

Universidade Federal de Alfenas

Instituto de Ciências Exatas

Ciência da Computação

## **Relatório de Pesquisa Operacional**

### **Problema da Mochila - Parte 4**

Alunos:

Alexandre William Miya - RA: 2014.1.08.004

Gustavo Alves Miguel - RA: 2014.1.08.013

Professor:

Humberto César Brandão de Oliveira

Maio  
2018

# Conteúdo

1	Apresentação	1
2	Descrição da Atividade	1
3	Variações do modelo a serem implementadas	2
4	Solução Proposta Segunda Dimensão	2
5	Solução Proposta Terceira Dimensão	3
6	Resultados para Duas Dimensões	5
7	Resultados para Três Dimensões	5
8	Considerações	6
9	Figuras	7

# 1 Apresentação

O problema da mochila consiste em, dado um conjunto  $I_n$  de  $n$  itens, representados por  $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ , cada item  $i \in I_n$  tem um peso  $p_i$ , um volume  $v_i$  e utilidade  $u_i$  ( $p_i > 0$ ,  $v_i > 0$  e  $u_i > 0$ ), e dadas as restrições de peso  $P$  e volume  $V$ , o objetivo é determinar o vetor  $X_n$  de  $n$  variáveis que representam as quantidades  $x_i$  de cada item  $i$ , tal que

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot u_i$$

seja o maior possível, respeitando-se as restrições

$$\sum_{i=1}^n x_i \cdot p_i \leq P \text{ e } \sum_{i=1}^n x_i \cdot v_i \leq V$$

Metaforicamente podemos entendê-lo como o desafio de encher uma mochila sem ultrapassar determinados limites de peso e volume, otimizando o valor do produto carregado.

O modelo deste problema pode ser aplicado em casos de otimização aplicados em: Investimento de capital, corte e empacotamento, carregamento de veículos, orçamento etc.

Existem algumas variações deste problema onde as variáveis  $x_i$  podem pertencer ao conjunto dos números reais, ao conjunto dos números inteiros ou ser do tipo booleano. Existem também variações onde é considerada a existência de várias mochilas ou onde uma mochila possui diversos compartimentos.

## 2 Descrição da Atividade

A atividade proposta pelo professor consiste em desenvolver e implementar uma solução para o problema da mochila, neste caso chamada de contêiner, onde:

1. Existem múltiplos contêineres;
2. As variáveis de decisão (quantidades dos itens)  $x_i$  são do tipo inteiro;
3. Há disponibilidade de apenas 5 unidades de cada item;
4. Se um dado tipo de item estiver armazenado em um contêiner ele não poderá ser inserido nos demais contêineres.

### 3 Variações do modelo a serem implementadas

Considerando  $a_1$  e  $a_2$  como parâmetros, sendo  $a_1$  e  $a_2 \in \{1, \dots, n\}$  e  $a_1 \neq a_2$ .

1. O item  $a_1$  deve ser transportado em pelo menos um contêiner;
2. Os itens  $a_1$  e  $a_2$  devem ser transportados em pelo menos uma unidade e ambos no mesmo contêiner;
3. Os itens  $a_1$  e  $a_2$  devem ser transportados em pelo menos uma unidade mas necessariamente em contêineres distintos;
4. Um dos itens,  $a_1$  ou  $a_2$ , deve ser transportados em pelo menos uma unidade por apenas um contêiner. Se um deles for transportado, o outro não pode ser.

Todas as variações devem ser implementadas nas duas formulações (com 2 e com 3 dimensões) vistas em sala de aula.

### 4 Solução Proposta Segunda Dimensão

A solução proposta consiste na adaptação do modelo criado em uma implementação anterior, descrita no relatório 2 desta atividade.

