Análise Real III

Apontamentos de apoio às aulas teóricas II

(Versão de trabalho 17/11/2018)

2 Superfícies parametrizadas/Introdução

Vimos que um caminho "regular", C, em $\mathbb{R}^3$ (segmento, circunferência, elipse, hélice,...) pode ser parametrizado (por exemplo pelo comprimento de arco). Essas parametrizações, quando são regulares podem ser encaradas como sistemas de coordenadas do caminho C. A recta tangente ao caminho C num ponto fixado, a curvatura e o trabalho realizado por um campo de vectores ao longo de C não dependem da parametrização escolhida, isto é do sistema de coordenadas (regulares) escolhido. São todos eles intrínsecos a C e uma escolha de um sistema de coordenadas (regulares) é útil para efectuar cálculos. Pretendemos agora seguir um procedimento análogo com as superfícies: introduzir sistemas de coordenadas que permitam efectuar cálculos relacionados com objectos/propriedades de natureza intrínseca à superfície.

Parametrizar uma superfície S corresponde a descrevê-la recorrendo a dois parâmetros, pertencentes a um sub-conjunto D de $\mathbb{R}^2$, e a uma função $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$, com determinadas propriedades (apresentadas mais à frente).

2 Superfícies parametrizadas/Introdução

Definição: Um sub-conjunto $S \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}^3$ é *uma superfície regular* se para cada ponto $P \in S$ existem abertos V de $\mathbb{R}^3$, $P \in V$, e U de $\mathbb{R}^2$, e uma aplicação $\varphi : U \to V \cap S$ tais que

1) φ é um homeomorfismo (*)
2) φ é de classe C^∞
3) em todos os pontos $(u, v) \in U$ a característica da matriz jacobiana de φ, $J(\varphi)|_{(u,v)}$, é igual a dois.

O par (U, φ) diz-se uma parametrização local (ou sistema de coordenadas locais) de S em P.

(*) isto é φ é contínua e bijectiva e a inversa, φ^{-1} , é contínua.

Quando S é um sub-conjunto fechado e limitado de $\mathbb{R}^3$ (com a métrica usual) é possível cobrir S com um número finito de sistemas de coordenadas locais.

(...interpretação das condições...) Exemplos:

- gráfico de uma função $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$ (coberto por um único sistema de coordenadas)

- esfera de centro na origem e raio r, $\mathbb{S}^2_r$ (coberta por dois sistemas de coordenadas obtidos por projecção estereográfica a partir dos pólos)

- o toro $\mathbb{T}^2$ dado pela equação $z^2 = 1 - (5 - \sqrt{x^2 + y^2})^2$

- uma superfície de nível (não vazia) associada a um valor regular de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞.

Comentário Como consequência do *Teorema da Função Implícita* (ver Bloco 3, e exercícios)) *prova-se que uma superfície de nível associada a um valor regular de $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de classe C^∞, é localmente um gráfico* o que, tal como no primeiro exemplo, permite mostrar a existência de sistemas de coordenadas locais em todos os pontos.

- o duplo cone dado pela equação $x^2 + y^2 = z^2$ não é uma superfície regular (porquê?)

No que se segue vamos considerar superfícies que podem ser cobertas por um único sistema de coordenadas permitindo a perda da injectividade apenas num conjunto que seja negligenciável do ponto de vista de integração (*medida nula*), e permitindo que tenham bordo.

Na maior parte das situações que vamos considerar o domínio do sistema de coordenadas da superfície S é uma *região simples*, ou S é um sub-conjunto de $\mathbb{R}^3$ que se pode obter por colagens pelo bordo dessas superfícies (o cubo é um exemplo de um desses conjuntos)

Definição: Um subconjunto $S \neq \emptyset$ de $\mathbb{R}^3$ diz-se uma **superfície parametrizada** se existem $D \subset \mathbb{R}^2$ e $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ tais que $S = \varphi(D)$, onde

1) $U \subset \mathbb{R}^2$ é um conjunto aberto e conexo por arcos;

2) $D = U$ ou D é a união de U com a sua fronteira;

3) $\varphi : D \to \mathbb{R}^3$ é uma aplicação contínua, φ restrita a U é de classe C^∞ e $\varphi_{|U} : U \to \varphi(U)$ é um homeomorfismo;

4) em todos os pontos $(u, v) \in U$ a característica da matriz jacobiana de φ, $J(\varphi)|_{(u,v)}$, é igual a dois.

O par (D, φ) designa-se por parametrização de S.

