9907} e^{2+0.6t} dt = 9.99 \sim 10$$

$P(X \leq 15) = F(15, 10) = 0.978$, esto es, aproximadamente en el primer año, la probabilidad de que a lo más 15 eventos se presenten, es del 97.8 %.

Procesos de Poisson

Ejemplo

Una empresa proveedora de servicios de Internet cuenta actualmente con una infraestructura de 7 líneas de un solo teléfono, las cuales van siendo ocupadas a medida que los usuarios se van conectando.

Una vez que las 7 líneas están siendo utilizadas simultáneamente, no se puede realizar otra conexión, por lo tanto, la infraestructura resulta ineficiente para dar un servicio adecuado.

La empresa desea aumentar el número de líneas de conexión a red, por lo que necesita saber en qué momento es más probable que se sature el servicio y la intensidad de la saturación.

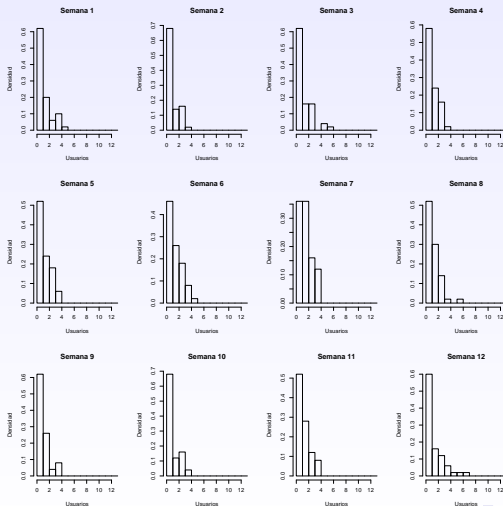
Con esta finalidad, la empresa recopiló información sobre el número de usuarios que se conectan por hora (24 horas) durante 12 semanas.

Procesos de Poisson

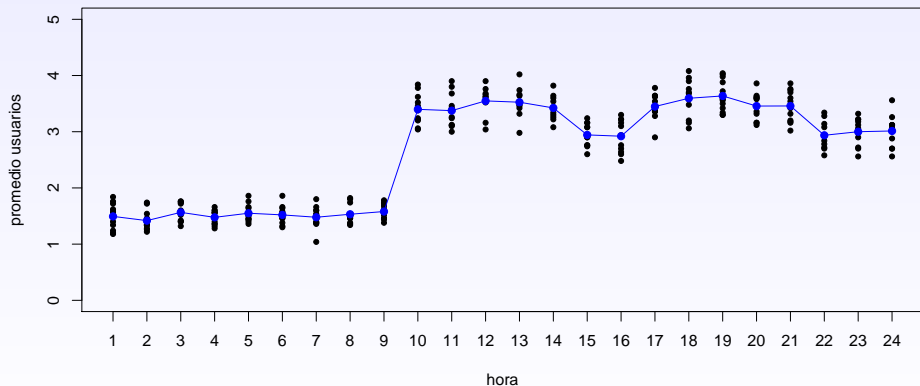
Por ejemplo, para la semana 1:

1 hrs	2.00	1.00	2.00	0.00	1.00	0.00	3.00	0.00	0.00	2.00	...
2 hrs	3.00	5.00	1.00	2.00	0.00	0.00	0.00	1.00	2.00	4.00	...
3 hrs	0.00	0.00	2.00	3.00	2.00	0.00	0.00	2.00	1.00	0.00	...
4 hrs	2.00	1.00	4.00	1.00	0.00	1.00	0.00	1.00	1.00	3.00	...
5 hrs	2.00	0.00	1.00	3.00	4.00	1.00	0.00	1.00	2.00	1.00	...
6 hrs	1.00	0.00	1.00	1.00	1.00	1.00	2.00	3.00	1.00	0.00	...
7 hrs	0.00	1.00	2.00	3.00	0.00	1.00	3.00	0.00	3.00	2.00	...
8 hrs	1.00	1.00	1.00	1.00	2.00	2.00	1.00	2.00	1.00	2.00	...
9 hrs	0.00	1.00	3.00	2.00	5.00	2.00	2.00	1.00	1.00	1.00	...
10 hrs	2.00	4.00	1.00	8.00	5.00	2.00	2.00	3.00	3.00	5.00	...
11 hrs	3.00	2.00	2.00	3.00	1.00	3.00	1.00	2.00	2.00	1.00	...
12 hrs	3.00	4.00	1.00	3.00	5.00	0.00	4.00	0.00	4.00	1.00	...
13 hrs	0.00	8.00	6.00	3.00	3.00	5.00	0.00	3.00	3.00	1.00	...
14 hrs	2.00	2.00	3.00	3.00	2.00	6.00	1.00	5.00	4.00	1.00	...
15 hrs	0.00	4.00	4.00	1.00	3.00	1.00	1.00	2.00	6.00	2.00	...
16 hrs	5.00	1.00	4.00	3.00	3.00	4.00	1.00	3.00	2.00	5.00	...
17 hrs	4.00	4.00	4.00	3.00	5.00	4.00	5.00	2.00	2.00	6.00	...
18 hrs	1.00	1.00	2.00	1.00	4.00	0.00	4.00	1.00	2.00	1.00	...
19 hrs	2.00	2.00	3.00	1.00	4.00	5.00	1.00	2.00	2.00	4.00	...
20 hrs	1.00	1.00	2.00	2.00	7.00	3.00	3.00	3.00	1.00	3.00	...
21 hrs	2.00	3.00	10.00	5.00	3.00	6.00	4.00	1.00	1.00	3.00	...
22 hrs	3.00	1.00	3.00	4.00	3.00	5.00	3.00	3.00	2.00	4.00	...
23 hrs	2.00	4.00	2.00	2.00	2.00	2.00	5.00	4.00	3.00	5.00	...
24 hrs	8.00	1.00	2.00	4.00	5.00	2.00	2.00	4.00	3.00	5.00	...

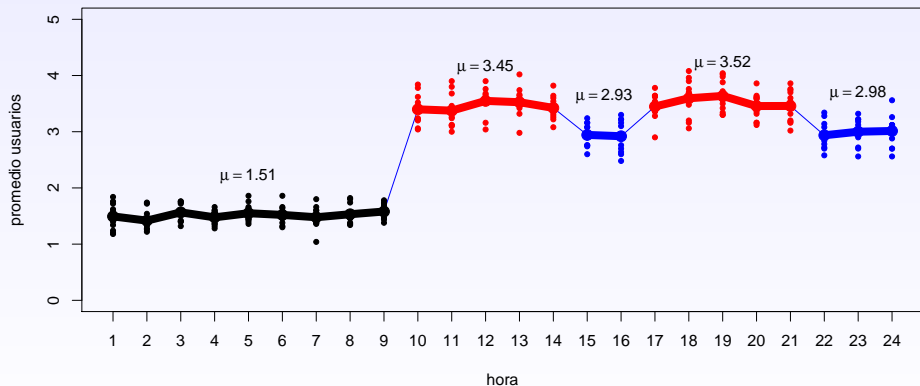
Ejemplo. Análisis exploratorio (Lo que no se debe de hacer con un proceso estocástico)



Ejemplo. Análisis exploratorio



Ejemplo. Análisis exploratorio



Ejemplo. Selección del modelo

El fenómeno de interés es el número de usuarios por hora, o de forma más general, el **número de usuarios en el intervalo** $(s, s + k)$. Por lo tanto, dada la naturaleza del experimento, es lógico asumir una distribución Poisson con parámetro λk , que indica la intensidad (es decir, el número de usuarios esperado) del proceso en el intervalo deseado.

Del análisis exploratorio, podemos ver que **la intensidad no es constante durante el periodo de estudio de 24 hrs.** Por lo tanto, tenemos un **Proceso Poisson no homogéneo**:

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda(t)),$$

para $t = 0, 1, 2, \dots$

Ejemplo. Selección del modelo

En nuestro caso:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 1.51 & 0 \text{ a } 9 \text{ hrs} \\ 3.48 & 9 \text{ a } 14 \text{ hrs y } 16 \text{ a } 21 \text{ hrs} \\ 2.96 & 14 \text{ a } 16 \text{ hrs y } 21 \text{ a media noche} \end{cases}$$

Ejemplo. Aplicación del modelo

Supongamos que queremos averiguar la probabilidad de que haya 2 conexiones en un intervalo de tiempo de 2 horas, entre las 5 y las 7 de la mañana. En este caso:

$$P(X_{(7)} - X_{(5)} = 2) = P(X_{(2)} = 2) = \frac{(2 \times 1.51)^2 e^{-(2 \times 1.51)}}{2!} = 0.2225.$$

En R:

```
dpois(2, 2*1.51)
```

Ejemplo. Aplicación del modelo

```
> ?dpois
>
Poisson                                package:stats                R Documentation
```

The Poisson Distribution

Description:

Density, distribution function, quantile function and random generation for the Poisson distribution with parameter lambda.

Usage:

```
dpois(x, lambda, log = FALSE)
ppois(q, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
qpois(p, lambda, lower.tail = TRUE, log.p = FALSE)
rpois(n, lambda)
```

Arguments:

x: vector of (non-negative integer) quantiles.
 q: vector of quantiles.
 p: vector of probabilities.
 n: number of random values to return.
 lambda: vector of (non-negative) means.
 log, log.p: logical; if TRUE, probabilities p are given as log(p).
 lower.tail: logical; if TRUE (default), probabilities are $P[X \leq x]$,
 otherwise, $P[X > x]$.

Ejemplo. Aplicación del modelo

Algo más interesante para la empresa, es averiguar las probabilidades de usuarios conectados en las horas pico. Por ejemplo, la probabilidad de que haya al menos 5 usuarios conectados entre las 4 y 6 de la tarde.

$$\begin{aligned}
 P(X_{(18)} - X_{(16)} \geq 5) &= P(X_{(2)} \geq 5) \\
 &= 1 - \sum_{x=0}^4 \frac{(2 \times 3.48)^x e^{-(2 \times 3.48)}}{x!} \\
 &= 0.823
 \end{aligned}$$

En R:

```
1-ppois(4,3.48*2)
```

o

```
ppois(4,3.48*2,lower.tail=FALSE)
```

Ejemplo. Aplicación del modelo

En general, si tenemos un proceso Poisson no homogéneo, el número de eventos en el intervalo (s, t) se distribuye Poisson con parámetro

$$\alpha = \int_s^t \lambda(u) du.$$

Por ejemplo, si queremos saber cuál es la probabilidad de que haya 3 usuarios conectados entre las 8 y 10 de la noche:

$$P(X_{(22)} - X_{(20)} = 3) = \frac{\alpha^3 e^{-(\alpha)}}{3!},$$

donde

$$\alpha = \int_{20}^{21} 3.48 du + \int_{21}^{22} 2.96 du = 6.44.$$

Entonces

$$P(X_{(2)} = 3) = 0.072.$$

Ejemplo. Aplicación del modelo

Entonces

$$P(X_{(2)} = 3) = 0.072.$$

Observa que no se suman las probabilidades, sino las contribuciones de las intensidades en cada intervalo.

Del mismo modo, la probabilidad de que haya al menos 5 usuarios conectados entre las 8 y las 10:

$$P(X_{(22)} - X_{(20)} \geq 5) = 0.77.$$

Ejemplo. Aplicación del modelo

Ahora, calculemos la probabilidad de que haya al menos 5 usuarios conectados entre las 8 y 10 de la noche y entre las 5 y 7 de la mañana

$$P(X_{(22)} - X_{(20)} \geq 5 \text{ y } X_{(7)} - X_{(5)} \geq 5).$$

Como son intervalos disjuntos, las intensidades para ambos eventos son:

$$\alpha_{22-20} = 6.44 \text{ y } \alpha_{7-5} = 1.51 \times 2,$$

por lo tanto:

$$P(X_{(22)} - X_{(20)} \geq 5 \text{ y } X_{(7)} - X_{(5)} \geq 5) = 0.77 \times 0.188 = 0.145.$$

Ejemplo. Aplicación del modelo

Ahora, supon que queremos ajustar un modelo a la intensidad del primer grupo de conexiones observadas (0 a 9 hrs).

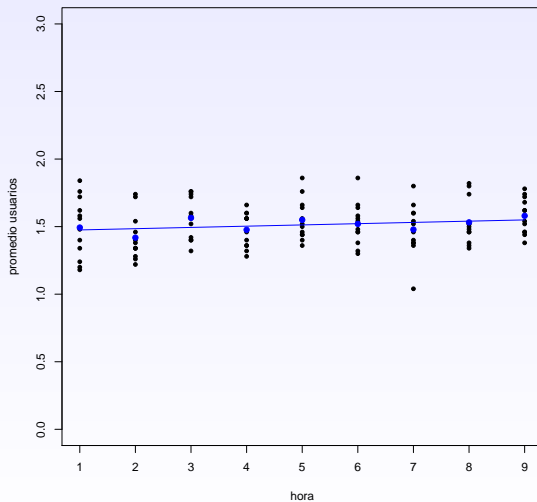
Probemos con un modelo lineal. Para los datos de promedios en ese intervalo de tiempo, obtenemos:

$$\lambda(t) = 1.466 + 0.01t$$

En R:

```
## las conexiones promedio de 0 a 9 hrs  
y <- mmed[1:9]  
## ajusta un modelo polinomial  
mod <- lm(y ~ poly(1:9, degree=1, raw=TRUE))
```

Ejemplo. Aplicación del modelo



Ejemplo. Aplicación del modelo

Con este modelo para la intensidad, calculemos la probabilidad de que haya 2 usuarios conectados entre las 5 y las 7 de la mañana:

$$P(X_{(7)} - X_{(5)} = 2) = P(X_{(2)} = 2) = \frac{(\alpha)^2 e^{-\alpha}}{2!}$$

donde

$$\alpha = \int_5^7 (1.466 + 0.01t) dt = 3.052.$$

Entonces

$$P(X_{(7)} - X_{(5)} = 2) = P(X_{(2)} = 2) = \frac{(3.052)^2 e^{-3.052}}{2!} = 0.22,$$

que es prácticamente igual a la probabilidad obtenida anteriormente cuando asumíamos intensidad constante, como era de esperarse.

Ejemplo. Conclusiones

- Hemos analizado la información para averiguar cómo se comportan las conexiones de los usuarios durante el día completo.
- Usamos un modelo adecuado para el fenómeno que observamos, considerando el comportamiento de los usuarios durante distintos periodos de tiempo. Con esto, pudimos calcular probabilidades de usuarios conectados en distintos horarios del día, algo que puede ser de utilidad para la compañía.
- Con el modelo usado, podemos calcular los periodos donde hay mayor probabilidad de saturación, es decir, donde hay muchos usuarios conectados, y en base a esto, habilitar mayor número de líneas.

Ejemplo. Conclusiones

- Sin embargo, no sabemos aún cuántas conexiones están dejando de hacerse (intentos fallidos o usuarios rechazados) por la saturación del sistema (¿Cómo se les ocurre que podríamos averiguarlo?)
- Tampoco sabemos aún si la intensidad varía en ciertas temporadas del año
- Nos falta saber también cuál sería el número (óptimo) de líneas de conexión necesarias para aumentar la capacidad de servicio.

Referencias extras...

En el sitio del curso se incluyen dos referencias sobre la modelación del servicio en call centers.

La primera es una referencia ya clásica (**Telephone Call Centers Tutorial, Review, and Research Prospects**) y contiene un tutorial sobre modelos para la administración de la operación de un call center.

La segunda referencia (**Data-Driven Appointment-Scheduling Under Uncertainty The Case of an Infusion Unit in a Cancer Center**) incluye un enfoque moderno de un problema similar en un centro de cáncer.

Distribución Poisson

Nota Histórica

S. D. Poisson, en 1837 publicó un trabajo en el cual incluía el comportamiento límite de la distribución binomial:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Bin}(x; n, p) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad \text{con } p = \frac{\lambda}{n}, \lambda \text{ fija}$$

Ver [10] págs 193-201. Durante 50 años no atrajo el interés de nadie hasta que L. von Bortkiewicz lo incluyó en una publicación suya, y en la que usaba la distribución de Poisson para modelar un problema del mundo real. Bortkiewicz fue pionero en el uso de distribuciones de probabilidad como modelos de datos, que es precisamente lo que tratamos de hacer en este curso. Establecer modelos que sirven para describir situaciones que ocurren en el mundo real. La distribución Poisson apareció en libros de Leyes, como un medio para estudiar el comportamiento de las demandas legales.

Modelos de variables continuas

(Texto, Sección 2.4)

Variables continuas

Recuerda que en el caso de variables aleatorias continuas el patrón de comportamiento no puede deducirse de la forma como se realiza (condiciones) el muestreo, como en el caso discreto, sino que se basa en gran medida en

- Los supuestos que se hagan sobre la variable (características físicas, etc.).
- El comportamiento manifestado a través del experimento e interpretado con la ayuda de histogramas, diagramas de caja, polígonos de frecuencia, pruebas de bondad de ajuste, Q-Q plots, etc.

Distribución Uniforme continua

Distribución uniforme

- Es uno de los modelos mas simples. Modela problemas prácticos en los que no hay ninguna “preferencia” en cuanto a las probabilidades que puede tomar la v.a. de interés, en el sentido de que les asigna la misma probabilidad a cualquier intervalo del mismo tamaño que sea considerado.
- Tiene un gran uso en simulación de números aleatorios de otras distribuciones, en estadística Bayesiana y en problemas donde no se requiere plantear un modelo complejo desde el inicio, para poder dar respuesta a preguntas complejas, siempre y cuando la solución sea aceptable.
- La definición de la misma es sencilla. Se define el intervalo de interés (debe ser finito) y se asigna la misma probabilidad, esto es, si el intervalo es (a, b) , entonces el área debe ser uno, lo que nos fuerza a asignar una probabilidad de $\frac{1}{b-a}$ a todo el intervalo.

Distribución uniforme continua

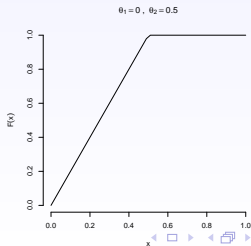
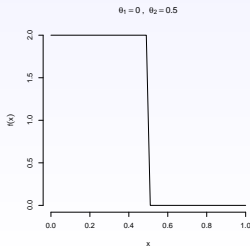
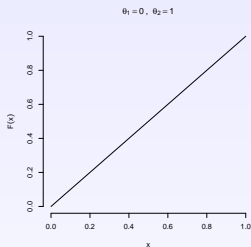
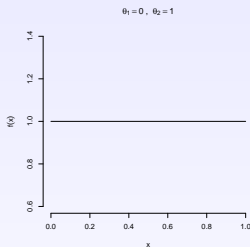
Definición (Distribución uniforme continua)

Una v.a. X tiene una distribución uniforme continua, denotada con $X \sim \text{Unif}(a, b)$ si y solo si su función de densidad de probabilidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b, \\ 0 & \text{otra parte.} \end{cases}$$

Distribución uniforme continua

En las gráficas siguientes, $\theta_1 = a$ y $\theta_2 = b$.



Distribución uniforme continua

Media y Varianza:

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b x \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx \\
 &= \left[\frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{2} \frac{b^2 - a^2}{b-a} = \frac{1}{2} \frac{(b+a)(b-a)}{b-a} \\
 &= \frac{b+a}{2} \quad (\text{y por intuición}).
 \end{aligned}$$

La media se puede obtener directamente de la gráfica: es el “punto de equilibrio” y es $\frac{a+b}{2}$.

Distribución uniforme continua

Media y Varianza:

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 \\
 &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{3} \frac{b^3 - a^3}{b-a} - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2} \right)^2 \\
 &= \frac{(a-b)^2}{12}.
 \end{aligned}$$

Distribución uniforme continua

Generatriz de momentos: Tenemos que,

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx = \int_a^b e^{tx} \frac{1}{b-a} dx \\
 &= \frac{1}{b-a} \int_a^b e^{tx} dx = \frac{1}{b-a} \frac{e^{tx}}{t} \Big|_a^b \\
 &= \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)}, \quad t \neq 0,
 \end{aligned}$$

en el caso cuando $t = 0$, utilizamos la regla de L'Hopital:

$$\lim_{t \rightarrow 0} M_X(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{be^{tb} - ae^{ta}}{(b-a)} = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Distribución uniforme continua

Por lo tanto,

$$M_X(t) = \begin{cases} \frac{e^{tb} - e^{ta}}{t(b-a)} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

En este caso, la f.g.m. es mas compleja de lo que nos gusta! y por lo general no recurrimos a ella salvo en algunos problemas de caracter más teóricos...

Distribución uniforme continua

Función de distribución acumulada.

Se calculó en el propedéutico:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \\ &= \begin{cases} 0 & x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & a < x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \end{aligned}$$

Esta representación es muy empleada, como veremos mas adelante.

Distribución uniforme continua

Ejemplo

Una persona llega los días hábiles a una estación del metro entre las 9 y las 9:15 de la mañana, y logra llegar a tiempo a su trabajo (cuando el metro no se retrasa). Proponer una distribución de probabilidad factible para las v.a. $X =$ tiempo de llegada entre las 9 y las 9:15, y calcular la probabilidad de que la persona llegue entre las 9:01 y las 9:05, y entre las 9:07 y las 9:11 a la estación del metro.

Supuesto: *El momento de llegada puede darse en cualquier minuto dentro del intervalo inicialmente considerado.*

Distribución uniforme continua

La persona no se preocupa por llegar en los primeros minutos después de las 9:00, o los últimos, etc. Se puede hacer un muestreo de los tiempos de llegada de la persona y analizar los datos mediante, por ejemplo, un histograma, para corroborar nuestro supuesto.

Entonces, $X \sim Unif(0, 15)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15} & 0 < x < 15 \\ 0 & \text{otra parte} \end{cases},$$

lo que implica que

$$P(1 < X < 5) = \int_1^5 \frac{1}{15} dx = \frac{4}{15}, \quad P(7 < X < 11) = \int_7^{11} \frac{1}{15} dx = \frac{4}{15}.$$

Distribución uniforme continua

- Observa que las probabilidades dependen solamente del tamaño del intervalo, no de su “localización”.
- Se ha dicho que la densidad uniforme sirve para generar números aleatorios de otras distribuciones. La generación de números aleatorios uniformes se puede hacer en casi todas las calculadoras de bolsillo y paquetes computacionales estadísticos. Los libros de simulación nos proveen con más de un algoritmo para su generación.
- Incluso uno puede generarlos mediante algún experimento como el de sacar números de una urna en forma aleatoria, que representen los dígitos de un número con n cifras con cierta cantidad de decimales, siempre y cuando la selección se haga aleatoriamente y que cada número tenga la misma probabilidad de salir (el muestreo es con reemplazo).

Distribución uniforme continua

Ejemplo

Se sabe que cierta v.a. X tiene una distribución $f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}$, $x > 0$.
Calcula:

- a) Su distribución acumulada $F_X(x)$.
- b) Defina la v.a. $Y = F_X(X)$ y calcula su distribución acumulada, es decir, $F_Y(y)$.
- c) Obtén la función de densidad $f_Y(y)$ utilizando el hecho de que $f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy}$.

Los subíndices se utilizan para distinguir a las funciones respectivas y para recalcar la distribución que se está manejando.

Distribución uniforme continua

- a) La función de distribución acumulada ya fue calculada en el capítulo de conceptos básicos (con $\beta = 2$),

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{1}{2}x} & x > 0 \end{cases}.$$

Distribución uniforme continua

- b) Definimos $Y = F_X(X) = 1 - e^{-\frac{1}{2}X}$. Observa que $0 < y < 1$, ya que $0 < F_X(x) < 1$, ya que es una probabilidad. Entonces,

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(1 - e^{-\frac{1}{2}X} \leq y) = P(X \leq -2 \log(1 - y)) \\&= F_X(x = -2 \log(1 - y)) = 1 - e^{-\frac{1}{2}(-2 \log(1 - y))} \\&= 1 - e^{\log(1 - y)} = 1 - (1 - y) \\&= y\end{aligned}$$

- c) Derivando obtenemos que

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{d}{dy}(y) = 1, \quad \text{con } 0 < y < 1.$$

Distribución uniforme continua

Observa en el ejemplo anterior que Y tiene una f.d.p. $Unif(0, 1)$, esto es,

$$f(y) = \begin{cases} 1 & 0 < y < 1 \\ 0 & \text{otra parte} \end{cases}.$$

Entonces, si se pudieran generar números aleatorios $Y \sim Unif(0, 1)$, se podría utilizar $Y = 1 - e^{-\frac{1}{2}X}$ para generar números aleatorios X simplemente despejándola.

Distribución uniforme continua

Ejercicio

- i) *Crea una columna con 100 valores de una $Unif(0, 1)$ en el software de tu preferencia.*
- ii) *Construye otra columna con la fórmula^a*

$$x = -2 \log(1 - y)$$

- iii) *Construye el histograma de esta nueva columna y concluye.*

$$^a y = 1 - e^{-\frac{1}{2}X} \Rightarrow 1 - y = e^{-\frac{1}{2}X} \Rightarrow -\frac{1}{2}X = \log(1 - y) \Rightarrow x = -2 \log(1 - y)$$

Distribución uniforme continua

De hecho, este ejemplo es un caso particular de un teorema importante que se menciona a continuación.

Teorema (Teorema de la transformación integral de probabilidad)

Sea X una v.a. continua con función de distribución acumulada $F_X(x)$, y definamos la v.a. Y como $Y = F_X(X)$. Entonces Y tiene una distribución $Unif(0, 1)$, esto es, $F_Y(y) = y$.

Distribución uniforme continua

Demostración

Tenemos que, para $0 < y < 1$,

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(F_X(X) \leq y) = P(X \leq F_X^{-1}(y)) \\&= F_X(F_X^{-1}(y)) = y,\end{aligned}$$

de donde vemos que la distribución acumulada de Y corresponde a la distribución acumulada de una v.a. $\text{Unif}(0, 1)$, como se quería demostrar.

