Análise Real III

Apontamentos de apoio às aulas teóricas I

(Versão de trabalho 16/10/2018)

Vamos começar por introduzir, ainda que de forma *intuitiva*, a noção de **caminho** em $\mathbb{R}^n$.

Definição Uma curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ diz-se de classe C^1 por bocados se é contínua e existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ tal que, para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $\alpha|_{]t_i, t_{i+1}[}$ é de classe C^1.
A curva diz-se regular (por bocados) se cada uma destas restrições for regular (velocidade escalar não nula).

Definição Dizemos que duas curvas $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1 por bocados, definem o mesmo **caminho** C se

- existe uma função $h : [c, d] \to [a, b]$, bijectiva e de classe C^1 por bocados, com inversa de classe C^1 por bocados, com $h(c) = a$ e $h(d) = b$, tal que $\beta(u) = \alpha \circ h(u)$, $\forall u \in [c, d]$ $(t = h(u))$.

Em particular a curva β é uma reparametrização bijectiva da curva α. Note-se que, escrevendo $t = h(u)$, se tem $\alpha(t) = \beta(h^{-1}(t))$. Assim α também é uma reparametrização de β.

Quando assim é as curvas α e β dizem-se *representantes do caminho C* (de facto um caminho é uma classe de equivalência de curvas).

Da definição resulta imediatamente que $tr(\alpha) = tr(\beta)$ e portanto o sub-conjunto de $\mathbb{R}^n$ associado ao caminho C fica completamente determinado por um seu representante.

Note-se que a aplicação h preserva os extremos o que permite definir o **extremo inicial do caminho** C como sendo $\alpha(a) = \beta(c)$ e o **extremo final do caminho** C como sendo $\alpha(b) = \beta(d)$.

A função h corresponde a uma reparametrização do parâmetro t ou, equivalentemente, a alterar a velocidade escalar de α, uma vez que

$$||\beta'(u)|| = ||\alpha'(h(u))|| \times |h'(u)| = ||\alpha'(h(u))|| \times h'(u),$$

uma vez que h é crescente.

Se permitirmos que a reparametrização h não seja injectiva então essa quebra de injectividade corresponde a introduzir "zig-zag's" na forma de como é percorrido o traço da curva...(exemplos...)

Dado um caminho C, um seu representante $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e um intervalo $[c,d]$, existe um representante do caminho C cujo domínio é $[c,d]$.
De facto para tal basta considerar a curva $\beta(u) = \alpha \circ h(u)$, , $u \in [c,d]$, onde

$$t = h(u) = \frac{(b-a)u + (ad - bc)}{d-c}, \quad u \in [c,d]$$

Exemplos:

1) Segmento de extremos A e B percorrido de A para B:

$\alpha(t) = A + t(B-A)$, $u \in [0,1]$,
$\beta(u) = A + u^2(B-A)$, $u \in [0,1]$, $(t = h(u) = u^2$, $\beta(t) = \alpha \circ h(u))$,
$\gamma(u) = A + 4u(B-A)$, $u \in [0, \frac{1}{4}]$, $(t = h(u) = 4u$, $\gamma(u) = \alpha \circ h(u))$,
$\eta(u) = A + \sin(u)(B-A)$, $u \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $(t = h(u) = \sin(u)$,
$\eta(u) = \alpha \circ h(u))$,

são exemplos de quatro curvas que representam o mesmo caminho.

Este caminho é diferente do caminho que corresponde ao segmento de extremos A e B percorrido de B para A porque os extremos iniciais/finais são diferentes.

2) uma circunferência de raio r e centro (a, b), percorrida k vezes no sentido directo, pode ser representada pela curva $\alpha(t) = (r\cos(t) + a, r\sin(t) + b),\ t \in [0, 2k\pi]$. Percorrer uma mesma circunferência 1 ou 2 vezes no sentido directo dá origem a caminhos distintos (...exercício...)

3) uma circunferência de raio r e centro (a, b), percorrida s vezes no sentido indirecto, pode ser representada pela curva $\alpha(t) = (r\cos(-t) + a, r\sin(-t) + b),\ t \in [0, 2s\pi]$.

4) Os caminhos dos dois exemplos anteriores são distintos (exercício...)

5) A elipse de equação $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} = 1$, percorrida uma vez no sentido directo, pode ser representada pela curva $\alpha(t) = (2\cos(t), \sqrt{5}\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.

Definição Fixado um caminho C o **caminho inverso** de C, que denotamos por $-C$, é o caminho representado por $\beta(u) = \alpha(1-u)$, $u \in [0,1]$, onde $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ é um representante do caminho C e $t = 1 - u$.

Observe-se que, a menos do caminho trivial (cujo traço se reduz a um ponto), um caminho e o seu inverso, são distintos.
Observe-se também que o extremo final de C coincide com o extremo inicial de $-C$ e o extremo inicial de C coincide com o extremo final de $-C$.

