Estudo Comparativo de Planos Amostrais Complexos na Estimação da Média de Notas Escolares

Pedro Henrique Corrêa de Almeida[1] and Gustavo Almeida Silva[1]

[1*]Dep. Estatística, Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, Brasil.

Abstract

Buscando comparar o desempenho de diferentes planos amostrais em um mesmo conjunto de dados, este trabalho utiliza o método de simulação Monte Carlo para geração de amostras. Os dados simulados são então analisados usando técnicas estatísticas apropriadas para avaliar o viés, erros padrão e outras medidas relevantes para cada plano amostral. Os resultados desta pesquisa contribuem para a compreensão dos pontos fortes e limitações das pesquisas estratificadas e em múltiplos conglomerados. O estudo destaca a importância de considerar desenhos de amostragem complexos e suas métricas associadas para obter estimativas confiáveis e robustas. Os resultados das simulações fornecem insights valiosos sobre a adequação e o desempenho dos métodos de amostragem conglomerada em diferentes estágios. Espera-se que este estudo contribua para a compreensão das complexidades da amostragem em pesquisas com estrutura hierárquica e auxilie pesquisadores na escolha do método de amostragem mais apropriado para suas necessidades.

Keywords: Amostragem, Plano Amostral Complexo, Amostragem Estratificada, Amostragem por Conglomerado, Simulação Monte Carlo

.

1 Introdução

A amostragem desempenha um papel fundamental na estatística, permitindo aos pesquisadores obterem informações sobre uma população a partir de uma amostra representativa. Através de métodos estatísticos robustos, é possível extrapolar conclusões precisas e confiáveis sobre a população em geral. No entanto, a amostragem muitas vezes enfrenta desafios práticos, como a seleção adequada das unidades amostrais e a consideração de complexidades inerentes a certos planos de amostragem.

De forma geral, é amplamente reconhecido na teoria da amostragem que, embora o esquema de amostragem aleatória simples (AAS) seja teoricamente simples, na prática, é pouco utilizado devido às restrições orçamentárias e à busca por métodos probabilísticos que forneçam informações mais precisas. Além disso, é comum encontrar dificuldades na obtenção de cadastros adequados para o AAS, bem como lidar com situações de não resposta, o que requer considerar observações com pesos desiguais (Skinner and Vieira, 2005). A especificação inadequada na análise do plano amostral selecionado também pode resultar em estimativas enviesadas, destacando a importância de estudar metodologias que levem em conta o esquema de amostragem adotado.

A simulação de Monte Carlo é uma técnica estatística que envolve a geração de múltiplas amostras aleatórias com base em modelos probabilísticos. É amplamente utilizada para avaliar incertezas, estimar parâmetros e estudar o desempenho de métodos estatísticos em uma variedade de áreas (Kroese and Rubinstein, 2012).

Nesse contexto, o trabalho tem como objetivo explorar a interseção entre a amostragem e a simulação computacional via método Monte Carlo, destacando como essa abordagem combinada pode contribuir para aprimorar a qualidade das inferências estatísticas. Serão apresentados conceitos fundamentais da amostragem, incluindo diferentes métodos de seleção amostral e as respectivas propriedades, e, em seguida, será discutido como a simulação computacional pode ser aplicada para investigar essas técnicas em contextos específicos.

Ao integrar a simulação computacional à amostragem estatística, os pesquisadores podem explorar virtualmente uma ampla gama de cenários de amostragem, considerando diferentes planos amostrais, tamanhos de amostra e distribuições populacionais. Além disso, a simulação permite a avaliação de métricas de desempenho, como viés e erro padrão, fornecendo insights valiosos sobre a precisão e a eficiência dos métodos de amostragem em diferentes contextos.

2 Metodologia

O objetivo deste trabalho é comparar diferentes planos de amostragem em estágios complexos, como a amostragem estratificada e a amostragem conglomerada. Para realizar essa comparação, foi conduzido um estudo de simulação via método de Monte Carlo. O estudo tem como propósito investigar e avaliar o desempenho desses diferentes planos amostrais em termos de eficiência, precisão e viés. Através da simulação, é possível criar cenários controlados que permitem analisar o impacto de cada plano

amostral em diferentes características da população. Com base nos resultados obtidos na simulação, foi possível identificar quais planos de amostragem são mais adequados para determinados contextos e auxiliar na tomada de decisões estatísticas mais embasadas.

Para isso, foi utilizado o conjunto de dados: **Alunos.txt**, que se trata de dados sobre notas de alunos em um determinado teste de português. Os dados são populacionais. Assim, diferentes métodos de amostragem complexa foram avaliados utilizando esse conjunto de dados.