Este resultado es útil cuando $F(x)$ es una función de la cual podemos despejar a x , algo que no siempre es posible, como veremos para muchos de los modelos del catálogo. Sin embargo, modificaciones de esta idea base siguen ayudando en simulación de variables aleatorias.

El modelo Normal o Gaussiano

El modelo Normal o Gaussiano

Pues bien, las cosas comenzaron allá por los 1700. La historia alrededor de la distribución normal podría titularse: “Las aventuras de la distribución normal. Surgimiento, fama y abuso.” Sin exagerar, se podría decir que esta distribución es *la piedra angular de la estadística*, y tendremos oportunidad de comprobarlo. A manera de introducción veremos un poco de esa fascinante historia.

Aparte de la aproximación límite de Poisson a la binomial, se había derivado otra en una publicación de 1718 a manos de DeMöivre, y que posteriormente retomó y generalizó Laplace en 1812.

El modelo Normal o Gaussiano

Teorema (DeMöivre-Laplace)

Sea X una v.a. binomial definida en n pruebas independientes, cada una con probabilidad de éxito p . Para cualquiera par de números c y d ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(c < \frac{X - np}{\sqrt{npq}} < d \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^d e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Como puedes ver, se encontró que una probabilidad binomial, en un caso límite, puede ser calculada como el área bajo la curva $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$.

Entonces, en sí misma, ésta curva debería representar una f.d.p. En efecto, la función así definida cumple con todas las propiedades de una f.d.p. para $-\infty < z < \infty$.

El modelo Normal o Gaussiano

La función se hizo tan popular en la descripción de una gran variedad de fenómenos que se acostumbró llamarla “la distribución normal”. Es tan usada que incluso en ocasiones *pecamos* de querer ajustar la función a fenómenos que no tienen ese comportamiento (**warning**).

Una de las primeras aplicaciones es debida a K.F. Gauss publicada en 1809, quien la utilizó para modelar los errores observados en la astronomía. Posteriormente fue L.A. Quetelet el que “arrebato” la “exclusividad” de su uso a los físicos, ya que mostró su aplicación en el campo de la sociología y fenómenos antropológicos.

El modelo Normal o Gaussiano

Definición

Una v.a. Z tiene una distribución **Normal estándar** si su f.d.p. está dada por

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}, \quad -\infty < z < \infty.$$

El modelo Normal o Gaussiano

De entre sus muchas propiedades podemos señalar:

- Es simétrica alrededor de un eje vertical que pasa por $z = 0$.
- Su mediana coincide con su media, es decir, $m = \mu = 0$.
- Su varianza es 1 y tiene puntos de inflexión en ± 1 .
- Su valor máximo ocurre en $z = 0$ y es $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

- $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1.$$

12 videos sobre como calcular la integral:

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLJb1qAQIrrmmCgLyHWMXGZnioRHLqOk2bW>

El modelo Normal o Gaussiano

De entre sus muchas propiedades podemos señalar:

- La integral $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$, que representa $P(a \leq Z \leq b)$, con a y b números reales, no puede evaluarse analíticamente; esto es, no tiene una antiderivada, solo puede hacerse mediante métodos numéricos. Ya en épocas de DeMöivre se calculaba de esa manera. Nosotros usaremos software que tiene implementado tales métodos.
- La distribución acumulada es $F_Z(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} du$ y se denota con $\Phi(z)$.

El modelo Normal o Gaussiano

Media y Varianza.

El valor esperado de Z es

$$\mu = E(Z) = \int_{-\infty}^{\infty} z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,$$

ya que el integrando es una función impar (si lo deseas puedes integrar mediante un cambio de variable).

Su varianza es

$$\sigma^2 = V(Z) = E((z - \mu)^2) = E(z^2) = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 1,$$

la cual se obtiene integrando por partes dos veces.

El modelo Normal o Gaussiano

Entonces, la media y la varianza son cero y uno respectivamente, esto se escribe abreviadamente como

$$Z \sim N(0, 1);$$

en palabras, Z tiene una distribución normal estándar con media cero y varianza uno. El uso de la letra Z para una v.a. normal estándar se ha generalizado en la literatura.

Función generatriz de momentos:

Tenemos que

$$M_Z(t) = E(e^{tz}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

El modelo Normal o Gaussiano

Este es un buen momento para hacerte una recomendación respecto al cálculo de integrales que se ven complicadas: trata de **identificar** la integral que estés resolviendo con alguna que hayas manejado anteriormente, haciendo las analogías necesarias puedes obtener su valor.

Por ejemplo, teníamos que

$$M_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2 + tz} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z^2 - 2tz)} dz,$$

El modelo Normal o Gaussiano

completando el cuadrado y separando,

$$\begin{aligned}M_Z(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(z^2 + 2tz + \left(\frac{2t}{2}\right)^2 - \left(\frac{2t}{2}\right)^2\right)} dz \\&= e^{\frac{1}{2}t^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z+t)^2} dz \\&= e^{\frac{1}{2}t^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}u^2} du \\&= e^{\frac{1}{2}t^2} (1) = e^{\frac{1}{2}t^2},\end{aligned}$$

donde se usa el hecho de que la última integral es uno, ya que es como si U fuera una v.a. con distribución normal estándar, y al integrarla desde $-\infty$ a ∞ el resultado es 1.

El modelo Normal o Gaussiano

Variable aleatoria normal con cualquier media y varianza.

Cada problema tiene su distribución propia. En particular, tiene su asociada una media μ y una varianza σ^2 propias.

Tenemos que la medida de localización μ y la medida de dispersión σ sirven para trasladar o escalar las funciones mediante alguna transformación (¿recuerdas la expresión $\frac{X-\mu}{\sqrt{V(X)}}$?).

En la siguiente transformación haremos uso de esas ideas con el fin de generalizar la distribución normal estándar y no estar sujetos a problemas en que la media sea cero y la varianza uno.

El modelo Normal o Gaussiano

Queremos trasladar la distribución normal estándar de forma tal que su media no sea cero, y escalarla de tal forma que su varianza no sea uno. Consideremos la siguiente transformación:

$$X = Z\sigma + \mu.$$

El valor esperado de la v.a. X es

$$E(X) = E(Z\sigma + \mu) = \sigma E(Z) + \mu = 0 + \mu = \mu,$$

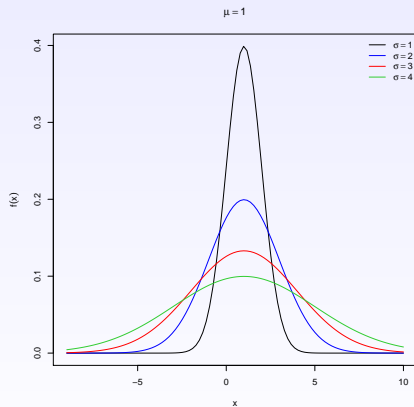
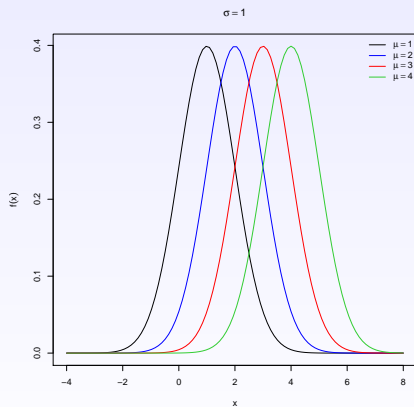
y su varianza

$$V(X) = V(Z\sigma + \mu) = \sigma^2 V(Z) = \sigma^2(1) = \sigma^2.$$

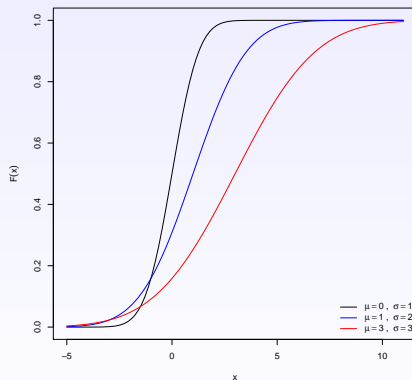
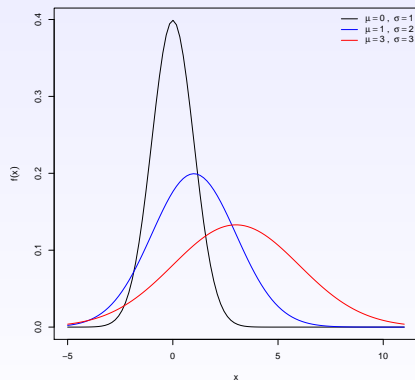
El modelo Normal o Gaussiano

Entonces, la media y la varianza de $X = Z\sigma + \mu$ son, respectivamente, μ y σ^2 . Dado que solo se está recorriendo y escalando la función original, la gráfica de esta nueva variable tendrá la misma forma (campana), solo que no estará centrada en cero, y tal vez esté mas “chata” o mas “espigada”.

El modelo Normal o Gaussiano



El modelo Normal o Gaussiano



El modelo Normal o Gaussiano

Entonces, cabe la pregunta: si para calcular probabilidades con la normal estándar teníamos que evaluar la integral respectiva numéricamente, ¿cómo haremos con la variable $X = Z\sigma + \mu$?

Observa que se puede despejar Z de esta relación: $\frac{X - \mu}{\sigma} = Z$. Entonces

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

En desigualdades como la anterior, si realizamos la misma operación en cada término a , X y b , la desigualdad resultante es totalmente equivalente a la original (respetando el sentido de la desigualdad si se multiplica por un número positivo y cambiando el sentido si se multiplica por un número negativo).

El modelo Normal o Gaussiano

Entonces, calcular una probabilidad para X se reduce a calcular una probabilidad para Z :

$$\begin{aligned}P(a \leq X \leq b) &= P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) \\&= \int_{\frac{a - \mu}{\sigma}}^{\frac{b - \mu}{\sigma}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \\&= P\left(Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right) - P\left(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right) \\&= F_Z\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - F_Z\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right) \\&= \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

El modelo Normal o Gaussiano

Podemos expresar lo anterior de la siguiente manera: si X se distribuye como una normal estándar escalada y recorrida, digamos “acampanada”, y deseamos calcular probabilidades para X , utilizaremos la distribución normal estándar, simplemente restando μ y dividiendo por σ , esto es, “relocalizando” y escalando la v.a. X adecuadamente, esto es, **estandarizando**.

De hecho, la distribución de $X = Z\sigma + \mu$ es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

con media μ y varianza σ^2 , y se dice que se distribuye normal con parámetros μ y σ .

Notación: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

El modelo Normal o Gaussiano

La generatriz de momentos es

$$\begin{aligned}M_X(t) &= M_{Z_{\sigma+\mu}}(t) = e^{\mu t} M_Z(t\sigma) \\&= e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}(t\sigma)^2} \\&= e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2},\end{aligned}$$

donde usamos la propiedad demostrada en conceptos básicos.

$$M_{\frac{X-a}{b}}(t) = M_{X-\frac{a}{b}}\left(\frac{t}{b}\right) = e^{-\frac{a}{b}} M_X\left(\frac{t}{b}\right),$$

con $\frac{1}{b} = \sigma$, $-\frac{a}{b} = \mu$.

El modelo Normal o Gaussiano

Observación: se pudieron haber usado otras letras en $X = Z\sigma + \mu$, por ejemplo, $X = Z\alpha + \delta$, el resultado para la media y la varianza hubiera sido $E(X) = \delta$, $V(X) = \alpha^2$, pero como la notación usual es μ y σ^2 , se pensó en usar sus símbolos desde el inicio (porque ya se sabía la respuesta). Cabe comentar que la notación $N(\mu, \sigma^2)$ puede variar, algunos autores usan $N(\mu, \sigma)$.

El modelo Normal o Gaussiano

Ejemplo

Se tiene un proceso industrial donde se producen baleros y se toma la medición de su diámetro. La especificación del producto toma como bueno un balero con diámetro en el rango 3.0 ± 0.01 cm. Si la variable diámetro se puede considerar normal con media $\mu = 3$ y $\sigma = 0.005$.

- a) *¿Qué proporción de baleros caen dentro de especificación?*
- b) *Se realiza una investigación en la que es necesario revisar el 5 % de los producidos a la izquierda de 3.01. ¿A partir de qué valor de la v.a. X se efectuaría esta revisión?*

El modelo Normal o Gaussiano

Sea la v.a. X el diámetro de un balero producido. Se sabe que $X \sim N(3, 0.005^2)$, entonces nos están preguntando el porcentaje de baleros que caen dentro de los límites de especificación; esto es,

$$\begin{aligned} P(3 - 0.01 < X < 3 + 0.01) &= P(2.99 < X < 3.01) \\ &= P\left(\frac{2.99 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{3.01 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(\frac{2.99 - 3}{0.005} < Z < \frac{3.01 - 3}{0.005}\right) \\ &= P(-2 < Z < 2) \\ &= 0.9544. \end{aligned}$$

Por lo tanto la proporción de baleros que caen dentro de las especificaciones es 95.44 %.

El modelo Normal o Gaussiano

Observa que coincide con la regla empírica con $k = 2$.

En la segunda pregunta se pide un valor x_p tal que

$$P(X > x_p) = 0.05 + P(X > 3.01) = 0.05 + 0.0228,$$

entonces el 5 % de los datos a la izquierda del límite superior corresponde a un valor de X tal que

$$P(X < x_p) = 1 - (0.05 + 0.0228) = 0.9272.$$

Si estandarizamos,

$$P(X < x_p) = P(Z < z_p) = 0.9272,$$

de tablas obtenemos que $z_p = 1.455$, de donde $x_p = z_p\sigma + \mu = 1.455(0.005) + 3 = 3.0072$. La cantidad $z_p(x_p)$ es llamado percentil y ésta forma de encontrarlos se usa exhaustivamente (dada la probabilidad, hallar los valores de la variable).

El modelo Normal o Gaussiano

Ejercicio

Se han realizado ciertas pruebas de resistencia en ladrillos obteniéndose las mediciones que a continuación se muestran, agrupadas en una tabla de frecuencias.

Interv.	De	Hasta	Frecuencia	Frec. relativa (%)
1	28.70	32.65	5	5.56
2	32.65	36.60	6	6.67
3	36.60	40.55	11	12.22
4	40.55	44.50	17	18.89
5	44.50	48.45	19	21.11
6	48.45	52.40	19	21.11
7	52.40	56.35	7	7.78
8	56.35	60.30	2	2.22
9	60.30	64.25	3	3.33
10	64.25	68.20	1	1.11

El modelo Normal o Gaussiano

Ejercicio (continúa...)

- a) Traza el histograma.
- b) Calcula la probabilidad de cada intervalo de clase de la tabla de frecuencias, asumiendo que las resistencias siguen una distribución normal con media 45.47 y varianza 58.19.
- c) Compara las frecuencias relativas con las probabilidades bajo normalidad ¿Qué se puede concluir? Esta es la idea base de una prueba de Bondad de Ajuste conocida como χ^2 de Pearson. Si la media y varianza de la normal no se conocen de antemano, podemos usar los valores muestrales correspondientes como una aproximación de los mismos. A esto lo llamamos estimación de parámetros y ya hablaremos más adelante de las cualidades de los estimadores.

El modelo Normal o Gaussiano

La normal truncada.

Ejemplo

Supón que se fabrica cierto tipo de perno, su longitud Y es una v.a. con distribución $N(2.2, 0.01)$. De un gran lote de estos pernos se saca un nuevo lote, descartando todos aquellos para los cuales $Y > 2$. Obtén la distribución de probabilidad de X , la v.a. que representa el largo de los pernos en el nuevo lote.

El modelo Normal o Gaussiano

Si encontramos $F(x)$, su distribución acumulada, podremos obtener $f(x)$ derivando. Se podría pensar a X como igual a Y excepto porque la probabilidad de que X sea mayor a 2 es cero:

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= \begin{cases} P(Y \leq x | Y \leq 2) = 1 & \text{si } x > 2 \\ P(Y \leq x) / P(Y \leq 2) & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

El modelo Normal o Gaussiano

- El primer renglón se considera cuando el valor de x está a la derecha de 2, en tal caso se sabe que Y no puede ser mayor que 2, esto es, $Y \leq 2$ en el nuevo lote. Por lo tanto, $P(X \leq 2)$ debe calcularse como la probabilidad de que Y sea menor que x dado que $Y \leq 2$: $P(Y \leq x | Y \leq 2)$, pero esta probabilidad es 1, ya que en el nuevo lote, todos miden menos de 2.
- El segundo renglón se puede visualizar como una “frecuencia relativa”, casos posibles entre casos totales, para el caso continuo.

El modelo Normal o Gaussiano

Derivando:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{d}{dx} P(X \leq x) \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x > 2 \\ \frac{d}{dx} P(Y \leq x) / P(Y \leq 2) & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x > 2 \\ \frac{d}{dx} \left(\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}(.1)} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{y-2.2}{.1} \right)^2} dy \right) / P(Y \leq 2) & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x > 2 \\ \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}(.1)} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-2.2}{.1} \right)^2} \right) / \Phi(-2) & \text{si } x \leq 2 \end{cases},
 \end{aligned}$$

El modelo Normal o Gaussiano

donde usamos el Teorema Fundamental del cálculo: $\frac{d}{dx} \int_a^x f(u)du = f(x)$,
y la función de probabilidad acumulada de la normal estándar

$$\Phi(z) = P(Y \leq 2) = F_Y(2) = \Phi\left(\frac{2-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{2-2.2}{0.1}\right) = \Phi(-2).$$

La media y la varianza de esta nueva v.a. que se genera al descartar ciertos valores de la v.a. original, depende de si el truncamiento es a la derecha, a la izquierda o en ambas partes. En nuestro ejemplo, el truncamiento se hizo a la derecha.

El modelo Normal o Gaussiano

Queremos recalcar el hecho del cambio de estas cantidades. Supongamos que en un proceso, un producto tiene una distribución normal con varianza σ^2 . Al rechazar sistemáticamente productos a partir de cierto valor, la varianza de los productos seleccionados no coincidirá con la correspondiente al proceso, sino que será menor. Intuitivamente es así, ya que se está disminuyendo el rango de variación: la nueva variable en nuestro ejemplo va de $-\infty$ a 2, y antes iba de $-\infty$ a ∞ .

Si un comprador realiza una investigación acerca de la variabilidad del producto recibido, obtendrá una idea falsa de la misma en caso de no estar consciente del truncamiento, esto es, debido al truncamiento la variabilidad medida sobre el producto recibido, no corresponde a la verdadera varianza del proceso. Por esa razón, muchas veces preferimos saber cuál es la capacidad del proceso (si es que puede ser obtenida). Para más información de la normal truncada, ver las lecturas de apoyo.

El modelo Normal o Gaussiano

En el documento **Mean and Variance of Truncated Normal Distributions**, subido en el site del curso, se presenta el cálculo de la media y la varianza para la normal truncada.

Implementación de Q-Q Plots

Q-Q plots

Las gráficas Quantile-Quantile (QQ) son útiles para comparar funciones de distribución.

Definición

Sea X una v.a. con función de distribución (fd) F . La fd inversa o función de cuantiles es

$$F^{-1}(x) = \inf \{x : F(x) > q\},$$

para que $q \in [0, 1]$. Si F es estrictamente creciente, entonces el p -ésimo cuantil es el único número real x tal que

$$F(x) = p,$$

o equivalentemente

$$x_p = F^{-1}(p).$$

Q-Q plots

Sea X una v.a. continua con fd F_X y definamos $Y = aX + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Denotemos con F_X^{-1} la función de cuantiles de X . Observemos lo siguiente

$$\begin{aligned} F_Y(y) = p &\Leftrightarrow P(aX + b \leq y) = P(X \leq (y - b)/a) = p \\ &\Leftrightarrow F_X((y - b)/a) = p, \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$F_Y^{-1}(p) = aF_X^{-1}(p) + b.$$

Función de distribución empírica

Un primer problema de inferencia consiste en la estimación no paramétrica de la función de distribución empírica (fde) de F . Sea $X_1, \dots, X_n \sim F$ una muestra independiente e idénticamente distribuida (iid), donde F es una fd sobre la recta real. Estimaremos F con la fde que se define a continuación.

Definición

La fde \hat{F}_n es la función de distribución acumulada que asigna masa $1/n$ en cada punto X_i . Formalmente,

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}}}{n},$$

donde

$$1_{\{X_i \leq x\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } X_i \leq x \\ 0 & \text{si } X_i > x \end{cases}$$

Función de distribución empírica

Teorema

En cualquier valor fijo x ,

$$\begin{aligned} E(\hat{F}_n(x)) &= F(x) \\ \text{Var}(\hat{F}_n(x)) &= \frac{F(x)(1-F(x))}{n} \rightarrow 0 \\ \hat{F}_n(x) &\xrightarrow{P} F(x). \end{aligned}$$

Teorema (Glivenko-Cantelli)

Sean $X_1, \dots, X_n \sim F$. Entonces

$$\sup_x |\hat{F}_n(x) - F(x)| \xrightarrow{P} 0$$

Función de distribución empírica

Las gráficas Q-Q son una herramienta visual extremadamente útil para establecer cualitativamente el ajuste de un conjunto de datos a una distribución teórica.

Supongamos que la hipótesis de que X sigue cierta distribución F es de interés. Dada una muestra X_1, \dots, X_n , y usando el teorema de Glivenko-Cantelli, tenemos un buen estimador de la distribución de estos datos:

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}}}{n} \xrightarrow{P} F(x).$$

Función de distribución empírica

Entonces, graficando

$$F(x) \text{ vs } \hat{F}_n(x)$$

para x apropiados, podremos determinar visualmente la validez de la hipótesis.

Sea $x_{(i)}$ el i -ésimo estadístico de orden, entonces

$$\hat{F}_n(x_{(i)}) = \frac{\sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x_{(i)}\}}}{n} = \frac{i}{n},$$

Función de distribución empírica

podemos intentar graficar el PP plot

$$F(x_{(i)}) \text{ vs } \frac{i}{n},$$

o el QQ plot

$$x_{(i)} \text{ vs } F^{-1}\left(\frac{i}{n}\right) = q_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sin embargo, esto no es del todo correcto. ¿Por qué?

Operativamente, debemos graficar

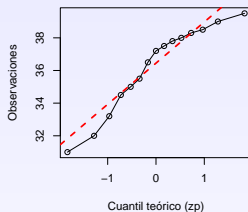
$$x_{(i)} \text{ vs } F^{-1}\left(\frac{i}{n+1}\right), \quad i = 1, \dots, n.$$

Función de distribución empírica

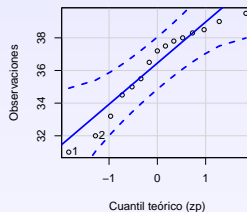
x_i	rango= i	$p_i = \frac{i}{n+1}$	$z_{p_i} = q_i$ tal que $P(Z \leq z_{p_i}) = p_i$
31	1	0.0625	-1.53412
32	2	0.125	-1.15035
33.2	3	0.1875	-0.88715
34.5	4	0.25	-0.67449
35	5	0.3125	-0.48878
35.5	6	0.375	-0.31864
36.5	7	0.4375	-0.15731
37.2	8	0.5	0
37.5	9	0.5625	0.157311
37.8	10	0.625	0.318639
38	11	0.6875	0.488776
38.3	12	0.75	0.67449
38.5	13	0.8125	0.887147
39	14	0.875	1.150349
39.5	15	0.9375	1.534121

Función de distribución empírica

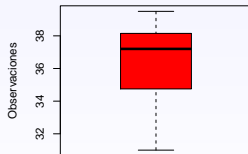
Normal Q-Q Plot



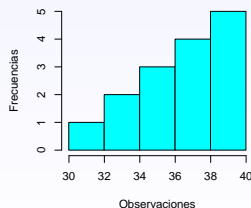
Bandas de confianza para Q-Q plot



Boxplot



Histograma



Función de distribución empírica

En el caso del ajuste de una Normal, no se grafica directamente el percentil sino su valor estandarizado, por lo que solo interesa ver una recta aunque no sea de 45º -así evitamos el cálculo de parámetros.

$$(\bar{X}, s^2) \rightarrow (\mu, \sigma^2)$$

$$Z_{p_i} = \frac{y_i - \bar{X}}{s} \quad \text{VS.} \quad X_i$$

El modelo exponencial y Gamma

El modelo exponencial

El modelo exponencial. El modelo exponencial es muy común en la descripción del comportamiento de tiempos de espera, crecimiento de poblaciones, tiempos de vida, etcétera.

Definición

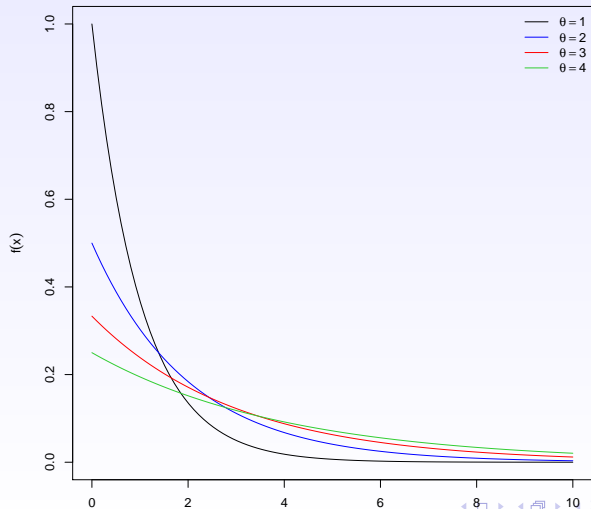
Sea X una v.a. continua. Decimos que X se distribuye de acuerdo a una ley exponencial con parámetro θ si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Notación: $X \sim \exp(\theta)$.

Observa que antes habíamos usado β en lugar de θ . ¡En gustos se rompen géneros!

El modelo exponencial



El modelo exponencial

Ahora calculemos media, varianza y función generatriz de momentos solo por completez de la presentación.