O inverso do caminho que corresponde a percorrer uma circunferência k-vezes no sentido directo é o caminho que se obtém percorrendo essa circunferência k-vezes no sentido indirecto.

Definição Dados dois caminhos C_1 e C_2 tais que o extremo final de C_1 coincide com o extremo inicial de C_2, a **soma destes caminhos**, que denotamos por $C_1 + C_2$, é o caminho associado à curva $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, onde $\beta(t) = \alpha_1(t)$ para $t \in [0, \frac{1}{2}]$, e $\beta(t) = \alpha_2(t)$ para $t \in [\frac{1}{2}, 0]$, sendo $\alpha_1 : [0, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}^n$ um representante de C_1 e $\alpha_2 : [\frac{1}{2}, 1] \to \mathbb{R}^n$ um representante de C_2; por hipótese tem-se que $\alpha_1(\frac{1}{2}) = \alpha_2(\frac{1}{2})$.

A soma de caminhos não é comutativa: pode estar definido o caminho $C_1 + C_2$ e não fazer sentido definir $C_2 + C_1$. Porém, quando o extremo final de C_1 coincide com o extremo inicial de C_2 e o extremo final de C_2 coincide com o extremo inicial de C_1 então estão definidos os caminhos $C_1 + C_2$ e $C_2 + C_1$.

Exemplo: Considere-se os caminhos

- C_1 que corresponde a percorrer um quarto da circunferência, de raio 1 e centrada na origem, com extremo inicial $(1,0)$ e extremo final $(0,1)$,
- o caminho C_2 que corresponde ao segmento de extremo inicial $(0,1)$ e de extremo final $(0,0)$,
- e o caminho C_3 que corresponde ao segmento de extremo inicial $(0,0)$ e de extremo final $(1,0)$.

Então

- os caminhos $C_2 + C_3$, $C_3 + C_1$ e $C_1 + C_2$ estão bem definidos

- não faz sentido considerar $C_1 + C_3$, $C_2 + C_1$ ou $C_3 + C_2$

- estão definidos os caminhos $C_1 + C_2 + C_3$, $C_2 + C_3 + C_1$ e $C_3 + C_1 + C_2$

Definição Sejam C um caminho e $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ um seu representante. Dizemos que

- C é um caminho **simples** se $\alpha(t) \neq \alpha(s)$, $\forall t, s \in [0, 1]$ com $t \neq s$;
- C é um caminho **fechado** se $\alpha(0) = \alpha(1)$, isto é o extremo inicial coincide com o extremo final;
- C é um caminho **simples e fechado** se $\alpha(t) \neq \alpha(s)$, $\forall t, s \in [0, 1[$ com $t \neq s$ e $\alpha(0) = \alpha(1)$.

1 Integrais de linha/funções escalares

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, C um caminho em U e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é não negativa então podemos pensar que f é uma função densidade e, a exemplo do que foi feito para sólidos recorrendo a integrais triplos, definir a massa de C relativa à densidade f pelo integral (soma infinita):

$$\boxed{\int_C \; f \, ds}$$

onde ds é o elemento de comprimento de arco.

Se considerarmos um caminho C contido num plano podemos também encarar $f(X)$ como sendo a altura do segmento (orientado) ortogonal ao plano que se coloca no ponto $X \in C$. Deste modo obtemos uma tira em $\mathbb{R}^3$ e é de esperar que o integral apresentado acima (como soma infinita) seja igual à área dessa tira.

Com é que procedemos para calcular este integral?

- Começamos por fixar uma curva $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1 por bocados, e que seja um representante do caminho C.

- Existe uma partição de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = b$ tal que, para cada $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $\alpha|_{]t_i, t_{i+1}[}$ é de classe C^1.

- Em cada um desses intervalos

$$||\alpha'(t)|| = v(t) = \tfrac{ds}{dt},$$

ou (do ponto de vista infinitesimal)

$$ds = ||\alpha'(t)||dt.$$

1 Integrais de linha/funções escalares

Assim é natural definir o integral da função f ao longo do caminho C, uma vez fixado um seu representante α, por

$$\int_C f\, ds = \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} (f \circ \alpha(t))\, ||\alpha'(t)||\, dt$$

No que se segue, e para facilitar a exposição, (sem perda de generalidade) vamos assumir que os representantes dos caminhos são de classe C^1 em vez de classe C^1 por bocados. A vantagem é a de trocar uma soma finita de integrais, que corresponde à partição associada ao caminho, por um único integral.

Esta definição de integral de uma função escalar ao longo de um caminho é **intrínseca**, isto é não depende da escolha de um seu representante.

Com efeito, sejam $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ e $\beta : [c, d] \to \mathbb{R}^n$ dois representantes do caminho C, e seja $h : [c, d] \to [a, b]$ a mudança de variável associada, isto é, h é bijectiva e de classe C^1 por bocados, $t = h(u)$, $h(c) = a$, $h(d) = b$, e $\beta(u) = \alpha(h(u))$.