Deste modo, temos a matriz  $X_{nm}$  (onde  $\mathbf{n}$  representa a quantidade de itens e  $\mathbf{m}$  representa a quantidade de contêineres e a matriz  $Y_{nm}$  (onde  $\mathbf{n}$  representa a quantidade de itens e  $\mathbf{m}$  representa a quantidade de contêineres). O modelo matemático e suas variações pode ser expresso da seguinte forma:

$$\text{Máx} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n x_{ij} \cdot u_i \cdot y_{ij}$$

Sujeito a:

$$\forall j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, \sum_{i=1}^n x_{ij} \cdot p_i \leq P ,$$
$$\forall j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, \sum_{i=1}^n x_{ij} \cdot v_i \leq V ,$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 5 ,$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, \sum_{j=1}^m y_{ij} \leq 1 ,$$

Variação 1

$$\sum_{j=1}^m x_{a1j} \geq 1 ,$$

Variação 2

$$\sum_{j=1}^m x_{a1j} \geq 1 ,$$

$$\sum_{j=1}^m x_{a2j} \geq 1 ,$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, y_{a1j} - y_{a2j} = 0 ,$$

Variação 3

$$\sum_{j=1}^m x_{a1j} \geq 1 ,$$

$$\sum_{j=1}^m x_{a2j} \geq 1 ,$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, y_{a1j} + y_{a2j} \leq 1 ,$$

Variação 4

$$\sum_{j=1}^m y_{a1j} + y_{a2j} = 1 ,$$

## 5 Solução Proposta Terceira Dimensão

A solução proposta consiste na adaptação do modelo criado na implementação anterior, descrita no relatório inicial desta atividade.

Deste modo, temos a matriz  $X_{nmb}$  (onde  $\mathbf{n}$  representa a quantidade de itens,  $\mathbf{m}$  representa a quantidade de contêineres e  $\mathbf{b}$  representa o limite de utilização de cada item). O modelo matemático e suas variações pode ser expresso da seguinte forma:

$$\text{Máx} \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{q=0}^b x_{ijq} \cdot (u_i \cdot q)$$

Sujeito a:

$$\forall j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, \sum_{i=1}^n \sum_{q=0}^b x_{ijq} \leq P ,$$

$$\forall j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, \sum_{i=1}^n \sum_{q=0}^b x_{ijq} \leq V ,$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, \sum_{j=1}^m \sum_{q=0}^b q \cdot x_{ijq} \leq b ,$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, \sum_{q=0}^b x_{ijq} \leq 1 ,$$

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, n\}, \sum_{j=1}^m \sum_{q=0}^b x_{ijq} \leq 1 ,$$

Variação 1

$$\sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^b x_{a1jq} = 1 ,$$

Variação 2

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, \sum_{q=1}^b x_{a1jq} - x_{a2jq} = 0 ,$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^b x_{a1jq} = 1 ,$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^b x_{a2jq} = 1 ,$$

Variação 3

$$\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, m\}, \sum_{q=1}^b x_{a1jq} + x_{a2jq} \leq 1 ,$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^b x_{a1jq} = 1 ,$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^b x_{a2jq} = 1 ,$$

Varição 4

$$\sum_{j=1}^m \sum_{q=1}^b x_{a1jq} + x_{a2jq} = 1 ,$$

## 6 Resultados para Duas Dimensões

O experimento foi realizado em computador com processador i7 e 16GB de memória RAM. A seguir é apresentado o resultado da solução encontrada com as implementações de Duas Dimensões para cada variação de modelo proposto, em todos os casos considerando-se a existência de 3 contêineres e um tempo limite de 2 minutos e 30 segundos de execução (Figura 1, Figura 2, Figura 3 e Figura 4):

## 7 Resultados para Três Dimensões

O experimento foi realizado em computador com processador i7 e 16GB de memória RAM. A seguir é apresentado o resultado da solução encontrada com as implementações de Três Dimensões para cada variação de modelo proposto, em todos os casos considerando-se a existência de 3 contêineres e um tempo limite de 2 minutos e 30 segundos de execução (Figura 5, Figura 6, Figura 7 e Figura 8):

## 8 Considerações

Para a variação 4 da Terceira Dimensão, utilizamos o tempo de execução de 60 segundos para gerar um resultado, isso se dá por conta do problema de estouro de memória.