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_0^{\infty} x \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx; & u = x & \quad dv = \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx \\
 & & du = dx & \quad v = -e^{-x/\theta} \\
 &= -xe^{-x/\theta} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \left(-e^{-x/\theta} \right) dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{-x/\theta} dx \\
 &= -\theta e^{-x/\theta} \Big|_0^{\infty} \\
 &= \theta
 \end{aligned}$$

$$\therefore E(X) = \theta$$

El modelo exponencial

$$\begin{aligned}
 E(X^2) &= \int_0^{\infty} x^2 \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx; & u &= x^2 & dv &= \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx \\
 & & du &= 2x dx & v &= -e^{-x/\theta} \\
 &= -x^2 e^{-x/\theta} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-x/\theta} (2x) dx \\
 &= 2 \int_0^{\infty} x e^{-x/\theta} dx; & u &= 2x & dv &= e^{-x/\theta} dx \\
 & & du &= 2 dx & v &= -\theta e^{-x/\theta} \\
 &= -2x\theta e^{-x/\theta} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -\theta e^{-x/\theta} 2 dx \\
 &= \int_0^{\infty} 2\theta e^{-x/\theta} dx \\
 &= 2\theta \left(-\theta e^{-x/\theta} \right) \Big|_0^{\infty} = 2\theta^2
 \end{aligned}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 2\theta^2 - \theta^2 = \theta^2$$

$$\therefore V(X) = \theta^2.$$

El modelo exponencial

$$\begin{aligned}
 M_x(t) &= E(e^{tx}) = \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\theta} e^{-x/\theta} dx \\
 &= \frac{1}{\theta} \int_0^{\infty} e^{tx - \frac{x}{\theta}} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^{\infty} e^{x(t - \frac{1}{\theta})} dx \\
 &= \frac{1}{\theta} \left. \frac{e^{(t - \frac{1}{\theta})x}}{t - \frac{1}{\theta}} \right|_0^{\infty} = -\frac{1}{\theta} \frac{1}{t - \frac{1}{\theta}} \\
 &= -\frac{1}{\theta(t - \frac{1}{\theta})} \\
 &\quad t - \frac{1}{\theta} < 0 \\
 &= \frac{1}{1 - \theta t} = (1 - \theta t)^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\therefore M_x(t) = (1 - \theta t)^{-1} \text{ para } t < \frac{1}{\theta}.$$

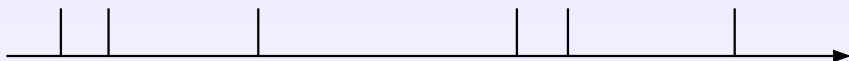
El modelo exponencial

Notas:

- La variable aleatoria exponencial está ligada fuertemente con la v.a. Poisson. Cuando la v.a. Poisson cuenta el número de ocurrencias de un cierto evento en un periodo de tiempo fijo, el tiempo que pasa entre una ocurrencia y la siguiente es una v.a. exponencial. Así, si consideramos un proceso Poisson (λ) en cierto intervalo dado, y cronometramos el tiempo entre éxitos consecutivos, podemos observar que:

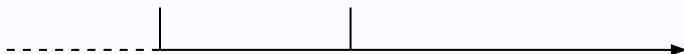
El modelo exponencial

En el proceso Poisson los éxitos se presentan aleatoriamente en el intervalo bajo estudio



Se pueden presentar éxitos previos pero al momento de ocurrir uno pone el reloj en ceros y comienza el conteo de nuevo

éxito



El modelo exponencial

Sea T el tiempo hasta observar el siguiente éxito. Notemos que

$$\begin{aligned}
 P(T > t) &= P(\text{no se ha observado ningún éxito en el intervalo } (0, t)) \\
 &= P(X = 0 | X \sim P(\lambda t)) \text{ la media del proceso Poisson se ajusta al intervalo } (0, t) \\
 &= \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^0}{0!} \\
 &= e^{-\lambda t}.
 \end{aligned}$$

De aquí que $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Esto es, $F_T(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, y por lo tanto, $f_T(t) = \frac{d}{dt} F_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.

El modelo exponencial

De aquí concluimos que

$$T \sim \text{Exp}(\theta = 1/\lambda).$$

Al revés también es válida, si el tiempo entre ocurrencias es exponencial entonces el número de ocurrencias en un tiempo fijo es Poisson.

El modelo exponencial

Al igual que con la distribución geométrica, el modelo exponencial es empleado cuando el fenómeno bajo estudio es estable, esto es, cuando los eventos se presentan por azar y no por causas sistemáticas.

Es decir, si modelamos los tiempos de vida de una batería LTalgo, esperaríamos que las fallas no se presenten siguiendo un patrón fijo; esto es, que el proceso de donde vienen esté trabajando bajo condiciones homogéneas en la producción de todas ellas. Entonces, deberá verificarse que esta variable exponencial tampoco “tiene memoria”.

El modelo exponencial

En efecto, denotemos con

A = el evento de que *la batería dure mas de $t_1 + t_2$ meses, dado que sabemos que ya ha funcionado por t_1 meses.*

Entonces,

$$\begin{aligned}
 P(A) &= P(X > t_1 + t_2 | X > t_1) = \frac{P(X > t_1 + t_2 \text{ y } X > t_1)}{P(X > t_1)} \\
 &= \frac{P(X > t_1 + t_2)}{P(X > t_1)} = \frac{1 - F_X(t_1 + t_2)}{1 - F_X(t_1)} = \frac{1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{t_1 + t_2}{\theta}\right)}\right)}{1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{t_1}{\theta}\right)}\right)} \\
 &= e^{-\left(\frac{t_2}{\theta}\right)} = 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{t_2}{\theta}\right)}\right) = 1 - F_X(t_2) \\
 &= P(X > t_2) \\
 &= P(\text{la batería dure más de } t_2 \text{ meses}).
 \end{aligned}$$

El modelo exponencial

- Bajo este esquema, a $1 - F_X(t) = P(X > t) = R(t)$ se le conoce como la **confiabilidad** de X .

Notemos que $R(0) = 1$ y $R(\infty) = 0$. Mide “lo que queda de vida al tiempo t ”.

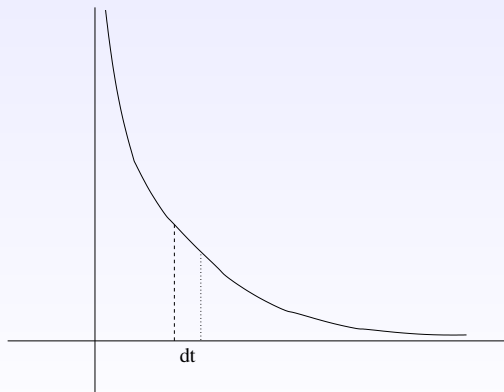
La **función de riesgo** (hazard function) o **tasa de fallo** se define como

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)},$$

y cuando se considera sobre un intervalo de tiempo muy pequeño, se le puede interpretar como la **probabilidad instantánea de fallo**.

El modelo exponencial

Nota que $h(t)$ puede tomar valores mayores a 1, es decir, $h(t)$ no es una probabilidad. En efecto,



El modelo exponencial

Sea

$$\Delta(t) = (t, t + dt).$$

Entonces,

$$f(t)|\Delta(t)| \approx P(T \in (t, t + dt)).$$

Ahora, como

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

se sigue que

$$h(t)|\Delta(t)| \approx \frac{P(T \in (t, t + dt))}{P(T > t)} = P(T \in (t, t + dt) | T > t),$$

que es conocida como la tasa instantánea de falla.

El modelo exponencial

$h(t)\Delta(t) \approx$ la probabilidad de que se presente una “falla” al tiempo $t + dt$ dado que al tiempo t no ha habido fallas.

En el caso particular del modelo exponencial,

$$h(t) = \frac{1}{\theta} \frac{e^{-\frac{t}{\theta}}}{e^{-\frac{t}{\theta}}} = \frac{1}{\theta}$$

que es una constante.

Ver gráficas sobre el comportamiento esperado de funciones de riesgo.

El modelo exponencial

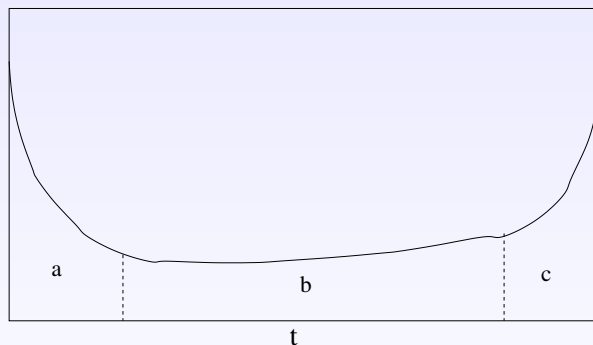


Figura: Gráfica de "tina de baño". (a) etapa de ajuste inicial o "mortalidad infantil". (b) etapa constante. (c) etapa de desgaste o envejecimiento.

El modelo exponencial

Si uno piensa en términos de la vida de seres humanos, es claro el comportamiento de la tasa de riesgo.

La distribución exponencial es válida para modelar la parte en donde se espera que si una falla se presenta es por azar o “accidente”, la parte plana de la gráfica anterior.

El modelo exponencial

Ejemplo

Una larga experiencia con abanicos de cierta marca usados con motores diesel ha sugerido que el modelo exponencial es suficientemente bueno para describir el tiempo a la falla de dichos abanicos. También se ha visto que el tiempo medio a la falla es de 25000 horas.

- a) *Para un abanico seleccionado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que dure entre 20000 y 30000 horas?*
- b) *Dado que se sabe que ha durado 10000 horas, ¿cuál es la probabilidad de que dure mas de 30000?*
- c) *¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de vida del abanico exceda el valor medio en más de una desviación estándar? ¿En más de 2 desviaciones estándar?*

El modelo exponencial

Solución: Sea X el tiempo a la falla del abanico, $x > 0$. $E(X) = \theta = 25$ (en miles por hora).

a)

$$\begin{aligned} P(20 < X < 30) &= \int_{20}^{30} \frac{1}{25} e^{-x/25} dx = F(39) - F(20) \\ &= 1 - e^{-30/25} - (1 - e^{-20/25}) = 0.148 \end{aligned}$$

b) $P(X > 30 | X > 10) = P(X > 20) = e^{-20/25} = 0.449$

El modelo exponencial

e) Sabemos que $E(X) = 25$ y $\sqrt{V(X)} = \sqrt{\theta^2} = 25$. Sea el evento

$A = \{\text{el tiempo de vida del abanico excede el valor medio en más de una desviación estándar}\}.$

Entonces

$$P(A) = P(X > 50) = e^{-50/25} = 0.135,$$

y además, para el evento

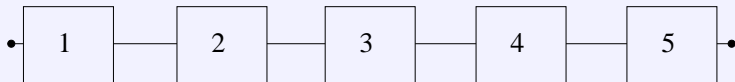
$B = \{\text{el tiempo de vida del abanico excede el valor medio en más de dos desviaciones estándar}\}.$

$$P(B) = P(X > 75) = e^{-75/25} = 0.05.$$

El modelo exponencial

Ejercicio

Consideremos un sistema formado por 5 componentes idénticos conectados en serie tal como se muestra a continuación:



Tan pronto como un componente falla, el sistema completo falla. Supongamos que cada componente sigue un modelo de tiempo a la falla exponencial con $\theta = 100$, y que los componentes fallan en forma independiente una de la otra. Definamos los eventos

$$A_i = \{i - \text{ésimo componente dura al menos } t \text{ horas}\}, i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

El modelo exponencial

Ejercicio (continua...)

Las A_i 's son independientes e idénticamente distribuidas. Sea X el tiempo de la falla del sistema.

- a) El evento $\{X \geq t\}$, ¿a cuál evento, en términos de las A_i 's, es equivalente?*
- b) Usando la independencia de las A_i 's, calcula $P(X \geq t)$. Obtén $F(t) = P(X \leq t)$. ¿Cuál es la distribución de X ?*
- c) Si en lugar de 5 componentes tenemos n , ¿cuál es la distribución de X ?*

El modelo exponencial

Ejemplo

*Supongamos ahora que tenemos un inventario de 6 componentes claves (un paquete) de un cierto sistema. El **tiempo a la falla de cada componente sigue un modelo exponencial con $\theta = 1$ (en cientos de horas)**, y podemos asumir que se comportan de forma **independiente**. Cuando el componente en el sistema falla es reemplazado en forma inmediata por uno del almacén.*

Si los tiempos empleados en el cambio son suficientemente pequeños para ignorarlos, ¿cuál es la distribución del tiempo a la falla del sistema? Con esto podríamos calcular el tiempo de vida medio y así saber cuándo debe volver a surtir para que el sistema no se detenga por causa de este componente.

El modelo exponencial

Solución: Sea $X = \sum_{i=1}^6 X_i$ la suma de los tiempos de vida de cada componente, donde $X_i \sim \exp(\theta = 1)$, que además son independientes.

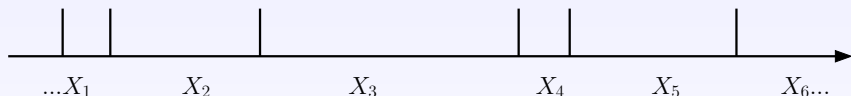


Figura: Proceso Poisson. Los éxitos ocurren en forma aleatoria sobre el intervalo de definición.

El modelo exponencial

Entonces, claramente $E(X) = \sum_{i=1}^6 E(X_i)$, pero ¿cuál es la distribución de X ?

Podríamos tomar a X como el tiempo hasta obtener $r = 6$ éxitos. Entonces si consideramos un proceso $Poisson(\lambda)$, y contamos el tiempo hasta que ocurran 6 éxitos, podríamos construir nuestra función de la siguiente manera:

Sea X el tiempo hasta observar r éxitos. Entonces

$$\begin{aligned}
 F_X(x) &= P(X \leq x) = 1 - P(X > x) \\
 &= 1 - P(\# \text{ éxitos en el intervalo } [0, x] \text{ es a lo más } r-1) \\
 &= 1 - P(W \leq r-1), \quad \text{donde } W \sim Poisson(\lambda x) \\
 &= 1 - \sum_{w=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^w e^{-\lambda x}}{w!}.
 \end{aligned}$$

El modelo exponencial

Para determinar la densidad de X lo único que nos resta es derivar la función acumulada:

$$\begin{aligned}
 f(x) = \frac{d}{dx}F(x) &= -\frac{d}{dx} \left(e^{-\lambda x} + \sum_{w=1}^{r-1} \frac{(\lambda x)^w e^{-\lambda x}}{w!} \right) \\
 &= \lambda e^{-\lambda x} + \lambda \sum_{w=1}^{r-1} \frac{(\lambda x)^w e^{-\lambda x}}{w!} - \lambda \sum_{w=1}^{r-1} \frac{w(\lambda x)^{w-1} e^{-\lambda x}}{w(w-1)!} \\
 &= \lambda \sum_{w=0}^{r-1} \frac{(\lambda x)^w e^{-\lambda x}}{w!} - \lambda \sum_{y=0}^{r-2} \frac{(\lambda x)^y e^{-\lambda x}}{y!}, \quad \text{tomando } y = w - 1 \\
 &= \frac{\lambda(\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!}.
 \end{aligned} \tag{3}$$

¿La conocemos? Aún no, pero ésta es una de las formas como se puede presentar un modelo de probabilidad conocido como *la distribución de probabilidad Gamma*.

Función de distribución

Ejemplo

Supongamos que la hipótesis de que $X_1, \dots, X_n \sim \exp(1/2)$ es de interés y nos piden una gráfica Q-Q para validar éste supuesto. Seguimos los siguientes pasos:

- 1 Determinar la función de distribución inherente al problema. En este caso

$$F(x) = 1 - e^{-x/2}.$$

- 2 Calcular la función inversa, es decir, resolver $F^{-1}(x) = y$

$$x = 1 - e^{-y/2} \Leftrightarrow 1 - x = e^{-y/2} \Leftrightarrow \log(1 - x) = -y/2$$

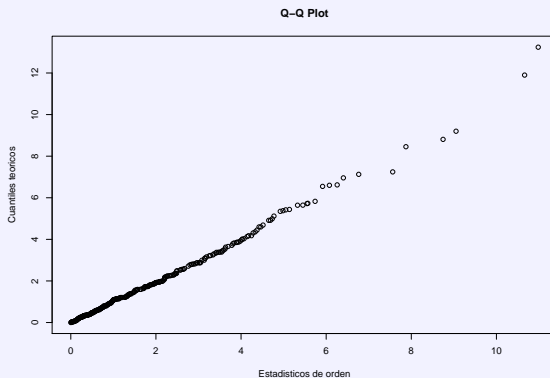
- 3 Finalmente, graficar

$$X_{(i)} \text{ vs } -2 \log \left(1 - \frac{i}{n+1} \right)$$

Función de distribución empírica

Ejemplo

Si la hipótesis fuese cierta, deberíamos observar algo así



El modelo Gamma

El modelo Gamma

Sea X una v.a. continua. Diremos que X se distribuye de acuerdo a una función de probabilidad Gamma con parámetros α y β si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases},$$

con α, β números reales positivos y $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$ es la función Gamma o función factorial generalizada.

El modelo Gamma

Notación: $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$.

Algunas propiedades de la función Gamma:

- 1 $\Gamma(1) = 1$
- 2 $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$. Esto se demuestra integrando por partes la función $\Gamma(\alpha + 1)$.
- 3 Si n es un entero positivo, $\Gamma(n) = (n - 1)!$
- 4 $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Los parámetros de la distribución α y β se conocen como parámetros de forma y escala, y no en todos los casos tienen una interpretación directa. En el ejemplo de los tiempos de vida, α representa el número de componentes y β el tiempo de vida medio de cada componente, pero, repetimos, no siempre existen asociaciones como éstas.

El modelo Gamma

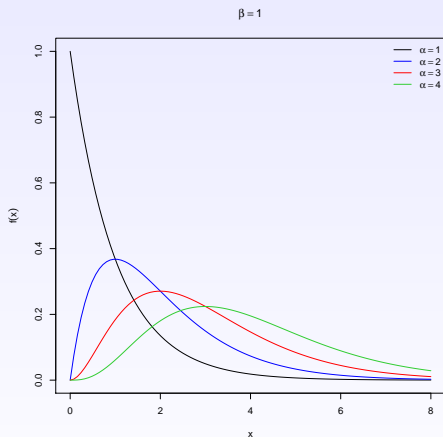


Figura: Distribución Gamma

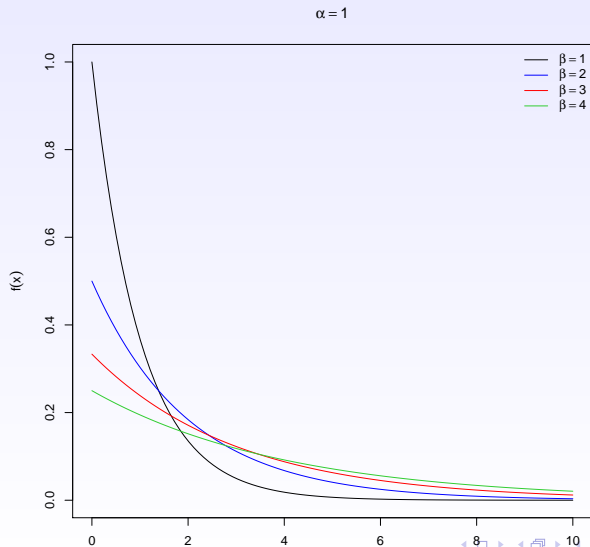
El modelo Gamma

Si $\alpha = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\beta} e^{-\frac{x}{\beta}} & \text{para } x \geq 0 \\ 0 & \text{para } x < 0 \end{cases},$$

de aquí que una v.a. exponencial es un caso particular de la Gamma cuando $\alpha = 1$ y $\beta = \theta$.

El modelo Gamma



El modelo Gamma

Notemos además que (3) en el ejemplo anterior, el del inventario con los 6 componentes, puede reescribirse como

$$f(x) = \frac{\lambda(\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}}{(r-1)!} = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} = \frac{1}{\Gamma(r) (\lambda^{-1})^r} x^{r-1} e^{-(x/\lambda^{-1})},$$

de donde se sigue que

$$X = \text{tiempo hasta observar } r \text{ éxitos} \sim \text{Gamma}(\alpha = r, \beta = 1/\lambda).$$

Esto es,

$$X = \text{Suma de variables aleatorias exponenciales } 1/\lambda, \\ \text{independientes} \sim \text{Gamma}(\alpha = r, \beta = 1/\lambda),$$

donde α es un número entero en este caso.

Este resultado es de suma utilidad para calcular probabilidades de forma sencilla (sin integrar o recurrir a software). La única condición es que α sea entero.

El modelo Gamma

Entonces

$$\begin{aligned} P(X > x) &= P(W \leq \alpha - 1) \\ &= \sum_{w=0}^{\alpha-1} \frac{(x/\beta)^w e^{-(x/\beta)}}{w!}, \end{aligned}$$

con $w \sim \text{Poisson}(\lambda x)$, $\lambda = 1/\beta$.

Aunque no exista ningún proceso Poisson detrás de este argumento, es solo una herramienta intermedia para hacer el cálculo, y **no** es una aproximación sino una igualdad.

El modelo Gamma

Veamos ahora algunos resultados asociados con este modelo,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)} dx \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)} dx, \end{aligned}$$

y la integral $\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)} dx = \Gamma(\alpha)\beta^\alpha$, de donde, en efecto, $f(x)$ representa una función de probabilidad.

El modelo Gamma

Primero obtendremos la fgm y con ella los momentos de la distribución, dado que esto facilita los cálculos de los mismos.

$$\begin{aligned}
 M_X(t) &= E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \\
 &= \int_0^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-(x/\beta)} dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{tx-(x/\beta)} dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\underbrace{\left(\frac{1}{\beta} - t\right)}_{\beta^{(*)}} x} dx \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \Gamma(\alpha)\beta^{(*)\alpha} \quad \text{donde } \frac{1}{\beta^{(*)}} = \left(\frac{1}{\beta} - t\right) = \frac{1-\beta t}{\beta}, \quad \beta^{(*)} = \frac{\beta}{1-\beta t} \\
 &= \frac{1}{\beta^\alpha} \left(\frac{\beta}{1-\beta t}\right)^\alpha = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha} \\
 &= (1-\beta t)^{-\alpha}.
 \end{aligned}$$

$$\therefore M_X(t) = (1-\beta t)^{-\alpha}.$$

El modelo Gamma

Ahora,

$$\begin{aligned}
 E(X) &= M'_X(t)|_{t=0} \\
 &= -\alpha(1-\beta t)^{-\alpha-1}(-\beta)|_{t=0} \\
 &= \alpha\beta(1-\beta t)^{-\alpha-1}|_{t=0} = \alpha\beta
 \end{aligned}$$

$$\therefore E(X) = \alpha\beta.$$

$$M''_X(0) = \alpha\beta^2(\alpha+1), \text{ por lo tanto, } E(X^2) = \alpha\beta^2(\alpha+1).$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\
 &= \alpha\beta^2(\alpha+1) - (\alpha\beta)^2 \\
 &= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^2 - \alpha^2\beta^2 = \alpha\beta^2,
 \end{aligned}$$

$$\therefore V(X) = \alpha\beta^2.$$

El modelo Gamma

Otro caso particular de la distribución Gamma se presenta cuando los parámetros toman los valores

$$\alpha = \frac{\nu}{2} \quad \text{y} \quad \beta = 2, \quad \nu \text{ un número entero,}$$

y recibe el nombre de variable χ^2 (ji-cuadrada o chi-cuadrada) con ν grados de libertad.

Notación: $X \sim \chi^2(\nu)$. Su función de densidad está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{\nu}{2})2^{\frac{\nu}{2}}} x^{(\frac{\nu}{2}-1)} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

El modelo Gamma

De los resultados anteriores, por simple sustitución obtenemos:

$$M_X(t) = (1 - 2t)^{-\frac{\nu}{2}}$$

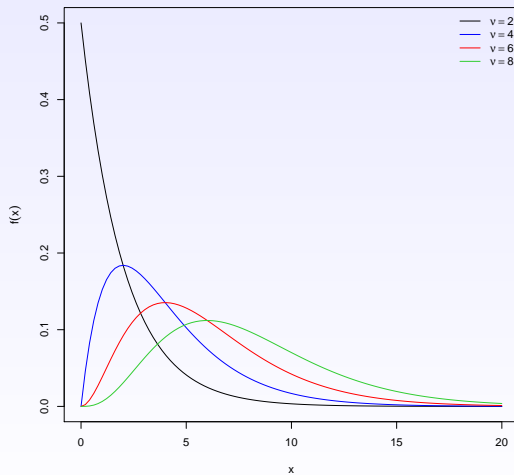
$$E(X) = \nu \quad (\text{los grados de libertad})$$

$$V(X) = 2\nu \quad (\text{dos veces los grados de libertad})$$

La variable χ^2 es importante en el muestreo (y hablaremos de ella más adelante). Nos permite establecer comportamientos de características de interés como la varianza muestral y su relación con inferencia estadística.

Nota que en este caso sólo hay un parámetro: ν .

El modelo Gamma



El modelo Gamma

Algunas chi-cuadradas son muy asimétricas, esto depende básicamente de los grados de libertad ν : entre más grande es este valor, la forma de la gráfica tiende a verse más simétrica.

Ejercicio

¿Cuál es la densidad de una v.a. χ^2 con $\nu = 2$?

El modelo Gamma

Ejemplo

En cierta ciudad, el consumo diario de energía (en millones de kilowatts/hora) sigue un modelo Gamma($\alpha = 3, \beta = 2$). Esto es un promedio de consumo diario de 6 millones de kilowatts/hora (K/h).

Si la planta de esta ciudad tiene una capacidad de producción máxima de 12 millones K/h ¿Cuál es la probabilidad de que el suministro sea insuficiente en un día dado?