Então

$$\int_c^d f \circ \beta(u) \, || \frac{d\beta}{du} || \, du = \int_c^d f \circ \alpha(h(u)) \, || \frac{d\alpha}{dt} || \, | \frac{dt}{du} | \, du =$$

$$= \int_a^b f \circ \alpha(t) \, || \alpha'(t) || \, dt,$$

sendo esta última igualdade obtida directamente do teorema de mudança de variável e de $| \frac{dt}{du} | = \frac{dt}{du}$.
De forma semelhante mas usando a mudança de variável $t = 1 - u$, $u \in [0, 1]$ conclui-se que o integral de uma função escalar não depende da orientação do caminho, isto é $\int_C f \, ds = \int_{-C} f \, ds$.

1 Integrais de linha/funções escalares

Exemplo Pretende-se calcular o integral da função escalar $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ (quadrado da distância de um ponto à origem) ao longo do caminho representado pela curva $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

De acordo com a definição, entende-se que o cálculo é feito relativamente ao representante α, e portanto tem-se

$$\int_c \ f \ ds = \int_0^{2\pi} \ f \circ \alpha(t) \ ||\alpha'(t)|| \, dt \ =$$

$$= \int_0^{2\pi} \ (\cos^2(t) + \sin^2(t) + t^2) \ ||(-\sin(t), \cos(t), 1)|| \, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \ \sqrt{2}(1 + t^2) \, dt \ldots \qquad \square$$

Definição: Um campo de vectores é uma aplicação contínua $F : U \to R^n$, onde U é um aberto de R^n.

Encara-se F como sendo uma aplicação que a cada ponto do aberto U associa um vector (força). Essa força pode ter vários significados (campo eléctrico, campo gravitacional, campo magnético...)

Considere-se uma partícula que se desloca segundo uma trajectória definida e que sofre a acção de um campo de vectores. A acção desse campo pode ser decomposta numa componente tangencial à trajectória e numa componente normal a esta. Apenas a componente tangencial "transfere" energia. Em cada ponto X essa transferência é positiva se a componente tangencial é positivamente colinear com o vector velocidade da partícula no ponto X, negativa se essa componente é negativamente colinear com o vector velocidade da partícula no ponto X, ou nula quando a componente tangencial é nula.

A componente tangencial do campo F num ponto da curva pode ser obtida por $F \cdot T$, onde T é o versor tangente à curva e coerente com a orientação no ponto escolhido. Assim é natural considerar a seguinte definição.

Definição: Sejam $F : U \to R^n$ um campo de vectores e C um caminho contido em U, onde U é um aberto de R^n. **O trabalho realizado pelo campo F ao longo do caminho C** é dado por

$$\boxed{\int_C F\, ds = \int_C F \cdot T\, ds.}$$

Uma vez que $F \cdot T$ é uma função escalar podemos calcular este integral recorrendo a um qualquer representante $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ do caminho C.

Assim

$$\int_C F \cdot T \; ds = \int_a^b F(\alpha(u)) \cdot (\frac{1}{||\alpha'(u)||}\alpha'(u)) \, ||\alpha'(u)|| \, du =$$

$$= \int_a^b F(\alpha(u)) \cdot \alpha'(u) \, du$$

.

Da definição decorre que o trabalho realizado por um campo F ao longo de um caminho C não depende da escolha de um seu representante sendo por isso $\int_C F \, ds$ uma grandeza **intrínseca**. O seu cálculo pode ser feito recorrendo a um qualquer representante.

Sejam α, regular por pedaços, um representante de um caminho C, e $\beta(u) = \alpha(h(t))$ uma reparametrização de α tal que h é de classe C^1 por pecaços, preserva os extremos mas não é injectiva.. Se u_1 e u_2 são instantes consecutivos tais que $\beta(u_1) = \beta(u_2)$, admitindo que a derivada é não nula nesses instantes, então tem-se que $T(\beta(u_1)) = -T(\beta(2_2))$, onde T é o versor tangente à curva β. Assim,

$$F(\beta(u_1)) \cdot T(\beta(u_1)) = -F(\beta(u_2)) \cdot T(\beta(u_2))$$

o que permite mostrar que o trabalho realizado por F ao longo de cada "zig" tem o valor simétrico ao que é realizado ao longo do correspondente "zag", e portanto a sua soma (zig+zag) é igual a zero.

Assim, o *trabalho realizado por um campo de vectores F ao longo de um caminho C* pode ser calculado recorrendo a uma curva regular por pedaços que represente um caminho $\tilde{C}$ que difira de C apenas por exclusão de $zig - zag's$.

Exemplo Pretende-se calcular o trabalho realizado pelo campo $F(x,y) = (x^2y, x)$ ao longo do segmento de extremos $(1,1)$ e $(2,3)$ com ponto inicial $(1,1)$ e extremo final $(2,3)$. Estas condições nem sequer definem um caminho mas o trabalho realizado pelo campo F ao longo de qualquer caminho que satisfaça estas condições é sempre o mesmo.