Por exemplo a superfície $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 4, \ z \geq 1\}$ pode ser descrita por duas parâmetrizações distintas:

1) recorrendo às coordenadas esféricas $(u, v) \in D = [0, 2\pi]x[0, \frac{\pi}{3}]$
$\varphi(u, v) = (2\cos(u)\sin(v), 2\sin(u)\sin(v), 2\cos(v))$

2) recorrendo à sua descrição como gráfico
$\tilde{D} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha^2 + \beta^2 \leq 3\}$, $\psi(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta, \sqrt{4 - \alpha^2 - \beta^2})$.

Observe-se que

- O bordo de S é a circunferência contida no plano de equação $z = 1$, centrada em $(0, 0, 1)$ e de raio $\sqrt{3}$.

- φ é injectiva em $U =]0, 2\pi[x]0, \frac{\pi}{3}[$ o que corresponde a suprimir o arco de meridiano de extremos $(0, 0, 2)$ e $(\sqrt{3}, 0, 1)$ e o bordo de S.

- ψ é injectiva em $\tilde{U} = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 : \alpha^2 + \beta^2 < 3\}$ o que corresponde a suprimir o bordo de S.

- a mudança de coordenadas $\psi^{-1} \circ \varphi : U \to \tilde{U}$ é de classe C^∞, sendo $\psi^{-1} \circ \varphi(u, v) = (2\cos(u)\sin(v), 2\sin(u)\sin(v))$.

Alguns exemplos:

1) a esfera de centro (a, b, c) e raio r, S, pode ser parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (r\cos(u)\sin(v) + a,\ r\sin(u)\sin(v) + b,\ r\cos(v) + c),$$

com $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ e $U =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$;

2) o elipsóide de centro na origem e de semi-eixos a, b, c, de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, pode ser parametrizado por

$$\varphi(u, v) = (a\cos(u)\sin(v),\ b\sin(u)\sin(v),\ c\cos(v)),$$

com $D = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ e $U =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$;

3) a sela definida pela equação $z = x^2 - y^2$ pode ser parametrizada por

$$\varphi(u,v) = (u,\ v,\ u^2 - v^2)),$$

com $D = U = \mathbb{R}^2$;

4) o cilindro C definido $x^2 + y^2 = 1$ e $z \in [-2,5]$ pode ser parametrizado por

$$\varphi(u,v) = (\cos(u),\ \sin(u),\ v),$$

com $D = [0,2\pi] \times [-2,5]$ e $U =]0,2\pi[\times]-2,5[$.

5) O parabolóide definido por $z = x^2 + y^2$, $z \in [0, 4]$ pode ser parametrizado por

$$\varphi(u, v) = (v\cos(u),\ v\sin(u),\ v^2),$$

com $D = [0,\ 2\pi] \times [0, 2]$ e $U =]0,\ 2\pi[\times]0, 2[$

ou por

$$\psi(\tilde{u},\ \tilde{v}) = (\tilde{u},\ \tilde{v},\ \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)$$

com $\tilde{D} = \{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathbb{R}^2 :\ \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 \leq 4\}$ e $\tilde{U} = \{(\tilde{u}, \tilde{v}) \in \mathbb{R}^2 :\ \tilde{u}^2 + \tilde{v}^2 < 4\}$

Com excepção do exemplo 2 todos os correspondem a **superfícies de revolução** (o exemplo 2 também o é desde que dois semi-eixos sejam iguais) ou a **superfícies gráfico**, sendo que o último exemplo é dos dois tipos.

No entanto nem todas as superfícies são de um destes dois tipos. Por exemplo, quando os três semi-eixos a, b e c são distintos, o elipsóide do exemplo 2 não é uma superfície de revolução.

Os exemplos 1, 2 e 3 correspondem a superfícies de nível associadas a valores regulares de funções de classe C^∞ por isso são superfícies regulares. O mesmo se aplica aos exemplos 4 e 5 se lhes retirarmos o bordo.

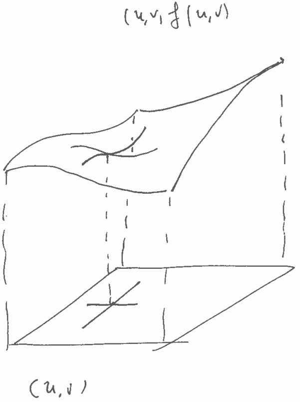
6) **Superfícies gráfico:** são definidas pelo gráfico de uma função. Mais precisamente considere-se $D \subset \mathbb{R}^2$ e $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞. $S = graph(f)$ é uma superfície que pode ser parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (u,\ v,\ f(u, v)) \ \ (u, v) \in D,$$