El modelo Gamma

Sea X el consumo de energía en millones de K/h. Entonces,

$$P(X > 12) = \int_{12}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(3)2^3} x^{3-1} e^{-\frac{x}{2}} dx.$$

Para resolver este problema tenemos 3 opciones:

- 1 Resolver directamente la integral. En este caso es sencillo, ya que solo hay que integrar por partes 2 veces, ya que α es un valor entero y eso facilita las cosas. Recordemos que $\Gamma(3) = (3 - 1)! = 2$. (HACERLO).
- 2 Reconocer que, ya que $\beta = 2$ y α un entero, siempre puede identificarse como un elemento de la distribución χ^2 , en particular, $\alpha = 6/2$, y estamos hablando de una χ^2 con $\nu = 6$ grados de libertad. Entonces, si se cuenta.

El modelo Gamma

- ③ α es un valor entero, entonces podemos usar el intercambio de probabilidades Poisson.

Recordemos que $[0, x] = [0, 12]$; $\beta = 1/\lambda$, entonces $\lambda = 1/2$.

$$\begin{aligned} P(X > 12) &= P(W \leq 3 - 1), \text{ donde } W \sim \text{Poisson}(\lambda x = 12/2) = \text{Poisson}(6) \\ &= \sum_{w=0}^2 \frac{6^w e^{-6}}{w!} = 0.062. \end{aligned}$$

Nota: cuando α no es entero hay que utilizar tablas de la Gamma incompleta o software estadístico.

El modelo Gamma

Existe una identidad con funciones Gamma dada en la siguiente ecuación:

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} = \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx.$$

Esto nos dice que

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx = 1,$$

de donde esta función puede servir como función de densidad.

El modelo Beta

El modelo Beta

Es un modelo que se aplica a v.a. (esto es, características bajo estudio) que tienen un rango de definición finito y pueden ser entonces codificadas entre $(0, 1)$, o bien a proporciones tales como porcentajes en compuestos químicos, porcentajes de tiempos utilizados en el desempeño de una labor dada, etc. Todas estas situaciones pueden ser modeladas mediante esta familia de distribuciones. En estadística Bayesiana es donde también ha encontrado un amplio uso.

Se dice que X sigue una distribución Beta con parámetros $\alpha > 0$ y $\beta > 0$ si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

Notación: $X \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.

El modelo Beta

Notemos que si $\alpha = 1$ y $\beta = 1$,

$$f(x) = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma(1)\Gamma(1)} x^{1-1} (1-x)^{1-1} = 1 \quad 0 < x < 1,$$

esto es, $X \sim U(0,1)$.

Para demostrar que la función f integra 1, se sugiere revisar la página de wikipedia sobre la función beta

https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_function.

La distribución Beta *es una familia rica en formas*, como lo muestran las siguientes gráficas para distintos valores de los parámetros:

El modelo Beta

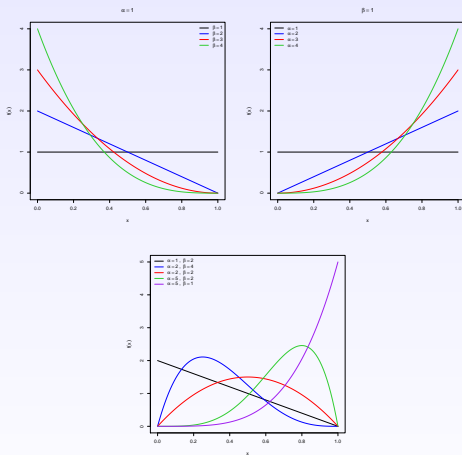


Figura: Distribución Beta

El modelo Beta

Para calcular la media y varianza de este modelo es mejor hacer el cálculo de $E(X^r)$ y de allí obtener todo lo que necesitamos.

Sea r un número real positivo,

$$\begin{aligned}
 E(X^r) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx = \int_0^1 x^r \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 x^{\alpha+r-1} (1-x)^{\beta-1} dx; \quad \alpha^* = \alpha + r \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha^*)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha^* + \beta)} \\
 &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \beta + r)} \\
 \therefore E(X^r) &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + r)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \beta + r)}.
 \end{aligned}$$

El modelo Beta

Observa que siempre tratamos de evitar las integrales reconociendo las funciones que están en ellas y completándolas para obtener su valor en forma inmediata.

Con $r = 1$:

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \beta + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta)} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}. \end{aligned}$$

El modelo Beta

Con $r = 2$:

$$E(X^2) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + 2)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + \beta + 2)} = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)(\alpha + 1)\alpha\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)\Gamma(\alpha + \beta)}$$

$$= \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)}$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)} - \frac{\alpha^2}{(\alpha + \beta)^2}$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^2 + \alpha) - \alpha^2(\alpha + \beta + 1)}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

$$\therefore V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}.$$

El modelo Beta

La función generatriz de momentos expandida en series de potencias es

$$M_X(t) = 1 + tE(X) + \frac{t^2}{2}E(X^2) + \frac{t^3}{3!}E(X^3) + \dots \quad t \in \mathbb{R},$$

entonces, usando la fórmula que se obtuvo para $E(X^r)$ se puede dejar indicada $M_X(t)$ como una serie de potencias.

Existe una relación entre las v.a. binomiales y las beta, sin embargo, a diferencia de las relaciones que hemos mostrado antes entre otras variables, ésta no tiene un carácter intuitivo, como verás a continuación. Sólo usa el resultado, la demostración se presenta por completez. Nota que esta relación es válida si los valores de los parámetros de la Beta son números enteros.

El modelo Beta

Resultado

Si $Y \sim \text{Beta}(\alpha = k, \beta = n - (k - 1))$ y $X \sim \text{Binomial}(n, p)$, entonces

$$P(Y > p) = P(X \leq k - 1),$$

esto es,

$$\int_p^1 \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} y^{k-1} (1-y)^{n-k} dy = \sum_{x=0}^{k-1} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}.$$

El modelo Beta

Demostración

Se demostrará que

$$\begin{aligned}P(X \geq k) &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^j (q)^{n-j} \\&= \int_0^p \frac{1}{B(k, n-k+1)} u^{k-1} (1-u)^{n-k} du \\&= \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^p u^{k-1} (1-u)^{n-k} du\end{aligned}$$

para la variable aleatoria $X \sim \text{Binomial}$.

El modelo Beta

Demostración (continúa...)

$$\begin{aligned}
 P(X \geq k) &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j} \\
 \frac{d}{dp} P(X \geq k) &= \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} \left\{ p^j (n-j) (1-p)^{n-j-1} (-1) + j p^{j-1} (1-p)^{n-j} \right\} \\
 &= \sum_{j=k}^n \left\{ \frac{n!}{j!(n-j)!} j p^{j-1} (1-p)^{n-j} - \frac{n!}{j!(n-j)!} (n-j) p^j (1-p)^{n-j-1} \right\} \\
 &= \sum_{j=k}^n \left\{ \frac{n(n-1)!}{(j-1)!(n-j)!} p^{j-1} (1-p)^{n-j} - \frac{n(n-1)!}{j!(n-j-1)!} p^j (1-p)^{n-j-1} \right\} \\
 &= \sum_{j=k}^n \underbrace{\left\{ n \binom{n-1}{j-1} p^{j-1} (1-p)^{n-j} - n \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-j-1} \right\}}_{\text{es una suma telescópica}}
 \end{aligned}$$

El modelo Beta

Demostración (continúa...)

entonces,

$$\frac{d}{dp} P(X \geq k) = n \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}.$$

Si $f(p) = P(X \geq k)$, se tiene que $f(0) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} 0^j (1)^{n-j} = 0$. Entonces, si se integran ambos lados de la última ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} P(X \geq k) &= \int_0^p \frac{d}{dp} P(X \geq k) dp = n \binom{n-1}{k-1} \int_0^p p^{k-1} (1-p)^{n-k} dp \\ &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^p u^{k-1} (1-u)^{n-k} du \\ &= \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k)\Gamma(n-k+1)} \int_0^p u^{k-1} (1-u)^{n-k} du \\ &= \frac{1}{B(k, n-k+1)} \int_0^p u^{k-1} (1-u)^{n-k} du. \end{aligned}$$

El modelo Beta

Ejemplo

Si la proporción anual de restaurantes nuevos que fracasan en la ciudad de Monterrey es una v.a. que puede ser modelada mediante una Beta con $\alpha = 1$ y $\beta = 4$, determinar:

- a) *La proporción media de restaurantes que fracasan en un año dado.*
- b) *La probabilidad de que al menos el 25 % de los restaurantes fracasen.*

El modelo Beta

Solución. Sea X el porcentaje de restaurantes que quiebran en un año dado.

$$f(x) = \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(1)\Gamma(4)} x^{1-1} (1-x)^{4-1} = \frac{4!}{3!} (1-x)^3 = 4(1-x)^3.$$

- a) El valor medio está dado por

$$E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = 0.2,$$

es decir, el 20 %.

- b) Además,

$$P(X > 0.25) = \int_{.25}^1 4(1-x)^3 dx.$$

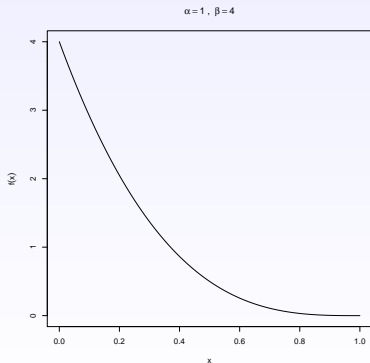
Sea $u = 1 - x$, $du = -dx$, así $u = .75$ y $u = 0$.

El modelo Beta

Entonces

$$P(X > 0.25) = - \int_0^{.75} -4u^3 du = u^4 \Big|_0^{.75} = .316,$$

como era de esperarse de la gráfica y del valor medio.



El modelo Beta

Ejercicio

- *En el ejemplo anterior usa la relación con la Binomial para hacer el cálculo de la probabilidad en b).*
- *En muchos proyectos se emplea un método llamado PERT (Program Evaluation and Review Technique) para coordinar varias actividades en proyectos grandes y/o complejos (por ejemplo, fue empleado en la construcción de los Apolo). Un supuesto estándar de esta técnica es que el tiempo necesario para completar cualquier actividad una vez que ha comenzado, se puede modelar mediante una distribución Beta con*
 - *A = tiempo optimista (si todo va bien)*
 - *B = tiempo pesimista (si todo va mal)*

El modelo Beta

Ejercicio (Continúa)

Por ejemplo, supongamos que estamos construyendo casas habitación y que el tiempo necesario, en días, para poner los cimientos de una casa sigue una distribución Beta con $A = 2$ y $B = 5$. Además, se puede calcular que $\alpha = 2$ y $\beta = 3$.

Calcula la probabilidad de que el tiempo para terminar los cimientos sea menor a 3 días.

Nota: A y B no son los valores de los parámetros, recuerda que primero debe codificarse la variable para que tome valores entre $(0, 1)$.

El modelo Weibull

El modelo Weibull

Volviendo sobre la definición de la función de riesgo o tasa de falla:

$$h(t) = \frac{f(t)}{R(t)}.$$

Recordemos que definimos a la CONFIABILIDAD de un componente, producto, sistema, etcétera, como la probabilidad de que funcionará correctamente al menos durante un tiempo especificado t .

$$\begin{aligned} R(t) &= P(T \geq t) = P(T > t) \quad \text{para variable continuas} \\ &= \int_t^{\infty} f(x) dx \quad \text{donde } f \text{ es la función de densidad de } T \\ &= 1 - F(t) \quad \text{donde } F(t) \text{ es la acumulada de } T. \end{aligned}$$

El modelo Weibull

También vimos que la probabilidad condicional de que una componente falle en el intervalo $(t, t + \Delta t)$ dado que no falló hasta el tiempo t es

$$c = P(\text{falla en } (t, t + \Delta t) | \text{ no falló hasta } t)$$

y que cumple

$$\begin{aligned} c &= \frac{P(\text{intersección})}{P(\text{no falle antes de } t)} = \frac{P(\text{falla en } (t, t + \Delta t))}{R(t)} \\ &= \frac{1}{R(t)} \int_t^{t+\Delta t} f(x) dx \\ &= \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{R(t)}. \end{aligned}$$

El modelo Weibull

Dividiendo entre Δt y tomando el límite cuando $\Delta t \rightarrow 0$ se obtiene una **tasa o razón de falla instantánea** y representa una medida del riesgo de que el producto falle en el siguiente instante dado que ha funcionado bien hasta el tiempo t .

$$\begin{aligned}h(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t \cdot R(t)} \\&= \frac{1}{R(t)} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{F(t + \Delta t) - F(t)}{\Delta t} = \frac{F'(t)}{R(t)} \\&= \frac{f(t)}{R(t)}.\end{aligned}$$

El modelo Weibull

La tasa de falla $h(t)$ se puede encontrar a partir de la densidad $f(t)$.

Sin embargo, algo que resulta más importante todavía es que, si se conoce la tasa de falla, podemos encontrar la función de densidad. Primero observamos que, dado que $R(t) = 1 - F(t)$, entonces

$$R'(t) = -F'(t) = -f(t),$$

y por lo tanto

$$h(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)},$$

la cual puede ser vista como una ecuación diferencial que puede ser resuelta para $h(t)$.

El modelo Weibull

Integrando en ambos lados de la ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned}\int h(t)dt &= -\log R(t) + C_1 \\ \Rightarrow -\int h(t)dt &= \log R(t) + C_2 \\ \Rightarrow \exp\left\{-\int h(t)dt\right\} &= K \cdot R(t)\end{aligned}$$

$$\therefore R(t) = Ce^{-\int h(t)dt}.$$

El modelo Weibull

Entonces, en resumen, conociendo $R(t)$ se puede encontrar $h(t)$ y conociendo $h(t)$ se puede encontrar $R(t)$ mediante

$$R(t) = Ce^{-\int h(t)dt},$$

y la constante C se determina por la condición inicial $R(0) = 1$.

Ahora, consideremos la tasa de falla dada por

$$h(t) = \alpha\beta t^{\beta-1}, \quad t > 0.$$

Confiabilidad

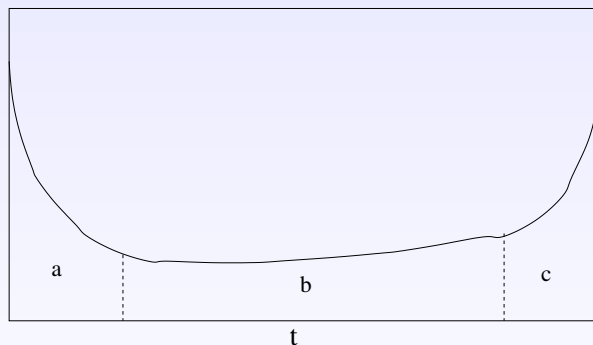


Figura: Gráfica de “tina de baño”. (a) etapa de ajuste inicial o “mortalidad infantil”. (b) etapa constante. (c) etapa de desgaste o envejecimiento.

El modelo Weibull

Según esta definición $h(t)$ será

$$h(t) = \begin{cases} \alpha : \text{constante} & \text{si } \beta = 1 \\ \text{decreciente} & \text{si } \beta < 1 . \\ \text{creciente} & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

Entonces, dependiendo de los valores de los parámetros obtendremos una familia muy rica para describir toda clase de comportamientos asociados con la función de riesgo, como los descritos en la “tina de baño”.

El modelo Weibull

Entonces la pregunta es, ¿cuál es la densidad que tiene esta $h(t)$ cómo su función de riesgo?

Sólo tenemos que evaluar $R(t)$ y de allí, derivando, podemos encontrar la función deseada, la cual es llamada **Función Weibull** de dos parámetros

$$\begin{aligned} R(t) &= Ce^{-\int h(t)dt} \\ &= Ce^{-\int \alpha\beta t^{\beta-1}dt} \\ &= Ce^{-\alpha t^{\beta}}; \end{aligned}$$

y con la condición inicial $R(0) = 1$, tenemos que $C = 1$. Por lo tanto $R(t) = e^{-\alpha t^{\beta}}$, y esto implica que

$$f(t) = h(t)R(t) = \alpha\beta t^{\beta-1} \left(e^{-\alpha t^{\beta}} \right), \quad t > 0,$$

lo cual corresponde a la función de densidad de una variable aleatoria Weibull(α, β).

El modelo Weibull

Definición

La variable aleatoria continua X tiene una distribución Weibull con parámetros α y β si su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

donde α y β son constantes positivas.

El modelo Weibull

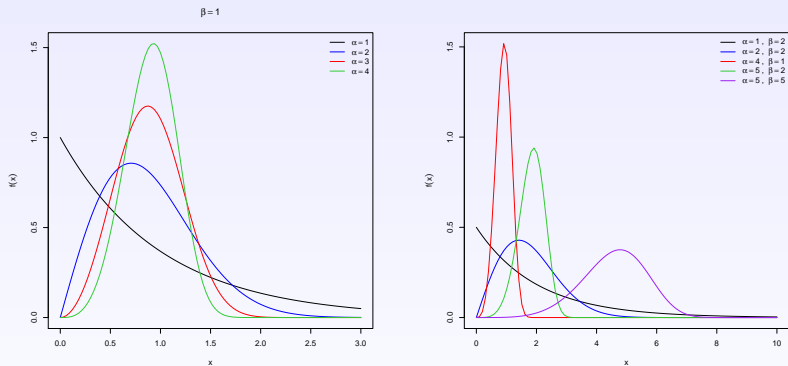


Figura: Distribución Weibull

El modelo Weibull

Cuando $\beta = 1$, se obtiene la densidad $\alpha e^{-\alpha x}$, la cual es exponencial con $\theta = \frac{1}{\alpha}$, i.e. $\frac{1}{\theta} e^{-x/\theta}$, que corresponde a $h(t) = \alpha = \text{constante} = 1/\theta$.

Calculamos el valor esperado de X^n :

$$\begin{aligned} E(X^n) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x^n \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} dx \\ &= \int_0^{\infty} \alpha \beta x^{n+\beta-1} e^{-\alpha x^\beta} dx. \end{aligned}$$

El modelo Weibull

Haciendo el cambio de variable $u = \alpha x^\beta$, $x = \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/\beta}$,

$dx = \frac{1}{\beta} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right) du$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 E(X^n) &= \int_0^\infty \alpha \beta \left(\left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/\beta}\right)^{n+\beta-1} e^{-u} \frac{1}{\beta} \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{1/\beta-1} \left(\frac{1}{\alpha}\right) du \\
 &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{\frac{n+\beta-1}{\beta} + \frac{1}{\beta} - 1} e^{-u} du = \int_0^\infty \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{\frac{n}{\beta} + 1 - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\beta} - 1} e^{-u} du \\
 &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{\alpha}\right)^{\frac{n}{\beta}} e^{-u} du = \alpha^{-\frac{n}{\beta}} \int_0^\infty u^{\frac{n}{\beta}} e^{-u} du \\
 &= \alpha^{-\frac{n}{\beta}} \int_0^\infty u^{(\frac{n}{\beta} + 1) - 1} e^{-u} du \\
 &= \alpha^{-\frac{n}{\beta}} \Gamma\left(\frac{n}{\beta} + 1\right).
 \end{aligned}$$

El modelo Weibull

La media de la distribución Weibull es entonces:

$$E(X) = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right).$$

Para encontrar la varianza, encontramos primero $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right).$$

El modelo Weibull

Ahora:

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 \\&= \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \left(\alpha^{-\frac{1}{\beta}} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\right)^2 \\&= \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right) \\&= \alpha^{-\frac{2}{\beta}} \left(\Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\right).\end{aligned}$$

El modelo Weibull

La función generatriz de momentos no es muy usada y su forma es complicada.

La distribución Weibull se utiliza para modelar tiempos de vida o el tiempo hasta que ocurre una falla de un elemento o componente. Es decir, si T es el tiempo de falla, entonces T suele considerarse como una variable aleatoria con distribución Weibull

$$T \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta).$$

Notemos que en este caso, las expresiones para la media y la varianza en términos de los parámetros son bastante complejas, al menos no es inmediato saber cuánto valen α y β , aún si conocemos μ y σ , o valores aproximados de ellos a través de estimaciones de la muestra.

El modelo Weibull

Existen otras formas de escribir la función Weibull dependiendo del autor. Otras dos formas comunes de encontrar en la literatura son

$$f(x) = \frac{\alpha}{\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}, \quad \text{ó}$$

$$f(x) = \frac{\theta}{\alpha} x^{\theta-1} e^{-\frac{x^\theta}{\alpha}}.$$

Entonces, *siempre es conveniente verificar cuál densidad está siendo usada para poder discernir sobre el valor de los parámetros, así como para hacer las modificaciones correspondientes a las fórmulas de media y varianza.*

El modelo Weibull

También existe la Weibull con tres parámetros, el tercero siendo el mínimo valor que puede tomar las variables, esto es, $x > \tau > 0$, en lugar de $x > 0$.

Por ejemplo, si estamos midiendo los tiempos que un trabajador tarda en construir una escoba en una fábrica determinada, debe haber un tiempo mínimo τ que debe consumirse, aún para el empleado más diestro. Esto quiere decir que debemos modificar la densidad para que la integral, ahora de τ a ∞ , nos de uno.

El modelo Weibull

Ejercicio

- 1 *Graficar la función Weibull para los siguientes valores de los parámetros:*

$$\alpha = 1, \beta = 2$$

$$\alpha = 2, \beta = 2$$

$$\alpha = 3, \beta = 4$$

Algebraicamente, o bien generando variables con ésta distribución y construyendo un histograma.

- 2 *Grafica las funciones de confiabilidad y riesgo para cada uno de los casos anteriores.*
- 3 *Si $h(t) = a + bt$, ¿cuál es la densidad asociada?*
- 4 *Estudiar las funciones de riesgo para la distribución Normal, Gamma y Lognormal. ¿Cuál es la principal dificultad en estos casos?*

Ejemplo

El artículo “*The Load-Life Relationship for M50 bearings with Silicon Nitride Ceramic Balls*” (Lubrication Engr., 1984, pp. 153-159), reporta datos de tiempo de vida de rodamientos (millones de revoluciones) probados a 6.45 kN de carga.

47.1	68.1	68.1	90.8
103.6	106.0	115.0	126.0
146.6	229.0	240.0	240.0
278.0	278.0	289.0	289.0
367.0	385.9	392.0	505.0

- a) Construye un gráfico de probabilidad Weibull. ¿Es plausible la familia de distribución Weibull?
- b) Construye un gráfico de probabilidad normal. ¿Es plausible la normalidad?

Ejemplo

La distribución Weibull está dada por

$$f(x) = \alpha \beta x^{\beta-1} e^{-\alpha x^{\beta}},$$

entonces la acumulada es

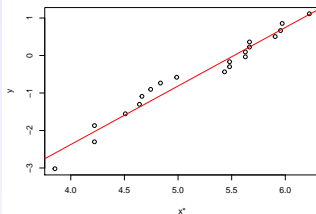
$$\begin{aligned} p &= F(x) = 1 - e^{-\alpha x^{\beta}} \\ \Rightarrow \log(1 - p) &= -\alpha x^{\beta} \end{aligned}$$

de donde

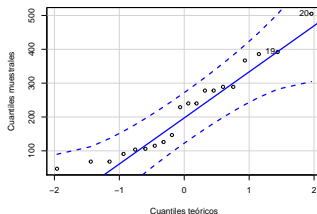
$$\underbrace{\log(-\log(1 - p))}_y = \underbrace{\log(\alpha)}_{\beta_0} + \underbrace{\beta \log(x)}_{\beta x^*}. \quad (4)$$

Ejemplo

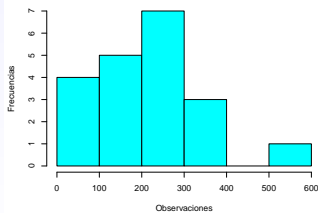
Transformación de la empírica



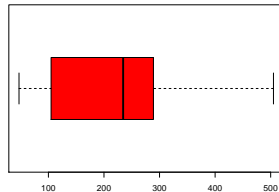
Q-Q plot normal



Histogram of x



BoxPlot



Ejemplo

El ajuste lineal queda como

$$y = -8.61 + 1.56x^*,$$

es decir

$$\alpha = \exp\{\beta_0\} = \exp\{-8.61\} = 0.00018, \quad \beta = 1.56.$$

Por otra parte, como

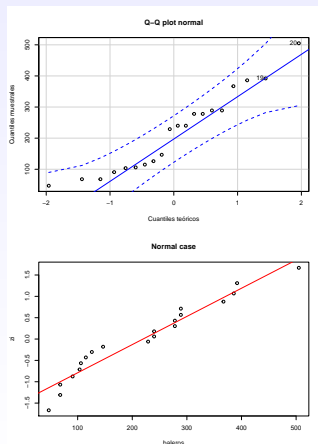
$$\mu = \alpha^{-1/\beta} \Gamma(1 + 1/\beta), \quad \sigma = \left(\alpha^{-2/\beta} (\Gamma(1 + 2/\beta) - \Gamma^2(1 + 1/\beta)) \right)^{1/2},$$

entonces

$$\hat{\mu} = 250.56 \cdot \Gamma(1.64) = 223, \quad \hat{\sigma} = 147.4.$$

Ejemplo

Retomando el Q-Q plot que hicimos hace algunas diapositivas, podemos retomar los datos tal cual y ajustarles una regresión a los datos contra los Z_i



Ejemplo

El ajuste lineal queda como

$$y = -1.45 + 0.0066x.$$

Por otra parte, como

$$z_i = \frac{q_i - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}q_i - \frac{\mu}{\sigma} = \beta q_i + \beta_0$$

entonces

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{0.0066} = 150.37, \quad \frac{\hat{\mu}}{150.37} = 1.4514 \Rightarrow \hat{\mu} = 218.25.$$

Ejemplo

Resumiendo, tenemos que el modelo normal y el modelo Weibull producen los siguientes momentos:

Distribución	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
Normal	218.25	150.37
Weibull	223	147.4

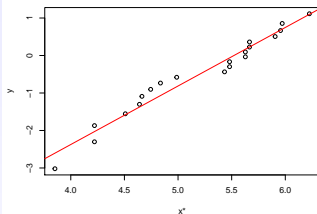
¿Qué distribución debería un estadístico recomendar según la evidencia?
¿Por qué?

