At. 01 - Álgebra matricial

Gustavo Almeida Silva

2.4

Dados as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, onde $\mathbf{A}^{-1}$ e $\mathbf{B}^{-1}$ existem, prove as seguintes alternativas

- A) $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$
  - Mutiplicando ambos os lados por $\mathbf{A}'$:

$$\mathbf{A}'(\mathbf{A}')^{-1} = \mathbf{A}'(\mathbf{A}^{-1})'$$
$$= \mathbf{A}'(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A})'$$
$$= \mathbf{A}'(\mathbf{A}')^{-1} = I'$$
$$= \mathbf{A}'(\mathbf{A}')^{-1} = I$$

  Portanto: $(\mathbf{A}')^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})'$

- B) $(\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$
  - Mutiplicando ambos os lados por $\mathbf{AB}$:

$$(\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{AB}$$
$$(\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{-1}I\mathbf{B}$$
$$(\mathbf{AB})^{-1}\mathbf{AB} = I$$

  Portanto: $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

2.8

Dada a matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ encontre os autovalores λ_1, λ_2 e seus autovetores normalizados e_1, e_2. Determine a decomposição espectral (2-16) de $\mathbf{A}$

Para encontrar os autovalores e autovetores, tem-se que:

$$(A - \lambda I)\ \tilde{x} = 0$$

Encontrando os autovalores normalizados, a partir de:

$$Det(A - \lambda I) = 0$$

$$det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6$$

Resolvendo a eq. de segundo grau, tem-se que: $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$

Assim, pode-se encontrar os autovetores e_1 e e_2

Para e_1, associado ao autovalor $\lambda_1 = 2$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & 2 \\ 2 & -2-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2 \\ 2 & -2-2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que $2x = y$

Portanto, o primeiro conjunto de autovalor e autovetor pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Para normalizar o autovetor, temos que dividi-lo por sua norma, assim: $||e_1|| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$

Portanto:$e_1 = \ \sqrt{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Para e_2, associado ao autovalor $\lambda_2 = -3$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & 2 \\ 2 & -2-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 & 2 \\ 2 & -2+3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo o sistema, tem-se que $x = -2y$

Portanto, o primeiro conjunto de autovalor e autovetor pode ser escrito como

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Para normalizar o autovetor, temos que dividi-lo por sua norma, assim: $||e_2|| = \sqrt{-1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

Portanto:$e_2 = \ \sqrt{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

A decomposição espectral de **A** é dada por: $A = \lambda_1 \ e_1 \ e_1\acute{} + \lambda_2 \ e_2 \ e_2\acute{}$

Assim: $\mathbf{A} = (2 \ \cdot \sqrt{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}) + (-3 \ \cdot \sqrt{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{5} \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix}$

2.9

Seja **A** a mesma matriz do exercício 2.8

- a) Encontre $\mathbf{A}^{-1}$
  - Sabemos que $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = I$. Assim, podemos a matriz inversa via metodo de Gauss-Jordan:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 = -2L_1 + L2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad L_2 = -\frac{1}{6}L_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad L_1 = -2L_2 + L_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} || \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

Assim $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$

- b) Encontre os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}^{-1}$
  - Dado que ja encontramos os autovalores e autovetores de **A** no exercício 2.8, os autovalores e autovetores de $\mathbf{A}^{-1}$ podem ser encontrados mais facilmente. Sabemos que

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3, e_1 = \sqrt{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \sqrt{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Utilzando a seguinte propriedade: Se $A = \lambda_1\ e_1\ e_1{'} + \lambda_2\ e_2\ e_2{'}$, logo $A^{-1} = \frac{1}{\lambda_1}\ e_1\ e_1{'} + \frac{1}{\lambda_2}\ e_2\ e_2{'}$
Assim: $A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{5}\,(2 \quad 1)) + \frac{1}{-3}\sqrt{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{5}\,(-1 \quad 2)$

- c) Escreva a decomposição espectarl de $\mathbf{A}^{-1}$
  - Como escrito em b)

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{5}\,(2 \quad 1)) + \frac{1}{-3}\sqrt{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{5}\,(-1 \quad 2)$$

2.12

Mostre que o determinante de uma matriz quadrada $ p ×p, **A** $, pode ser expressado como o produto de seus autovalores

2.14

Mostre que $\mathbf{Q}'\mathbf{AQ}$ e **A** possuem os mesmos autovalores se **Q** for ortogonal

2.15

A forma quadrática de $x\acute{}\mathbf{A}x$ é dita positiva definida se $\mathbf{A}$ for positiva definida. Então a forma quadratica $3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$ é positiva definida?

Para descobrir se $\mathbf{A}$ é positiva definida temos que, encontrar $\mathbf{A}$ e verificar se seus autovalores são positivos

Assim, dada uma forma quadrática $3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2$ pode-se $x\acute{}\mathbf{A}x$ a partir de

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

onde a forma quadrática é dada por:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2$$

Portanto: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

E seus autovalores são dados por: $det(A - \lambda I) = 0$

$$det(\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}) = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

Resolvendo a equação: $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = 2$

Portanto os autovalores de $\mathbf{A}$ são postivos e logo $\mathbf{A}$ é positiva definida

2.16

Considere uma matriz arbitraria $n \times p, \mathbf{A}$. Então $\mathbf{A}'\mathbf{A}$ é uma matriz simétrica $p \times p$, mostre que ela é obrigatoriamente não negativa definida

Parar todo vetor $\tilde{x}$ não nulo, temos que

$$\tilde{x}'A'A\tilde{x} = (A\tilde{x})'A\tilde{x} = ||A\tilde{x}||^2$$

Onde, $|A\tilde{x}||^2 > 0$ e portanto A é obrigatoriamente não negativa

2.17

Prove que todo autovalor de uma matriz quadrada positiva definida é positivo