## 9 Figuras

```

6089614 2388248      702.2449    15      701.5000      702.2959 17106081    0.11%
Elapsed time = 147.94 sec. (70091.32 ticks, tree = 820.72 MB, solutions = 47)

Flow cuts applied: 1
Gomory fractional cuts applied: 3

Root node processing (before b&c):
  Real time      =    0.11 sec. (44.59 ticks)
Parallel b&c, 8 threads:
  Real time      =   149.91 sec. (70971.50 ticks)
  Sync time (average) =    17.76 sec.
  Wait time (average) =    20.03 sec.
  -----
Total (root+branch&cut) = 150.02 sec. (71016.08 ticks)
Contêiner 1:
  Item: 13      Qtd: 5.0
  Item: 44      Qtd: 4.0
  Item: 55      Qtd: 5.0
  Item: 56      Qtd: 5.0
  Item: 63      Qtd: 5.0
  Item: 76      Qtd: 5.0
  Item: 84      Qtd: 5.0
  Item: 88      Qtd: 5.0

Contêiner 2:
  Item: 2 Qtd: 2.0
  Item: 12      Qtd: 5.0
  Item: 24      Qtd: 5.0
  Item: 39      Qtd: 2.0
  Item: 46      Qtd: 5.0
  Item: 66      Qtd: 3.0
  Item: 69      Qtd: 5.0
  Item: 79      Qtd: 5.0

Contêiner 3:
  Item: 1 Qtd: 1.0
  Item: 11      Qtd: 5.0
  Item: 19      Qtd: 5.0
  Item: 26      Qtd: 1.0
  Item: 35      Qtd: 5.0
  Item: 78      Qtd: 5.0
  Item: 82      Qtd: 5.0
  Item: 86      Qtd: 5.0
  Item: 98      Qtd: 5.0

Valor máx (soma de todos os contêineres): 701.5000000000001
CONSTRUÍDO COM SUCESSO (tempo total: 2 minutos 30 segundos)

```

Figura 1: Solução para a implementação de 2 dimensões da variação 1, considerando-se 3 contêineres.

```

5643418 2412258      701.9785    13      701.3300      702.3053 18380134    0.14%

Mixed integer rounding cuts applied:  1
Zero-half cuts applied:  1
Lift and project cuts applied:  1
Gomory fractional cuts applied:  2

Root node processing (before b&c):
  Real time           =   0.13 sec. (33.11 ticks)
Parallel b&c, 8 threads:
  Real time           = 149.89 sec. (69830.17 ticks)
  Sync time (average) =   18.52 sec.
  Wait time (average) =   20.89 sec.
  -----
Total (root+branch&cut) = 150.02 sec. (69863.28 ticks)
Contêiner 1:
  Item: 11           Qtd: 5.0
  Item: 26           Qtd: 2.0
  Item: 44           Qtd: 2.0
  Item: 46           Qtd: 5.0
  Item: 66           Qtd: 2.0
  Item: 69           Qtd: 5.0
  Item: 82           Qtd: 5.0
  Item: 86           Qtd: 5.0
  Item: 88           Qtd: 5.0

Contêiner 2:
  Item: 12           Qtd: 5.0
  Item: 13           Qtd: 5.0
  Item: 19           Qtd: 5.0
  Item: 55           Qtd: 5.0
  Item: 63           Qtd: 5.0
  Item: 76           Qtd: 5.0
  Item: 78           Qtd: 5.0
  Item: 98           Qtd: 5.0

Contêiner 3:
  Item: 1 Qtd: 1.0
  Item: 2 Qtd: 1.0
  Item: 24           Qtd: 5.0
  Item: 35           Qtd: 5.0
  Item: 39           Qtd: 5.0
  Item: 56           Qtd: 5.0
  Item: 79           Qtd: 5.0
  Item: 84           Qtd: 5.0

Valor máx (soma de todos os contêineres): 701.3299999999999
CONSTRUÍDO COM SUCESSO (tempo total: 2 minutos 30 segundos)
|