Referencia sobre confiabilidad:

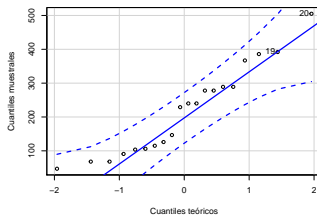
- 1 **Statistical Methods for Reliability Data. William Q. Meeker and Luis A. Escobar. Wiley.**

Ejemplo

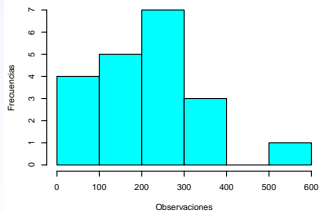
Transformación de la empírica



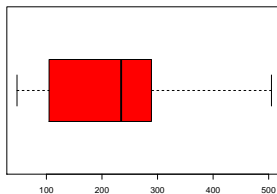
Q-Q plot normal



Histogram of x



BoxPlot



El modelo Lognormal

El modelo Lognormal

Supongamos que estamos interesados en estudiar los niveles de contaminación en el agua del Arroyo Seco (que si existe...).

Sabemos, en principio, que nuestra variable es intrínsecamente positiva y esperamos muchos valores *pequeños*, pero también, alguna proporción no despreciable de valores altos. Esto es, esperamos que el comportamiento de la variable sea relativamente sesgado a la derecha, pero que la cola de la distribución no caiga muy rápido, es decir, una distribución de cola pesada, mejor conocida como *de valores extremos*.

En situaciones como ésta, es común que una transformación logarítmica de nuestros valores pueda ser bien modelada por alguna normal $N(\mu, \sigma^2)$. Este también es el comportamiento típico de muchas variables económicas, tales como ingresos.

El modelo Lognormal

Entonces, nos enfrentamos a una situación donde, si llamamos Y a nuestra variable original (por ejemplo las concentraciones de contaminantes) y X su transformación,

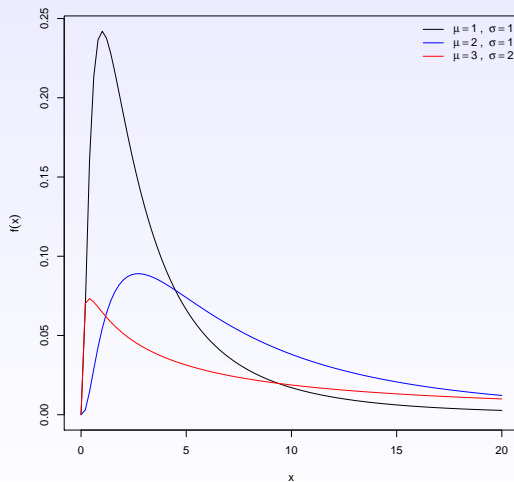
$$X = \log Y \sim N(\mu, \sigma^2).$$

se dice que

$$Y = e^X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2).$$

Observemos que necesariamente $Y > 0$, de otra manera X no está bien definida.

El modelo Lognormal



El modelo Lognormal

Para calcular probabilidades Lognormales **no** es necesario conocer explícitamente su densidad, se pueden usar las tablas de la normal.

Sea $Y \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$ y $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(e^X \leq y) \\ &= P(X \leq \log y) \quad \text{pues log es una función creciente} \\ &= P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{\log y - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{\log y - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

El modelo Lognormal

De igual manera se puede probar que

$$P(y_1 \leq Y \leq y_2) = P\left(\frac{\log y_1 - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{\log y_2 - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(Y \geq y) = 1 - P\left(Z \leq \frac{\log y - \mu}{\sigma}\right).$$

El modelo Lognormal

Ahora bien, si estamos interesados en los valores medios y varianzas de la variable original Y , puede resultar de utilidad calcular su densidad, pero no es necesario (*¿por qué?*). Mostraremos al mismo tiempo una técnica que ya la hemos usado en más de una ocasión, conocida como la *técnica de transformación de variables a través de la función acumulada*. Conociendo la distribución acumulada de una variable continua se puede obtener la función de densidad derivando la acumulada:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt,$$

y usando el teorema fundamental del cálculo:

$$F'_X(x) = f(t)dt.$$

El modelo Lognormal

μ y σ^2 pueden considerarse la media y varianza de la normal X , pero no necesariamente son la media y varianza de la Lognormal Y .

Para la variable transformada Lognormal $Y = e^X$, tenemos que

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(e^X \leq y) = P(X \leq \log y) \\&= F_X(\log y),\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(\log y) \\&= f_X(\log y) \cdot \frac{1}{y} \quad (\text{aplicando la regla de la cadena}) \\&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\right)^2} \cdot \frac{1}{y}.\end{aligned}$$

El modelo Lognormal

Entonces,

- La función de densidad de Y es

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\log y - \mu}{\sigma}\right)^2}, \quad y > 0.$$

- Si $T \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma^2)$ la función generatriz de momentos no existe.
- Ya que $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, y como sabemos que $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$,

$$E(Y) = E(e^X) = M_X(1) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}.$$

El modelo Lognormal

Para calcular $V(X)$ calculamos primero $E(Y^2)$:

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= E\left((e^X)^2\right) = E(e^{2X}) = M_X(2) \\ &= e^{2\mu+2\sigma^2}. \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} V(Y) &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\ &= e^{2\mu+2\sigma^2} - \left(e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}\right)^2 \\ &= e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2} \\ &= e^{2\mu+\sigma^2} \left(e^{\sigma^2} - 1\right). \end{aligned}$$

Nota: Teoría de valores extremos

Tomado de https://en.wikipedia.org/wiki/Extreme_value_theory.

Let X_1, \dots, X_n be a sequence of independent and identically distributed random variables with cumulative distribution function F and let $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$ denote the maximum.

In practice, we might not have the distribution function F but the *Fisher–Tippett–Gnedenko theorem* provides an asymptotic result. If there exist sequences of constants $a_n > 0$ and $b_n \in \mathbb{R}$ such that

$$\Pr\{(M_n - b_n)/a_n \leq z\} \rightarrow G(z)$$

as $n \rightarrow \infty$ then

$$G(z) \propto \exp \left[-(1 + \zeta z)^{-1/\zeta} \right]$$

where ζ depends on the tail shape of the distribution.

Nota: Teoría de valores extremos

When normalized, G belongs to one of the following non-degenerate distribution families:

- Weibull distribution/Weibull law

$$G(z) = \begin{cases} \exp \left\{ - \left(- \left(\frac{z-b}{a} \right) \right)^\alpha \right\} & z < b \\ 1 & z \geq b \end{cases}$$

when the distribution of M_n has a light tail with finite upper bound. Also known as Type 3.

- Gumbel distribution/Gumbel law

$$G(z) = \exp \left\{ - \exp \left(- \left(\frac{z-b}{a} \right) \right) \right\} \text{ for } z \in \mathbb{R}.$$

when the distribution of M_n has an exponential tail. Also known as Type 1.

El modelo Lognormal

Continuación:

- Frechet distribution/Fréchet Law

$$G(z) = \begin{cases} 0 & z \leq b \\ \exp \left\{ - \left(\frac{z-b}{a} \right)^{-\alpha} \right\} & z > b \end{cases}$$

when the distribution of M_n has a Heavy-tailed distribution (including polynomial decay). Also known as Type 2.

Referencia: Coles S. (2001) "An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values". Springer, London.

El modelo Lognormal

Ejercicio

El diseño y planeación de obras hidráulicas está relacionado con eventos hidrológicos futuros; por ejemplo, la avenida de diseño para el vertedor de una presa.

Se planea construir un bordo para protección contra inundaciones y se requiere saber lo siguiente:

- *¿Cuál es la probabilidad de que en un año cualquiera el gasto exceda $7500\text{m}^3/\text{s}$?*
- *¿Cuál es el gasto de diseño para una avenida con período de retorno de 60 años para una inundación?*

De una estación hidrométrica se obtuvieron los gastos máximos anuales registrados. La literatura al respecto señala que este tipo de datos sigue distribuciones como la Normal, la Lognormal, la Pearson III (Gamma de tres parámetros), entre otras.

El modelo Lognormal

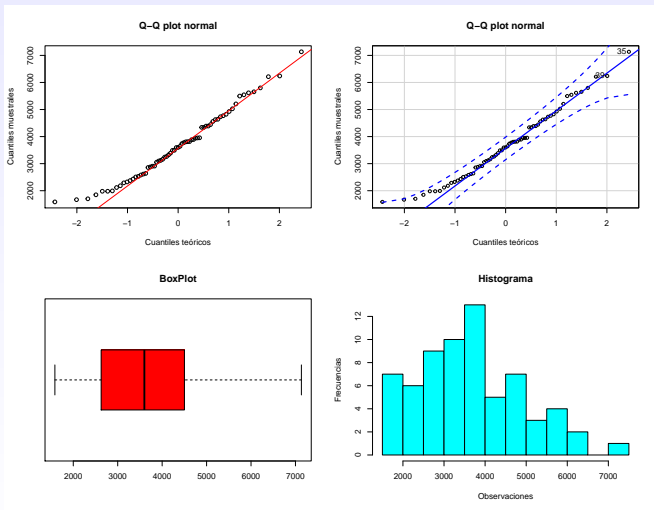
Se dispone de información de los gastos máximos anuales desde el año de 1950 hasta 2017. El primer paso consiste en identificar con qué tipo de población nos enfrentamos. Para ello, exploraremos los datos con la ayuda de los Q-Q plots y así identificar la población de referencia.

Del Q-Q plot y los valores muestrales relevantes, podemos observar que los datos **no** parecen ser normales.

$$\text{media} = 3669.705, \quad \text{SD} = 1262.401,$$

Prob.	10 %	25 %	50 %	75 %	90 %
Quantil	2067.687	2626.999	3599.823	4501.240	5515.856

El modelo Lognormal



El modelo Lognormal

Sabemos que si

$$X \sim \text{Lognormal}(\mu, \sigma),$$

entonces:

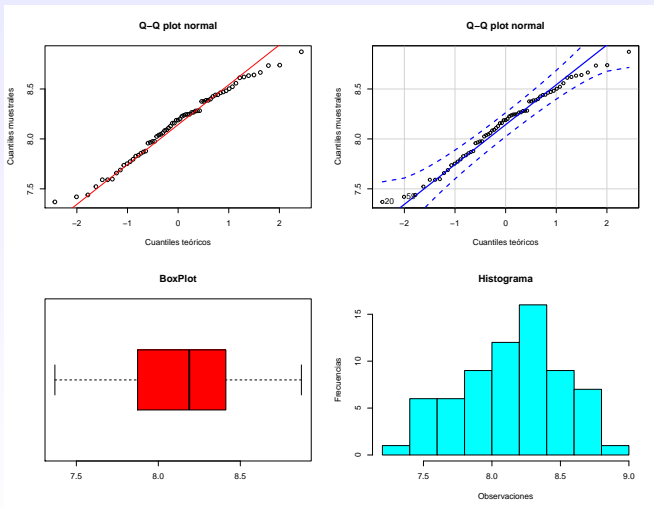
$$\log X \sim \text{Normal}(\mu, \sigma).$$

Tomando esta transformación, tenemos que

$$\text{media} = 8.14, \quad \text{SD} = 0.35,$$

Prob.	10 %	25 %	50 %	75 %	90 %
Quantil	7.633744	7.873587	8.188640	8.412025	8.615374

El modelo Lognormal



El modelo Lognormal

Gráficamente podemos concluir que la transformación logarítmica sí es normal, y de esto último, que los datos son Lognormales.

Ahora, para calcular la probabilidad que se desea,

$$P(X > 7500),$$

utilizamos la transformación $\log X$ y calculamos la probabilidad deseada directamente de $P(\log X > \log 7500)$ en base a una $Normal(\mu, \sigma^2)$.

El modelo Lognormal

Así, tenemos que

$$\begin{aligned}P(\log X > \log 7500) &= P\left(Z > \frac{\log 7500 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) \\&= 1 - P\left(Z \leq \frac{\log 7500 - \hat{\mu}}{\hat{\sigma}}\right) \\&= 0.0150.\end{aligned}$$

En el cálculo anterior utilizamos los estimadores de μ y σ .

Conclusión: La población de la cual provienen los gastos máximos anuales es Lognormal y, en base a la estimación de los parámetros que provee la muestra, la probabilidad de el gasto máximo anual sea mayor a $7500m^3/s$ es relativamente baja.

El modelo Lognormal

Para la segunda pregunta se requiere entender el concepto de período de retorno usado en ingeniería.

Un período de retorno, también conocido como intervalo de recurrencia, es un estimado de la plausibilidad de un evento, como un temblor o una inundación, de ocurrir.

Su medición estadística está basada en datos históricos y usualmente se usa para el análisis de riesgo. Esto asumiendo que la probabilidad de que ocurra el evento no varía con el tiempo y es independiente de eventos pasados.

Formalmente, el período de retorno T se define como el inverso multiplicativo de la probabilidad de que el evento ocurra en un año particular.

El modelo Lognormal

Para entender el concepto de período de retorno observemos que la v.a. que indica si en un año dado ocurrió la inundación se distribuye *Bernoulli*($1/T$). Luego, por año uno espera $1/T$ inundaciones. Así la frecuencia esperada es T .

En el ejemplo del bordo para protección contra inundaciones, podríamos pensar que si el gasto supera los $7500m^3/s$ en un año, entonces el bordo es insuficiente y se tiene una inundación. Luego, considerando lo desarrollado anteriormente, la probabilidad de haya una inundación en un año en particular es $P(X > 7500) = 0.015$.

Así el período de retorno de una inundación en el área donde se contruyó el bordo es $T = 1/(0.015)$ años = 66.66 años.

El modelo Lognormal

El gasto de diseño para una avenida con período de retorno de $T = 60$ años se puede entender como el gasto máximo g que el bordo está diseñado para soportar sin causar una inundación. Luego, en este caso la probabilidad de inundación será $p = P(X > g)$ y, por tanto, $T = 1/p$.

Luego el gasto de diseño calcular resolviendo la ecuación para g

$$\begin{aligned} 0.016 &= \frac{1}{T} = P(X > g) = P(\log X > \log g) \\ &= P\left(\frac{\log X - \mu}{\sigma} > \frac{\log g - \mu}{\sigma}\right) = P\left(Z > \frac{\log g - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Usando la función cuantil obtenemos que

$$\frac{\log g - \mu}{\sigma} = 2.12 \Rightarrow g \approx 7221.48 m^3/s.$$

Relación con análisis del riesgo

El período de retorno es útil en análisis de riesgos (como natural, inherente o el riesgo de fallo hidrológico). Cuando se consideran las expectativas del diseño de una estructura, el período de retorno es útil para calcular el riesgo de la estructura.

El riesgo asociado a una estructura se define como

$$R = 1 - \left(1 - \frac{1}{T}\right)^n$$

donde n es la vida esperada de la estructura y $\frac{1}{T}$ es la probabilidad de ocurrencia del evento en cuestión.

En el contexto del bordo, notemos que si asumimos que cada año tiene la misma probabilidad de sufrir una inundación y estos son independientes, el riesgo es la probabilidad de que suceda al menos una inundación en el período de vida de la estructura.

Relación con análisis del riesgo

Así, si se proyecta que el bordo tenga una vida útil de 60 años y $T = 1/(0.015)$ años = 66.66 años, el riesgo de que haya una inundación en la zona del bordo es

$$R = 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{T}\right)\right)^{60} = 1 - (1 - 0.015)^{60} = 0.59.$$

Si deseamos que el riesgo del bordo sea de $R = 0.1$ para una vida útil de $n = 60$ años, podemos despegar T de la definición de riesgo

$$T = \frac{1}{1 - (1 - R)^{1/n}}.$$

De lo anterior podemos calcular el gasto de diseño como lo hicimos antes.

Desigualdades en probabilidad

Desigualdades

Las desigualdades en teoría de probabilidad son útiles para acotar cantidades que en cualquier otro caso resultan difíciles de calcular.

Teorema (Desigualdad de Markov)

Sea X una v.a. no negativa y supongamos que $E(X)$ existe. Para cualquier $t > 0$,

$$P(X > t) \leq \frac{E(X)}{t}.$$

Demostración

Como $X > 0$,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} xf(x)dx = \int_0^t xf(x)dx + \int_t^{\infty} xf(x)dx \\ &\geq \int_t^{\infty} xf(x)dx \geq t \int_t^{\infty} f(x)dx = tP(X > t). \end{aligned}$$

Desigualdades

Teorema (Desigualdad de Chebyshev)

Sea $\mu = E(X)$ y $\sigma^2 = V(X)$. Entonces, si $t > 0$,

$$P(|X - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2} \text{ y } P(|Z| \geq k) \leq \frac{1}{k^2},$$

donde $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. En particular, $P(|Z| > 2) \leq 1/4$ y $P(|Z| > 3) \leq 1/9$.

Demostración

$$P(|X - \mu| \geq t) = P(|X - \mu|^2 \geq t^2) \leq \frac{E(X - \mu)^2}{t^2} = \frac{\sigma^2}{t^2}.$$

La segunda parte se demuestra tomando $k\sigma = t$.

Desigualdades

Ejemplo

Se prueba un método de predicción (por ejemplo, redes neuronales) con un conjunto de prueba (n casos), donde

$X_i = 1$ *si la predicción es errónea*

$X_i = 0$ *si la predicción es correcta.*

Entonces, $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ representa la tasa de error observado.

Consideraremos $X_i \sim \text{Bernoulli}$ con media desconocida p . Quisieramos saber que tan bien \bar{X}_n estima a p , en otras palabras: ¿Qué tan cerca (ϵ) está \bar{X} de p ?

Desigualdades

Ejemplo (Cont...)

Sabemos que $V(\bar{X}_n) = \frac{V(X_i)}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$ y

$$P(|\bar{X}_n - p| > \epsilon) \underbrace{\leq}_{\text{Chebyshev}} \frac{V(\bar{X}_n)}{\epsilon^2} = \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \leq \frac{1}{4n\epsilon^2},$$

ya que $p(1-p) \leq 1/4 \forall p$. Entonces para $\epsilon = 0.2$ y $n = 100$, la tasa de error es 0.0625.

Notemos que

$$\max_p p(1-p) \Rightarrow \frac{d(p-p^2)}{dp} = 1-2p = 0 \Rightarrow p = 1/2, \quad \therefore p(1-p) \leq 1/4.$$

Desigualdades

Podemos usar la desigualdad de Chebyshev para determinar que tan concentrada, en términos de su desviación estándar, está una variable aleatoria alrededor de su media.

Sea X una variable con media $\mu < \infty$ y varianza $\sigma^2 < \infty$ y pongamos $Z = (X - \mu)/\sigma$. Notemos que la desigualdad de Chebyshev implica que

$$P(|X - \mu| \geq k \cdot \sigma) = P(|Z| \geq k) \leq \frac{1}{k^2},$$

de donde se sigue que

$$P(|X - \mu| < k \cdot \sigma) = 1 - P(|X - \mu| \geq k \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Desigualdades

Así, para $k = 1, 2, 3, 4, 5$, se obtienen las siguientes cotas

$$P(|X - \mu| < \sigma) \geq 1 - \frac{1}{1} = 0,$$

$$P(|X - \mu| < 2 \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{4} = 0.75,$$

$$P(|X - \mu| < 3 \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{9} = 0.8888,$$

$$P(|X - \mu| < 4 \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{16} = 0.9375,$$

$$P(|X - \mu| < 5 \cdot \sigma) \geq 1 - \frac{1}{25} = 0.96.$$

Para $k = 1$, la desigualdad de Chebyshev no da información valiosa.

Desigualdades

Para los otros casos nos da una cota para saber que tan concentrada está la v.a. Por ejemplo, para $k = 3$, en palabras, dice que la probabilidad de que los valores de X estén a una distancia de cuando mucho 3σ de su media es al menos del 89 %.

Observa que la información relevante está en el intervalo para la v.a. X , el cual depende de los valores de μ y σ , y que en general k puede ser cualquier número real positivo.

Desigualdades

Reglas empíricas.

Con ks denotando la distancia a partir de \bar{x} , se da el porcentaje, aproximado, de los datos contenidos en el intervalo de $\bar{x} - ks$ a $\bar{x} + ks$.

k	Intervalo	Probabilidad (porcentaje)	Teo. de Chebyshev
1	$(\bar{x} - s, \bar{x} + s)$	68 %	$\geq 0 \%$
2	$(\bar{x} - 2s, \bar{x} + 2s)$	95 %	$\geq 75 \%$
3	$(\bar{x} - 3s, \bar{x} + 3s)$	99.7 %	$\geq 88.88 \%$

Las reglas empíricas son el “equivalente muestral” del Teorema de Chebyshev, en el cual se reemplaza $(\mu, \sigma) = (\bar{x}, s)$, y el lado derecho por las probabilidades de la tabla anterior para la k correspondiente.

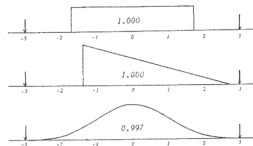
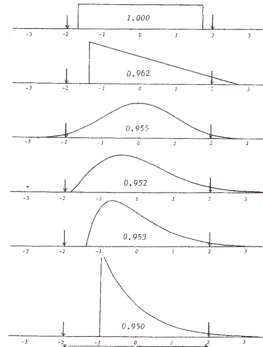
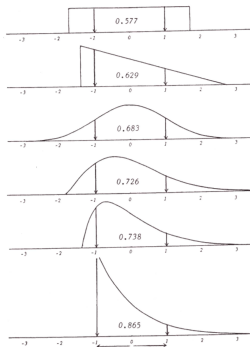
Desigualdades

Las reglas fueron establecidas para distribuciones en forma de campana pero su utilidad rebasa a ésta como puedes comprobarlo en las gráficas que se presentan a continuación. Es importante mencionar que el resultado de Chebyshev se establece para poblaciones donde μ y σ son conocidas y requiere modificaciones cuando se aplica a valores muestrales \bar{x} y s .

A continuación, se presentan algunas gráficas para 6 tipos de funciones de densidad (v.a. continuas) y el área que contienen en los intervalos $(\bar{x} - ks, \bar{x} + ks)$ para $k = 1, 2, 3$.

En dichas gráficas, podemos comprobar que en general la regla empírica da buenas aproximaciones.

Desigualdades



Desigualdades

Una desigualdad que se usa con cierta frecuencia en reconocimiento de patrones es la llamada *desigualdad de Hoeffding*, que es más exacta que la de Markov.

Teorema (Desigualdad de Hoeffding)

Sea Y_1, Y_2, \dots, Y_n v.a. independientes tales que $E(Y_i) = 0$, $a_i \leq Y_i \leq b_i$. Sea $\epsilon > 0$. Entonces, para cualquier $t > 0$

$$P\left(\sum_{i=1}^n Y_i \geq \epsilon\right) \leq e^{-t\epsilon} \prod_{i=1}^n e^{t^2(b_i - a_i)^2/8}.$$

En particular, si $X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$ independientes, entonces, para cualquier $\epsilon > 0$

$$P(|\bar{X}_n - p| > \epsilon) \leq 2e^{-2n\epsilon^2},$$

donde $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$.

Desigualdades

La demostración de la desigualdad anterior está en el libro de texto.

Ejemplo

$X_1, X_2, \dots, X_n \sim \text{Bernoulli}(p)$ independientes. Tomemos $n = 100$ y $\epsilon = 0.2$.

- Chebyshev:

$$P(|\bar{X}_n - p| > \epsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\epsilon^2} \leq \frac{1}{400(0.2)^2} = 0.0625.$$

- Hoeffding:

$$P(|\bar{X}_n - p| > 0.2) \leq 2e^{-2(100)(0.2)^2} = 0.00067,$$

que es mucho más cercana a la real.

Desigualdades

En particular, para un $\alpha > 0$, tomando $\epsilon_n = \sqrt{\frac{1}{2n} \log(2/\alpha)}$, la desigualdad de Hoeffding nos da

$$P(|\bar{X}_n - p| > \epsilon_n) \leq 2e^{-2n\epsilon_n^2} = \alpha.$$

Si $C = (\bar{X}_n - \epsilon_n, \bar{X}_n + \epsilon_n)$,

$$P(p \notin C) = P(|\bar{X}_n - p| > \epsilon_n) \leq \alpha,$$

por lo tanto, $P(p \in C) \geq 1 - \alpha$, es decir, que el intervalo C “atrapa” al verdadero parámetro p con probabilidad $1 - \alpha$.

Decimos que C es un $1 - \alpha$ intervalo de confianza.

Desigualdades

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwartz)

Si X y Y tienen varianzas finitas,

$$E(|XY|) \leq \sqrt{E(X^2)E(Y^2)}.$$

Una forma más común de escribirla es como

$$|\text{Cov}(X, Y)| \leq \sqrt{\text{Var}(X)\text{Var}(Y)},$$

donde la igualdad se cumple si y solo si $X - \mu_X = \lambda(Y - \mu_Y)$, con $\lambda = \text{Cov}(X, Y)/\text{Var}(Y)$.

“Si la varianza de X y Y es pequeña, la covarianza también es pequeña.”

Desigualdades

Nota: Una función g es convexa si para cada x, y y cada $\alpha \in [0, 1]$,

$$g(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha g(x) + (1 - \alpha)g(y).$$

En particular, si g es dos veces diferenciable y $g''(x) \geq 0 \ \forall x$, entonces g es convexa.

Una función es cóncava si $-g$ es convexa.

Ejemplos de convexas: $g(x) = x^2$, $g(x) = e^x$.

Ejemplos de cóncavas: $g(x) = -x^2$, $g(x) = \log(x)$.

