M2007–Algoritmos em Matemática Discreta

Docente: Samuel Lopes

Email: slopes@fc.up.pt
Gabinete: 2.29A

16 de setembro de 2019

Sobre a UC

16/09/2019

- Aulas TP iniciam quarta dia 18 às 9:00 na sala 120
- Ver Ficha da UC no Sigarra
- Acompanhar a disciplina e obter todos os materiais no Moodle
- Ver o "Texto complementar de apoio à disciplina", disponível na página do Moodle
- Datas dos testes:

  14 de outubro de 2019, 9:00-9:50
  15 de novembro de 2019, 9:00-9:50
- Horário de atendimento: Quartas 11:00-12:30 ou por marcação (por email ou marcado nas aulas).

Programa

16/09/2019

- Combinatória enumerativa: listas, conjuntos e multiconjuntos; contagens e ordenação; contagem de funções de vários tipos (injetivas, sobrejetivas, crescentes, decrescentes, etc.); partições; relações de recorrência, números de Stirling; combinatória das permutações.
- Árvores de decisão e recursividade: definições básicas em árvores, ordem, rank; 'depth-first' e 'breadth first'; algoritmos recursivos, 'sorting'; códigos de Gray; enumerações dos racionais e sucessões associadas.

Programa (cont.)

16/09/2019

- Introdução à teoria de grafos: definições e exemplos, isomorfismo, grafos aleatórios; circuitos Eulerianos e ciclos Hamiltonianos; sequências de De Bruijn e aplicações à genética; árvores; algoritmos de: Prim, Kruskal, Dijkstra, 'depth-first' e 'breadth first'; algoritmo PageRank; grafos orientados e fluxos.
- Uso do software open-source SageMath no estudo dos vários tópicos referidos acima.

Avaliação da Época Normal: A classificação será a soma das classificações obtidas em 3 testes:

- Teste 1: terá a cotação de 6 valores e terá lugar a 14 de outubro de 2019 no horário da aula teórica desse dia.
- Teste 2: terá a cotação de 4 valores e terá lugar a 15 de novembro de 2019 no horário da aula teórica desse dia.
- Teste 3: terá a cotação de 10 valores e terá lugar no dia e hora marcados para a finalização da avaliação distribuída (data do Exame da Época Normal).

Avaliação da Época de Recurso: A classificação será a obtida num exame com a cotação de 20 valores. O exame será dividido em três partes, permitindo aos estudantes substituir qualquer uma das três partes pela cotação obtida no teste correspondente.

ECTS–EUROPEAN CREDIT TRANSFER AND ACCUMULATION SYSTEM

M2007–Algoritmos em Matemática Discreta é uma UC com 6 ECTS.

- 1 ECTS $\rightsquigarrow$ 27 horas de trabalho
- 6 ECTS $\rightsquigarrow$ 162 horas de trabalho
- Horas de contacto (aulas + avaliação): 56
- Horas de trabalho autónomo: 106
- Semanas até época de exames: 17

Trabalho individual por semana: 6 horas e 15 minutos

Sumário:

Conjuntos, listas e multiconjuntos. Cardinalidade. Princípio da multiplicação. Ordem lexicográfica. Exemplos.

Conjuntos, listas e multiconjuntos
16/09/2019

conjunto sem repetição, sem ordem

Exemplo: $\{a, b, c\} = \{c, a, b, a\}$

Igualdade de conjuntos:

$A = B \iff \forall x \ (x \in A \iff x \in B)$

lista com repetição, com ordem

Exemplo: $(a, b, c) \neq (c, a, b)$, $\quad (a, a, b) \neq (a, b)$

Igualdade de listas:

$(a_1, \ldots, a_m) = (b_1, \ldots, b_n) \iff m = n \quad \text{e} \quad \forall i \ (a_i = b_i)$

multiconjunto com repetição, sem ordem

Exemplo: $[a, b, c] \neq [a, a, b, c]$, $\quad [a, b, c, b] = [b, b, a, c]$

Igualdade de multiconjuntos:

$[a_1, \ldots, a_m] = [b_1, \ldots, b_n] \iff m = n$ e existe uma permutação σ de $\{1, \ldots, n\}$ tal que $\ \forall i \ \big(a_i = b_{\sigma(i)}\big)$

Notação alternativa: $[a, a, b, b, b] = a^2 b^3 c^0$

$\prod_i a_i^{m_i}$, onde m_i é a multiplicidade de a_i $(a_i \mapsto m_i)$

Exemplos

16/09/2019

lista de compras $\rightsquigarrow$ {arroz, açúcar, pêssegos} $\rightsquigarrow$ conjunto

agenda do dia $\rightsquigarrow$
(levantar, tomar banho, vestir, comer, ir trabalhar) $\rightsquigarrow$ lista

idades dos estudantes numa turma $\rightsquigarrow$
$[18, 18, 17, 18, 19, 23, 19, 18, 17, 18]$ $\rightsquigarrow$ multiconjunto

palavras $\rightsquigarrow$ CASA $\neq$ SACA $\rightsquigarrow$ lista

letras da palavra CASA $\rightsquigarrow$ $\{A, C, S\}$ $\rightsquigarrow$ conjunto

letras da palavra CASA (com multiplicidade) $\rightsquigarrow$ $[A, A, C, S]$ $\rightsquigarrow$ multiconjunto

$|A|$ **ou** $\#A$ denotará o número de elementos de um conjunto, de uma lista ou de um multiconjunto

No caso de uma lista, usa-se também comprimento para designar o número de elementos da lista.