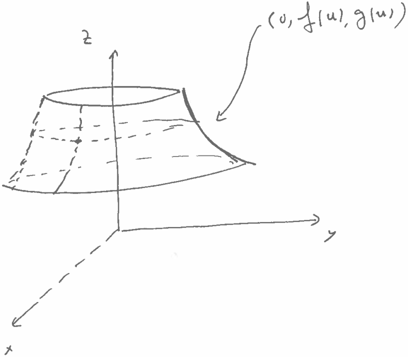
7) **Superfícies de revolução:** são obtidas por rotação de uma curva plana em torno de um eixo (contido nesse plano e que não intersecta o traço da curva). Mais precisamente, se considerarmos uma *curva simples* da forma $\alpha(t) = (0,\ f(t),\ g(t))$, onde $t \in [a, b]$, f e g são funções de classe C^∞, $f(t) > 0$, $\forall t \in [a, b]$, então a superfície de revolução que se obtém rodando o traço da curva α em torno do eixo dos $z's$ pode ser parametrizada por

$$\varphi(u, v) = (f(v)\cos(u),\ f(v)\sin(u),\ g(v)),$$

com $D = [0,\ 2\pi] \times [a, b]$ (e $t = v$).



gráfico



2 Superfícies parametrizadas/Mudança de coordenadas

No exemplo do parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$ apresentámos dois sistemas de coordenadas (U, φ) e $((V, \psi)$. Se queremos por exemplo definir o plano tangente à superfície num ponto ou obter a sua equação cartesiana estes não podem depender das coordenadas que escolhermos para o definir e efectuar os cálculos. A exemplo do que do que se fez no estudo dos caminhos (trabalho) devemos também mostrar que propriedades intrínsecas à superfície como a sua área ou o fluxo total de um campo de vectores podem ser calculados recorrendo a um qualquer sistema de coordenadas uma vez que mudar de sistemas de coordenadas corresponde a uma mudança de variável no cálculo de um integral e portanto o resultado final é o mesmo.

Sejam S uma superfície parametrizada (regular) e (U, φ) e (V, ψ) duas parametrizações de S (*ou* sistemas de coordenadas locais de S em P). A função mudança de coordenadas é

$$g = \varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(W) \to \varphi^{-1}(W),$$

onde $W = \varphi(U) \cap \psi(V)$.
Fixemos a notação: $\varphi = (\varphi_1,\, \varphi_2,\, \varphi_3)$, $\psi = (\psi_1,\, \psi_2,\, \psi_3)$, $(u, v) \in U$, $(\alpha, \beta) \in V$, e $g = (g_1, g_2)$.
Como φ e ψ são de classe C^∞ e as respectivas matrizes jacobianas têm característica 2 em todos os pontos, fixada uma solução $(u_0, v_0, \alpha_0, \beta_0)$, isto é um ponto P de $W \subset S$, o Teorema da Função Implícita (ver bloco 3) permite, usando duas das três equações do sistema

$$\varphi_1(u, v) - \psi_1(\alpha, \beta) = 0, \varphi_2(u, v) - \psi_2(\alpha, \beta) = 0, \varphi_3(u, v) - \psi_3(\alpha, \beta) = 0,$$

obter **localmente** $(u, v) = g(\alpha, \beta)$, $(\alpha, \beta) \in \psi^{-1}(W)$, e obter $(\alpha, \beta) = g^{-1}(u, v)$, $(u, v) \in \varphi^{-1}(W)$, assegurando que g e g^{-1} são funções de classe C^∞.

Portanto, de $\psi = \varphi \circ g$ obtemos $J(\psi)(\alpha, \beta) = J(\varphi(u, v)) \times J(g)(\alpha, \beta)$, onde $(u, v) = g(\alpha, \beta)$. Desta igualdade obtém-se facilmente que:

$$\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} = \frac{\partial g_1}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

e

$$\frac{\partial \psi}{\partial \beta} = \frac{\partial g_1}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial g_2}{\partial \beta}\frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

Conclui-se assim que, para $P = \varphi(u_0, v_0) = \psi(\alpha_0, \beta_0) \in P$, se tem que

A. as famílias $\{\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}_{|(\alpha_0,\beta_0)}, \frac{\partial\psi}{\partial\beta}_{|(\alpha_0,\beta_0)}\}$ e $\{\frac{\partial\varphi}{\partial u}_{|(u_0,v_0)}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}_{|(u_0,v_0)}\}$ geram o mesmo sub-espaço vectorial de dimendão 2 de $\mathbb{R}^3$ que designaremos por espaço tangente a S em P. Usando o facto de que uma superfície regular é localmente um gráfico (mais uma aplicação do Teorema da Função Implícita...) mostra-se que este espaço é formado por todos os vectores v que se podem obter com vectores velocidade em $t = 0$ de curvas γ de classe C^1, cujo traço está contido em S, $\gamma(0) = P$ e $\gamma'(0) = v$.