Desigualdades

Teorema (Desigualdad de Jensen)

Si g es convexa, entonces

$$E(g(X)) \geq g(E(X)).$$

Si g es cóncava, entonces

$$E(g(X)) \leq g(E(X)).$$

Demostración

Sea $L(x) = a + bx$ la línea tangente a $g(x)$ en el punto $E(X)$, si g es convexa

$$E(g(X)) \geq E(L(X)) = E(a + bX) = a + bE(X) = L(E(X)) = g(E(X)).$$

Desigualdades

De aquí que

- $E(X^2) \geq (E(X))^2 \Rightarrow \text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \geq 0.$
- Si X es positiva, $E(\frac{1}{X}) \geq \frac{1}{E(X)}.$
- $E(\log(X)) \leq \log(E(X))$, ya que $g = \log$ es cóncava.

Función de distribución empírica

Teorema (Desigualdad de Dvoretzky-Kiefer-Wolfowitz)

Sean $X_1, \dots, X_n \sim F$ independientes. Entonces, para todo $\epsilon > 0$,

$$P\left(\sup_x |\hat{F}_n(x) - F(x)| > \epsilon\right) \leq 2e^{-2n\epsilon^2}$$

A partir de la desigualdad anterior, podemos construir un conjunto de confianza como sigue: Definamos

$$L(x) = \max\{\hat{F}_n(x) - \epsilon_n, 0\},$$

$$U(x) = \min\{\hat{F}_n(x) + \epsilon_n, 1\},$$

dónde

$$\epsilon_n = \sqrt{\frac{1}{2n} \log\left(\frac{2}{\alpha}\right)}.$$

Puede verse que para cualquier F

$$P(L(x) \leq F(x) \leq U(x) \text{ para todo } x) \geq 1 - \alpha.$$



Estimación de densidad no paramétrica (EDNP). Notas de Víctor Muñiz.

Introducción

Dada una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas x_1, x_2, \dots, x_n con función de densidad común $f(x)$,

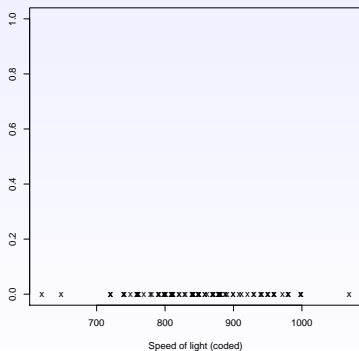
¿Cómo podemos estimar $f(x)$?

(Parzen, E. *On estimation of a Probability Density Function and Mode*, 1962)

Introducción

Un esquema tradicional de análisis de datos.

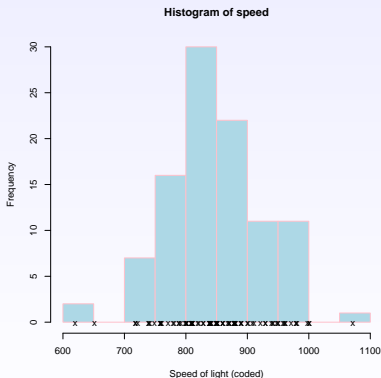
Ejemplo: Estimación de la velocidad de la luz experimentalmente
(Michaelson & Morley, 1986)



Introducción

Un esquema tradicional de análisis de datos.

Ejemplo: Estimación de la velocidad de la luz experimentalmente
(Michaelson & Morley, 1986)

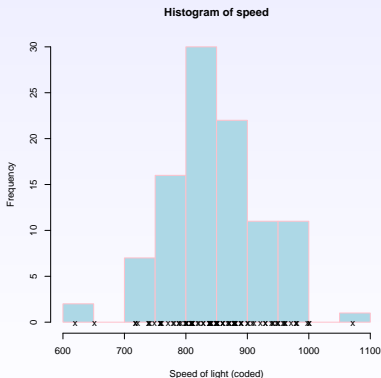


- Estimamos su densidad
- ¿Qué modelo es el adecuado?
- Esto dependerá de varios factores, por ejemplo, la naturaleza de los datos, el conocimiento apriori del fenómeno estudiado o la experiencia del analista.

Introducción

Un esquema tradicional de análisis de datos.

Ejemplo: Estimación de la velocidad de la luz experimentalmente
(Michaelson & Morley, 1986)

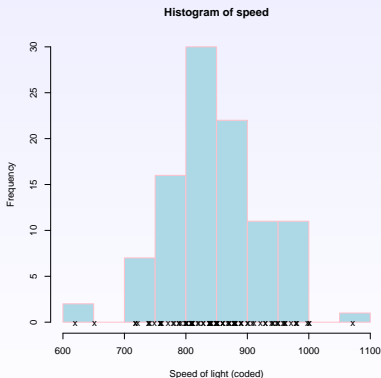


- Estimamos su densidad
- ¿Qué modelo es el adecuado?
- Esto dependerá de varios factores, por ejemplo, la naturaleza de los datos, el conocimiento apriori del fenómeno estudiado o la experiencia del analista.

Introducción

Un esquema tradicional de análisis de datos.

Ejemplo: Estimación de la velocidad de la luz experimentalmente
(Michaelson & Morley, 1986)

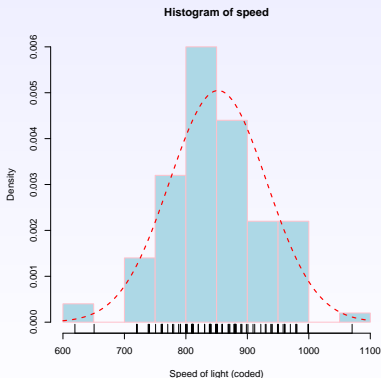


- Estimamos su densidad
- ¿Qué modelo es el adecuado?
- Esto dependerá de varios factores, por ejemplo, la naturaleza de los datos, el conocimiento apriori del fenómeno estudiado o la experiencia del analista.

Introducción

Un esquema tradicional de análisis de datos.

Ejemplo: Estimación de la velocidad de la luz experimentalmente
(Michaelson & Morley, 1986)

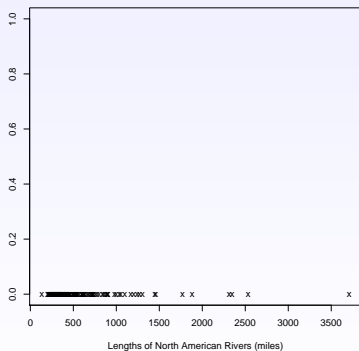


- Ajustemos un modelo normal, los parámetros $\theta = (\mu, \sigma)$ los estimamos de la muestra.

Introducción

Un esquema tradicional de análisis de datos.

Ejemplo: Longitud de ríos de Norteamérica según la US Geological Survey (1975).

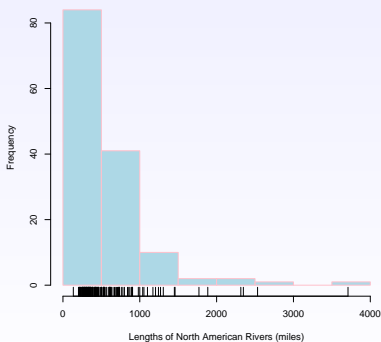


Introducción

Un esquema tradicional de análisis de datos.

Ejemplo: Longitud de ríos de Norteamérica según la US Geological Survey (1975).

Histogram of Lengths



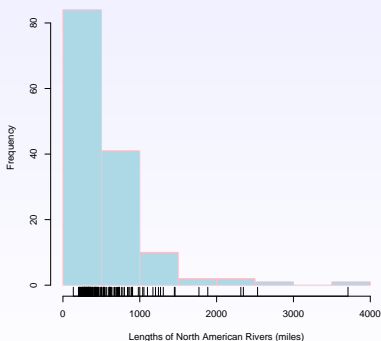
- Estimamos su densidad
- ¿Qué modelo parece apropiado?

Introducción

Un esquema tradicional de análisis de datos.

Ejemplo: Longitud de ríos de Norteamérica según la US Geological Survey (1975).

Histogram of Lengths

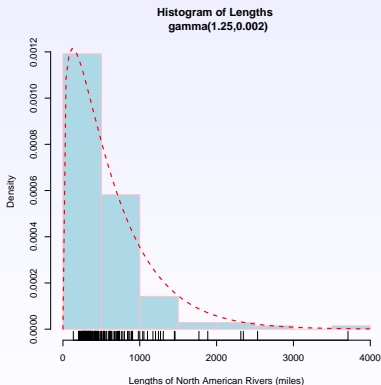


- Estimamos su densidad
- ¿Qué modelo parece apropiado?

Introducción

Un esquema tradicional de análisis de datos.

Ejemplo: Longitud de ríos de Norteamérica según la US Geological Survey (1975).



- Ajustamos un modelo $\text{Gamma}(\alpha, \lambda)$, con α el parámetro de forma y λ el parámetro de escala.

Introducción

- Aquí, todo el conocimiento que obtengamos del fenómeno bajo estudio proviene de **EL modelo** que escojamos, que a su vez nos provee **LA función de densidad** de los datos.
- La modelación estadística tradicional escoge algún modelo paramétrico conocido para $f(x)$, por ejemplo, Normal, Gamma, Exponencial, etc...
- Esto tiene mucho sentido para fenómenos muy estudiados y analizados (estudios de confiabilidad, por ejemplo)
- Sin embargo, para fenómenos o datos más complejos, no siempre es conveniente o válido suponer una distribución de antemano. Verás muchos ejemplos más adelante.

Introducción

- Aquí, todo el conocimiento que obtengamos del fenómeno bajo estudio proviene de **EL modelo** que escojamos, que a su vez nos provee **LA función de densidad** de los datos.
- La modelación estadística tradicional escoge algún modelo paramétrico conocido para $f(x)$, por ejemplo, Normal, Gamma, Exponencial, etc...
- Esto tiene mucho sentido para fenómenos muy estudiados y analizados (estudios de confiabilidad, por ejemplo)
- Sin embargo, para fenómenos o datos más complejos, no siempre es conveniente o válido suponer una distribución de antemano. Verás muchos ejemplos más adelante.

Introducción

- Aquí, todo el conocimiento que obtengamos del fenómeno bajo estudio proviene de **EL modelo** que escojamos, que a su vez nos provee **LA función de densidad** de los datos.
- La modelación estadística tradicional escoge algún modelo paramétrico conocido para $f(x)$, por ejemplo, Normal, Gamma, Exponencial, etc...
- Esto tiene mucho sentido para fenómenos muy estudiados y analizados (estudios de confiabilidad, por ejemplo)
- Sin embargo, para fenómenos o datos más complejos, no siempre es conveniente o válido suponer una distribución de antemano. Verás muchos ejemplos más adelante.

Introducción

- Aquí, todo el conocimiento que obtengamos del fenómeno bajo estudio proviene de **EL modelo** que escojamos, que a su vez nos provee **LA función de densidad** de los datos.
- La modelación estadística tradicional escoge algún modelo paramétrico conocido para $f(x)$, por ejemplo, Normal, Gamma, Exponencial, etc...
- Esto tiene mucho sentido para fenómenos muy estudiados y analizados (estudios de confiabilidad, por ejemplo)
- Sin embargo, para fenómenos o datos más complejos, no siempre es conveniente o válido suponer una distribución de antemano. Verás muchos ejemplos más adelante.

EDNP

En EDNP, no hacemos supuestos distribucionales sobre los datos.

Dado un conjunto de datos $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$ (por simplicidad, empezaremos consideraremos el caso univariado):

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \sim f(\mathbf{x}),$$

queremos estimar **UNA** distribución de densidad $\hat{f}(\mathbf{x})$ que aproxime a $f(\mathbf{x})$ tal que

$$\hat{f}(\mathbf{x}) \geq 0$$

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1,$$

(*bona fide* density).

EDNP

¿Qué nos gustaría de $\hat{f}(\mathbf{x})$?

- Que se parezcan: $E\hat{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

Si $\hat{f}(\mathbf{x})$ es una estimación basada en una muestra de tamaño n , ésta característica nos asegura que

$$E\hat{f}(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x}) \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

(insesgado)

- Que converja a la verdadera distribución:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) \xrightarrow{P} f(\mathbf{x})$$

(consistente)

Para esto, debemos definir una forma de medir la diferencia entre ambas distribuciones...

EDNP

¿Qué nos gustaría de $\hat{f}(\mathbf{x})$?

- Que se parezcan: $E\hat{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

Si $\hat{f}(\mathbf{x})$ es una estimación basada en una muestra de tamaño n , ésta característica nos asegura que

$$E\hat{f}(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x}) \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

(insesgado)

- Que converja a la verdadera distribución:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) \xrightarrow{P} f(\mathbf{x})$$

(consistente)

Para esto, debemos definir una forma de medir la diferencia entre ambas distribuciones...

EDNP

¿Qué nos gustaría de $\hat{f}(\mathbf{x})$?

- Que se parezcan: $E\hat{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

Si $\hat{f}(\mathbf{x})$ es una estimación basada en una muestra de tamaño n , ésta característica nos asegura que

$$E\hat{f}(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x}) \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

(insesgado)

- Que converja a la verdadera distribución:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) \xrightarrow{P} f(\mathbf{x})$$

(consistente)

Para esto, debemos definir una forma de medir la diferencia entre ambas distribuciones...

EDNP

¿Qué nos gustaría de $\hat{f}(\mathbf{x})$?

- Que se parezcan: $E\hat{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$.

Si $\hat{f}(\mathbf{x})$ es una estimación basada en una muestra de tamaño n , ésta característica nos asegura que

$$E\hat{f}(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x}) \text{ cuando } n \rightarrow \infty$$

(insesgado)

- Que converja a la verdadera distribución:

$$\hat{f}(\mathbf{x}) \xrightarrow{P} f(\mathbf{x})$$

(consistente)

Para esto, debemos definir una forma de medir la diferencia entre ambas distribuciones...

EDNP: El histograma

El histograma.

Es quizá el método no paramétrico más usado para estimar y visualizar una densidad. El método es muy simple.

Supongamos que $\mathbf{x} \in [a, b]$

- Crea una partición fija de M celdas disjuntas T_0, T_1, \dots, T_{M-1} que comprendan el intervalo $[a, b]$, cada una con un ancho h .
- La densidad se estima mediante:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{m=0}^{M-1} N_m I_{T_m}(x),$$

donde

- I_{T_m} es la función indicadora del intervalo m ,
- $N_m = \sum_{i=1}^n I_{T_m}(x_i)$, es decir, el número de valores que caen en la celda T_m

EDNP: El histograma

Las desventajas del histograma como un estimador de la densidad han sido mencionadas por varios autores. Por ejemplo:

- Celdas fijas
- Discontinuidades en las fronteras de las celdas
- Selección del origen del histograma

Ejemplo...

EDNP: El histograma

Las desventajas del histograma como un estimador de la densidad han sido mencionadas por varios autores. Por ejemplo:

- Celdas fijas
- Discontinuidades en las fronteras de las celdas
- Selección del origen del histograma

Ejemplo...

EDNP: KDE

Estimación usando un Kernel (KDE).

Es el método mas popular. Para el caso univariado, el KDE está dado por

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad x \in \mathbb{R}, h > 0.$$

K es la función Kernel, y h es el **ancho de banda**, que determina la suavidad de la estimación.

Bajo condiciones no muy restrictivas (h debe decrecer cuando n aumenta), puede mostrarse que KDE converge en probabilidad a la verdadera densidad.

EDNP: KDE

Estimación usando un Kernel (KDE).

Es el método mas popular. Para el caso univariado, el KDE está dado por

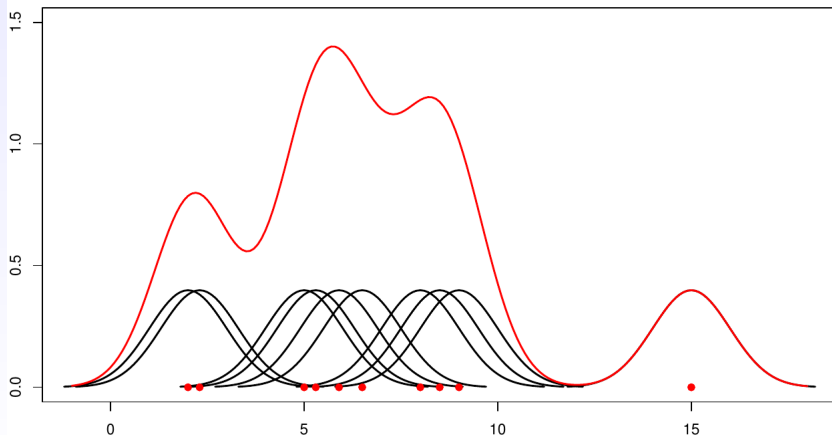
$$\hat{f}(x) = \frac{1}{nh} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad x \in \mathbb{R}, h > 0.$$

K es la función Kernel, y h es el **ancho de banda**, que determina la suavidad de la estimación.

Bajo condiciones no muy restrictivas (h debe decrecer cuando n aumenta), puede mostrarse que KDE converge en probabilidad a la verdadera densidad.

EDNP: KDE

Gaussian kernel density estimate



EDNP: KDE

Dado un kernel K y un ancho de banda h , la KDE es *única* para un conjunto de datos específico, entonces, **no depende** de la selección del origen, como pasa con los histogramas.

El Kernel K

- Puede ser una función de densidad también, generalmente se selecciona una función unimodal y simétrica.
- El centro del kernel se coloca sobre cada dato x_i
- La influencia de cada dato se propaga en su vecindad
- La contribución de cada punto se suma para la estimación total

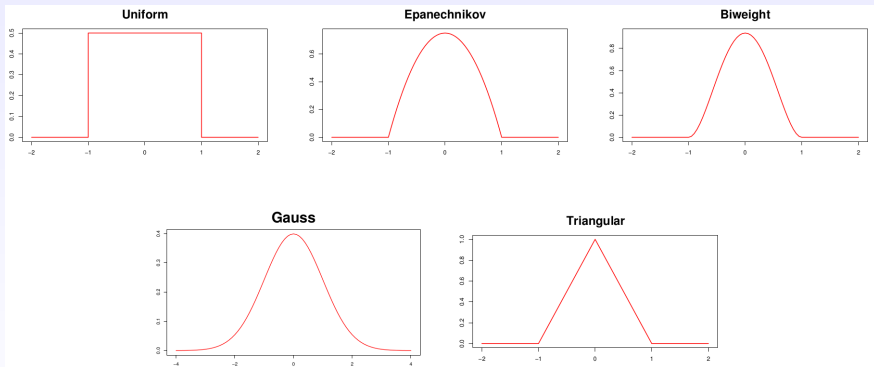
EDNP: KDE

Dado un kernel K y un ancho de banda h , la KDE es *única* para un conjunto de datos específico, entonces, **no depende** de la selección del origen, como pasa con los histogramas.

El Kernel K

- Puede ser una función de densidad también, generalmente se selecciona una función unimodal y simétrica.
- El centro del kernel se coloca sobre cada dato x_i
- La influencia de cada dato se propaga en su vecindad
- La contribución de cada punto se suma para la estimación total

EDNP: KDE



EDNP: KDE

Más importante que el Kernel, es la elección del ancho de banda.

El ancho de banda h

- Es un factor de escala
- Controla la suavidad o rugosidad de la estimación
- Introducimos un concepto importante: **sobreestimación**
- Esto a su vez, lleva a otro concepto aún mas importante:
Bias-Variance tradeoff
- Veamos un ejemplo

EDNP: KDE

Más importante que el Kernel, es la elección del ancho de banda.

El ancho de banda h

- Es un factor de escala
- Controla la suavidad o rugosidad de la estimación
- Introducimos un concepto importante: **sobreestimación**
- Esto a su vez, lleva a otro concepto aún mas importante:
Bias-Variance tradeoff
- Veamos un ejemplo

EDNP: KDE

Más importante que el Kernel, es la elección del ancho de banda.

El ancho de banda h

- Es un factor de escala
- Controla la suavidad o rugosidad de la estimación
- Introducimos un concepto importante: **sobreestimación**
- Esto a su vez, lleva a otro concepto aún mas importante:
Bias-Variance tradeoff
- Veamos un ejemplo

EDNP: KDE

Más importante que el Kernel, es la elección del ancho de banda.

El ancho de banda h

- Es un factor de escala
- Controla la suavidad o rugosidad de la estimación
- Introducimos un concepto importante: **sobreestimación**
- Esto a su vez, lleva a otro concepto aún mas importante:
Bias-Variance tradeoff
- Veamos un ejemplo

EDNP: KDE

Más importante que el Kernel, es la elección del ancho de banda.

El ancho de banda h

- Es un factor de escala
- Controla la suavidad o rugosidad de la estimación
- Introducimos un concepto importante: **sobreestimación**
- Esto a su vez, lleva a otro concepto aún mas importante:
Bias-Variance tradeoff
- Veamos un ejemplo

EDNP: KDE

Más importante que el Kernel, es la elección del ancho de banda.

El ancho de banda h

- Es un factor de escala
- Controla la suavidad o rugosidad de la estimación
- Introducimos un concepto importante: **sobreestimación**
- Esto a su vez, lleva a otro concepto aún mas importante:
Bias-Variance tradeoff
- Veamos un ejemplo

EDNP: KDE

Cómo elegimos h

- A “ojo” (¿qué quieres ver?)
- Dos criterios:
 - Normal scale rule (también conocida como “rule of thumb”)
 - Validación cruzada (CV)

EDNP: KDE

Cómo elegimos h

- A “ojo” (¿qué quieres ver?)
- Dos criterios:
 - Normal scale rule (también conocida como “rule of thumb”)
 - Validación cruzada (CV)

EDNP: KDE

Cómo elegimos h

- Introducimos un criterio: MISE (mean integrated squared error). Ver notas.
- Normal scale rule (también conocida como “rule of thumb”)
 - Asume que f es Normal, y calcula h óptima que minimice MISE según este supuesto.
 - Puede mostrarse que, si usamos un kernel Gaussiano, el h óptimo bajo este esquema es

$$h^{ROT} = 1.06sn^{-1/5},$$

con s es la estimación de σ .

- La opción por default en R
- Bien para un primer vistazo, pero tiende a suavizar de más cuando f es multimodal o claramente no-Gaussiana.
- Validación cruzada: utiliza el criterio *leave-one-out* CV.

EDNP: KDE

Cómo elegimos h

- Introducimos un criterio: MISE (mean integrated squared error). Ver notas.
- Normal scale rule (también conocida como “rule of thumb”)
 - Asume que f es Normal, y calcula h óptima que minimice MISE según este supuesto.
 - Puede mostrarse que, si usamos un kernel Gaussiano, el h óptimo bajo este esquema es

$$h^{ROT} = 1.06sn^{-1/5},$$

con s es la estimación de σ .

- La opción por default en R
 - Bien para un primer vistazo, pero tiende a suavizar de más cuando f es multimodal o claramente no-Gaussiana.
- Validación cruzada: utiliza el criterio *leave-one-out* CV.

EDNP: KDE

Cómo elegimos h

- Introducimos un criterio: MISE (mean integrated squared error). Ver notas.
- Normal scale rule (también conocida como “rule of thumb”)
 - Asume que f es Normal, y calcula h óptima que minimice MISE según este supuesto.
 - Puede mostrarse que, si usamos un kernel Gaussiano, el h óptimo bajo este esquema es

$$h^{ROT} = 1.06sn^{-1/5},$$

con s es la estimación de σ .

- La opción por default en R
- Bien para un primer vistazo, pero tiende a suavizar de más cuando f es multimodal o claramente no-Gaussiana.
- Validación cruzada: utiliza el criterio *leave-one-out* CV.

EDNP: KDE

Cómo elegimos h

- Introducimos un criterio: MISE (mean integrated squared error). Ver notas.
- Normal scale rule (también conocida como “rule of thumb”)
 - Asume que f es Normal, y calcula h óptima que minimice MISE según este supuesto.
 - Puede mostrarse que, si usamos un kernel Gaussiano, el h óptimo bajo este esquema es

$$h^{ROT} = 1.06sn^{-1/5},$$

con s es la estimación de σ .

- La opción por default en R
- Bien para un primer vistazo, pero tiende a suavizar de más cuando f es multimodal o claramente no-Gaussiana.
- Validación cruzada: utiliza el criterio *leave-one-out* CV.

EDNP: KDE

Cómo elegimos h

- Introducimos un criterio: MISE (mean integrated squared error). Ver notas.
- Normal scale rule (también conocida como “rule of thumb”)
 - Asume que f es Normal, y calcula h óptima que minimice MISE según este supuesto.
 - Puede mostrarse que, si usamos un kernel Gaussiano, el h óptimo bajo este esquema es

$$h^{ROT} = 1.06sn^{-1/5},$$

con s es la estimación de σ .

- La opción por default en R
- Bien para un primer vistazo, pero tiende a suavizar de más cuando f es multimodal o claramente no-Gaussiana.
- Validación cruzada: utiliza el criterio *leave-one-out* CV.

EDNP: KDE

Cómo elegimos h

- Introducimos un criterio: MISE (mean integrated squared error). Ver notas.
- Normal scale rule (también conocida como “rule of thumb”)
 - Asume que f es Normal, y calcula h óptima que minimice MISE según este supuesto.
 - Puede mostrarse que, si usamos un kernel Gaussiano, el h óptimo bajo este esquema es

$$h^{ROT} = 1.06sn^{-1/5},$$

con s es la estimación de σ .

- La opción por default en R
 - Bien para un primer vistazo, pero tiende a suavizar de más cuando f es multimodal o claramente no-Gaussiana.
- Validación cruzada: utiliza el criterio *leave-one-out* CV.

EDNP: KDE

Ejemplo

Sea $Y \in \{0, 1\}$ una variable aleatoria binaria que indica si una persona tiene coronary heart disease (CHD) (1) o no la tiene (0), y X una variable aleatoria continua que representa su medición de systolic blood pressure (SBP).

- 1 Estima $P(X = x | Y = 0)$ y $P(X = x | Y = 1)$ usando estimaciones basadas en un kernel Gaussiano.
- 2 Realiza una estimación de la probabilidad posterior de que un paciente tenga la enfermedad CHD en base a su medición de SBP, es decir:

$$P(Y = 1 | X = x) = \frac{P(X = x | Y = 1) P(Y = 1)}{P(X = x | Y = 1) P(Y = 1) + P(X = x | Y = 0) P(Y = 0)}$$

Utiliza las estimaciones usadas en el inciso anterior y distintos valores de ancho de banda del kernel. ¿Qué valor tomarías para la apriori $P(Y = 0)$ y $P(Y = 1)$? ¿Qué efecto tiene el parámetro del ancho de banda en los resultados?

