Gustavo Hernández Angeles

Examen Parcial 1 - Inferencia Estadística 09/10/24

① Sea H = "se recibió una raya"

G = "se envió una raya".

$P(G) = \frac{4}{7}$; $P(G^c) = \frac{3}{7}$; Dado por la razón 3:4

$P(H|G^c) = 1/4$; $P(H^c|G) = 1/3$; Transmisión errática

a) Buscamos $P(G|H)$

$$\Rightarrow P(G|H) = \frac{P(G)\,P(H|G)}{P(H)} \quad ; \text{Teorema de Bayes}$$

$$= \frac{P(G)\,P(H|G)}{P(H|G)P(G) + P(H|G^c)P(G^c)} \quad ; \quad P(H|G) = 1 - P(H^c|G)$$

$$= \frac{\left(\frac{4}{7}\right)\left(\frac{2}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{7}\right) + \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{7}\right)} \approx 0.78$$

∴ La probabilidad de que se haya enviado una raya dado que se recibió una raya es del 78%

b) Con independencia entre señales.

Para haber recibido dos puntos, puede haber dos casos para cada uno de los mensajes M_1, M_2

$$M_1 = \{(H^c | G), (H^c | G^c)\}$$
$$M_2 = \{(H^c | G), (H^c | G^c)\}$$

$\Rightarrow$ Pudieron haber sido 4 mensajes: $M_1 \times M_2 = S$

$$S = \left\{ \begin{array}{ll} (H^c|G), (H^c|G) & ; \text{tipo } 1 \\ (H^c|G), (H^c|G^c) & ; \text{tipo } 2 \\ (H^c|G^c), (H^c|G) & ; \text{tipo } 3 \\ (H^c|G^c), (H^c|G^c) & ; \text{tipo } 4 \end{array} \right\}$$

Sea $X_i = \begin{cases} 1, & \text{si mensaje es tipo } i \\ 0, & \text{si no} \end{cases}$ una v.a. bernoulli (p_i)

con $p_i = P(\text{Mensaje tipo } i)$. Podemos considerar esto ya que hay independencia entre señales, y consideramos la probabilidad constante.

$\Rightarrow$ Para tipo 1: $P(\text{tipo } 1) = P((H^c|G), (H^c|G))$
$$= P(H^c|G)^2 = (1/3)^2 = \left(\tfrac{1}{9}\right)$$

Para tipo 2; $P(\text{tipo} 2) = P(\text{tipo} 3) = P((H^c|G^c), (H^c|G))$
$$= P(H^c|G) P(H^c|G^c) = \left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{3}{4}\right) = \tfrac{1}{4}$$

Para tipo 4; $P(\text{tipo } 4) = P((H^c|G^c), (H^c|G^c)) = P(H^c|G^c)^2$
$$= \left(\tfrac{3}{4}\right)^2 = \tfrac{9}{16}$$

$\therefore X_i \sim \text{Bernoulli}(p_i)$; $f(x_i) = p_i^{x_i}(1-p_i)^{1-x_i}$; $p_i = \begin{cases} \frac{1}{9}, & i = 1 \\ 1/4, & i = 2, 3 \\ 9/16, & i = 4 \end{cases}$ //

(2)

T = tiempo de vida ,

Si $T < 3 \Rightarrow V = 5$

Si $T \geq 3 \Rightarrow V = 2T$

Encontrar F_V si :

$$f_T(t) = \frac{1}{1.5} e^{-t/1.5} \Rightarrow T \sim \text{Exponencial}(\theta = 1.5)$$

Vemos que :

$$V = \begin{cases} 5 , & \text{si } T < 3 \\ 2T , & \text{si } T > 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Rightarrow P(V=5) = P(T<3) = \int_0^3 \frac{1}{1.5} e^{-t/1.5} \, dt$$

$$= \left[-e^{-t/1.5} \right] \Big|_0^3 = \left[-e^{-2} - (-e^{0}) \right]$$

$$= \left[1 - e^{-2} \right] \quad (2)$$

$$P(V = 2T) = P(T \geq 3) = 1 - P(T < 3) = 1 - (1 - e^{-2})$$

$$= e^{-2} \quad (3)$$

$$\Rightarrow f_V(v) = \begin{cases} 1 - e^{-2} , & v = 5 \\ e^{-2} , & v = 2T \\ 0 , & \text{otra parte} \end{cases} \quad (4)$$