O conjunto de dados possui 6 variáveis, são elas:

Variável	Descrição
Aluno	ID do aluno
Rede	Rede de ensino
Escola	ID da escola
Turma	ID da turma
Port	Nota no teste de portugues de cada aluno, é tambem a variável de interesse desse trabalho

Os metodos estudados foram:

- Amostragem Estratificada
  - Foram testados estratificação por Rede e estratificação por Escola
- Amostragem Conglomerada
  - 1 estágio por Escolas
  - 1 estágio por Turmas
  - 2 estágios: UPA-Escolas, USA-Turmas
  - 3 estágios: UPA-Escolas, USA-Turmas, UTA-Alunos
- Amostragem Conglomerada com PPT Poisson
  - 1 estágio por Escolas, tamanho via número de turmas
  - 1 estágio por Escolas, tamanho via número de alunos

3 Estudo de Simulação

Considerou-se como variavel de interesse a média da variavel Port com transformação logaritmo natural, ou seja, a variavel estimada via diferentes metodos de amostragem complexa foi: $ln(Port)$

Para a cada plano amostral, foram replicadas 1000 vezes amostras de tamanho 500 e 750, para cada replicação foram calculadas as estimativas pontuais e seu o erro padrão

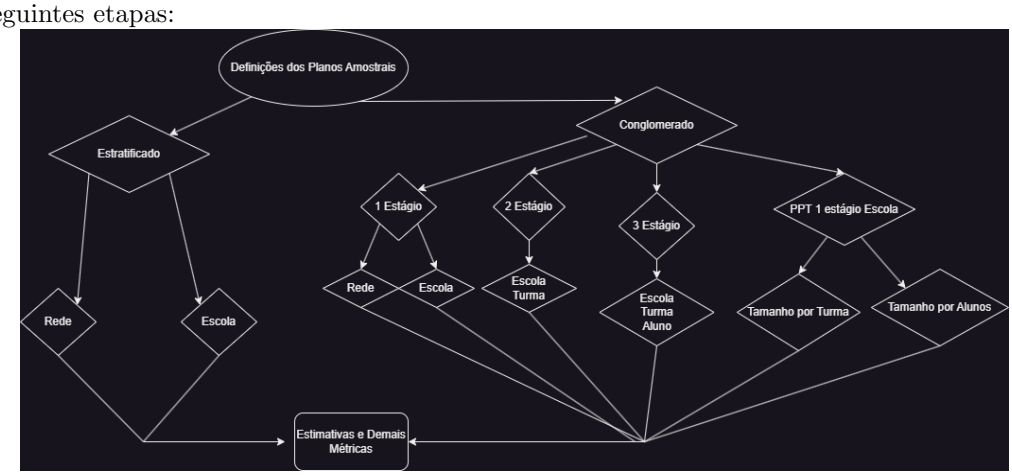
Para avaliar o desempenho de cada plano amostral. foram consideradas metricas como **Víes, Erro-padrão, Erro Quadrático Médio e a Proporção de captação do valor paramétrico no intervalo de confiança de** 95% **da estimativa**.

O verdadeiro valor da variável estimada é de:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} ln(Port_i)}{n} = 6.218181$$

O conhecimento de tal valor é importantíssimo para o calculo do viés e consequente a decisão sobre o plano maostral mais adequado para o problema.

Construi-se o seguinte diagrama para facilitar passo a passo aplicado durante as seguintes etapas:



3.1 Amostragem Estratificada

A amostragem estratificada é uma técnica valiosa que permite uma seleção mais precisa e representativa da amostra, considerando as heterogeneidades presentes na população. Ao estratificar a população em subgrupos e selecionar uma amostra de cada estrato, é possível obter estimativas mais confiáveis e insights mais detalhados sobre os diferentes grupos presentes na população de interesse.

O estimador não viciado do parâmetro de média é dado por:

$$\bar{y_h} = \sum_{i=1}^{n_h} \frac{y_{hi}}{n_h}$$

Enquanto o estimador da variância do estimador de média é dado por:

$$\hat{V}_{AES}(\bar{y}_{AES}) = \sum_{h=1}^{H} W_h^2 (\frac{1}{n_h} - \frac{1}{N_h}) s_h^2$$

Nesse contexto, trabalhou-se com duas divisões de estratos: Rede e Escola.

Primeiramente foi realizada 1000 replicações com um tamanho amostral igual a 500, após isso realizou-se novamente 1000 replicações com 750.

Foram consideradas 3 tipos de alocação amostral

- Uniforme
- Proporcional ao Tamanho
- Ótima de Neyman

3.1.1 Estratificada por Rede

Após aplicar as 1000 replicações utilizando o método de Monte Carlo, obteu-se as seguintes estimativas

n = 500

Alocação	$\hat{\theta}$	$E\hat{P}(\theta)$	$IC(95\%) \subset \theta$	Viés	EQM
Uniforme	6.218338	0.0104576	0.966	0.0001568	0.0001094
Proporcional	6.218293	0.0090885	0.951	0.0001121	0.0000826
Neyman	6.218179	0.0090841	0.964	-0.0000020	0.0000825