EDNP: KDE

KDE multivariado.

La extensión al caso multivariado es sencilla:

$$\hat{f}_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n|\mathbf{H}|} \sum_{i=1}^n K(\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

donde \mathbf{H} es una matriz de $d \times d$ no singular que generaliza el ancho de banda h , y K es una función con media $\mathbf{0}$ e integra 1.

Ejemplo

Ejemplo: sampling KDE.

EDNP: KDE

KDE multivariado.

La extensión al caso multivariado es sencilla:

$$\hat{f}_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n|\mathbf{H}|} \sum_{i=1}^n K(\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

donde \mathbf{H} es una matriz de $d \times d$ no singular que generaliza el ancho de banda h , y K es una función con media $\mathbf{0}$ e integra 1.

Ejemplo

Ejemplo: sampling KDE.

EDNP: KDE

KDE multivariado.

La extensión al caso multivariado es sencilla:

$$\hat{f}_{\mathbf{H}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{n|\mathbf{H}|} \sum_{i=1}^n K(\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

donde \mathbf{H} es una matriz de $d \times d$ no singular que generaliza el ancho de banda h , y K es una función con media $\mathbf{0}$ e integra 1.

Ejemplo

Ejemplo: sampling KDE.

Modelos para más de una Variable Aleatoria.

Texto, Cap. 3

Introducción

Hasta aquí hemos construido modelos para una sola variable aleatoria como si existieran siempre per se, sin nada que interactúe en su medio.

Sin embargo, en muchos casos, estaremos interesados en estudiar en forma conjunta más de una característica.

Por ejemplo, si medimos el porcentaje de zinc puro en una cierta reacción, no podemos modelar el comportamiento de este porcentaje sin tomar en cuenta las condiciones bajo las cuales fue producido, algunas de ellas serán “constantes”, pero otras pueden variar, esto es, uno esperaría cambios en los valores de los porcentajes de zinc si las revoluciones por minuto a las que se mueve el reactor cambian, o la velocidad del extractor varía, o si la temperatura no se puede mantener fija, etc.

Introducción

En casos como éstos, algunas de las variables determinan el comportamiento de otra (es un modelo del tipo Input-Output). Formas simplificadas de estos modelos son los que usamos frecuentemente en análisis de regresión, diseño de experimentos, etc.

Considera

$$y = \mu_y + e$$

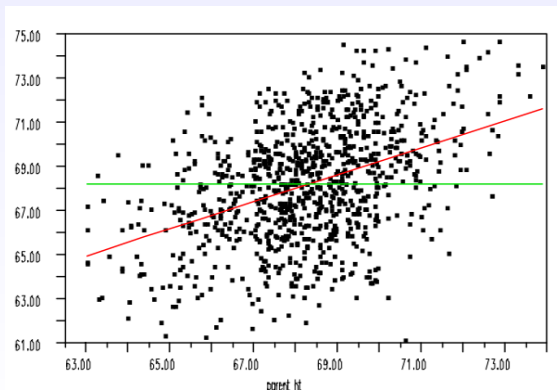
Aquí μ_y representa a la media de la variable aleatoria Y . Sin embargo, esta media cambia por la acción o presencia de otras variables, esto es:

$$\mu_y = f(x_1, x_2, x_3)$$

la media es una función (tal vez lineal, tal vez no) de las otras variables que de alguna manera quedan involucradas en el estudio.

Introducción

Por mencionar un ejemplo clásico en la literatura, supongamos que de la altura de los padres queremos saber cuál será la altura de los hijos, (predecir). Galton, en un estudio realizado sobre 942 padres e hijos, encontró algo como lo que se muestra en la gráfica siguiente:



Introducción

¿Qué quiere decir esto?

La línea horizontal representa el valor promedio de las alturas de los hijos, ignorando las alturas de los padres, sin embargo la línea con pendiente creciente nos da una mejor idea de lo que está pasando con el comportamiento de las alturas de los hijos.

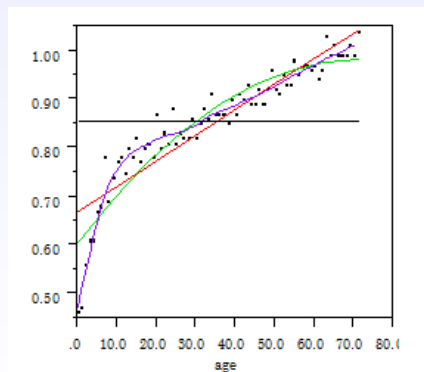
Se esperaba que, entre más altos sean los padres, más lo serán los hijos, relación que sólo se cumple en cierta medida.

Vean el alto nivel de dispersión que tenemos en este caso, lo cual, típicamente oscurece las conclusiones.

Introducción

Otro caso podría ser el crecimiento de los anillos en los troncos de los árboles (Dendrocronología) como un medio para determinar su edad.

Se muestra una gráfica de 72 mediciones en donde se tomaron árboles de la misma variedad con diferente número de años:



Introducción

Aquí, μ_y , el radio promedio del anillo de esa variedad de árboles, es una función no-lineal del tiempo, lo cual es completamente lógico, se espera tienda a estabilizarse después de un cierto número (grande) de años.

Las curvas muestran diferentes opciones de cómo modelar el comportamiento medio de los radios. La línea horizontal de nuevo, representa la media de los radios, sin tomar en cuenta la edad. Claramente *you are missing something!*

¿Es la edad una variable aleatoria? La respuesta en general es sí. El proceso es el siguiente, seleccionamos al azar árboles de esta variedad en una zona donde creemos que podemos encontrar tanto árboles jóvenes como viejos. Mediante algún procedimiento alternativo (por ejemplo pruebas con carbono 14) establecemos la edad del árbol y finalmente hacemos las mediciones de los diámetros de los anillos.

Introducción

En este caso es inoperante pensar edad como un factor fijo y controlable por el investigador. Ambas mediciones son entonces variables aleatorias. De otra forma implicaría que para completar el estudio tendríamos que esperar 80 años!!!

En la industria por ejemplo, existen muchas situaciones en donde sí se puede tener el control de los factores. Recordemos el caso de producción de zinc puro, aquí, el valor de la temperatura, presión, revoluciones por minuto del revolvedor, del abanico de succión, etc. al menos en *teoría* permanecen fijos o pueden ser manipulados por el operador. Esto resulta en una simplificación muy útil cuando se plantea el modelo y como dijimos antes, son modelos que se trabajan en diseños de experimentos.

Introducción

En otros casos, no existe una relación de *dependencia*, sino que todas afectan a todas en algún nivel y nuestro interés se centra en entender tales *interdependencias*.

Consideremos otro ejemplo clásico en la literatura (**Fisher Iris data**), la construcción de un criterio de clasificación de variedades de plantas *setosa*, *versicolor* y *virginica* en base a *las mediciones del sépalo y el pétalo* (longitud y ancho).

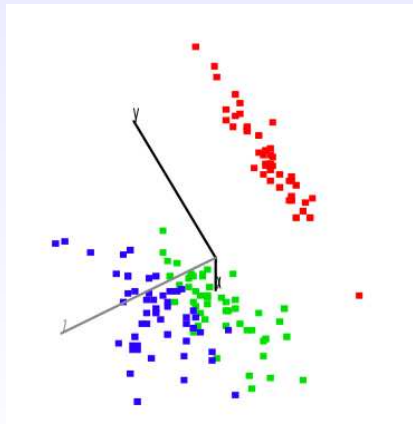
Una vista de los datos en términos de las primeras 3 de estas características se presenta en la siguiente diapositiva.

Introducción

Se ve claramente la separación entre variedades y más aún la diferencia de versicolor y virginica con setosa.

En cada planta se miden dos características, por lo que no se espera que esos valores entre sí sean independientes.

Nos interesa saber en qué medida estas 3 mediciones nos permiten decidir si la variedad es setosa, versicolor o virginica, y lo que explotamos es la estructura de dependencias entre las mediciones de sépalos y pétalos. Esto se conoce como análisis discriminante (se estudia en Análisis Multivariado).



Introducción

Para poder establecer soluciones a problemas como los mencionados antes, y muchos otros, necesitamos una serie de definiciones y conceptos básicos que son los que trataremos en esta sección y que, cabe mencionar, es lo único que estableceremos en el curso sobre estructuras multivariadas.

Muchos de estos conceptos también nos ayudarán a hacer las conexiones entre los modelos y las inferencias que podemos hacer sobre ellos a partir de información muestral.

Para simplificar la notación trabajaremos casi exclusivamente el caso bivariado dado que la mayoría de los resultados son directamente extendibles al caso de variables aleatorias.

Introducción

Nuestros objetos de estudio son ahora parejas de variables (X, Y) .

Existen diferentes combinaciones, por ejemplo, ambas variables son discretas (modelos discretos), ambas continuas (modelos continuos) o una variable siendo discreta y la otra continua (modelos de mezclas).

Daremos una explicación extensiva de los primeros dos y sólo trataremos algunos casos especiales de modelos de mezclas.

Conceptos Básicos

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Sólo para fines de ilustrar los conceptos, comenzaremos con un ejemplo muy simple. Supongamos que estamos muestreando 3 baterías de un lote con las siguientes características:

- 3 baterías son nuevas
- 4 son reconstruidas
- 5 tienen algún tipo de problema

¡Es un lote que no desearíamos tener en las manos! Por desgracia en la práctica no sabemos lo que hay, sólo lo que vemos en la muestra y de allí tratamos de inferir sobre las cualidades del lote completo; más aún, sobre el proceso de donde provienen!!!!.

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Si definimos

X = # de baterías nuevas en la muestra,

Y = # de baterías reconstruidas en la muestra,

no es necesario definir una tercer variable Z para el resto de las baterías dado que con dos es suficiente para describir el comportamiento total de los elementos de la muestra, como veremos a continuación.

Podemos en principio, calcular las probabilidades

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y),$$

para $x = 0, 1, 2, 3$ y $y = 0, 1, 2, 3$.

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Calculemos algunas de ellas:

$$p(0,0) = \frac{\# \text{ de casos favorables}}{\# \text{ de casos totales}} = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{10}{220}.$$

Aunque, realmente,

$$\# \text{ de casos favorables} = \binom{5}{3} \binom{3}{0} \binom{4}{0}.$$

Esto define lo que podríamos llamar una distribución Hipergeométrica Multivariada.

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Continuando con el proceso anterior

$$p(0, 1) = \frac{\binom{5}{2} \binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{40}{220},$$

$$p(0, 2) = \frac{\binom{4}{2} \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220},$$

$$p(0, 3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{4}{220},$$

$$p(1, 0) = \frac{\binom{3}{1} \binom{5}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{30}{220},$$

$$p(1, 1) = \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{1} \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{60}{220},$$

$$p(1, 2) = \frac{\binom{3}{1} \binom{4}{2} \binom{5}{0}}{\binom{12}{3}} = \frac{18}{220},$$

$$p(2, 0) = \frac{\binom{3}{2} \binom{4}{0} \binom{5}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{15}{220},$$

$$p(2, 1) = \frac{\binom{3}{2} \binom{4}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{12}{220},$$

$$p(3, 0) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220}.$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Arreglando los resultados anteriores en una tabla, se tiene que

x/y	0	1	2	3
0	10/220	40/220	30/220	4/220
1	30/220	60/220	18/220	0
2	15/220	12/220	0	0
3	1/220	0	0	0

Lo que obtenemos es lo que se conoce como *distribución conjunta* de X y Y . Cada entrada en la tabla no es más que la probabilidad de la intersección de dos eventos $\{X = x, Y = y\}$.

¿Cuándo sabemos que hemos construido un modelo de probabilidad conjunta válido? La respuesta, al igual que antes, radica en el cumplimiento de las reglas básicas de probabilidad.

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Definición

Sean X y Y dos variables aleatorias discretas. Se define la función *función de probabilidad conjunta de X y Y* como

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y),$$

para cada par de valores (x, y) en el rango de X, Y . La cantidad representa la probabilidad de la intersección de los dos eventos: $X = x$ y $Y = y$.

La función de probabilidad conjunta satisface que:

① $0 \leq f(x, y) \leq 1 \quad \forall (x, y),$

② $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1.$

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Notemos que nuestra tabla cumple con ambas propiedades:

x/y	0	1	2	3	$P\{X = x\}$
0	10/220	40/220	30/220	4/220	84/220
1	30/220	60/220	18/220	0	108/220
2	15/220	12/220	0	0	27/220
3	1/220	0	0	0	1/220
$P\{Y = y\}$	56/220	112/220	48/220	4/220	1

De aquí, se pueden definir otras distribuciones de interés. Por ejemplo, es claro que el último renglón en la tabla representa la distribución de $Y = \text{"\# de baterías reconstruidas en la muestra"}$ y que la última columna es la distribución de $X = \text{"\# de baterías nuevas en la muestra"}$. A éstas distribuciones se les conoce como las distribuciones *marginales* (por estar en los márgenes).

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Notemos que para obtener las distribuciones marginales lo que se hizo fue ignorar la presencia de la otra variable y , por ende, sumar sobre cada renglón o cada columna, según sea el caso.

Definición

Las distribuciones marginales de X y Y , denotadas por $p(x) = f_X(x)$ y $p(y) = f_Y(y)$, se definen como

$$f_X(x) = \sum_y p(x, y) \quad \text{para cada } x,$$

y

$$f_Y(y) = \sum_x p(x, y) \quad \text{para cada } y.$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Bajo estos casos (más de una variable) también podemos contestarnos otras preguntas que involucran el conocimiento previo de la información, por ejemplo:

Si se sabe que X tomó el valor de 2, ¿cuál es el comportamiento de Y ?

Claramente esto restringe sus posibles valores y por tanto sus probabilidades cambian.

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

A saber, tendríamos que calcular

$$P\{Y = 0 \mid X = 2\} = \frac{P\{X = 2, Y = 0\}}{P\{X = 2\}} = \frac{\frac{15}{220}}{\frac{27}{220}} = \frac{15}{27},$$

y así para cada valor de Y .

x/y	0	1	2	3	$P\{X = x\}$
0					
1					
2	15/220	12/220	0	0	27/220
3					
$P\{Y = y \mid X = 2\}$	15/27	12/27	0	0	1

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Es como olvidarnos del resto de la información: ahora, en lugar de las 220 posibles muestras iniciales, solo nos quedan 27, aquellas que tienen el valor de 2 asignado a X .

Este proceso de asignar probabilidades es de particular importancia, pues responde a un tipo de problemas, los más comunes.

Regresa sobre los ejemplos con los que iniciamos este capítulo y verás que nos preguntamos, por ejemplo, sobre el % de zinc cuando la temperatura es xxxx, etc. En otra palabras, estamos frecuentemente interesados en saber cómo se comporta nuestra característica bajo estudio sujeta a la presencia de otras variables, las cuales podemos fijar a diferentes valores y estudiar su efecto en la variable respuesta.

Estas distribuciones reciben el nombre de **distribuciones Condicionales**.

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Definición

Sean X y Y dos variables aleatorias con distribución conjunta $f(x, y)$ y marginales definidas por $f_X(x)$ y $f_Y(y)$. Entonces

- i) La distribución condicional de Y dado $X = x$ es

$$P\{Y = y \mid X = x\} = \frac{f(x, y)}{f_X(x)},$$

para cada valor de y , donde $f_X(x) = \sum_y f(x, y)$ para cada x .

- ii) La distribución condicional de X dado Y es:

$$P\{X = x \mid Y = y\} = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)},$$

para cada valor de x , donde $f_Y(y) = \sum_x f(x, y)$ para cada y .

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Así las cosas, se pueden obtener tantas distribuciones condicionales para Y como valores se tengan de X , y viceversa. En nuestro ejemplo, podríamos calcular 3 distribuciones condicionales para Y y otras 3 para X .

Al igual que en el caso de una variable, son las condiciones del muestreo las que nos dirán como construir el modelo conjunto.

En muchas situaciones es a través de la recopilación histórica, de archivo o planeando un experimento para estos fines, que se pueden construir tablas de distribuciones conjuntas, utilizando frecuencias relativas, que se consideran estables (léase, correctas).

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Ejemplo

*Se quiere **verificar la programación** del tiempo que debe durar la luz verde en un semáforo que se encuentra en una cierta intersección, con vuelta a la izquierda. Como no se tiene información al respecto, se envía a un estudiante graduado a hacer observaciones sobre el número de carros X y el número de camiones Y que llegan en un ciclo (entre verde y verde); y con esto se construye la tabla de distribuciones conjunta. Se plantean una serie de preguntas y con ello confirmas qué tan eficiente fue el ciclo planeado.*

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Los resultados fueron los siguientes

	$p(x, y)$	x		
		0	1	2
y	0	.025	.015	.010
	1	.050	.030	.020
	2	.125	.075	.050
	3	.150	.090	.060
	4	.100	.060	.040
	5	.050	.030	.020

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Ejercicio:

- 1 Verifica que es una tabla válida de probabilidades conjuntas.
- 2 Calcula las distribuciones marginales para carros y camiones.
- 3 ¿Cuál es la probabilidad de que se tengan exactamente un carro y un camión en un ciclo dado?
- 4 Supongamos que la vuelta a la izquierda tiene una capacidad máxima de 5 carros y un camión es equivalente a 3 carros. ¿Cuál es la probabilidad de que se sature la línea en un ciclo dado?
- 5 ¿Cuál es la probabilidad de que se tenga exactamente un carro, dado que ya se tiene un camión en un ciclo predeterminado y se sabe que no habrá ningún otro camión más? Contesta esta misma pregunta para $Y = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Con el concepto de distribuciones condicionales, podemos refinar nuestra definición, hasta ahora operativa, de **independencia**. Este es posiblemente uno de los supuestos más usados en la construcción de modelos y por lo mismo uno de los que más se abusa.

¿Qué significaría que $P(Y = y \mid X = x) = P(Y = y)$?

Básicamente nos dice que X , al menos cuando se fija en su nivel x , no agrega información adicional sobre el comportamiento de Y . Entonces, si esta condición se cumple sin importar el valor que propongamos de X , se dirá que X y Y son independientes.

Modelos de Probabilidad Conjunta Discretos

Más formalmente tenemos la siguiente definición.

Definición

Dos variables aleatorias X y Y se dice que son independientes si, para todo par de valores x y y

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$$

Nota:

$$P(Y = y | X = x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} \Rightarrow \begin{aligned} f(x, y) &= P(Y = y | X = x)f_X(x) \\ &= P(Y = y)f_X(x) = f_Y(y)f_X(x) \end{aligned}$$

“La conjunta es el producto de las marginales.”

¿Es el número de carros en un ciclo independiente del número de camiones?

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Los conceptos son los mismos, sólo hay que ajustar las definiciones a las características de las variables continuas.

Comencemos con un caso concreto:

Ejemplo

Un grupo de estudiantes del Programa Emprendedor establecieron un restaurante de comida rápida (fast food) e hicieron un estudio de tiempos para evaluar el servicio al cliente. Definamos Y_1 como el tiempo total que tarda un cliente desde que entra al local hasta que deja la ventanilla de servicio y Y_2 el tiempo que espera el cliente en la fila hasta llegar a la ventilla de servicio. Claramente $Y_1 \geq Y_2$.

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Ejemplo (Continuación)

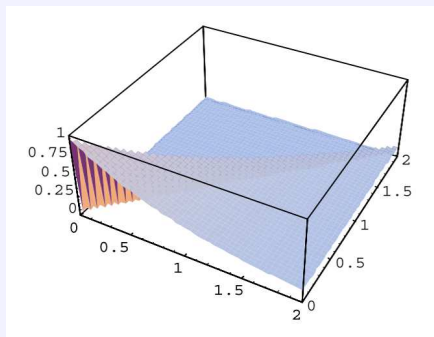
Con un poco más de esfuerzo y aprovechando lo que aprendieron en sus cursos de matemáticas, lograron establecer el modelo del comportamiento conjunto dado por:

$$f(y_1, y_2) = \begin{cases} e^{-y_1} & 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq \infty \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Ejemplo (Continuación)

Esperaban un comportamiento de caída exponencial, así que tomaron datos y ajustaron el mejor modelo en esta familia, con un software especializado.



Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Notas:

- Por supuesto que es irreal pensar que tome valores infinitos. No puede sobrepasar lo que dura abierto el restaurante y ningún cliente en un negocio de este tipo, soportaría una espera larga. Sin embargo, y como ya lo hicimos notar desde el inicio del curso, ésta es una hipótesis de simplicidad. Notemos que a los tiempos grandes, si el modelo es adecuado, les corresponde una probabilidad prácticamente de cero por lo que resulta irrelevante si se quitan de antemano. El eliminar esos valores conllevaría por otro lado, a establecer modelos que son bastante más complejos de manejar desde su planteamiento y, a fin de cuentas, generarían respuestas casi idénticas en la región de interés.

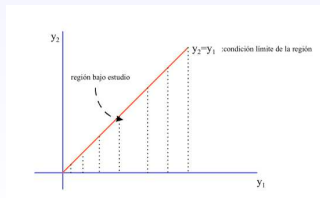
Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Notas:

- Resulta evidente de la forma de la función y de la gráfica que ahora tenemos definida una superficie y en lugar de valores por intervalo, tenemos regiones en el plano que definen a los valores de las variables. Por ejemplo, aquí, la región en donde la función toma valores distintos de cero es:

$$0 \leq y_2 \leq y_1 \leq \infty$$

esto se representa como:



Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Ahora bien, necesitamos primero que nada verificar si éste es un modelo de probabilidad. Para ello y viendo las definiciones de la sección previa, extendamos la definición al caso continuo.

Definición

Una función de 2 variables $f(x, y)$ definida sobre el plano xy se llama función de densidad de probabilidad conjunta (densidad conjunta) de X y Y si y sólo si :

$$P((x, y) \in A) = \int_A f(x, y) dx dy \quad \forall \text{ región } A \text{ del plano } xy.$$

Esto nos dice que las probabilidades se obtienen como volúmenes bajo la superficie definida. La superficie debe verse siempre sobre el plano xy .

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

La función de densidad conjunta satisface que:

- 1 $f(x, y) \geq 0, \forall (x, y).$
- 2 $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$

Esto nos dice que el volumen total debe ser la unidad.

a) Mostrar que la función determinada por nuestros emprendedores, es realmente una función de densidad conjunta.

Esto significa que la

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} \int_0^{y_1} e^{-y_1} dy_2 dy_1 &= \int_0^{\infty} e^{-y_1} y_2 \Big|_0^{y_1} dy_1 = \int_0^{\infty} y_1 e^{-y_1} dy_1 \\
 &= -y_1 e^{-y_1} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-y_1} dy_1 \\
 &= 0 - e^{-y_1} \Big|_0^{\infty} = 0 + 1 = 1,
 \end{aligned}$$

por lo que la distribución conjunta está bien definida.

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

A continuación estudiaremos el concepto de función acumulada, el cual es muy útil pues nos permite calcular probabilidades. Daremos su definición pero no nos preocuparemos, en general, de calcular dicha función explícitamente; sólo nos enfocaremos en la idea que de ella se desprende que nos facilite los cálculos posteriormente.

Definición

La función de distribución conjunta o función de distribución acumulada conjunta de X y Y se define como:

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(s, t) ds dt & X \text{ y } Y \text{ continuas} \\ \sum_{t \leq y} \sum_{s \leq x} f(s, t) & X \text{ y } Y \text{ discretas} \end{cases}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

b) Calcular las densidades marginales de Y_1 y Y_2 . Esto es, determinar los comportamientos por separado del tiempo total que tarda un cliente desde que entra al local hasta que deja la ventanilla de servicio, y el tiempo que dura en la fila hasta llegar a la ventanilla de servicio.

Para responder esta pregunta, primero tenemos que definir que entendemos ahora por **marginales**: sólo recordemos que significa ignorar la presencia de la(s) otra(s) variable(s) y esto se logra “sumando” sobre todos los valores de las variables que no son de nuestro interés en ese momento. Geométricamente se vería como “aplastar” la gráfica sobre el eje que nos interesa.

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Definición

Las distribuciones *marginales* de v.a. continuas X y Y , denotadas por $f_X(x)$ y $f_Y(y)$, se definen como

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy,$$

y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Nota: Para el caso discreto intercambiamos las \sum por \int .

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Ahora sí, volviendo sobre el ejemplo, tenemos

$$\begin{aligned} f_{Y_1}(y_1) &= \int_0^{y_1} e^{-y_1} dy_2 = y_2 e^{-y_1} \Big|_0^{y_1} \\ &= y_1 e^{-y_1} \quad 0 \leq y_1 \leq \infty \quad \text{una Gamma}(\alpha = 2, \beta = 1) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f_{Y_2}(y_2) &= \int_{y_2}^{\infty} e^{-y_1} dy_1 = -e^{-y_1} \Big|_{y_2}^{\infty} \\ &= e^{-y_2} \quad 0 \leq y_2 \leq \infty \quad \text{una exp}(\beta = 1) \end{aligned}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

No siempre las distribuciones marginales resultan en distribuciones conocidas...

Definición

*Dos variables aleatorias continuas se dice que son **independientes** si su distribución conjunta se puede expresar como el producto de sus marginales*

$$f(x, y) = f_X(x)f_Y(y).$$

Más adelante volveremos sobre esta definición.

Ahora plantearemos una serie de preguntas, para algunas de las cuales tendremos que definir algunos conceptos en el contexto varias variables.

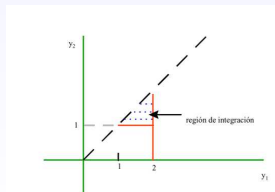
Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Recordemos que: Y_1 : tiempo total que tarda un cliente desde que entra al local hasta que deja la ventanilla de servicio

Y_2 : tiempo que espera el cliente en la fila hasta llegar a la ventanilla de servicio.

