Inferencia Estadística

Tarea 1

14/08/2024

Resuleve los siguientes ejercicios. Puedes usar otro lenguaje que no sea `R`, pero indícalo claramente. Además, el código que entregues debe ir adecuadamente documentado.

1. Un conjunto de bits se envían sobre un canal de comunicación en paquetes de 12. Si la probabilidad de que un bit sea corrompido sobre este canal es 0.1 y los errores son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que no más de dos bits de un paquete se corrompan? Si 6 paquetes de bits se envían sobre el canal, ¿cuál es la probabilidad de que al menos un paquete contenga 3 o más bits corruptos? Finalmente, si X denota el número de paquetes conteniendo 3 o más bit corruptos, ¿cuál es la probabilidad de que X excederá su media por más de dos desviaciones estándar?

2. Una caja contiene 12 manzanas frescas y 4 que están podridas. Si elige 3 al azar y X denota el número de manzanas frescas que tomó, encuentre la función de densidad de X y su esperanza.

3. Para el siguiente ejercicio es necesario el programa `R`.

   a) Escriba un programa en `R` que reproduzca las gráficas de las funciones de distribución acumulada y de masa de la distribución uniforme que aparecen en las notas del curso. Las gráficas deben verse similares a las figuras de la Figura 1.

   b) Lea en la documentación de `R`, o en cualquier otra fuente de información confiable, la explicación de la función `sample(x, size, replace=FALSE, prob=NULL)`. (No es necesario entregar algo para este ejercicio).

   c) Usando la función `sample` simule una muestra de tamaño 10 000 de la distribución $U(1, \ldots, 10)$. Fijando la semilla en 13 (`set.seed(13)`), muestre los resultados de la simulación en una tabla de frecuencia y calcule la media y la varianza. Sugerencia: Use la función `table`.

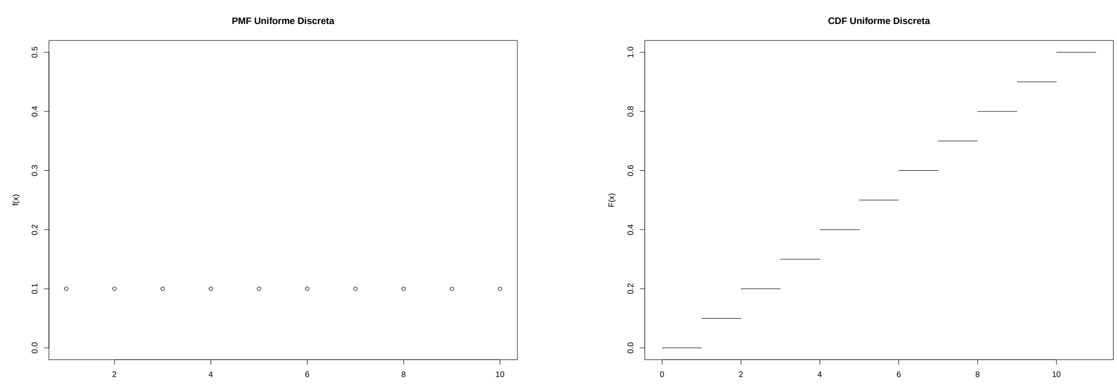

Figura 1: Ejemplo de las funciones de masa y acumulada de la distribución uniforme.

d) Grafique las frecuencias de la simulación anterior.

4. Para el siguiente ejercicio también necesitamos `R`.

   a) Usando la función `sample`, simule 10 lanzamientos de una moneda equilibrada y cuente el número de águilas que obtiene. Repita este proceso 10^4 veces y muestre sus primeros 3 resultados. Grafique las frecuencias del número de águilas obtenidas en los 10^4 experiementos. También grafique las proporciones del número de águilas obtenidas.

   b) Usando la función `dbinom` grafique la función de masa de una distribución $B(10, 0.5)$ sobre la gráfica de las proporciones que hizo en el inciso anterior.

   c) Repita los dos incisos anteriores para una moneda desequilibrada que tiene probabilidad $p = 0.3$ de obtener un águila cuando se lanza. ¿Qué observa?