Assim basta parametrizar o segmento pela curva $\alpha(t) = (1,1) + t((2,3) - (1,1)) = (1+t, 1+2t),\ t \in [0,1]$,

e calcular

$$\int_0^1 \left((1+t)^2\,(1+2t), 1+t\right) \cdot (1,2)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left[(1+t)^2\,(1+2t) + 2(1+t)\right] dt = \ldots$$

Propriedades dos integrais de campos de vectores ao longo de caminhos

Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $F; G : U \to \mathbb{R}^n$ campos de vectores, C, C_1 e C_2 caminhos em U tais que o extremo final de C_1 coincide com o extremo inicial de C_2, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Tem-se

a) $\int_C (F + G)\, ds = \int_C F\, ds + \int_C G\, ds$

b) $\int_C \lambda F\, ds = \lambda \left(\int_C F\, ds\right)$

c) $\int_{(C_1+C_2)} F\, ds = \int_{C_1} F\, ds, + \int_{C_2} F\, ds$

d) $\int_{(-C)} F\, ds = - \int_C F\, ds.$

1 Integrais de linha/campos de vectores

As três primeiras propriedades obtêm-se facilmente usando as definições.

Quanto à última, se $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ é um representante de C então $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$, $\beta(u) = \alpha(1-u)$, é um representante de $-C$ $(t = 1-u)$).

Assim

$$\int_{(-C)} F\,ds = \int_0^1 F \circ \beta(u) \cdot \frac{d\beta}{du} du = \int_0^1 F(\alpha(1-u)) \cdot \frac{d\alpha}{dt}|_{(1-u)}\,(-1)\,du =$$

$$= \int_1^0 F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt = -\int_0^1 F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt =$$

$$= -\int_C F\,ds$$

Exemplo: Pretende-se calcular $\int_C (-y, x+y^2)\, ds$, onde C é o caminho que se obtém percorrendo primeiro 4 vezes, no sentido directo, a circunfência de centro $(0,0)$ e raio 1, e depois percorrendo a mesma circunferência 2 vezes no sentido indirecto.
Chamando $\tilde{C}$ ao caminho que corresponde a percorrer uma vez a circunferência no sentido directo tem-se que

$$C = \tilde{C} + \tilde{C} + \tilde{C} + \tilde{C} + (-\tilde{C}) + (-\tilde{C})$$

Do ponto de vista do cálculo do integral (*e não da natureza do caminho*) tem-se
$C = \tilde{C} + \tilde{C} + \tilde{C} + \tilde{C} + (-\tilde{C}) + (-\tilde{C}) = \tilde{C} + \tilde{C} + \tilde{C} + [\tilde{C} + (-\tilde{C})] + (-\tilde{C}) =$
$= \tilde{C} + \tilde{C} + [\tilde{C} + (-\tilde{C})] = \tilde{C} + \tilde{C}.$

Portanto

$$\int_C (-y, x+y^2)\, ds \;=\; 2 \int_{\tilde{C}} (-y, x+y^2)\, ds.$$

Finalmente, escolhendo $\alpha(t) = (\cos(t), \sin(t)),\ t \in [0, 2\pi]$ como representante de $\tilde{C}$, obtém-se

$F(\cos(t), \sin(t)) \cdot \alpha'(t) = 1 + \cos(t)\sin^2(t).$

Assim

$\int_C (-y, x+y^2)\, ds \;=\; 2 \int_0^{2\pi} (1+\cos(t)\sin^2(t))dt = 4\pi$ $\square$

Definição Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de vectores.
O campo F diz-se *conservativo* se o trabalho realizado ao longo de qualquer caminho $C \subset U$ depender apenas do extremo inicial e do extremo final de C, isto é, se C_1 e C_2 têm o mesmo extremo inicial e o mesmo extremo final então $\int_{C_1} Fds = \int_{C_2} Fds$.

Note-se que se F é conservativo e C é um caminho fechado não trivial, então, escolhendo dois pontos distintos de C, A e B, tem-se que $C = C_A + C_B$, onde C_A é o pedaço de arco de C com extremo inicial A e extremo final B e C_B, é o complementar de C_A em C, com extremo inicial B e extremo final A. Assim

$$\int_C F\,ds = \int_{(C_A+C_B)} F\,ds = \int_{C_A} F\,ds - \int_{-C_B} F\,ds = 0,$$

uma vez que C_A e $-C_B$ têm o mesmo extremo inicial e o mesmo extremo final.