B. por cálculos diretos

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)_{|(\alpha_0,\beta_0)} = \left(det(J(g)_{|(\alpha_0,\beta_0)}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_{|(u_0,v_0)},$$

C. e portanto

$$||\left(\frac{\partial\psi}{\partial\alpha} \times \frac{\partial\psi}{\partial\beta}\right)_{|(\alpha_0,\beta_0)}|| = |det(J(g)_{|(\alpha_0,\beta_0)}|\,||\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u} \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)_{|(u_0,v_0)}||.$$

Como vimos uma superfície parametrizada S pode admitir várias parametrizações. No entanto, as definições que vamos introduzir são **intrínsecas à superfície**, isto é, não dependem da escolha de uma parametrização. Como veremos tal é consequência dos resultados **A**, **B** e **C**. As várias definições que se seguem serão ilustradas com o parabolóide (exemplo 5), parametrizado como superfície de revolução.

Fixemos S e uma parametrização (D, φ) de S

1. **Definição** Dado um ponto $P \in \varphi(U) \subset S$ **as coordenadas locais de** P **são** $(u_0, v_0) \in U$ **tais que** $\varphi(u_0, v_0) = P$**.**

Estas coordenadas estão univocamente definidas.

O ponto $(1, 1, 2)$ do parabolóide tem coordenadas locais $(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2})$.

2) **Definição** As curvas coordenadas que passam pelo ponto $P = \varphi(u_0, v_0)$ são

$$\alpha(t) = \varphi(u_0 + t, v_0)$$

$$\beta(t) = \varphi(u_0, v_0 + t).$$

Os vectores

$$\alpha'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ e } \beta'(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

são **vectores tangentes** à superfície S no ponto $P = \varphi(u_0, v_0)$. O **plano tangente a S no ponto P** é o plano gerado por estes dois vectores e pelo ponto P:

$$\boxed{(x, y, z) = P + \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0), \;\; \alpha, \, \beta \in \mathbb{R}.}$$

Observe-se que o resultado **A** garante que a definição de plano tangente não depende da parametrização escolhida.

No exemplo do parabolóide

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (-v\sin(u),\ v\cos(u),\ 0)$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = (\cos(u),\ \sin(u),\ 2v)$$

e portanto $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}) = (-1, 1, 0)$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2})$.

Assim a equação vectorial do plano tangente ao parabolóide no ponto $(1, 1, 2)$ é

$$(x, y, z) = (1, 1, 2) + \alpha(-1, 1, 0) + \beta(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}) \ \ \alpha,\ \beta \in \mathbb{R},$$

e a equação cartesiana é $2x + 2y - z - 2 = 0$.

3) O vector

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

é normal à superfície (é ortogonal ao espaço tangente). A sua norma é igual à área do paralelogramo definido pelos vectores $\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ e $\frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$. Escrevendo

$$E = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0),$$

$$F = \frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0),$$

$$G = \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0),$$

tem-se (porquê?)

D. $$\left|\left|\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\right|\right| = \sqrt{EG - F^2}.$$

No exemplo do parabolóide tem-se

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}) =$$

$$= (-1, 1, 0) \times (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2}) \;=\; (2\sqrt{2},\, 2\sqrt{2},\, -\sqrt{2}).$$

$$E(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}) = 2, \;\; F(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}) = 0, \;\; G(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}) = 9, \;\; \sqrt{EG - F^2} \;=\; 3\sqrt{2}.$$

Mais geralmente $E(u, v) = v^2$, $F(u, v) = 0$ e $G(u, v) = 1 + 4v^2$.

A derivada $D\varphi_{|(u_0,v_0)}$ envia um rectângulo de área $\Delta u \Delta v$ num parelologramo contido no espaço tangente a S em $P = \varphi(u_0, v_0)$ de área $\sqrt{EG - F^2}\Delta u \Delta v$. Recordando que se $(\tilde{D}, \psi)$ é outro sistema de coordenadas de S e $\psi = \varphi \circ g$ então

$$||(\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \times \frac{\partial \psi}{\partial \beta})_{|(\alpha,\beta)}|| = |det(J(g)_{|(\alpha,\beta)}| \, ||(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \times \frac{\partial \varphi}{\partial v})_{|(u,v)}||.$$

de onde se obtém

E. $$\sqrt{E_\psi G_\psi - F_\psi^2}\,\Delta\alpha\Delta\beta = |det(J(g)| \sqrt{E_\varphi G_\varphi - F_\varphi^2}\Delta u \Delta v$$

onde $(u, v) = g(\alpha, \beta)$.

Desta observação decorre que as definições que se seguem não dependem do sistema de coordenadas escolhido e que os integrais podem ser calculados usando um qualquer sistema de coordenadas uma vez que o Teorema da Mudança de Variável garante que o valor obtido é sempre o mesmo.

