Eigenfaces:
Uma Análise Comparativa entre PCA e SVD

Beatriz Miranda
beatriz.bezerra@fgv.edu.br

Gustavo Murilo
gustavo.carvalho.2023@fgv.edu.br

Rio de Janeiro, Brasil

26 de novembro de 2023

FGV EMAp
ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

Rosto médio de mulheres de diferentes países

SVD e PCA

Resumidamente, as etapas para aplicação do PCA são:

1. Escolher variáveis (dimensões) a serem avaliadas;
2. Subtrair média de cada dimensão, produzindo um conjunto de dados com média zero;
3. Calcular matriz de covariância;
4. Calcular os autovetores e autovalores da matriz de covariância;
5. Escolher as k componentes principais (k autovetores com maior autovalor)
6. Interpretar as informações contidas nas componentes principais.

A Principal diferença entre PCA e SVD

- No entanto, é possível substituir a etapa 4 pela aplicação do SVD, uma vez que os k primeiros autovetores da matriz de covariância são as k dimensões de maior variabilidade. Neste sentido, podemos interpretar o PCA como o processo de fatoração do SVD, aplicado à matriz de covariância.
  - Assim, salvo as devidas diferenças teóricas, a questão prática se reduz à identificarmos as diferenças entre SVD sobre a matriz de covariância e SVD sobre a matriz original.

Definimos então a i-ésima imagem como $\boldsymbol{a_i} \in \mathbb{R}^{mn}$ tal que $1 \leq i \leq q$, onde q é o número de imagens no banco de dados. A partir delas, é criada a matriz que contém todas as imagens originais, $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{mn \times q}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{a_1} & \boldsymbol{a_1} & \dots & \boldsymbol{a_q} \end{bmatrix}$$

Face média:

$$\boldsymbol{f_\mu} = \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{a_i}$$

(a) Corpo docente da EMAp.

(b) FEI Face Database.

Figura: Face média

Em seguida, definimos a matriz com os dados centralizados $\boldsymbol{M}$ por:

$$\boldsymbol{m_i} = \sum_{i=1}^{q} \boldsymbol{a_i} - \boldsymbol{f_\mu}$$

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} | & | & \cdots & | \\ \boldsymbol{m_1} & \boldsymbol{m_2} & \cdots & \boldsymbol{m_q} \\ | & | & \cdots & | \end{bmatrix}$$

A matriz de covariância amostral do nosso conjunto de dados, denotada por $\boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{mn \times mn}$ pode ser calculada da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{C} = \frac{1}{q-1} \sum_{i=1}^{q} (\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{f_\mu})(\boldsymbol{a}_i - \boldsymbol{f_\mu})^T = \frac{1}{q-1} \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^T$$

Eigenfaces

Correção pela média

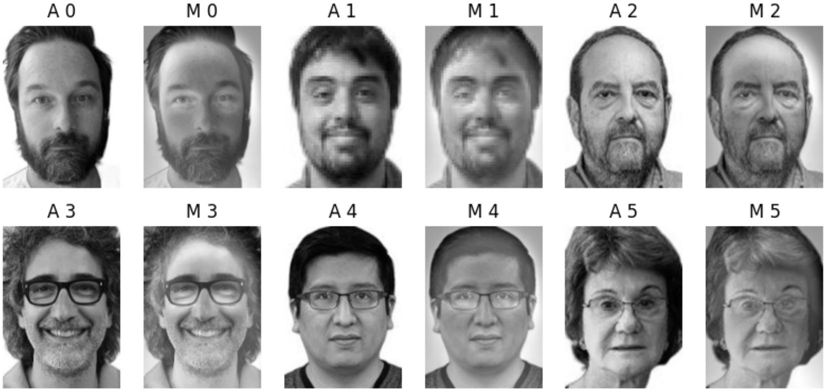


Figura: Imagens corrigidas pela média

Observe que $\boldsymbol{C}$ é simétrica e positiva definida, portanto, aplica-se o teorema espectral. A decomposição da matriz de covariância $\boldsymbol{C}$ usando a SVD é dada por:

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{V}^T = \boldsymbol{U}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{U}^T$$

onde $\boldsymbol{U}$ é a matriz de autovetores e $\boldsymbol{\Sigma}$ é uma matriz diagonal contendo os autovalores em ordem decrescente. Os autovetores em $\boldsymbol{U}$ são chamados de "eigenfaces". Eles representam as principais componentes de variação nas imagens faciais.