Vemos um ótimo desempenho dos 3 tipos de alocação, onde todos apresentaram um EQM extremamente baixo. O intervalo de confiança considerado foi de 95, assim vemos que o metodo de alocação Proporcional foi aquele que mais se aproximou desse valor. Os demais metodos apresentaram taxa de rejeição inferior ao nivel de significancia definida.

n = 750

Alocação	Estimativas	ErroPadrão	$IC(95\%) \subset \theta$	Viés	EQM
Uniforme	6.217622	0.0085606	0.968	-0.0005597	7.36e-05
Proporcional	6.218224	0.0074278	0.960	0.0000427	5.52e-05
Neyman	6.217922	0.0074324	0.966	-0.0002592	5.53e-05

Com base nos resultados obtidos a partir do estudo de simulação, pode-se verificar que os intervalos de confiança de 95% conteram o valor real, aproximadamente, 95% das vezes, como era o esperado. Além disso, viu-se que, a alocação Uniforme apresentou o maior erro quadrático médio entre as 3 alocações, por outro lado as alocações Proporcional e Ótima de Neyman tiveram resultados semelhantes.

Além disso, podemos verificar, que o erro padrão e o erro quadrático médio apresentou diminuição ao aumentar o tamanho amostral. No entanto, não houve uma melhora significativa em relação ao viés.

3.1.2 Estratificada por Escola

Alocação	Estimativas	ErroPadrão	$IC(95\%) \subset \theta$	Viés	EQM
Uniforme	6.218014	0.0094822	0.981	-0.0001673	8.99e-05
Proporcional	6.217734	0.0084041	0.983	-0.0004475	7.08e-05
Neyman	6.217978	0.0086743	0.986	-0.0002035	7.53e-05

Os 3 metodos apresentaram um erro quadrático médio baixo, porém o intervalo de confiança não obteve desempenho desejado. Definido um nivel de confiança de 5%, viu-se que os três métodos apresentaram um nível de rejeição menor que o esperado.

Alocação	Estimativas	ErroPadrão	$IC(95\%) \subset \theta$	Viés	EQM
Uniforme	6.218394	0.0081765	0.982	0.0002125	6.69e-05
Proporcional	6.218155	0.0070644	0.991	-0.0000268	4.99e-05
Neyman	6.218010	0.0072053	0.984	-0.0001719	5.19e-05

Apesar do aumento do tamanho amostral, não observou-se uma diminuição do **EQM**, além disso o 3 métodos apresentaram alta de taxa de não rejição em seus intervalos de confiança, ou seja, um rejeição bem menor que 5%

3.2 Amostragem Conglomerada

A principal motivação por trás da amostragem conglomerada é simplificar o processo de amostragem quando a população é muito grande ou geograficamente dispersa. Em vez de lidar com cada elemento individualmente, os conglomerados podem ser selecionados de forma mais eficiente, reduzindo os custos e o tempo necessários para a coleta de dados. Esse método apresenta custos de operações menores quando comparados a outro métodos amostrais

O estimador não viciado do parâmetro de média por conglomerado é dado por:

$$\bar{y_N} = \frac{\hat{Y}}{M_0}$$

Enquanto o estimador da variância do estimador natural é dado por:

$$\hat{V}_{ACS}(\bar{y}_N) = \frac{1}{\bar{M}^2}\frac{1-f}{n}s_e^2$$

4 Tempo de execução computacional

Durante a construção do trabalho, certos planos amostrais apresentaram um desempenho ligeiramente melhor que outros, porém tal melhoria um tempo de execução computacional razoável.

Uma métrica importantíssima que as métricas estatísticas não captam é aquela de tempo de execução computacional, tal métrica pode indicar qual plano amostral é superior quando as métricas estatísticas se mostrarem próximas

Assim, este tópico busca comparar os tempos de execução computacional dos métodos já estudados

Tempo de execução para calculos de estimativas a partir de uma amostra já definida é ínfimo quando comparado ao tempo de execução de funções de calculado de alocação e seleção amostral, assim apenas as funções de alocação e seleção amostral foram utilizadas para a estimativa do tempo gasto. [1]

- Amostragem Estratificada

[1] Setup: Intel i5-11400; 8gb à 2666mhz

Alocação	Média por Replicação	Total			
Uniforme	6.218394	0.0081765	0.982	0.0002125	6.69e-05
Proporcional	6.218155	0.0070644	0.991	-0.0000268	4.99e-05
Neyman	6.218010	0.0072053	0.984	-0.0001719	5.19e-05

5 Conclusão

Pfeffermann (1996), Kleijnen (1995)

References

Kleijnen JP (1995) Verification and validation of simulation models. European journal of operational research 82(1):145–162

Kroese DP, Rubinstein RY (2012) Monte carlo methods. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics 4(1):48–58

Pfeffermann D (1996) The use of sampling weights for survey data analysis. Statistical methods in medical research 5(3):239–261

Skinner C, Vieira MdT (2005) Design effects in the analysis of longitudinal survey data. University of Southampton Institutional Repository