

Universidade Federal de Alfenas

Instituto de Ciências Exatas

Ciência da Computação

Relatório de Pesquisa Operacional

Problema da Coloração de Mapas-Grafos

Alunos:

Alexandre William Miya - RA: 2014.1.08.004

Gustavo Alves Miguel - RA: 2014.1.08.013

Professor:

Humberto César Brandão de Oliveira

Julho
2018

Conteúdo

1	Apresentação	1
2	Descrição da Atividade	2
3	Modelos Matemáticos	2
3.1	Modelo 1	2
3.2	Modelo 2	3
4	Resultados	3
5	Considerações	4
	Bibliografia	4

1 Apresentação

Em teoria dos grafos, coloração de grafos é um caso especial de rotulagem de grafos; é uma atribuição de rótulos tradicionalmente chamados "cores" a elementos de um grafo sujeita a certas restrições. Em sua forma mais simples, é uma forma de colorir os vértices de um grafo tal que não haja dois vértices adjacentes que compartilhem a mesma cor; isso é chamado de uma coloração de vértices.

Os primeiros resultados sobre coloração de grafos lidam quase que exclusivamente com grafos planares na forma da coloração de mapas. Enquanto tentava colorir um mapa dos condados da Inglaterra, Francis Guthrie postulou a conjectura das quatro cores, notando que quatro cores eram suficientes para colorir o mapa, para que as regiões que partilham uma fronteira comum não recebessem uma mesma cor. O irmão de Guthrie passou a pergunta para seu professor de matemática Augustus de Morgan da University College, que o mencionou a William Hamilton em 1852. Arthur Cayley levantou o problema em uma reunião do London Mathematical Society em 1879. No mesmo ano, Alfred Kempe publicou um artigo que afirmava ter estabelecido o resultado, e por uma década o problema das quatro cores foi considerado resolvido. Para sua realização Kempe foi eleito membro da Royal Society e mais tarde Presidente da Sociedade Matemática de Londres.

Em 1890, Heawood apontou que o argumento de Kempe estava errado. No entanto, ele provou o teorema de cinco cores, dizendo que cada mapa planar pode ser colorido com não mais de cinco cores, usando idéias de Kempe. No século seguinte, uma grande quantidade de trabalhos e teorias foram desenvolvidas para reduzir o número de cores a quatro, até que o teorema de quatro cores foi finalmente provada em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken. A prova voltou para as idéias de Heawood e Kempe e negligenciados os desenvolvimentos intervenientes.

A prova do teorema de quatro cores também é notável por ser a primeira grande prova auxiliada por computador.

A coloração de grafos tem sido estudada como um problema algorítmico desde o início da década de 1970: o problema número cromático é um dos 21 problemas NP-completos de Karp, de 1972. Vários algoritmos de tempo exponencial foram desenvolvidos com base no método de Zykov (1949).

Uma das principais aplicações de coloração de grafos, alocação de registradores em compiladores foi introduzida em 1981.

2 Descrição da Atividade

O objetivo deste trabalho é criar um algoritmo que respeite as restrições do problema de coloração de grafos ou conhecido como problema de coloração de mapas, onde seja um mapa e os países nele contido, devemos colorir os países de maneira que os países adjacentes não possam ter a mesma coloração, o objetivo é reduzir o número de cores utilizadas.

As restrições básicas podem ser descritas como:

1. cada país deve receber uma cor dentro do conjunto de cores;
2. países adjacentes não podem ter a mesma coloração;

As variáveis podem ser definidas como:

1. c : representa as cores;
2. p : representa os países;
3. x_{pc} : matriz booleana representando a matriz de adjacência do grafo;
4. y_c : vetor booleano representando a quantidade de cores do mapa;

3 Modelos Matemáticos

3.1 Modelo 1

A função objetivo pode ser expressa da seguinte forma:

$$\text{Min } \sum_{c \in C} y_c$$

Sujeito a:

$$\forall c \in C, \sum_{p \in P} x_{pc} \leq y_c \cdot M \text{ onde } M \text{ é uma constante infinita,}$$

$$\forall p \in P, \sum_{c \in C} x_{pc} = 1 ,$$

3.2 Modelo 2

A função objetivo pode ser expressa da seguinte forma:

$$\text{Min} \sum_{p \in P} \sum_{c \in C} (c + 1) \cdot x_{pc}$$

Sujeito a:

$$\forall p \in P, \sum_{c \in C} x_{pc} = 1 ,$$

4 Resultados

O experimento foi realizado em computador com processador i7 e 16Gb de memória RAM. A seguir é apresentado o resultado encontrado com a solução:

```
Root node processing (before b&c):
  Real time           =    0.88 sec. (628.39 ticks)
Parallel b&c, 8 threads:
  Real time           =    2.45 sec. (1798.84 ticks)
  Sync time (average) =    0.99 sec.
  Wait time (average) =    0.99 sec.
  -----
Total (root+branch&cut) =    3.33 sec. (2427.22 ticks)

Valor min: 6.0
CONSTRUÍDO COM SUCESSO (tempo total: 4 segundos)
```

Figura 1: Resultado para o problema de coloração de mapas utilizando o primeiro modelo para 50 países.

```
Root node processing (before b&c):
  Real time           =    4.56 sec. (2614.25 ticks)
Parallel b&c, 8 threads:
  Real time           =   11.03 sec. (8927.09 ticks)
  Sync time (average) =    1.72 sec.
  Wait time (average) =    1.74 sec.
  -----
Total (root+branch&cut) =   15.59 sec. (11541.34 ticks)

Valor min: 6
CONSTRUÍDO COM SUCESSO (tempo total: 16 segundos)
```

Figura 2: Resultado para o problema de coloração de mapas utilizando o segundo modelo para 50 países.

5 Considerações

Para a instância de 100 países o segundo modelo apresentou o problema de estouro de memória, mas comparando os dois modelos para a instância de 50 países, podemos verificar que o primeiro modelo apresentou-se mais rápido que o segundo modelo, com um tempo quatro vezes menor de execução.

Bibliografia

Coloração de grafos [Internet]. Wikipedia. [acesso em 14 de julho de 2018]. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Coloração_de_grafos.