Regra da soma, arranjos e permutações circulares

Samuel Lopes

M2007–Algoritmos em Matemática Discreta

20 de setembro de 2019

Novo horário
20/09/2019

Horas	Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
08:00 - 08:30						
08:30 - 09:00						
09:00 - 09:30					M2007 (T) M2007_T FC1007 SASDL	
09:30 - 10:00						
10:00 - 10:30			M2007 (T) M2007_T FC1005 SASDL			
10:30 - 11:00						
11:00 - 11:30						
11:30 - 12:00						
12:00 - 12:30						
12:30 - 13:00						
13:00 - 13:30						
13:30 - 14:00						
14:00 - 14:30						
14:30 - 15:00				M2007 (TP) M2007_TP FC1120 SASDL		
15:00 - 15:30						
15:30 - 16:00						
16:00 - 16:30						

Novas datas dos testes

20/09/2019

18 de outubro de 2019 (sexta), 9:00-9:50

15 de novembro de 2019 (sexta), 9:00-9:50

Regra da soma
20/09/2019

Teorema (Regra da soma)

Se $C_1, \ldots, C_k$ são conjuntos dois-a-dois disjuntos, então

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} C_i \right| = |C_1| + \cdots + |C_k|.$$

Exemplo: Quantos múltiplos de 4 com 3 algarismos há?
Um múltiplo de 4 com 3 algarismos é da forma

$$a_2 \underbrace{a_1}_{\text{par}} \underbrace{a_0}_{4k} \qquad \text{ou} \qquad a_2 \underbrace{a_1}_{\text{ímpar}} \underbrace{a_0}_{4k+2}$$

Resposta: Há $9 \times 5 \times (3 + 2)$ múltiplos de 4 com 3 algarismos.

OU

$9 \times \underbrace{100/4}_{\text{múltiplos de 4 entre 0 e 99 com 2 algarismos}}$ OU $\lfloor \frac{999}{4} \rfloor - \lfloor \frac{99}{4} \rfloor$

Exemplo: formação de júris

20/09/2019

Numa faculdade há 4 departamentos com 6, 35, 12 e 7 membros, respetivamente. Pretende-se formar júris interdepartamentais com 3 membros de forma a que cada júri tenha no máximo um membro de cada departamento. Cada dia há um novo júri. Considerando que o ano académico tem 165 dias úteis, quantos anos poderão passar sem ser necessário repetir júris?

A resposta é $\left\lfloor \frac{|T|}{165} \right\rfloor$, onde T é o conjunto dos júris possíveis.

$T_i \rightsquigarrow$ conjunto dos júris sem membros do departamento i. Pela regra da soma, $|T| = |T_1| + |T_2| + |T_3| + |T_4|$.

$$|T_1| = 35 \times 12 \times 7 = 2940, \qquad |T_2| = 6 \times 12 \times 7 = 504,$$
$$|T_3| = 6 \times 35 \times 7 = 1470, \qquad |T_4| = 6 \times 35 \times 12 = 2520.$$

Resposta: Logo $|T| = 7434$ e têm de passar $\left\lfloor \frac{7434}{165} \right\rfloor = 45$ anos.

Algumas heurísticas

20/09/2019

Passo 1 Decompor o problema em casos mais simples

Passo 2 Resolver cada um dos casos

Passo 3 Reconstruir o problema

Exemplo (E e OU): Descrever a construção dos elementos do conjunto a enumerar usando subconstruções ligadas por E e OU, e depois usar as regras da soma e do produto, sendo que em português "A e B" frequentemente significa "primeiro A e depois B" (regra do produto) e "A ou B" corresponde usualmente à regra da soma.

Obs.: Acima, na aplicação da regra do produto, o número de formas de fazer B não deve depender da escolha feita para A.

Listas sem repetição: arranjos

20/09/2019

Teorema

O número de listas de comprimento k com elementos distintos de um conjunto com n elementos é

$$\underbrace{(n)_k}_{\text{fatorial decrescente}} := n(n-1)\cdots(n-(k-1)) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} & se\ k \leq n; \\ 0 & se\ k > n. \end{cases}$$

Prova:

Escolher o 1° elemento da lista [n possibilidades]

E Escolher o 2° elemento da lista ($\neq$ do anterior) [$n-1$ possibilidades]

E $\vdots$

E Escolher o k-ésimo elemento da lista ($\neq$ dos anteriores)
[$n-(k-1)$ possibilidades]

\+ Princípio da multiplicação.

■

Observação: Se $k = n$ obtemos uma ordenação do conjunto inicial, i.e., uma permutação dos elementos desse conjunto. Há $n!$ permutações de um conjunto com n elementos.

Exemplo: Uma sala tem 100 cadeiras dispostas em fila. Quantas formas há de nelas se sentarem 95 pessoas?

1º processo

$$\begin{array}{c} \text{posições na lista} \leftrightsquigarrow \text{pessoas (95)} \\ \text{elementos do conjunto} \leftrightsquigarrow \text{cadeiras (100)} \end{array}$$

Resposta: $\frac{100!}{(100-95)!}$

2º processo

- Escolher as 95 cadeiras que vão ser usadas $\rightsquigarrow \binom{100}{95}$
- Emparelhar as 95 pessoas com as 95 cadeiras escolhidas $\rightsquigarrow 95!$

Resposta: $\binom{100}{95} \times 95! = \frac{100!}{5!}$.