; Con ayuda de (3) y (2) construimos $f_V(v)$

Debemos notar también que para $T \geq 3$

$$\Rightarrow 2T > 5$$

Entonces, con (4), construimos $F_V(v)$:

$$F_V(v) = \begin{cases} 0, & v < 5 \\ 1 - e^{-2}, & 5 \leq v < 2T \\ 1, & v \geq 2T \end{cases}$$

Cabe destacar que entonces $T > 3$ es un parametro de la función de distribución de V.

(4). $f(x) = \dfrac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}}$; $\beta > 0, \alpha > 0$; $\alpha < x < \infty$

a) Verificar que f(x) es una función de prob.

i) $\int_{0} f(x)\,dx = 1$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}}\,dx = \beta\alpha^{\beta}\int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{x^{\beta+1}}\,dx \quad ; \beta+1 > 1$$

$$\Rightarrow \beta\alpha^{\beta}\int_{\alpha}^{\infty}\frac{1}{x^{\beta+1}}\,dx = \beta\alpha^{\beta}\int_{\alpha}^{\infty} x^{-\beta-1}\,dx = \beta\alpha^{\beta}\left[\frac{x^{-\beta}}{-\beta}\right]\Big|_{\alpha}^{\infty}$$

$$= \frac{\beta\alpha^{\beta}}{\beta}\left[-\frac{1}{x^{\beta}}\right]\Big|_{\alpha}^{\infty} = \alpha^{\beta}\left[-0 + \frac{1}{\alpha^{\beta}}\right] = \alpha^{\beta}\alpha^{-\beta} = \underline{1}$$

ii) $f(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in D.$

Sabemos que: $\alpha < x < \infty$

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{x} > 0 \quad ; \text{ y para } \beta+1 > 1$$

$$\frac{1}{\alpha^{\beta+1}} > \frac{1}{x^{\beta+1}} > 0 \quad ; \text{ Multiplicamos por } \beta\alpha^{\beta}$$

$$\frac{\beta\alpha^{\beta}}{\alpha^{\beta+1}} > \frac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}} > 0$$

$$\therefore\ 0 < f(x) < \frac{\beta\alpha^{\beta}}{\alpha^{\beta+1}}$$

$\therefore$ Se verifica que f(x) es función de probabilidad

b) Media μ y varianza σ^2 de la distribución

$$\mu = E(X) = \int_{\alpha}^{\infty} x \frac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta+1}}\, dy = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{\beta}}\, dx \qquad (1)$$

- Para $\beta \neq 1$ de (1).

$$\mu = \beta\alpha^{\beta}\left(\frac{1}{1-\beta} x^{1-\beta}\right)\Bigg|_{\alpha}^{\infty} = \frac{\beta\alpha^{\beta}}{1-\beta} x^{1-\beta}\Bigg|_{\alpha}^{\infty}$$

Para $\beta < 1$:

$\mu = \infty$; No existe (2)

Para $\beta > 1$:

$$\mu = \frac{\beta\alpha^{\beta}}{1-\beta}\left(0 - \alpha^{1-\beta}\right) = \frac{\beta\alpha^{\beta}\alpha^{1-\beta}}{\beta-1}$$

$$\mu = \frac{\alpha\beta}{\beta-1} \qquad (3)$$

- Para $\beta = 1$ de (1)

$$\mu = \beta\alpha^{\beta} \ln(x)\Big|_{\alpha}^{\infty} = \infty \qquad (4)$$

De (2), (3) y (4): $\therefore \mu = E(X) = \begin{cases} \infty & ; 0 < \beta \leq 1 \\ \frac{\alpha\beta}{\beta-1} & ; \beta > 1 \end{cases}$

Continuación del problema 4.