Inversamente se F é um campo tal que $\int_C F\,ds = 0$ para qualquer caminho fechado C, então dados dois caminhos C_1 e C_2, com o mesmo extremo inicial e o mesmo extremo final, então o caminho $C = C_1 + (-C_2)$ é um caminho fechado e portanto

$$0 = \int_{C_1+(-C_2)} F\,ds = \int_{C_1} F\,ds - \int_{C_2} F\,ds$$

donde se conclui que $\int_{C_1} Fds = \int_{C_2} Fds$

Assim, mostrámos o seguinte

Teorema Um campo F é conservativo se e somente se $\int_C F\,ds = 0$, para qualquer caminho fechado C.

1 Integrais de linha/Campos conservativos

Saber que um dado campo F é conservativo poder ser extremamente útil no cálculo do trabalho realizado ao longo de um caminho. Por exemplo sendo

$$F(x,y) = (e^{\cos(y)}, -x\sin(y)e^{\cos(y)})$$

e C o caminho representado pela curva

$$\alpha(t) = (e^t \cos(\frac{\pi}{2}t),\ t(1-t)),\ \ t \in [0,1],$$

se soubermos que F é um campo conservativo (mais à frente veremos como se pode sustentar esta afirmação), e observarmos que C tem extremo incial $(1,0)$ e extremo final $(0,0)$, podemos trocar C por $\tilde{C}$, onde $\tilde{C}$ é o caminho representado pela curva $\beta(t) = (1-t, 0)$, $t \in [0,1]$. Assim

$$\int_C F\,ds = \int_{\tilde{C}} F\,ds = \int_0^1 F(\beta(t)) \cdot \beta'(t)\,dt = \int_0^1 (e,0)\cdot(-1,0)\,dt = -e$$

Saber se um dado campo F é conservativo recorrendo apenas à definição é em geral uma questão intratável. Este facto motiva a introdução de outra propriedade dos campos de vectores, sendo esta muito mais fácil de verificar e na "maior parte" dos casos equivalente à propriedade de um campo ser conservativo.

Definição Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de vectores. F diz-se um *campo de gradientes* se existe uma função $f : U \to \mathbb{R}$ (necessariamente de classe C^1) tal que

$$\nabla f(X) = F(X), \ \forall X \in U.$$

A função f designa-se por **potencial do campo**.

É imediato observar que se f é um potencial de F então $f + c$ também é potencial de F, para qualquer constante c fixada.

Exemplo

- O campo

$$F(x, y, z) = (y\cos(z)e^{xy\cos(z)},\ x\cos(z)e^{xy\cos(z)},\ -xy\sin(z)e^{xy\cos(z)})$$

é um campo de gradientes sendo $f(x, y, z) = e^{xy\cos(z)}$ uma função potencial.

- Já o campo $G(x, y, z) = (y^2z,\ 2xyz,\ xy^2 + 2z + x)$ não é um campo de gradientes (veremos mais à frente um processo que permite responder facilmente a esta pergunta).

- Podemos decompor $G(x, y, z) = H(x, y, z) + (0, 0, 2z + x)$, sendo $H(x, y, z) = (y^2z,\ 2xyz,\ xy^2)$.

Facilmente se verifica que o campo H é um campo de gradientes sendo $h(x, y, z) = xy^2z$ um potencial de H.

□

1 Integrais de linha/Campos de gradientes

Quando o campo de vectores é conservativo o trabalho ao longo de um caminho C pode ser calculado de forma mais simples se trocarmos C por um outro caminho desde se preservem os extremos inicial e final. Quando o campo é de gradientes esse cálculo fica muito simples desde que se conheï¿½a uma função potencial.

Teorema Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de gradientes e $f : U \to \mathbb{R}$ um potencial de F. Se C é um caminho contido em U, de extremo inicial A e extremo final B, então

$$\int_C F\, ds = f(B) - f(A).$$

Em particular F é um campo conservativo.

Demonstração: Seja $\alpha : [0,1] \to U$ um representante (de classe C^1) do caminho C. Em particular $\alpha(0) = A$ e $\alpha(1) = B$.
Tem-se

$$\int_C F\,ds = \int_0^1 F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt = \int_0^1 \nabla f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 (f \circ \alpha)'(t)\,dt = f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)) = f(B) - f(A).$$

$\square$

Em situações muito gerais as noções de *campo conservativo* e de *campo de gradientes* são equivalentes. A equivalência destas noções é garantida pela **topologia** do aberto U, que é o domínio do campo. Para tal introduza-se a seguinte

Definição Seja (X, d) um espaço métrico. X diz-se **conexo por arcos** se, dados quaisquer dois pontos A e B de X, existe uma curva (contínua) $\alpha : [0, 1] \to X$ tal que $\alpha(0) = A$ e $\alpha(1) = B$

Exemplos....

Teorema Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo por arcos e $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo conservativo. Então F é um campo de gradientes.

Ideia da demonstração:
Fixemos $X_0 \in U$; como o aberto U é conexo por arcos, para cada $X \in U$ podemos escolher um caminho $C_X \subset U$, com extremo inicial X_0 e extremo final X.