5. Una urna contiene 46 bolas grises y 49 bolas blancas. Usando la función `sample` en `R`, simule la extracción sin reemplazamiento de 20 de estas bolas y cuente el número de bolas grises que obtuvo. Repita este proceso 10^4 veces y grafique las frecuencias de bolas grises obtenidas en cada experimento. ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 20 bolas de la urna 5 de ellas sean grises? También grafique la proporción de bolas grises obtenidas en los experiementos anteriores y sobre esta figura añada la correspondiente función de masa de la distristibución Hipergeométrica asociada al experimento total. Brevemente discuta que observa.

6. Sea X una variable aleatoria con función de distribución F dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1/2 & \text{para } 0 \le x < 1/4 \\ 3/4 & \text{para } 1/4 \le x < 3/4 \\ 1 & \text{para } 3/4 \le x \end{cases}$$

   Determine la función de probabilidad de X.

7. Sea X una variable aleatoria con valores en $[0, 1]$ y función de distribución $F(x) = x^2$. ¿Cuál es la densidad de X? Calcule las siguientes probabilidades: I) $P(1/4 \le X \le 3/4)$; II) $P(X > 1/2)$; III) $P(X \le 3/4 | X > 1/2)$.

8. Un lote muy grande de componentes ha llegado a un distribuidor. Se puede decir que el lote es aceptable solo si la proporción de componentes defectuosos es cuando mucho 0.10. El distribuidor decide seleccionar aleatoriamente 10 componentes y aceptar el lote solo si el número de componentes defectuosos en la muestra es cuando mucho 2. ¿Cuál es la probabilidad de que el lote sea aceptado cuando la proporción real de defectuosos es 0.01, 0.05, 0.10, 0.20?

9. Sean $G = \{1, 2, 3\}$, $H = \{4, 5, 6\}$. Lanzamos dos dados y sean los eventos $A =$'el primer dado cae en H'; $B =$'el segundo dado cae en H'; $C =$'un dado cae en G y el otro en H'; $D =$'el total es cuatro', $E =$ 'el total es cinco' y $F =$'el total es siete'. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas? I) A y F son independientes. II) A y D son independientes. III) A y E son independientes. IV) $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$. V) A y C son independientes. VI) C y E son independientes. VII) $P(A \cap C \cap E) = P(A)P(C)P(E)$. VIII) A, C y E son independientes. Justifique sus respuestas.

Problemas extra (opcionales)

1. La compañía CIE ha desarrollado un nuevo producto. La demanda de tal artículo es desconocida, pero se asume que es una variable aleatoria distribuida uniformemente en $\{0, 1, \ldots, N\}$. Los dispositivos deben de ser hechos por adelantado; cada uno vendido produce una ganancia de g pesos y cada uno de los que se queda sin vender produce una perdida de p pesos. ¿Cuántos de estos artículos tienen que producirse para maximizar la ganancia esperada?

2. En un salón de clases, los estudiantes deciden intercambiar regalos de la siguiente manera. Todos llevan un presente; los regalos se ponen en una mesa y se entregan de manera aleatoria a las personas; cada persona recibe un regalo. Esta es una forma justa de distribuir los regalos. Considera que el salón tiene n estudiantes, i.e. el número de regalos también es n. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona dada reciba su propio regalo? ¿Cuál es la probabilidad de que en todo el intercambio alguien reciba su propio regalo?

   a) Escribe una función en `R` o en `Python` que simule el proceso anterior. Calcula las probabilidades para $n = 5, 10, 20, 100$. Entrega el pseudocódigo.

   b) Resulve el problema analíticamente. *Hint: Usa el principio de inclusión-exclusión.*

   c) ¿Las probabilidades anteriores son iguales o diferentes? ¿Qué pasa cuando $n \to \infty$? Explica.

3. Consideremos el experimento de lanzar dos monedas justas (i.e. en cada una de las monedas la probabilidad de obtener cara o cruz es 0.5). Sea A el evento "la primera moneda cae en cara", B el evento "la segunda moneda cae en cara" y C el evento "una (y solo una) de las monedas cae en cara".

   a) ¿Son A y B independientes? ¿Qué pasa con A y C? Justifica tu respuestas.

   b) ¿Se cumple que $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$? Explica. *Hint: Busca la definición de independencia mutua.*

Entrega: 28/08/2024.