Tarea 2. Álgebra Matricial.
Gustavo Hernández Angeles.

1. Sean

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \quad ; \quad B=\left(\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \\ \hline 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

Planteé una partición para las matrices A y B y realice la multiplicación AB por bloques.

Solución.

Sean A_1, A_2 y B_1, B_2 los bloques de la matriz A y B respectivamente. Definidas como:

$$A_1=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2=\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B_1=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_2=\begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow AB = (A_1 \ A_2)\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = A_1B_1 + A_2B_2 \ ;$$

Coinciden en tamaños y las multiplicaciones son válidas.

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ -1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & -4 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & -2 & 5 \\ 19 & 2 & -4 \\ 10 & -10 & 2 \\ -4 & 8 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 36 & -27 \\ -6 & 3 & 2 \\ 6 & 18 & -9 \\ 6 & -6 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 34 & -22 \\ 13 & 5 & -2 \\ 16 & 8 & -7 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore AB = \begin{pmatrix} 16 & 34 & -22 \\ 13 & 5 & -2 \\ 16 & 8 & -7 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Exprese con palabras la siguiente operación elemental de fila que debe efectuarse en el sistema para resolverlo.

a)
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 8x_4 &= 12 \\ x_2 - 7x_3 + 2x_4 &= -4 \\ 5x_3 - x_4 &= 7 \\ x_3 + 3x_4 &= -5 \end{aligned}$$

La matriz aumentada correspondiente al sistema es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & -2 & 8 & 12 \\ 0 & 1 & -7 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right)$$

Por simpleza y para seguir trabajando con números enteros, la siguiente operación elemental consiste en permutar los renglones 3 y 4.

b)
$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= -3 \\ x_3 &= 3 \\ 3x_4 &= -3 \end{aligned}$$

La matriz aumentada correspondiente al sistema es:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right)$$

Por lo que la siguiente operación elemental consiste en multiplicar el renglón 4 por $1/3$, obteniendo un 1 como pivote.

3. La matriz aumentada de un sistema lineal se transformó, mediante operaciones de fila, en la forma en que se muestra a continuación. Determine si el sistema es consistente.

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ El sistema es <u>consistente</u> con infinitas soluciones.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $0 = 1$ indica una inconsistencia. El sistema es <u>inconsistente</u>

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & -6 \\ 0 & 2 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$ El sistema es <u>consistente</u> con una única solución.

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ <u>Consistente</u> con inf. soluciones.

4. Suponga que para llevar a cabo una reducción Gauss se llevan a cabo las siguientes operaciones elementales. ¿Cuáles son las matrices elementales que representan dichas operaciones?

a) $R_2 \to 2R_1 + R_2$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $R_3 \to -\frac{1}{2}R_1 + R_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $R_3 \to 3R_3$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5. ¿$(3,4,-2)$ es una solución para el siguiente sistema?

$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 &= 7 \\ -2x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 0 \\ -7x_1 + 5x_2 - 3x_3 &= -7 \end{aligned}$$

Sea A la matriz correspondiente al sistema. Entonces verificamos si se cumple $Ax = b$ con $x = (3,4,-2)^T$ y $b = (7,0,-7)^T$.

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 9 \\ -7 & 5 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 3 - 4 - 4 \\ -2\cdot 3 + 6\cdot 4 - 9\cdot 2 \\ -21 + 20 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \neq b$$

$\boxed{\therefore (3,4,-2) \text{ no es una solución del sistema.}}$

6. Encuentre una ecuación que incluya a g, h y k, y que permita que esta matriz aumentada corresponda a un sistema consistente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & k \end{array}\right)^{(2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & -3 & 5 & k+2g \end{array}\right)^{(1)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & 0 & k+2g+h \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea consistente se debe cumplir que

$$\boxed{k + 2g + h = 0}$$

7. Encuentre una ecuación que incluya a a, b y c, y que permita que el sistema (matriz aumentada) represente un sistema inconsistente.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & -20 & a \\ -6 & -11 & -21 & b \\ 2 & 4 & 8 & c \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 10 & -20 & a \\ -6 & -11 & -21 & b \\ 2 & 4 & 8 & c \end{array}\right)^{(1/5)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a/5 \\ -6 & -11 & -21 & b \\ 2 & 4 & 8 & c \end{array}\right)^{(6)\,(-2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & a/5 \\ 0 & 1 & -45 & 6a/5+b \\ 0 & 0 & 16 & a/5+c \end{array}\right)$$

Para este sistema no existe relación entre a, b y c que vuelvan al sistema inconsistente. De hecho, el sistema tendrá una única solución para cualesquiera valores de a, b y c.