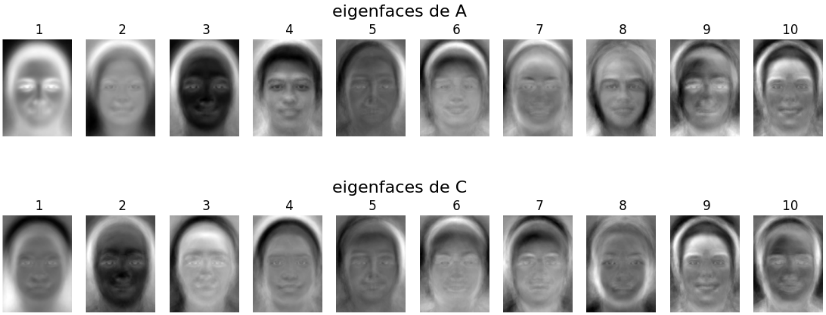


Figura: Eigenfaces mais relevantes de cada matriz

Eigenfaces

Eigenfaces menos relevantes

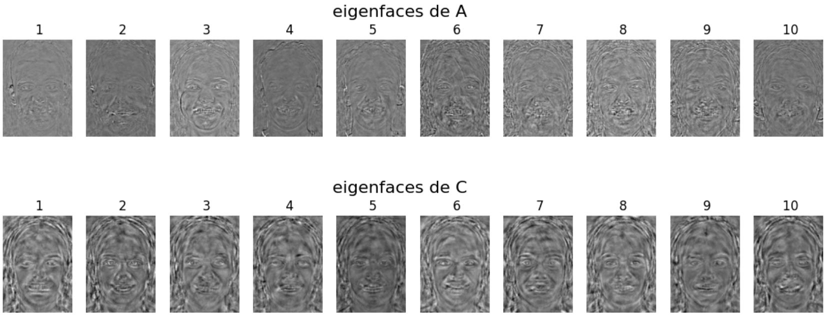


Figura: Eigenfaces menos relevantes de cada matriz

FGV EMAp ESCOLA DE MATEMÁTICA APLICADA

Para reconhecer um rosto novo, é necessário projetar a imagem desse rosto nas eigenfaces para obter os coeficientes de projeção. Seja $\boldsymbol{z}$ o vetor de coeficientes de projeção de uma imagem de teste. Podemos calcular $\boldsymbol{z}$ da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{x_{teste}} - \boldsymbol{F_{\mu}})$$

onde $\boldsymbol{x_{teste}}$ é o vetor de pixels da imagem de teste.

Suponha que queremos reconstruir a seguinte imagem:

Figura: Imagem a ser reconstruída

Discussão dos Resultados

Reconstrução de Imagens

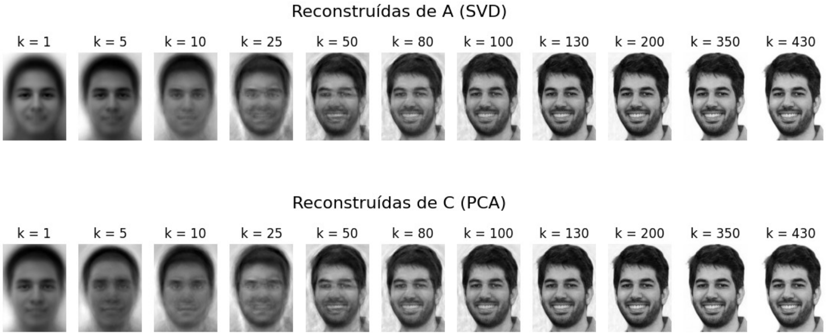
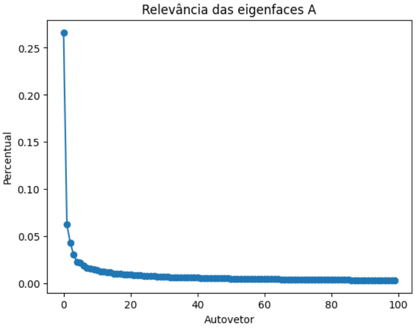


Figura: Imagem reconstruída

Discussão dos Resultados

Relevância das eigenfaces



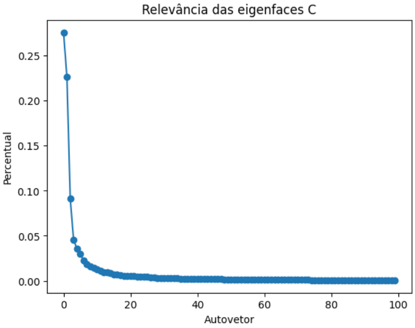


Figura: Relevância das Eigenfaces de cada matriz

```
A ocupa 76,8 mb = 0,1 gb
M ocupa 76,8 mb = 0,1 gb
C ocupa 4.177,6 mb = 4,1 gb
U_A_k100 ocupa 17,9 mb = 0,0 gb
coef_A ocupa 1,4 mb = 0,0 gb
```

Figura: Memória ocupada por cada matriz

Obrigado!