```

Figura 2: Solução para a implementação de 2 dimensões da variação 2, considerando-se 3 contêineres.

```

3820970 1921128      701.3962    14      700.8200      702.3040 12191575    0.21%

Implied bound cuts applied: 1
Mixed integer rounding cuts applied: 2
Gomory fractional cuts applied: 2

Root node processing (before b&c):
  Real time      =    0.14 sec. (47.58 ticks)
Parallel b&c, 8 threads:
  Real time      =  149.89 sec. (54923.04 ticks)
  Sync time (average) =   35.15 sec.
  Wait time (average) =   41.88 sec.
  -----
Total (root+branch&cut) =  150.03 sec. (54970.62 ticks)
Contêiner 1:
  Item: 1 Qtd: 1.0
  Item: 19      Qtd: 5.0
  Item: 24      Qtd: 5.0
  Item: 35      Qtd: 5.0
  Item: 39      Qtd: 5.0
  Item: 44      Qtd: 4.0
  Item: 69      Qtd: 5.0
  Item: 78      Qtd: 5.0
  Item: 86      Qtd: 5.0

Contêiner 2:
  Item: 12      Qtd: 5.0
  Item: 26      Qtd: 1.0
  Item: 46      Qtd: 5.0
  Item: 56      Qtd: 5.0
  Item: 76      Qtd: 5.0
  Item: 82      Qtd: 5.0
  Item: 84      Qtd: 5.0
  Item: 88      Qtd: 5.0

Contêiner 3:
  Item: 2 Qtd: 1.0
  Item: 11      Qtd: 5.0
  Item: 13      Qtd: 5.0
  Item: 55      Qtd: 5.0
  Item: 63      Qtd: 5.0
  Item: 65      Qtd: 1.0
  Item: 79      Qtd: 5.0
  Item: 98      Qtd: 5.0

Valor máx (soma de todos os contêineres): 700.8199999999999
CONSTRUÍDO COM SUCESSO (tempo total: 2 minutos 30 segundos)

```

Figura 3: Solução para a implementação de 2 dimensões da variação 3, considerando-se 3 contêineres.

```

4211345 1861637      705.9615    15      704.9000      705.9552 12711841    0.15%
Elapsed time = 149.86 sec. (50907.92 ticks, tree = 687.22 MB, solutions = 28)

Gomory fractional cuts applied: 1

Root node processing (before b&c):
  Real time      =    0.22 sec. (37.13 ticks)
Parallel b&c, 8 threads:
  Real time      =   149.80 sec. (50938.25 ticks)
  Sync time (average) =    37.64 sec.
  Wait time (average) =    46.32 sec.
  -----
Total (root+branch&cut) =   150.02 sec. (50975.38 ticks)
Contêiner 1:
  Item: 13      Qtd: 5.0
  Item: 19      Qtd: 5.0
  Item: 26      Qtd: 1.0
  Item: 35      Qtd: 5.0
  Item: 46      Qtd: 5.0
  Item: 78      Qtd: 5.0
  Item: 87      Qtd: 1.0
  Item: 88      Qtd: 5.0

Contêiner 2:
  Item: 2 Qtd: 1.0
  Item: 12      Qtd: 5.0
  Item: 24      Qtd: 5.0
  Item: 39      Qtd: 4.0
  Item: 44      Qtd: 5.0
  Item: 55      Qtd: 5.0
  Item: 56      Qtd: 5.0
  Item: 76      Qtd: 4.0
  Item: 82      Qtd: 5.0

Contêiner 3:
  Item: 11      Qtd: 5.0
  Item: 61      Qtd: 2.0
  Item: 63      Qtd: 5.0
  Item: 69      Qtd: 5.0
  Item: 79      Qtd: 5.0
  Item: 84      Qtd: 5.0
  Item: 86      Qtd: 5.0
  Item: 98      Qtd: 5.0

Valor máx (soma de todos os contêineres): 704.9000000000001
CONSTRUÍDO COM SUCESSO (tempo total: 2 minutos 31 segundos)