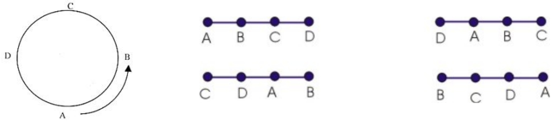
Permutações circulares: determinar o nº de formas de sentar n pessoas numa mesa redonda

(Duas disposições consideram-se iguais se pudermos obter uma da outra por rotação das cadeiras.)

1º processo (indireto) Se quiséssemos sentar as pessoas em fila a resposta seria $n!$.

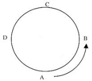
- É possível relacionar o problema inicial com este? I.e., converter uma solução de um problema numa solução do outro?
- Sim. Dada uma solução do problema circular, escolhendo uma posição à mesa e seguindo um sentido pré-fixado, obtemos uma ordenação em fila. Cada posição escolhida dá origem a uma ordenação em fila distinta.

Exemplo:



Permutações circulares (cont.)
20/09/2019

[Virando o problema ao contrário] Para sentar n pessoas em fila, fazemos:

sentamos-las circularmente 

E escolhemos uma posição à mesa a partir da qual as ordenamos em fila 

Logo:

$$n! = \begin{matrix}\text{solução do}\\ \text{problema linear}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{solução do}\\ \text{problema circular}\end{matrix} \times n$$

Teorema

O número de formas de ordenar n objetos distintos circularmente é

$$n!/n = (n-1)!$$

Nota: Consideramos duas configurações circulares iguais se diferirem por rotação, mas não por reflexão.

Permutações circulares: 2º processo

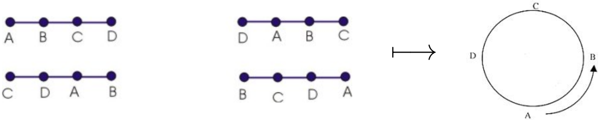
20/09/2019

2º processo (divisão) Algoritmo: Para sentar n pessoas à mesa fazemos:

- Fixar posição de referência na mesa; [esta escolha não altera o resultado final circular]
- Ordenar pessoas em fila; [n! possibilidades]
- Sentar pessoas à mesa (e.g. no sentido anti-horário) a partir da posição de referência, pela ordem linear fixada.

Cada permutação circular das n pessoas provém exatamente de n permutações (ordenações em fila) distintas:

$(n = 4)$



Permutações circulares: 2º processo (cont.)

20/09/2019

Teorema

Seja $f : A \longrightarrow B$ uma função e $n \geq 1$ tal que

$$\left|f^{-1}(\{b\})\right| = n, \qquad \textit{para todo o } b \in B. \tag{$*$}$$

Então $|B| = |A|/n$.

Obs.: Nas condições acima, f é necessariamente sobrejetiva. Na condição $(*)$ diz-se que f é n para 1.

Prova: Pelo princípio da multiplicação, $|A| = |B| \times n$. ■

Logo: como a aplicação

$$\begin{array}{c}\text{permutação linear}\\ \text{de } n \text{ objetos distintos}\end{array} \longmapsto \begin{array}{c}\text{permutação circular}\\ \text{de } n \text{ objetos distintos}\end{array}$$

é n para 1, há $n!/n = (n-1)!$ permutações circulares de n objetos distintos.

Permutações circulares: 3º processo (direto)

20/09/2019

- Atribuímos uma ordem (lista) de 1 a n às pessoas.
- Para verificar se duas distribuições circulares são iguais ou distintas basta ler as listas num sentido pré-fixado (e.g. anti-horário) a partir da pessoa 1.
- Obtemos assim todas as permutações de $\{1, \ldots, n\}$ que fixam 1.
- Há exatamente $(n-1)!$ permutações nestas condições.

Exemplo: colares de contas

20/09/2019

- Há $(n-1)!$ colares com n contas, todas de cores distintas, assumindo que não podemos virar o colar ao contrário.
- Se as contas não forem todas distintas a resposta é mais complicada.
- **Exemplo:** Se houver 3 contas azuis (A) e 3 contas vermelhas (V) então, por exemplo, a disposição circular AVAVAV só dá origem a 2 disposições lineares, enquanto a disposição circular AAAVVV dá origem a 6 disposições lineares.
  De facto, nestas condições há exatamente 4 disposições circulares distintas. Verificar!

Exemplo: palavras

20/09/2019

Quantas palavras de k letras ($k \leq 4$) podemos formar com as letras de *RARO*?

A resposta não é

- 3^k porque se $k > 1$ não é possível repetir algumas das letras
- $(3)_k$ porque se $k > 1$ é possível repetir a letra R
- $(4)_k$ porque das quatro letras, duas são iguais
- ...

A resposta é:

$k = 0 \quad (3)_0 = 1$

$k = 1 \quad (3)_1 = 3$

$k = 2 \quad (3)_2 + 1 = 7$

$k = 3 \quad 3! + 3 \times 2 = 12$

$k = 4 \quad 6 \times 2 = 4!/2! = 12$