4) **Definição** A área da superfície S é dada pelo integral duplo

$$\int_D \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Para o parabolóide a área é dada por

$$\int_D \sqrt{v^2(1+4v^2)}\, dudv = \int_0^2 \left(\int_0^{2\pi} v\sqrt{1+4v^2}\, du\right) dv =$$

$$= 2\pi \int_0^2 v\sqrt{1+4v^2}\, dv = \frac{1}{6}(17\sqrt{17}-1)\pi$$

5) **Definição** Se $f : W \to \mathbb{R}$ é contínua, onde W é um aberto de $\mathbb{R}^3$ tal que $S \subset W$, então o integral de f em S é dado por

$$\int_S f\, dS \;=\; \int_D f \circ \varphi(u,v)\, \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

Voltando ao exemplo do parabolóide, se $f(x,y,z) = (x^2+y^2)\sqrt{1+4z}$, $z \geq 0$, então $f \circ \varphi(u,v) = v^2\sqrt{1+4v^2}$ e portanto

$$\int_S f\, dS = \int_0^2 \Big(\int_0^{2\pi} v^2 \sqrt{1+4v^2}\, (v\sqrt{1+4v^2}) du\Big)\, dv =$$

$$= 2\pi \int_0^2 v^3(1+4v^2)\, dv \;=\; \frac{280}{3}\pi$$

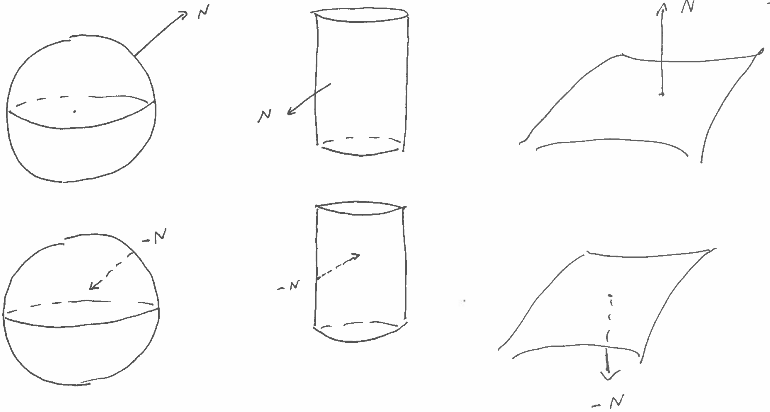
6) **Definição** Uma superfície (conexa por arcos) regular diz-se **orientável** se existe uma aplicação <u>contínua</u> $N : S \to \mathbb{R}^3$ tal que, para cada $P \in S$, $N(P)$ é um vector unitário normal à superfície.

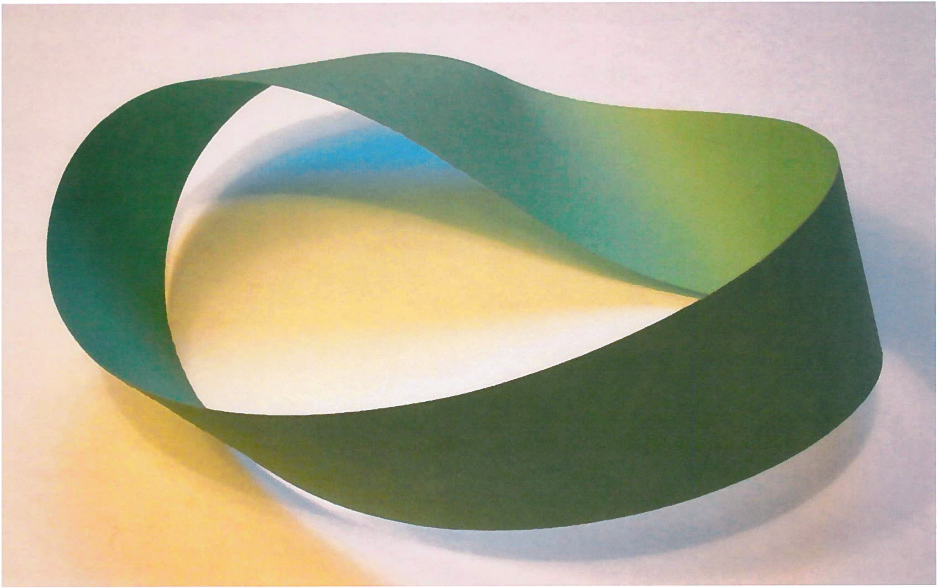
Exemplos: esfera com normal "interior", esfera com normal "exterior", superfície gráfico com normal "para cima"...

Nem todas as superfícies são orientáveis (tira de Moebius, garrafa de Klein...). No que se segue **apenas** iremos considerar superfícies (conexas por arcos) orientáveis.

Cada superfície (conexa por arcos) orientável admite *exactamente* duas orientações, N e $-N$ (porquê?...)