```

Figura 4: Solução para a implementação de 2 dimensões da variação 4, considerando-se 3 contêineres.

```

7848793 3514438      702.0391    12      701.3100      702.1888 17511959    0.13%
7920067 3558250      701.5946    10      701.3100      702.1888 17682080    0.13%

Cover cuts applied: 130
Gomory fractional cuts applied: 1

Root node processing (before b&c):
  Real time           =   0.31 sec. (130.59 ticks)
Parallel b&c, 8 threads:
  Real time           = 149.70 sec. (77908.60 ticks)
  Sync time (average) =   15.48 sec.
  Wait time (average) =   18.82 sec.
  -----
Total (root+branch&cut) = 150.02 sec. (78039.19 ticks)
Contêiner 1:
  Item: 1 Qtd: 1.0
  Item: 2 Qtd: 1.0
  Item: 11      Qtd: 5.0
  Item: 24      Qtd: 5.0
  Item: 35      Qtd: 5.0
  Item: 46      Qtd: 5.0
  Item: 66      Qtd: 1.0
  Item: 82      Qtd: 5.0
  Item: 84      Qtd: 5.0

Contêiner 2:
  Item: 39      Qtd: 4.0
  Item: 44      Qtd: 5.0
  Item: 56      Qtd: 5.0
  Item: 65      Qtd: 1.0
  Item: 69      Qtd: 5.0
  Item: 79      Qtd: 5.0
  Item: 86      Qtd: 5.0
  Item: 88      Qtd: 5.0

Contêiner 3:
  Item: 12      Qtd: 5.0
  Item: 13      Qtd: 5.0
  Item: 19      Qtd: 5.0
  Item: 55      Qtd: 5.0
  Item: 63      Qtd: 5.0
  Item: 76      Qtd: 5.0
  Item: 78      Qtd: 5.0
  Item: 98      Qtd: 5.0

Valor máx (soma de todos os contêineres): 701.31
CONSTRUÍDO COM SUCESSO (tempo total: 2 minutos 30 segundos)
|

```

Figura 5: Solução para a implementação de 3 dimensões da variação 1, considerando-se 3 contêineres.

```

5524157 2281651      702.0228   10      701.4100      702.0955 13315158   0.10%

GUB cover cuts applied:  1
Cover cuts applied:  237
Flow cuts applied:  1
Mixed integer rounding cuts applied:  1

Root node processing (before b&c):
  Real time           =    0.33 sec. (144.05 ticks)
Parallel b&c, 8 threads:
  Real time           =   149.69 sec. (91389.25 ticks)
  Sync time (average) =    22.27 sec.
  Wait time (average) =    25.85 sec.
  -----
Total (root+branch&cut) =   150.01 sec. (91533.30 ticks)
Contêiner 1:
  Item: 1 Qtd: 1.0
  Item: 2 Qtd: 2.0
  Item: 11      Qtd: 5.0
  Item: 26      Qtd: 1.0
  Item: 55      Qtd: 5.0
  Item: 66      Qtd: 1.0
  Item: 78      Qtd: 5.0
  Item: 82      Qtd: 5.0
  Item: 84      Qtd: 5.0
  Item: 98      Qtd: 5.0

Contêiner 2:
  Item: 13      Qtd: 5.0
  Item: 24      Qtd: 5.0
  Item: 46      Qtd: 5.0
  Item: 76      Qtd: 5.0
  Item: 79      Qtd: 5.0
  Item: 86      Qtd: 5.0

Contêiner 3:
  Item: 12      Qtd: 5.0
  Item: 19      Qtd: 5.0
  Item: 35      Qtd: 5.0
  Item: 39      Qtd: 3.0
  Item: 44      Qtd: 5.0
  Item: 56      Qtd: 5.0
  Item: 63      Qtd: 5.0
  Item: 69      Qtd: 5.0
  Item: 88      Qtd: 5.0

Valor máx (soma de todos os contêineres): 701.4099999999999
CONSTRUÍDO COM SUCESSO (tempo total: 2 minutos 30 segundos)