Defina-se $f(X) = \int_{C_X} F\, ds$, $X \in U$. A função f está bem definida porque, sendo o campo conservativo, o trabalho realizado pelo campo só depende dos extremos inicial e final e portanto não depende da escolha de C_X.

Para provar que $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X) = F_j(X), \forall X \in U, \forall j \in \{1, \ldots, n\}$, considera-se

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(X + he_j) - f(X)) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_{C_j^h} F\, ds =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 F(X + the_j) \cdot he_j\, dt = \lim_{h \to 0} \int_0^1 F_j(X + hte_j)\, dt = F_j(X),$$

0nde C_j^h é o caminho representado por $\alpha_j(t) = X + the_j,\ t \in [0, 1]$. $\square$

Conclusão

- se $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de gradientes então F é um campo conservativo;
- se $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo conservativo e o aberto U é conexo por arcos então F é um campo de gradientes

Para decidir se um dado campo de vectores é ou não um campo de gradientes podemos assumir a existência de um potencial para o campo e, a partir do sistema às derivadas parciais que lhe está associado, mostrar que o sistema tem solução (e assim obter um potencial do campo) ou concluir que o sistema não tem solução e portanto que o campo não é um campo de gradientes.

É pois relevante ter uma maneira eficiente de saber se um campo de vectores é um campo de gradientes antes de iniciar a resolução desse sistema.

Definição: Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de vectores de **classe** C^1. F diz-se um **campo fechado** se

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(X), \ \forall X \in U, \forall i, j \in \{1, \cdots, n\}$$

Exemplos:

- $F(x, y, z) = (2xy^2z,\ 2x^2yz,\ x^2y^2)$ é um campo fechado;

- $G(x, y) = (2xy^2,\ 2x^2y + x)$ não é um campo fechado.

1 Integrais de linha/Campos fechados/$n = 3$

Definição: Dado um campo de vectores F, de classe C^1definido num aberto U de $\mathbb{R}^3$ o **rotacional do campo** F é o campo de vectores

$$rot(F)(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)(x,y,z)$$

Por vezes usa-se a notação $curl(F)$ para o rotacional do campo.
Uma mnemónica para o cálculo do rotacional de um campo é:

$$rot(F) = \nabla \times F = det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}$$

Em $\mathbb{R}^3$, um campo F é um **campo fechado** se e somente se o seu rotacional é nulo, $rot(F) = 0$.

A condição de um campo de classe C^1 ser fechado é uma **condição necessária** para que este seja um campo de gradientes:

Teorema: Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de vectores de **classe** C^1. Se F é um campo de gradientes então F é um campo fechado.

Demonstração: Seja f um potencial de F; como F é de classe C^1 resulta que f é de classe C^2. Fixemos $X \in U$ e índices $i, j \in \{1, \cdots, n\}$.
Tem-se

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i})(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(X)$$

e

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(X) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(X) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X)$$

Assim, como f é de classe C^2, tem-se $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(X) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(X)$. $\square$

A condição de um campo ser fechado não é, por si só, suficiente para que um campo de vectores de classe C^1 seja um campo de gradientes. No exercício 9 propõe-se o estudo de um campo fechado, de classe C^1 e definido em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, que não é um campo de gradientes. Mais uma vez, a equivalência destas propriedades depende da *topologia* do aberto U, domínio do campo F.

Definição: Seja E um subconjunto de $\mathbb{R}^n$; E diz-se um **conjunto tipo estrela** se existe um ponto $X_0 \in E$ tal que o segmento de extremos X e X_0 está contido em E, qualquer que seja o ponto $X \in E$. O ponto X_0 desigan-se centro de E.

Observe-se que um conjunto E pode ter vários centros (é o caso dos conjuntos convexos).

exemplos...

Exemplos:

- $\mathbb{R}^n$, rectângulos, discos, bolas, mais geralmente subconjuntos *convexos* de $\mathbb{R}^n$, a união de dois discos tangentes, mais geralmente a reunião de dois conjuntos convexos cuja intersecção é não vazia....são exemplos de conjuntos tipo estrela;

- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$,
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x, y \leq 4\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2\}$
...são exemplos de conjuntos que não são de tipo estrela.

Teorema: Sejam U um **aberto tipo estrela** de $\mathbb{R}^n$ e $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de vectores (de classe C^1).
Se F é um campo **fechado** então F é um campo de gradientes.

Demonstração:
Sem perda de generalidade vamos assumir que $0 \in U$, que 0 é um centro de U e que $n = 3$.