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (5)$$

Obtenemos $E(X^2)$:

$$E(X^2) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\beta\alpha^{\beta}}{X^{\beta+1}} x^2\, dx = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\beta\alpha^{\beta}}{X^{\beta-1}} dx = \beta\alpha^{\beta} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{1}{X^{\beta-1}} dx$$

- Con $\beta \neq 1, \beta \neq 2$:

$$E(x^2) = \beta\alpha^{\beta} \left[\frac{X^{2-\beta}}{2-\beta} \right]_{\alpha}^{\infty} = \frac{\beta\alpha^{\beta}}{2-\beta} X^{2-\beta} \Big|_{\alpha}^{\infty}$$

Para $\beta > 2$

$$\boxed{E(X^2) = \frac{\beta\alpha^{\beta}}{2-\beta} [0 - \alpha^{2-\beta}] = \frac{\beta\alpha^2}{\beta-2}} \quad (6)$$

Para $\beta < 2$

$$E(X^2) = \frac{\beta\alpha^{\beta}}{2-\beta} [\infty - \alpha^{2-\beta}] = \text{inf } \infty \quad (7)$$

- Para $\beta = 1$:

$$E(X^2) = \beta\alpha^{\beta} \int_{\alpha}^{\infty} dx = \text{inf } \infty \quad (8)$$

Calculando la varianza, para distintos intervalos de β.
de (7) y (2) y (4):

- $0 < \beta \leq 1$, de (7) y (2) y (4):

$$Var(X) = \infty - \infty = \text{No existe}$$

- $1 < \beta \leq 2$, de (7)

$$Var(X) = \infty - \left(\frac{\alpha\beta}{\beta-1}\right)^2 = \infty = \text{No existe}$$

$\Big\}$ c)

- $\beta > 2$, de (6) y (3)

$$Var(X) = \frac{\beta\alpha^2}{\beta-2} - \left(\frac{\alpha\beta}{\beta-1}\right)^2$$

Parcial 1 - Problema 5

Inferencia Estadística

Gustavo Hernández Angeles

2024-10-09

1. Encuentre p(10) con el uso de la distribución de probabilidad hipergeométrica.

Comenzamos definiendo el tamaño del lote, el número de aparatos defectuosos, el número de aparatos funcionales y el tamaño de la muestra.

```
n_lote <- 400
n_defectuosos <- 160
n_funcionales <- n_lote - n_defectuosos
muestra <- 20
```

Usando la distribución hipergeométrica, implementada en ´´R´´.

```
# X que queremos saber p(x)
x <- 10
p_hiper <- dhyper(x, n_funcionales, n_defectuosos, muestra)
sprintf("El valor de p(10) utilizando la distribución hipergeométrica: %.6f", p_hiper)
```

```
## [1] "El valor de p(10) utilizando la distribución hipergeométrica: 0.117835"
```

2. Encuentra p(10) usando la distribución de probabilidad binomial.

Usando la distribucion de probabilidad binomial.

```
x <- 10

# Calculamos la proporcion de aparatos funcionales, esta será la probabilidad
# que utilizaremos en la distribucion binomial
p <- n_funcionales/n_lote

p_binom <- dbinom(x, muestra, prob = p)
sprintf("El valor de p(10) utilizando la distribución binomial: %.6f", p_binom)
```

```
## [1] "El valor de p(10) utilizando la distribución binomial: 0.117142"
```

3. ¿Es N suficientemente grande para que el valor p(10) obtenido de la distribución binomial sea una buena aproximación de la obtenida usando la distribución hipergeométrica?

Primero, calcularemos el error relativo que tiene la probabilidad calculada por la distribución binomial con respecto a la distribución hipergeométrica:

```
error <- abs(p_binom - p_hiper)/p_hiper * 100
sprintf("El error es del %.4f%%",error)
```

```
## [1] "El error es del 0.5884%"
```

Por lo que podemos decir que se aproxima con muy buena precisión la probabilidad $p(10)$ utilizando la distribución binomial. Además, podemos rescatar de las notas de clase que, teniendo una proporción n/N menor al 10%, se obtiene una buena aproximación de la distribución hipergeométrica a través de la distribución binomial. En este caso,

```r
proporcion <- muestra/n_lote
sprintf("La proporción n/N es del %.2f%%",proporcion*100)
```

```
## [1] "La proporción n/N es del 5.00%"
```

Dadas las condiciones de nuestro problema, podemos afirmar que los valores obtenidoos de la distribución binomial son una buena aproximación de los valores obtenidos de la distribución hipergeométrica.