```

Figura 6: Solução para a implementação de 3 dimensões da variação 2, considerando-se 3 contêineres.

```

5688369 1913264      701.9749      9      701.6700      702.1193 15009748      0.06%
5742994 1927595      702.1129      9      701.6700      702.1177 15152108      0.06%

Cover cuts applied: 61
Gomory fractional cuts applied: 2

Root node processing (before b&c):
  Real time          =    0.33 sec. (125.67 ticks)
Parallel b&c, 8 threads:
  Real time          =  149.69 sec. (82962.53 ticks)
  Sync time (average) =   16.62 sec.
  Wait time (average) =   20.37 sec.
  -----
Total (root+branch&cut) =  150.02 sec. (83088.20 ticks)
Contêiner 1:
  Item: 1 Qtd: 1.0
  Item: 24 Qtd: 5.0
  Item: 35 Qtd: 5.0
  Item: 44 Qtd: 4.0
  Item: 56 Qtd: 5.0
  Item: 63 Qtd: 5.0
  Item: 76 Qtd: 5.0
  Item: 78 Qtd: 5.0
  Item: 79 Qtd: 5.0

Contêiner 2:
  Item: 12 Qtd: 5.0
  Item: 36 Qtd: 1.0
  Item: 39 Qtd: 4.0
  Item: 46 Qtd: 5.0
  Item: 55 Qtd: 5.0
  Item: 66 Qtd: 1.0
  Item: 69 Qtd: 5.0
  Item: 82 Qtd: 5.0
  Item: 84 Qtd: 5.0

Contêiner 3:
  Item: 11 Qtd: 5.0
  Item: 13 Qtd: 5.0
  Item: 19 Qtd: 5.0
  Item: 26 Qtd: 2.0
  Item: 86 Qtd: 5.0
  Item: 88 Qtd: 5.0
  Item: 98 Qtd: 5.0

Valor máx (soma de todos os contêineres): 701.6699999999998
CONSTRUÍDO COM SUCESSO (tempo total: 2 minutos 30 segundos)
|

```

Figura 7: Solução para a implementação de 3 dimensões da variação 3, considerando-se 3 contêineres.

```

2733163 2091604      705.5763      9      704.4900      705.9392 5503399      0.21%

Cover cuts applied: 81
Gomory fractional cuts applied: 2

Root node processing (before b&c):
  Real time      =    0.27 sec. (129.03 ticks)
Parallel b&c, 8 threads:
  Real time      =   59.75 sec. (30895.17 ticks)
  Sync time (average) =    8.24 sec.
  Wait time (average) =    9.93 sec.
-----
Total (root+branch&cut) =   60.02 sec. (31024.20 ticks)
Contêiner 1:
  Item: 2 Qtd: 1.0
  Item: 11 Qtd: 5.0
  Item: 12 Qtd: 5.0
  Item: 55 Qtd: 5.0
  Item: 78 Qtd: 5.0
  Item: 79 Qtd: 5.0
  Item: 86 Qtd: 5.0
  Item: 98 Qtd: 5.0

Contêiner 2:
  Item: 19 Qtd: 5.0
  Item: 24 Qtd: 5.0
  Item: 26 Qtd: 3.0
  Item: 35 Qtd: 5.0
  Item: 46 Qtd: 5.0
  Item: 56 Qtd: 5.0
  Item: 69 Qtd: 5.0
  Item: 84 Qtd: 5.0

Contêiner 3:
  Item: 13 Qtd: 5.0
  Item: 39 Qtd: 5.0
  Item: 44 Qtd: 1.0
  Item: 61 Qtd: 2.0
  Item: 63 Qtd: 5.0
  Item: 66 Qtd: 1.0
  Item: 76 Qtd: 5.0
  Item: 82 Qtd: 5.0
  Item: 88 Qtd: 5.0

Valor máx (soma de todos os contêineres): 704.4899999999999
CONSTRUÍDO COM SUCESSO (tempo total: 1 minuto 0 segundos)
|

```

Figura 8: Solução para a implementação de 3 dimensões da variação 4, considerando-se 3 contêineres e 60 segundos de execução.