14A





Uma parametrização (U, φ) de S induz uma orientação em $\varphi(U)$:

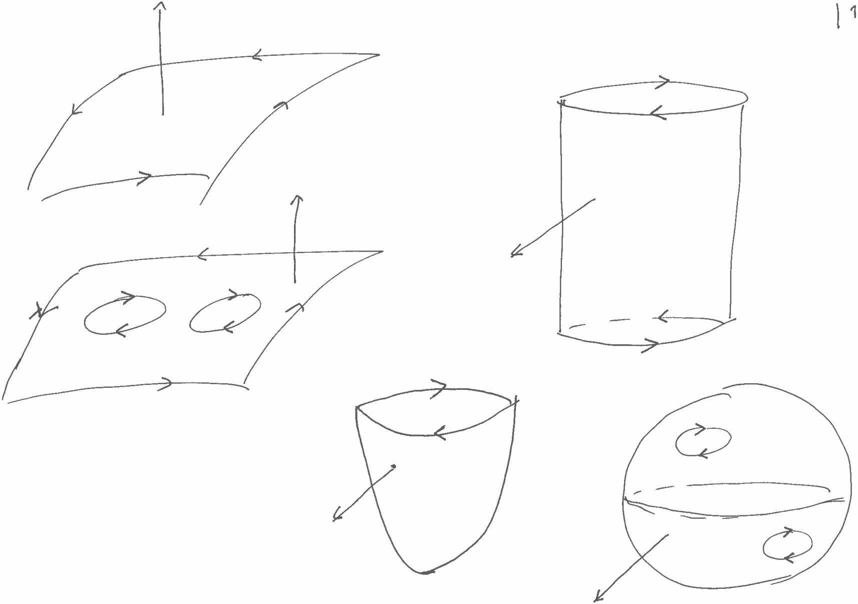
$$N_\varphi : \varphi(U) \to \mathbb{R}^3, \ P = \varphi(u,v) \mapsto \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v)\right).$$

Essa orientação admite extensão contínua a S.
A parametrização do parabolóide como gráfico induz a orientação "normal para cima"; a parametrização do parabolóide como superfície de revolução induz a orientação "normal para baixo".

7) Uma vez fixada uma orientação de uma superfície S o seu **bordo** (número finito de curvas simples e fechadas) tem uma **uma orientação coerente** que corresponde a percorrer cada uma das curvas do bordo *na posição do vector normal e colocando a superfície do lado esquerdo*.

exemplos....

15A



8) **Definição** Sejam S uma superfície parametrizada e (D, φ) uma parametrização de S. Seja F um campo de vectores definido num aberto que contém S. O **fluxo de F ao longo de S** é dado por

$$\int_S F \cdot N_\varphi \; dS \;=\; \int_D F \circ \varphi(u, v) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v)\right) \, dudv.$$

Interpretação....*projecção na direcção normal*.

Note-se que a escolha de outra parametrização de S pode levar à mesma orientação da superfície ou à sua simétrica. Portanto o **módulo** do fluxo de um campo de vectores ao longo da superfície S não depende da orientação fixada, enquanto que o seu **sinal** depende da orientação.

Voltando ao exemplo do parabolóide e considerando o campo de vectores $F(x, y, z) = (xz, yz, z)$ temos:

$$\varphi(u, v) = (v\cos(u),\ v\sin(u),\ v^2),\ \ u \in [0, 2\pi],\ v \in [0, 2]$$

$$F \circ \varphi(u, v) = (v^3\cos(u),\ v^3\sin(u),\ v^2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) = (-v\sin(u),\ v\cos(u),\ 0),\ \ \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v) = (\cos(u),\ \sin(u),\ 2v)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v) = (2v^2\cos(u), 2v^2\sin(u),\ -v)$$

$$F \circ \varphi(u, v) \cdot (\frac{\partial\varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial\varphi}{\partial v}(u, v)) = 2v^5 - v^3$$

$$\int_S F \cdot N_\varphi\ dS\ =\ \int_0^{2\pi} (\int_0^2 (2v^5 - v^3)\, dv) du\ =\ 2\pi \int_0^2 (2v^5 - v^3)\, dv\ =\ \frac{104}{3}\pi$$

Teorema de Stokes (para superfícies gráfico)

Sejam D um subconjunto *simples* de $\mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e S a superfície gráfico, $graph(f)$, com a orientação "normal para cima". Seja W um aberto de $\mathbb{R}^3$ tal que $graph(f) \subset W$, e seja $F : W \to \mathbb{R}^3$ um campo de classe C^1. Então

$$\int_{\gamma^+} F\, ds \;=\; \int_S rot(F) \cdot N\, dS,$$

onde γ^+ representa o bordo de S orientado de forma coerente com a orientação da superfície, N, "normal para cima"

(Demonstração...)