Definimos el evento $A =$ *el tiempo total es menor a 2 minutos y el tiempo en la fila es mayor a uno*. Entonces

$$P(A) = P(Y_1 < 2, Y_2 > 1).$$



Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

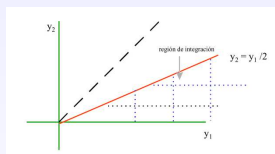
Así tenemos que

$$\begin{aligned}P(Y_1 < 2, Y_2 > 1) &= \int_1^2 \int_{y_2}^2 e^{-y_1} dy_1 dy_2 \\&= \int_1^2 [-e^{-y_1}]_{y_2}^2 dy_2 \\&= \int_1^2 [-e^{-2} + e^{-y_2}] dy_2 \\&= [-e^{-2} y_2 - e^{-y_2}]_1^2 \\&= -2e^{-2} - e^{-2} - [-e^{-2} - e^{-1}] \\&= e^{-1} - 2e^{-2} \\&= 0.0972088.\end{aligned}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

c) Ahora definimos el evento $A =$ el tiempo total de espera sea mayor al doble del tiempo en la fila. Determinar

$$P(A) = P(Y_1 \geq 2Y_2).$$

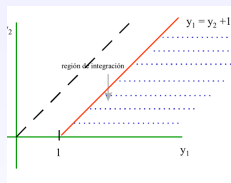


$$\begin{aligned} P(Y_1 \geq 2Y_2) &= \int_0^{\infty} \int_{2y_2}^{\infty} e^{-y_1} dy_1 dy_2 = \int_0^{\infty} [-e^{-y_1}]_{2y_2}^{\infty} dy_2 \\ &= \int_0^{\infty} e^{-2y_2} dy_2 = -\frac{e^{-2y_2}}{2} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

d) La variable aleatoria $Y_1 - Y_2$ representa el tiempo que se tarda en la ventanilla de servicio. Sea el evento $A =$ el tiempo en la ventanilla sea mayor o igual que un minuto. Calcular:

$$P(A) = P(Y_1 - Y_2 \geq 1)$$



$$\begin{aligned} P(Y_1 - Y_2 \geq 1) &= \int_0^{\infty} \int_{y_2+1}^{\infty} e^{-y_1} dy_1 dy_2 = \int_0^{\infty} [-e^{-y_1}]_{y_2+1}^{\infty} dy_2 \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(y_2+1)} dy_2 = e^{-(y_2+1)} \Big|_0^{\infty} = e^{-1} = 0.36788. \end{aligned}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

e) Si se sabe que el tiempo total de espera y de atención para un cliente será de más de dos minutos, calcular la probabilidad de que el tiempo que dicho cliente espera para que le atiendan sea menor de un minuto.

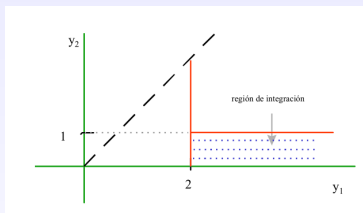
Se sabe que $Y_1 > 2$, queremos la probabilidad de que $Y_2 < 1$. Esto es, queremos calcular una probabilidad condicional del tipo

$$P(Y_2 < 1 | Y_1 > 2) = \frac{P(Y_2 < 1, Y_1 > 2)}{P(Y_1 > 2)}.$$

En este caso sólo nos resta calcular la probabilidad indicada en el numerador y usar el resultado de las marginales, para obtener la probabilidad en el denominador.

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

La región de integración para el numerador es



$$\begin{aligned}
 P(Y_2 < 1, Y_1 > 2) &= \int_0^1 \int_2^{\infty} e^{-y_1} dy_1 dy_2 = \int_0^1 [-e^{-y_1}]_2^{\infty} dy_2 \\
 &= \int_0^1 e^{-2} dy_2 \\
 &= y_2 e^{-2} \Big|_0^1 = e^{-2}.
 \end{aligned}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Para el denominador:

$$\begin{aligned}
 P(Y_1 > 2) &= \int_2^{\infty} f_{Y_1}(y_1) dy_1 = \underbrace{\int_2^{\infty} y_1 e^{-y_1} dy_1}_{\substack{u = y_1 & dv = e^{-y_1} dy_1 \\ du = dy_1 & v = -e^{-y_1}}} = -y_1 e^{-y_1} \Big|_2^{\infty} + \int_2^{\infty} e^{-y_1} dy_1 \\
 &= 2e^{-2} - e^{-y_1} \Big|_2^{\infty} = 2e^{-2} + e^{-2} = 3e^{-2} \\
 \therefore P(Y_2 < 1 | Y_1 > 2) &= \frac{e^{-2}}{3e^{-2}} = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Nota: Podrás observar que en todo lo anterior (y en lo que sigue), no necesitamos ver el comportamiento de la superficie definida por la densidad conjunta, pero lo que sí es crucial es establecer la región de interés en el plano para definir el volumen que nos de la probabilidad requerida.

f) Calcular el tiempo medio que un cliente estará en la ventanilla.

¿Será muy probable que un cliente pase más de dos minutos en la ventanilla de servicio?

Nos preguntamos por $E(Y_1 - Y_2)$. Nosotros hemos aprendido cómo calcular valores de sumas de esperanzas en principio para cuando sólo teníamos una variable aleatoria. Primero daremos algunas definiciones para el caso de dos (o más variables aleatorias) y algunas de sus propiedades y volveremos más adelante para responder a las preguntas en este apartado.

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Valores Esperados

Demos un pequeño recorrido por lo que sabemos de valores esperados:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)dx \quad y \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_Y(y)dy.$$

Si tenemos dos variables aleatorias, estos mismos valores se pueden obtener directamente (es como calcular la marginal dentro del procedimiento de obtención del esperado).

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Recordemos que ahora existe una densidad conjunta (o probabilidad conjunta):

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} x \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right\} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx.$$

La integral en rojo, no es otra cosa que la marginal $f(x)$, de donde volvemos a la definición inicial.

Análogamente para Y :

$$\begin{aligned} E(X + Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y)f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y) dy \\ &\quad \text{(y usando los resultados vistos arriba)} \\ &= E(X) + E(Y). \end{aligned}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Con esto podemos ya responder a la primera parte de nuestra pregunta, sobre el tiempo medio que el cliente estará en la ventanilla, *pues el resultado anterior es válido, ya sea si sumamos o restamos:*

$$E(Y_1 - Y_2) = E(Y_1) - E(Y_2)$$

y estos valores se pueden obtener directamente de sus marginales.

Como vimos que la distribución de Y_1 es una $\text{Gamma}(2,1)$ y la de Y_2 una exponencial(1)

$$E(Y_1 - Y_2) = E(Y_1) - E(Y_2) = 2 \cdot 1 - 1 = 1. \quad (1 \text{ minuto en promedio})$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Por otra parte, como $Y_1 - Y_2$ es el tiempo que pasa en la ventanilla de servicio

$$\begin{aligned}\Rightarrow \text{queremos} \quad P(Y_1 - Y_2 > 2) &= \int_0^{\infty} \int_{y_2+2}^{\infty} e^{-y_1} dy_1 dy_2 \\ &= \int_0^{\infty} [-e^{-y_1}]_{y_2+2}^{\infty} dy_2 \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(y_2+2)} dy_2 \\ &= -e^{-y_2+2} \Big|_0^{\infty} = e^{-2} = 0.135335,\end{aligned}$$

o sea que sólo el 13.53 % de las veces un cliente tendrá que esperar en la ventanilla más de dos minutos.

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Volvamos sobre las definiciones

A pesar de que estamos trabajando con parejas (o vectores), no definimos valores esperados sobre el vector más allá de aquellas operaciones sobre los elementos del mismo que nos den un valor real, esto es, trabajaremos sólo con los casos donde:

$$g(x, y) \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{un valor en los reales}).$$

Ejemplos de tales funciones son sumas, restas, productos, logaritmos, etc. Cualquier operación que no nos regrese un vector como resultado.

Así, podemos definir en forma un poco más general, el cálculo del valor esperado con distribuciones conjuntas.

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Definición

Sean X y Y variables aleatorias con función de distribución conjunta $f(x, y)$ (o densidad conjunta) y $g(X, Y)$, una función real, entonces

$$E(g(X, Y)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy & \text{si } x, y \text{ son continuas} \\ \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} g(x, y) p(x, y) & \text{si } x, y \text{ son discretas} \end{cases}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

A manera de ejercicio y para establecer un resultado que es muy útil que ya hemos usado repetidas veces, calculemos $E(XY)$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy$$

sin más información, sólo nos restaría integrar para cada caso particular.

Sin embargo si sabemos que X y Y son independientes, podemos reducir mucho el trabajo de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y) dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} xyf(y)f(x) dx dy \\ &\quad \text{(por la independencia)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} yf(y) dy = E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Lo que el resultado anterior nos dice es que, bajo independencia, el valor esperado del producto es el producto de los valores esperados (esto lo usamos para establecer propiedades de la generatriz de momentos).

El resultado también se sostiene para el caso de variables discretas.

Esta definición general de valor esperado nos da también la oportunidad de extender el concepto a el cálculo de varianzas. Recordemos que conceptualmente estamos haciendo lo mismo, esto es, construyendo una medida de la variabilidad o dispersión de los valores de las variables alrededor de su valor medio; sólo que aquí podemos hablar de la dispersión de X , de la de Y , o de cualquier nueva variable definida por la transformación bajo estudio, por ejemplo, $X + Y$, $\ln(XY)$, etc.

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Tenemos que

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx \quad \text{con } \mu_x = E(X).$$

Tomando $g(x, y) = (x - \mu_x)^2$, obtenemos que

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy \right\} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx. \end{aligned}$$

Lo mismo para Y .

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Definición

Sean X y Y variables aleatorias con función de distribución conjunta (o densidad conjunta) $f(x, y)$ y $g(x, y)$ una función en los reales,

$$V(g(X, Y)) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} [g(x, y) - \mu_{g(x, y)}]^2 f(x, y) dx dy & \text{si } x, y \text{ son continuas} \\ \sum_{\forall x} \sum_{\forall y} [g(x, y) - \mu_{g(x, y)}]^2 p(x, y) & \text{si } x, y \text{ son discretas} \end{cases}$$

donde $\mu_{g(x, y)} = E(g(X, Y))$.

En forma compacta:

$$V(g(X, Y)) = E[g(x, y) - \mu_{g(x, y)}]^2 = E(g(X, Y))^2 - \{\mu_{g(x, y)}\}^2.$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Calculemos, por ejemplo, $V(X + Y)$

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= E[X + Y - \{E(X + Y)\}]^2 = E[X - E(X) + Y - E(Y)]^2 \\ &= E(X - E(X))^2 + E(Y - E(Y))^2 + 2E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \\ &= V(X) + V(Y) + 2\text{Cov}(X, Y). \end{aligned}$$

Definiendo

$$\begin{aligned} \text{Cov}(X, Y) &= E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \quad \text{la covarianza entre } X \text{ y } Y \\ &= E(XY) - E(X)E(Y). \end{aligned}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

¿Qué mide este término generado como el producto cruzado de las diferencias de las desviaciones de los valores con respecto a sus respectivas medias?

La mayoría de nosotros hemos visto este término antes. Veamos que pasa con éste cuando asumimos que X y Y son **independientes**

$$E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(X - E(X))E(Y - E(Y)) = 0,$$

esto es, si las variables son independientes entonces la *covarianza* es cero. Esto nos dice que este término nos da una forma de medir dependencias entre X y Y .

Por desgracia, sólo mide un tipo de dependencias: *las dependencias lineales*. **Esto nos dice que si $Cov(X, Y) = 0$, no necesariamente es cierto que las variables sean independientes, simplemente dice que no hay dependencia lineal, pero puede ser de otro tipo.**

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Por ejemplo si consideramos las variables X y $Y = X^2$, *claramente existe una relación cuadrática entre X y Y .*

Resultado: Si X y Y son variables aleatorias independientes

$$\text{Cov}(X, Y) = 0 \quad \text{y} \quad \text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y),$$

de otra forma

$$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) \pm 2\text{Cov}(X, Y).$$

Ya antes habíamos invocado este resultado sin demostración. Estos resultados se extienden directamente a n variables aleatorias discretas o continuas. Ver Texto [0] pág. 276-277 Teorema 5.2.

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Como con medias y varianzas, en donde tenemos sus formas correspondientes en términos de valores muestrales, podemos definir lo que se conoce como la *covarianza muestral*.

Sea $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ una muestra aleatoria, entonces la *covarianza muestral* se define como:

$$d = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}$$

Notemos que la muestra ahora, está formada de parejas de valores.

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

En general es difícil darse una idea adecuada del nivel de dependencia lineal a partir de los valores de covarianzas dado que estos dependen de la escala en que manejamos la información. Por esa razón se ideó un índice ρ conocido como **coeficiente de correlación**:

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma_x \sigma_y} = E \left(\frac{X - E(X)}{\sigma_x} \right) \left(\frac{Y - E(Y)}{\sigma_y} \right).$$

La última igualdad implica que el coeficiente de correlación se puede pensar como la covarianza de las variables estandarizadas.

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Esta definición tiene varias ventajas:

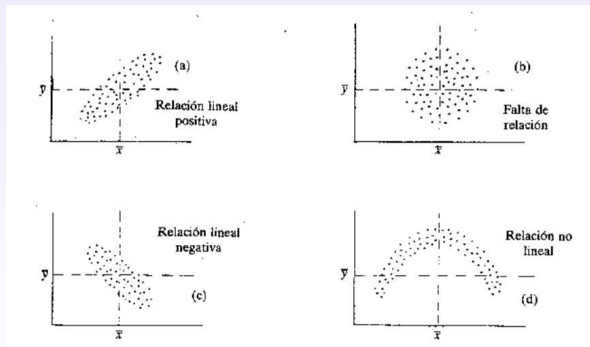
- ❶ ρ es invariante bajo cambios de escala;
- ❷ $-1 \leq \rho \leq 1$;
- ❸ Es 1 ó -1 sólo cuando la relación lineal es exacta;
- ❹ $\rho = 0$ (esto es $\text{Cov}(X,Y)=0$) indica que no hay dependencia lineal.

El correspondiente coeficiente de correlación muestral se define como

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{s_x s_y}.$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Algunas ilustraciones del comportamiento de este coeficiente:



Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

$Y_1 - Y_2$ el tiempo que pasa el cliente en la ventanilla. ¿Qué tanta variabilidad hay en estos tiempos?

$$V(Y_1 - Y_2) = V(Y_1) + V(Y_2) - 2\text{Cov}(Y_1, Y_2)$$

Ya conocemos las varianzas, porque corresponden a las de las distribuciones marginales

$$V(Y_1) = 2 \cdot 1^2 = 2 \quad y \quad V(Y_2) = 1$$

Mostraremos todos los cálculos sólo a manera de ejercicio de las definiciones que hemos dado hasta aquí.

Para calcular estas varianzas y covarianzas necesitamos obtener

$$E(Y_1^2), \quad E(Y_2^2) \quad y \quad E(Y_1 Y_2).$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

$$\begin{aligned}
 E(Y_1^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y_1^2 f_{Y_1}(y_1) dy_1 = \underbrace{\int_0^{\infty} y_1^3 e^{-y_1} dy_1}_{\substack{u = y_1^3 & dv = e^{-y_1} dy_1 \\ du = 3y_1^2 dy_1 & v = -e^{-y_1}}} \\
 &= -y_1^3 e^{-y_1} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 3y_1^2 e^{-y_1} dy_1 \\
 &= \underbrace{\int_0^{\infty} 3y_1^2 e^{-y_1} dy_1}_{\substack{u = 3y_1^2 & dv = e^{-y_1} dy_1 \\ du = 6y_1 dy_1 & v = -e^{-y_1}}} = -3y_1^2 e^{-y_1} \Big|_0^{\infty} + \underbrace{\int_0^{\infty} 6y_1 e^{-y_1} dy_1}_{\substack{u = 6y_1 & dv = e^{-y_1} dy_1 \\ du = 6 dy_1 & v = -e^{-y_1}}} \\
 &= -6y_1 e^{-y_1} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 6e^{-y_1} dy_1 \\
 &= -6e^{-y_1} \Big|_0^{\infty} = 6
 \end{aligned}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

$$\begin{aligned}
 E(Y_2^2) &= \underbrace{\int_0^{\infty} y_2^2 e^{-y_2} dy_2}_{\substack{u = y_2^2 & dv = e^{-y_2} dy_2 \\ du = 2y_2 dy_2 & v = -e^{-y_2}}} \\
 &= -y_2^2 e^{-y_2} \Big|_0^{\infty} + \underbrace{\int_0^{\infty} 2y_2 e^{-y_2} dy_2}_{\substack{u = 2y_2 & dv = e^{-y_2} dy_2 \\ du = 2 dy_2 & v = -e^{-y_2}}} \\
 &= -2y_2 e^{-y_2} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 2e^{-y_2} dy_2 \\
 &= -2e^{-y_2} \Big|_0^{\infty} = 2
 \end{aligned}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

$$\begin{aligned}
 E(Y_1 Y_2) &= \int_0^\infty \underbrace{\int_{y_2}^\infty y_1 y_2 e^{-y_1} dy_1}_{\substack{u = y_1 y_2 & dv = e^{-y_1} dy_1 \\ du = y_2 dy_1 & v = -e^{-y_1}}} dy_2 \\
 &= \int_0^\infty \left[-y_1 y_2 e^{-y_1} \Big|_{y_2}^\infty + \int_{y_2}^\infty y_2 e^{-y_1} dy_1 \right] dy_2 \\
 &= \int_0^\infty \{ y_2^2 e^{-y_2} + [-y_2 e^{-y_1}]_{y_2}^\infty \} dy_2 \\
 &= \int_0^\infty (y_2^2 e^{-y_2} + y_2 e^{-y_2}) dy_2 \\
 &= 2 + 1 = 3
 \end{aligned}$$

$$\therefore V(Y_1) = 6 - 2^2 = 2 \quad V(Y_2) = 2 - 1^2 = 1$$

$$\therefore \text{Cov}(Y_1, Y_2) = E(Y_1 Y_2) - E(Y_1)E(Y_2) = 3 - 2 * 1 = 1$$

$$\therefore V(Y_1 - Y_2) = 2 + 1 - 2(1) = 1$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Esto es, se tiene una desviación estándar de minuto. De acuerdo a Chebyshev, al menos el 75 % de los tiempos estarán en el intervalo $(2 - 2(1), 2 + 2(1)) = (0, 4)$: *pero por las reglas empíricas*, sabemos que la probabilidad contenida en dos desviaciones estándar alrededor de la media es del orden del 90 y tantos %. La pregunta sería, ¿esa variación se puede reducir sin aumentar los costos, ni para ellos, ni para los clientes? ¿O, podemos vivir con ella, sin mayores consecuencias?

Nota: El coeficiente de correlación $\rho = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1}} = 0.71$

¿De qué otra forma podemos medir dependencias? Bueno, una forma no siempre reconocida como tal, pero ampliamente usada en lo que a sus consecuencias se refiere, es mediante los valores medios asociados a las distribuciones condicionales:

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Definición. Las distribuciones **condicionales** de $X|Y = y$ y $Y|X = x$ denotadas por $f_{X|Y}(x)$ y $f_{Y|X}(y)$ se definen de la siguiente forma.

Para cada valor de y

$$f_{X|Y}(x) = \frac{f(x, y)}{f(y)}$$

Es una función de densidad en X . Sus valores pueden depender (en el sentido de función matemática, de y , pero como este valor es dado, no representa un factor aleatorio). De hecho:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, y)}{f(y)} dx = \frac{1}{f(y)} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \frac{1}{f(y)} f(y) = 1$$

Análogamente, para cada valor de x

$$f_{Y|X}(y) = \frac{f(x, y)}{f(x)}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Nota: de aquí podemos ver cómo se deriva el concepto de independencia: Y no modifica su comportamiento por saber como se comporta X :

$$f_{Y|X}(y) = \frac{f(x, y)}{f(x)} \text{ si } X \text{ y } Y \text{ son independientes}$$

$$\Rightarrow f(x, y) = f_{Y|X}(y)f(x) = f(x)f(y)$$

Del ejemplo del “fast food”, si se quiere conocer cuál sería el comportamiento de los tiempos que el cliente toma en la fila, dado que el tiempo total debería ser de 2 minutos, tendríamos:

$$f_{Y_2|Y_1}(y_2) = \frac{f(y_1, y_2)}{f(y_1)} = \frac{e^{-y_1}}{y_1 e^{-y_1}} = \frac{1}{y_1} \quad 0 \leq y_2 \leq y_1 \leq \infty$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Notas:

- 1) si existen condiciones en el rango de la variable, éstas deben aparecer con las condicionales. No así cuando calculamos marginales, pues en ese caso, se *barre* sobre la otra variable, mientras que aquí, *condicionas* con la otra variable.
- 2) como recomendación general, calcula primera la condicional en forma genérica, y después evalúa en los valores particulares.

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Como $y_1 = 2$, sólo evaluamos y obtenemos la distribución condicional para estos tiempos :

$$f_{Y_2|Y_1=2}(y_2) = \frac{1}{2} \quad 0 \leq y_2 \leq 2$$

Esto es, la distribución resultante es una $U(0, 2)$. *(No siempre resultan distribuciones conocidas)*

Bajo estas circunstancias es muy sencillo obtener su valor medio,
 $\mu_{Y_2|Y_1=2} = 1$ *(1 minuto en promedio, dado que tarda exactamente 2 minutos, en tiempo total)*

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

La notación para los valores esperados calculados a partir de las condicionales es:

- $E(Y|X = x) = \int_{-\infty}^{+\infty} yf_{Y|X}(y)dy$, o bien
- $E(X|Y = y) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf_{X|Y}(x)dx$

A $E(Y|X = x)$ **SE LE CONOCE COMO LA REGRESIÓN DE Y SOBRE X.**

Cuando $E(Y|X = x)$ es una función lineal, entonces se le llama la regresión lineal (teórica) de Y sobre X.

Cuando planteamos nuestros modelos, tales como $y = \mu_y + e$, deberíamos entender

$$\mu_{Y|X} = E(Y|X = x)$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

En general es difícil obtener las distribuciones condicionales y de allí, sus valores esperados, los cuales además, casi nunca son funciones lineales de las x 's. Entonces lo que planteamos a través de modelos como estos es simplemente una forma de aproximar al comportamiento medio de Y dada la información en X (que puede ser más de una variable).

Ejercicio: Calcula la regresión de Y_1 sobre $Y_2 = y_2 = 1$ en el ejemplo. Tendría ésta un significado valorable? explica tanto como puedas.

Lectura: Estudiar las definiciones y ejemplos sobre aplicaciones de las esperanzas condicionales en el libro de Texto. Capítulo 4, secciones 4.4-4.5

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Un ejemplo más: Sean X y Y dos variables aleatorias con función de densidad conjunta:

$$f(x, y) = \begin{cases} kx(y - x) & 0 < x < 1 \quad -x < y < x \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

a) Encontrar el valor de la constante k .

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &= \int_0^1 \int_{-x}^x kx(y - x) dy dx = \int_0^1 kx \left(\frac{y^2}{2} - xy \right) \Big|_{-x}^x dx \\ &= \int_0^1 kx \left[\left(\frac{x^2}{2} - x^2 \right) - \left(\frac{x^2}{2} + x^2 \right) \right] dx \\ &= \int_0^1 kx \left(\frac{-x^2}{2} - \frac{3x^2}{2} \right) dx = \int_0^1 -2kx(x^2) dx = \int_0^1 -2kx^3 dx \\ &= -2k \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = -\frac{2k}{4} = -\frac{k}{2} = 1. \quad \text{por lo tanto } k = -2 \end{aligned}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Y por lo tanto la función de densidad es:

$$f(x, y) = \begin{cases} -2x(y - x) & 0 < x < 1 \quad -x < y < x \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

o equivalentemente,

$$f(x, y) = \begin{cases} 2x(x - y) & 0 < x < 1 \quad -x < y < x \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Modelos de Probabilidad Conjunta Continuos

Nota sobre marginales:

Para el caso de más de dos variables se define la marginal en forma análoga. Por ejemplo, si tenemos tres variables aleatorias X , Y y Z con función de probabilidad o de densidad $f(x, y, z) \Rightarrow \sum_y \sum_z f(x, y, z)$ ó $\int_y \int_z f(x, y, z) dx dy$ según sea el caso. Aquí es posible definir también la marginal conjunta de dos de las tres variables, por ejemplo X y Y . En ese caso la marginal conjunta se define como:

$$f_{X,Y}(x, y) = \sum_z f(x, y, z) \quad \text{o} \quad \int_z f(x, y, z) dz$$

Estamos listos para ver dos modelos particulares de los cuales encontramos multitud de aplicaciones: El modelo Multinomial y la Normal Bivariada.

El modelo Normal Bivariado

El modelo normal bivariado

Si $X \sim N(\mu_x, \sigma_x^2)$ y $Y \sim N(\mu_y, \sigma_y^2)$ son independientes, entonces

$$\begin{aligned} f_{(X,Y)}(x,y) &= f_X(x)f_Y(y) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}, \end{aligned}$$

este es un caso particular de la distribución conjunta Normal Bivariada (caso particular).

El modelo normal bivariado

Recordemos que si X_1, X_2, \dots, X_n son variables aleatorias independientes (una muestra aleatoria, por ejemplo) y definimos $Y = \sum_{i=1}^n X_i$, entonces

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E(e^{tY}) = E(e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)}) \\ &= E(e^{tX_1+tX_2+\dots+tX_n}) \\ &= E(e^{tX_1} \cdot e^{tX_2} \dots e^{tX_n}) \\ &= E(e^{tX_1})E(e^{tX_2}) \dots E(e^{tX_n}) \text{ por independencia} \\ &= M_{X_1}(t)M_{X_2}(t) \dots M_{X_n}(t) \end{aligned}$$

Más aún, si X_1, X_2, \dots, X_n tienen la misma distribución

$$M_Y(t) = [M_X(t)]^n$$