Funções

notação, permutações, ciclos, ordem

Samuel Lopes

M2007–Algoritmos em Matemática Discreta

4 de outubro de 2019

Sumário:

Notação de duas e uma linha para funções. Permutações de um conjunto: representação diagramática, estrutura de grupo, ciclo de um elemento do domínio, decomposição em ciclos, cálculo das potências da permutação e da sua ordem em função da sua decomposição em ciclos. Teorema de Lagrange para o caso do grupo simétrico. Contagem do número de involuções em S_n.

Notação de 2 linhas

A conjunto finito arbitrário (não necessariamente ordenado)

$f \in B^A$ função

Podemos representar f por uma matriz com 2 linhas:

1ª linha elementos de A (por qualquer ordem)

2ª linha imagens respetivas por f

$$f = \begin{pmatrix} a & b & & \cdots \\ f(a) & f(b) & & \cdots \end{pmatrix}$$

(notação de 2 linhas para f)

Permutações
4/10/2019

$f : A \longrightarrow A$ diz-se uma permutação de A se f for bijetiva.

Exemplo:

$A = \{a, b, c, d\}$, $\quad f = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$, $\quad g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & c & b & a \end{pmatrix}$.

Então

$$f^{-1} = \begin{pmatrix} b & c & a & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad f \circ g = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \cancel{d} & \cancel{c} & \cancel{b} & \cancel{a} \\ d & a & c & b \end{pmatrix}$$

O conjunto das permutações de A froma um grupo para a operação de composição de funções, designado por grupo simétrico de A e denotado por S_A.
Se $|A| = n$ também denotamos este grupo por S_n.

Órbitas de uma permutação

4/10/2019

- A conjunto finito, $f \in S_A$ e $x \in A$
- Podemos aplicar f iteradamente a x e às sucessivas imagens:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{f} f(f(x)) = f^2(x) \xrightarrow{f} f^3(x) \xrightarrow{f} \cdots \xrightarrow{f} f^k(x) \xrightarrow{f} \cdots \qquad (*)$$

- Como A é finito, há termos repetidos nesta sucessão.
- Seja $f^k(x)$ o primeiro termo repetido, i.e., tal que $f^k(x) = f^{k+m}(x)$ para algum $m > 0$.
- Aplicando $f^{-k} = \left(f^{-1}\right)^k$ a ambos os membros da igualdade obtemos

$$x = f^m(x)$$

- **Logo** x é o primeiro termo repetido e a sucessão $(*)$ **repete-se ciclicamente** em blocos de comprimento m.

Órbitas de uma permutação (cont.)

4/10/2019

$$
\begin{array}{ccccccccc}
x & \curvearrowright & f(x) & \curvearrowright & f^2(x) & \curvearrowright & \cdots & \curvearrowright & f^{m-1}(x) \\
f^m(x) = x & \curvearrowright & f(x) & \curvearrowright & f^2(x) & \curvearrowright & \cdots & \curvearrowright & f^{2m-1}(x) = f^{m-1}(x) \\
f^{2m}(x) = x & \curvearrowright & f(x) & \curvearrowright & \cdots & \curvearrowright & \cdots & \curvearrowright & \cdots
\end{array}
$$

Se m for mínimo tal que $x = f^m(x)$, dizemos que:

- $\{x, f(x), \ldots, f^{m-1}(x)\}$ é a órbita de x por f
- $(x\ f(x)\ \cdots\ f^{m-1}(x))$ é o ciclo de f contendo x
- $(x\ f(x)\ \cdots\ f^{m-1}(x))$ é um ciclo de comprimento m ou um m-ciclo

Nota: O significado de $(a_0\ a_1\ \ldots\ a_{m-2}\ a_{m-1})$ ser um ciclo é que $f(a_i) = a_{i+1}$ se $0 \leq i \leq m-2$ e $f(a_{m-1}) = a_0$, logo $(a_1\ a_2\ \ldots\ a_{m-1}\ a_0)$ representa o mesmo ciclo.

Decomposição em ciclos

4/10/2019

Observação: Cada elemento de A pertence a um único ciclo de f e o conjunto dos ciclos determina univocamente f.

Mais geralmente, identificamos um ciclo $(a_0\ a_1\ \ldots\ a_{m-2}\ a_{m-1})$ com a permutação de A que envia a_i em a_{i+1} (índices módulo m) e que fixa todos os elementos de A que não pertencem ao ciclo.

Desta forma, podemos escrever $f \in S_A$ como composição dos seus ciclos disjuntos. A ordem é irrelevante se os ciclos forem disjuntos porque x e $f(x)$ pertencem ao mesmo ciclo de f, que é único:

$$f = C_1 \cdots C_\ell \qquad (**)$$

Como um 1-ciclo corresponde à permutação identidade, é comum omitir os 1-ciclos na decomposição $(**)$.