Nota: Como D é uma região simples o bordo de S é uma curva simples e fechada.

Um exemplo Considere-se a superfície gráfico associada à função $f: D \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$, e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Pretende-se calcular $\int_{C^+} (-y^3 + e^x, \cos(z) + y^3, e^y + x^3) ds$, onde C^+ representa a curva bordo de S percorrida no sentido directo.

$$rot(F)(x,y,z) = (e^y - \sin(z),\; -3x^2,\; 3y^2)$$

$$\varphi(u,v) = (u,\; v,\; v),\;\; D = \{(u,v) : \;\; u^2 + v^2 \leq 1\}$$

$$rot(F) \circ \varphi(u,v) = (e^v - \sin(v),\; -3u^2,\; 3v^2)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) = (0,\; -1,\; 1)$$

$$\int_{C^+} (-y^3 + e^x, \cos(z) + y^3, e^y + x^3)\, ds \; = \; \int_S rot(F) \cdot N\, dS \; =$$

$$= \; \int_D (3u^2 + 3v^2)\, dudv \; = \; \frac{3}{2}\pi$$

Outro exemplo Pretende-se calcular $\int_S rot(F) \cdot N\ dS$, onde S é a superfície definida por $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$, $z \leq 0$, $F(x, y, z) = (y, -x, zx^3y^2)$, e N representa a "normal interior".
O fluxo do rotacional ao longo de S é igual, de acordo com o Teorema de Stokes, ao trabalho realizado pelo campo F ao longo do bordo de S, C^+, orientado no sentido directo. O bordo de S é dado pelas equações $z = 0$ e $x^2 + y^2 = 1$ e portanto pode ser parametrizado (*de forma coerente* com a orientação "normal interior") por

$$\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), 0), \;\; t \in [0, 2\pi].$$

tem-se

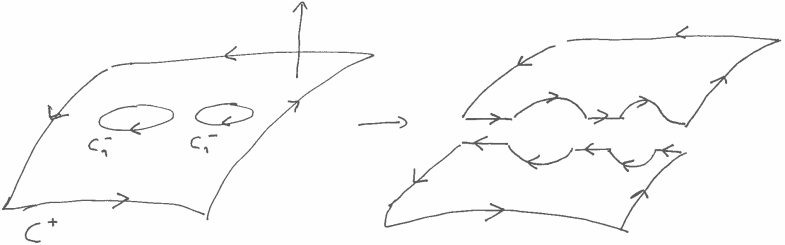
$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (-\sin(t), \cos(t), 0) \\ F \circ \alpha(t) &= (\sin(t), -\cos(t), 0) \end{aligned}$$

$$\int_S rot(F) \cdot N\ dS = \int_{C^+} F\, ds = \int_0^{2\pi} F \circ \alpha(t) \cdot \alpha'(t)\, dt = -2\pi$$

O teorema de Stokes aplica-se a regiões mais gerais:

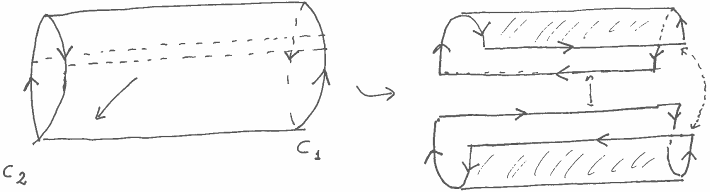
- superfícies gráfico cujo domínio se pode decompor num número finito de regiões simples ou mais geralmente em domínios onde se possa aplicar o Teorema de Green;

- Superfícies que se podem decompor numa união finita de superfícies gráfico, através da inclusão de caminhos e seus inversos



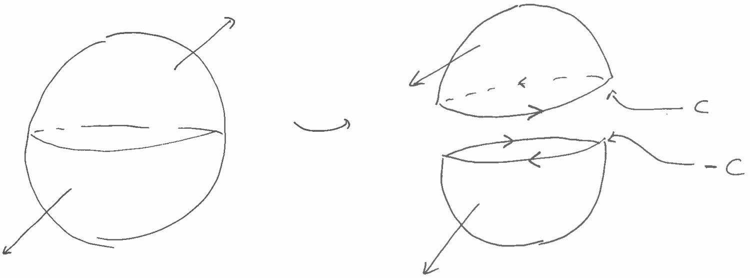
$$\int_S \operatorname{rot}(F)\cdot N \, dS = \int_{C^+} F\, ds + \int_{C_1^-} F\, ds + \int_{C_2^-} F\, ds =$$

$$= \int_{C^+} F\, ds - \left(\int_{C_1^+} F\, ds + \int_{C_2^+} F\, ds \right)$$



$$\int_S \mathrm{rot}(F)\cdot N\,ds = \int_{C_1} F\,ds + \int_{C_2'} F\,ds$$

C_1 e C_2 com as orientações fixadas



$$\int_S \operatorname{rot}(F)\cdot N\, dS = \int_C F\, ds + \int_{C^-} F\, ds = 0$$

2 Superfícies parametrizadas/Teorema de Gauss (ou da divergência

A noção de sólido **simples** é a generalização de região plana simples.