Para $X \in U$
defina-se $f(x,y,z) = \int_{L_X} F\, ds$, onde L_X é o segmento de extremo inicial $(0,0,0)$ e extremo final $X = (x,y,z)$. A curva $\alpha_X(t) = (tx, ty, tz)$, $t \in [0,1]$, é um representante de L_X e $\alpha'_X(t) = (x,y,z)$. Assim

$$f(x,y,z) = \int_0^1 \left[F_1(tx,ty,tz)x + F_2(tx,ty,tz)y + F_3(tx,ty,tz)z\right] dt,$$

onde F_1, F_2 e F_3 denotam as componentes do campo F. Derivando esta expressão em ordem a x e usando o facto de que $\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$ e que $\frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z}$ obtï¿½m-se $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) =$

$= \int_0^1 [\frac{\partial F_1}{\partial x}(tx,ty,tz)tx + F_1(tx,ty,tz) + \frac{\partial F_2}{\partial x}(tx,ty,tz)ty + \frac{\partial F_3}{\partial x}(tx,ty,tz)tz]\, dt =$

$= \int_0^1 ([\frac{\partial F_1}{\partial x}(tx,ty,tz)x + \frac{\partial F_1}{\partial y}(tx,ty,tz)y + \frac{\partial F_1}{\partial z}(tx,ty,tz)z]t + F_1(tx,ty,tz))\, dt =$

$= \int_0^1 (F \circ \alpha_x)'(t)\, t + F_1 \circ \alpha_X(t)\, dt = \int_0^1 [F_1 \circ \alpha_x(t)\, t]'\, dt = F_1(x,y,z).$

De forma análoga obtï¿½m-se $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$ e $\frac{\partial f}{\partial z} = F_3$. $\square$

Conclusão

- se $F : U \to \mathbb{R}^n$ um campo de gradientes e de classe C^1 então f é um campo fechado;
- se $F : U \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1, é um campo fechado e o aberto U é tipo estrela então f é um campo de gradientes

Como um conjunto tipo estrela é conexo por arcos decorre que, se $F : U \to \mathbb{R}^n$ é de **classe** C^1 *e o aberto U é* **tipo estrela**, *então*

$$F \text{ é conservativo}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$F \text{ é um campo de gradientes}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$F \text{ é um campo fechado}$$

Exemplo:

Considere-se o campo

$$F(x, y, z) = (-z \sin(xz),\ e^z,\ ye^z - x \sin(xz))$$

definido em $\mathbb{R}^3$, e o caminho C representado pela curva

$$\alpha(t) = (t,\ t^2 - 2t, t\pi),\ \in [0, 1].$$

Pretende-se calcular o trabalho realizado pelo campo F ao longo do caminho C, isto é, $\int_C F\, ds$ (em última instância recorre-se à definição...)

1) Como $\mathbb{R}^3$ é um conjunto tipo estrela (é convexo) e F é de classe C^1 podemos (e devemos!) verificar se F é um campo de gradientes recorrendo às derivadas cruzadas.

Ora

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = -\sin(xz) - xz\cos(xz) = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = e^z = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

consequentemente F é um campo fechado ($rot(F) = 0$) e portanto é um campo de gradientes.

2) Sabendo que F é um campo de gradientes podemos determinar um potencial resolvendo as equações às derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -z\sin(xz), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = e^z, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = ye^z - x\sin(xz)$$

Resolvendo estas equações obtém-se o potencial

$$f(x,y,z) = ye^z + \cos(xz)$$

(ou qualquer outra função que difira desta por uma constante).

3) Obtido um potencial f do campo F sabemos que

$$\int_C F\, ds \;=\; f(\alpha(1)) - f(\alpha(0)) \;=$$

$$f((1,-1,\pi)) - f((0,0,0)) \;=\; (-e^\pi - 1) - (0+1) \;=\; -e^\pi - 2$$

□

Observação: Por vezes, quando o campo F em questão não é um campo de gradientes, é possível decompor F como soma de um campo de gradientes H com um outro campo G que tem uma expressão mais simples.
Neste caso, sendo h um potencial de H e C um caminho, de extremo inicial A e extremo final B, contido no domínio de F, tem-se

$$\int_C F\, ds = \int_C (H+G)\, ds = \int_C H\, ds + \int_C G\, ds = h(B) - h(A) + \int_C G\, ds$$

1 Integrais de linha/Teorema de Green

O Teorema de Green estabelece uma relação entre o trabalho realizado por um campo de vectores ao longo de um caminho simples e fechado, contido num plano, e um integral duplo de uma função escalar (relacionada com o campo) na região do plano limitada pela curva.
Vamos começar por estabelecer o Teorema de Green num caso algo particular que consiste em impôr condições sobre a região limitada pela curva. De facto vamos considerar regiões limitadas de $\mathbb{R}^2$ compreendidas simultaneamente entre dois gráficos de variável x e dois gráficos de varíavel y. Mais precisamente

Definição: Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma **região** y-**simples** se existem funções $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$, de classe C^1 por bocados, tais que

$$\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x), \ \forall x \in [a, b], \quad \text{e}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [a, b], \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}.$$

Definição: Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ diz-se uma **região** x-**simples** se existem funções $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \to \mathbb{R}$, de classe C^1 por bocados, tais que

$$\psi_1(y) \leq \psi_2(y), \ \forall y \in [c, d], \quad \text{e}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \in [c, d], \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(x)\}.$$

Definição: Um conjunto $D \subset \mathbb{R}^2$ diz-se de uma **região simples** se é simultaneamente x-simples e y-simples.