Exemplo

4/10/2019

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 8 & 1 & 5 & 9 & 3 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

ciclo de 1: $(1\ 2\ 4)$ ciclo de 3: $(3\ 8\ 7)$

ciclo de 5: (5) ciclo de 6: $(6\ 9)$

Logo: $f = (1\ 2\ 4)(3\ 8\ 7)(5)(6\ 9) = (1\ 2\ 4)(3\ 8\ 7)(6\ 9)$

e $f^{-1} = (4\ 2\ 1)(7\ 8\ 3)(9\ 6)$

f e f^{-1} têm as mesmas órbitas, e ciclos inversos

Logo: $f^{10} = \cdots\ \cdots$ $f^{10}(x)$ é completamente determinado pelo ciclo de x em f.

$$\begin{aligned} f^{10} &= (1\ 2\ 4)^{10}(3\ 8\ 7)^{10}(6\ 9)^{10} && \text{pq. os ciclos são disjuntos} \\ &= (1\ 2\ 4)(3\ 8\ 7) && \text{pq. } 10 \equiv 1 \pmod 3 \text{ e } 10 \equiv 0 \pmod 2 \end{aligned}$$

Ordem de uma permutação e Teorema de Lagrange

4/10/2019

Seja $f = C_1 \cdots C_\ell$ a decomposição em ciclos (disjuntos) da permutação $f \in S_A$.

Então $f^k = C_1^k \cdots C_\ell^k$ e

$$\begin{aligned} f^k = \mathrm{Id}_A &\iff C_i^k = \mathrm{Id}_A, \qquad \text{para todo o } i \\ &\iff k \text{ é múltiplo do comprimento de } C_i,\ \forall i \\ &\iff k \text{ é múltiplo de m.m.c.}\,\{\text{comp. dos ciclos } C_1, \ldots, C_\ell\} \end{aligned}$$

Teorema

Seja A um conjunto finito. Então existe $N > 0$ tal que, para toda a permutação $f \in S_A$, $f^N = \mathrm{Id}_A$.
Por exemplo, se $|A| = n$ então, como todos os ciclos têm comprimento entre 1 e n, basta tomar $N = n!$.

Exemplo: número de involuções em S_n

4/10/2019

involução é uma permutação f tal que $f = f^{-1}$, i.e., $f^2 = \mathrm{Id}$

Logo f é involução $\iff$ ciclos de f têm comp. 1 ou 2

- Começamos por contar o nº de involuções com exatamente k 2-ciclos.
- Depois somamos para $k = 0, \ldots, \lfloor n/2 \rfloor$.

Note-se que os 2-ciclos são determinados pelo conjunto dos seus 2 elementos, porque $(a\ b) = (b\ a)$.

Exemplo: número de involuções em S_n

4/10/2019

1º processo Considerar partições NÃO ETIQUETADAS de $[n]$ de tipo $(\underbrace{2,2,\ldots,2}_{k},\underbrace{1,\ldots,1}_{n-2k})$.

$$\binom{n}{2,2,\ldots,2,1,\ldots,1}\cdot\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{(n-2k)!}=\frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}$$

2º processo

- Escolher os $2k$ elementos dos 2-ciclos
- Emparelhar os $2k$ elementos dos 2-ciclos
- Os restantes $n-2k$ elementos ficam fixos (1-ciclos)

$$\binom{n}{2k}\cdot\binom{2k}{2,\ldots,2}\cdot\frac{1}{k!}=\frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}$$

Exemplo: número de involuções em S_n

4/10/2019

Logo, o número de involuções em S_n é

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{2^k k!(n-2k)!}.$$

Exemplo: Se $n = 6$ temos

$$6! \sum_{k=0}^{3} \frac{1}{2^k k!(6-2k)!} = 6! \left(\frac{1}{6!} + \frac{1}{2 \times 4!} + \frac{1}{4 \times 2 \times 2} + \frac{1}{8 \times 3!} \right)$$
$$= 1 + 15 + 45 + 15 = 76$$

involuções em S_6.

SageMathCell

```
def i(n):
    j=sum(factorial(n)/(factorial(k)*(2**k)*factorial(n-2*k))
     for k in range(n/2 +1))
    return j
l=[i(n) for n in range(1,7)]
l
```

```
[1, 2, 4, 10, 26, 76]
```

THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES® A000085

Relação de recorrência: `a(n)=a(n-1)+(n-1)*a(n-2)`