Definição Um sólido B é *simples* se pode ser descrito simultaneamente como:

- uma região limitada por gráficos de duas funções de classe C^∞ de variáveis x e y,

- uma região limitada por gráficos de duas funções de classe C^∞ de variáveis x e z, e

- uma região limitada por gráficos de duas funções de classe C^∞ de variáveis y e z.

Exemplos....

Teorema de Gauss ou da divergência (para sólidos simples)

Sejam B um sólido *simples*, W um aberto de $\mathbb{R}^3$ tal que $B \subset W$, e $F : W \to \mathbb{R}^3$ um campo de vectores de classe C^1. Então

$$\int_{\partial B} F \cdot N \, dS = \int_B div(F) \, dxdydz,$$

onde ∂B denota a superfície bordo de B, e N é a orientação normal exterior.

(Demonstração...)

Exemplo: Pretende-se calcular o fluxo do campo

$$F(x, y, z) = (xy^2, x^2y, y)$$

ao longo da superfície, S, constituída pelo cilindro

$$x^2 + y^2 = 1, \quad -1 \leq z \leq 1,$$

e pelos discos

$$x^2 + y^2 \leq 1, \;\; z = 1 \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 \leq 1, \;\; z = -1.$$

Para aplicar o Teorema de Gauss escolhemos a orientação "normal exterior" (se escolhermos "normal interior" obtemos o valor simétrico).

O sólido limitado por S é o cilindro maciço, B, definido pelas inequações $x^2 + y^2 \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$.

Como $div(F) = y^2 + x^2$, tem-se

$$\int_S F \cdot NdS = \int_B (x^2 + y^2)\, dxdydz = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^2\, r\, dr\right) d\theta\right) dz =$$

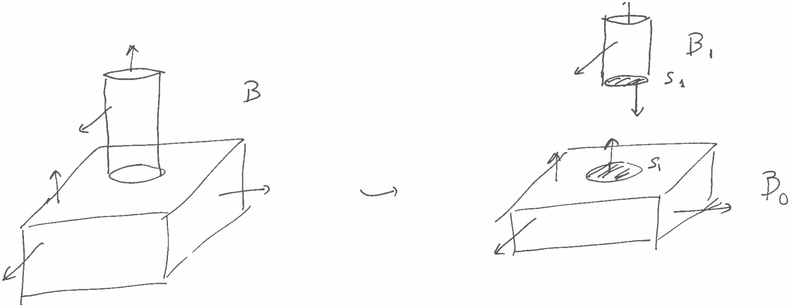
$$= 4\pi \int_0^1 r^3\, dr = \pi.$$

Observações:

1) O teorema aplica-se a outros tipos de sólidos. De facto é válido para sólidos que se possam decompor num número finito de sólidos simples por introdução de superfícies bordo, onde cada uma delas aparece com as duas orientações possíveis (ver figura).

2) Se S é uma superfície que limita um sólido simples, B, então, para a orientação "normal exterior" de S e para qualquer campo F (definido num aberto que contém B), tem-se

$$\int_S rot(F) \cdot N \; ds \; = \int_B div(rot(F)) \; dxdydz \; = 0.$$



$$\int_B \operatorname{div}(F)\,dx\,dy\,dz = \int_{B_0} \operatorname{div}(F)\,dx\,dy\,dz + \int_{B_1} \operatorname{div}(F)\,dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_{\partial B_0} F \cdot N\,ds + \int_{\partial B_1} F \cdot N\,ds = \int_{\partial B} F \cdot N\,ds$$

Uma consequência do Teorema da Divergência é a **Lei de Gauss** para o campo eléctrico. (ver Marsden e Tromba, 5.a edição, pp 570 e 571).

Seja B uma região simples tal que $(0,0,0) \notin S$, onde S denota a superfície bordo de B. Considere-se o campo vector de posição $\vec{r} = (x, y, z)$ e seja $r = ||\vec{r}||$.

Considerando a orientação normal exterior de S, N, tem-se

$$\text{- se } (0,0,0) \in B \text{ então } \int_S \frac{1}{r^3} (\vec{r} \cdot N)\, dS = 4\pi$$

$$\text{- se } (0,0,0) \notin B \text{ então } \int_S \frac{1}{r^3} (\vec{r} \cdot N)\, dS = 0$$

(Demonstração...)