Exemplos: Rectângulo com lados paralelos aos eixos, triângulo,...

Teorema de Green Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^2$, $F : U \to \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1, $D \subset U$ uma região simples, e C^+ o bordo de D orientado no sentido directo. Então

$$\int_{C^+} F\, ds \;=\; \int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\, dxdy,$$

sendo F_1 e F_2 as funções componentes de F.

Ideia da demonstração: Por cálculos directos

1) e por D ser uma região x-simples obtém-se que
$\int_{C^+} (F_1, 0)\, ds \;=\; \int_D \; -\frac{\partial F_1}{\partial y}\; dxdy \;\;=\; \int_a^b \, F_1(x, \varphi_1(x)) - F_1(x, \varphi_2(x)\, dx$

2) e por D ser uma região y-simples obtém-se
$\int_{C^+} (0, F_2)\, ds \;=\; \int_D \; \frac{\partial F_2}{\partial x}\; dxdy$.

O segundo membro da igualdade em 1) segue directamente da aplicação do Teorema de Fubini.
O primeiro membro da igualdade calcula-se sub-dividindo o caminho C^+ em quatro caminhos, dois verticais onde o trabalho é nulo, e dois que correspondem aos gráficos de φ_1 e de φ_2 com orientações contrárias. Para estes dois últimos calcula-se directamente o trabalho realizado pelo campo $(F_1, 0)$.

O caso 2) é tratado de maneira semelhante. $\square$

Exemplo: Pretende-se calcular o trabalho realizado pelo campo $F(x,y) = (3x^4 - y^3 + e^x,\, x^3 + 2y^6\cos(y))$ ao longo da circunferência, centrada em $(0,0)$ e de raio 2, percorrida 3 vezes no sentido indirecto. Designado por D a região limitada pela circunferência e por C^+ a circunferência percorrida uma vez no sentido directo, tem-se

$$\int_C F\, ds = -3\int_{C^+} F\, ds =$$

$$= -3\int_D [\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + 2y^6\cos(y)) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^4 - y^3 + e^x)]dxdy =$$

$$= -3\int_D (3x^2 + 3y^2)\, dxdy = -3\int_0^{2\pi} (\int_0^2 3r^2\, r\, dr)\, d\theta = -72\pi.$$

□

O Teorema de Green pode ser usado para calcular áreas de regiões simples do plano. Com efeito se escolhermos o campo $F(x, y) = \frac{1}{2}(-y, x)$ tem-se que

$$\int_{C^+} \frac{1}{2}(-y, x) ds = \int_D \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y)\right) dxdy = \int_D 1 \, dxdy = A(D).$$

Assim

$$\boxed{\int_{C^+} \tfrac{1}{2}(-y, x) ds = A(D)}$$

Observe-se que o mesmo argumento (**com as modificações óbvias**) pode ser feito recorrendo a qualquer campo de classe C^1 que satisfaça a condição $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = c$, onde c é uma constante não nula.

Exemplo: (Hipociclóide) Calcular a área da região do plano, D, limitada pela curva de equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$. Para tal consideramos o campo

$$F(x, y) = \tfrac{1}{2}(-y, x).$$

Escrevendo $x = a\cos^3(t)$ e $y = a\sin^3(t)$, $t \in [0, 2\pi]$, a curva pode ser parametrizada por

$$\alpha(t) = (a\cos^3(t),\, a\sin^3(t)),$$

donde se obtém que $\alpha'(t) = (-3a\cos^2(t)\sin(t),\, 3a\sin^2(t)\cos(t))$.

Como $F(\alpha(t)) = \frac{1}{2}(-a\sin^3(t),\, a\cos^3(t))$,

$$F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) = \tfrac{3}{2}a^2\cos^2(t)\sin^2(t) = \tfrac{3a^2}{16}(1 - cos(4t)).$$

Finalmente obtém-se $A(D) = \int_{C^+} F\, ds = \frac{3a^2}{8}\pi$

$\square$

O Teorema de Green aplica-se a regiões mais gerais:

1) regiões D, cujo bordo é uma curva simples e fechada C, e que se podem decompor num número finito de regiões simples por inclusão de caminhos e seus inversos; neste caso

$$\int_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy \; = \int_{C^+} F\, ds.$$

onde o sinal "$+$" indica a orientação do caminho C no sentido directo.

2) regiões cujo bordo é constituído por um número finito de curvas simples e fechadas, C, C_1,...,C_k, onde C denota a curva exterior, e que se podem decompor num número finito de regiões descritas em 1); neste caso

$$\int_D (\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})\, dxdy \; = \int_{C^+} F\, ds - \sum_{i=1}^{k} \int_{C_i^+} F\, ds,$$

onde o sinal "+" indica a orientação dos caminhos C_i no sentido directo.