Exemplo:

$$|\{1,1,3\}| = 2$$
$$|(1,1,3)| = 3$$
$$|[1,1,3]| = 3$$
$$|a^4 b^0 c^2 d^1| = 4 + 0 + 2 + 1 = 7$$

Exercício

16/09/2019

Seja $S = \{x, y, z\}$, com $|S| = 3$

(a) De quantas formas é possível ordenar os elementos de S?

$$\begin{array}{ccc} xyz & yxz & zxy \\ xzy & yzx & zyx \end{array}$$

Resposta: 6

(b) Quantas listas de k elementos é possível formar com elementos distintos de S?

$k = 0$ **Resposta:** 1, **a lista vazia**

$k = 1$ x y z **Resposta:** 3

$k = 2$ xy yx xz $\cdots$ **Resposta:** $3 \times 2 = 6$

$k = 3$ **Resposta: é a resposta a (a)**

$k \geq 4$ **Resposta:** 0

Exercício (cont.)
16/09/2019

(c) Quantas listas de k elementos é possível formar com elementos de S, com repetição?
Resposta: Para $k = 2$ temos $xy, yx, xz, zx, yz, zy, xx, yy, zz$. Há $3 \times 2 + 3 = 9$ listas no total.

(d) Repetir as questões (b) e (c), mas agora ignorando a ordem.
(b), $k = 2$ $\quad \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}$
Resposta: 3 conjuntos
(c), $k = 2$ $\quad [x, y], [x, z], [y, z], [x, x], [y, y], [z, z]$
Resposta: 6 multiconjuntos

(e) Quantas formas há de particionar S em k subconjuntos $\neq \emptyset$ e disjuntos dois-a-dois?
$k = 0$ **Resposta: 0**
$k = 1$ $\quad \{\{x, y, z\}\}$ **Resposta: 1**
$k = 2$ $\quad \{\{x\}, \{y, z\}\}$, $\{\{y\}, \{x, z\}\}$, $\{\{z\}, \{x, y\}\}$ **Resposta: 3**
$k = 3$ $\quad \{\{x\}, \{y\}, \{z\}\}$ **Resposta: 1**
$k \geq 4$ **Resposta: 0**

Princípio da multiplicação
16/09/2019

Teorema (Listas com repetição)

Dado um conjunto S com n elementos, há n^k listas de k elementos de S (com repetição).

Mais geralmente:

Teorema (Regra do produto)

O número de listas $(a_1, \ldots, a_k)$ de comprimento k tais que a_i (com $1 \leq i \leq k$) é escolhido de um conjunto com n_i elementos (em particular, n_i não depende dos termos anteriores) é $n_1 \times \cdots \times n_k$.

Obs.: Se $n_1 = \cdots = n_k = n$ obtém-se o teorema anterior.

Produto cartesiano

16/09/2019

O produto cartesiano dos conjuntos C_1, C_2, ..., C_k é o conjunto

$$C_1 \times \cdots \times C_k = \{(a_1, \dots, a_k) \mid a_i \in C_i\}$$

das listas de comprimento k de elementos de $\bigcup_{i=1}^{k} C_i$ com $a_i \in C_i$.

Pela Regra do produto, $|C_1 \times \cdots \times C_k| = |C_1| \times \cdots \times |C_k|$.

Ordem lexicográfica

16/09/2019

Se C_1, C_2, ..., C_k são conjuntos totalmente ordenados então a ordem lexicográfica em $C_1 \times \cdots \times C_k$ é definida por

$$(a_1, \ldots, a_k) <_{\text{lex}} (b_1, \ldots, b_k) \iff \exists \ell \leq k \, \forall i < \ell \; (a_i = b_i \; \wedge \; a_\ell < b_\ell)$$

Exemplo: Se $k \gg 0$, $A = \{\sqcup, a, b, \ldots, z\}$ e $A^* = A \setminus \{\sqcup\}$, com

$$\sqcup < a < b < \cdots < z,$$

então a ordem lexicográfica em $A^* \times A^k$ induz a ordem usual do dicionário:

$$\text{alga} < \text{algo} < \text{algoritmia} < \text{algoritmo} < \text{alho}$$

Exemplo: nomes juvianos

16/09/2019

Em Júpiter, o alfabeto contém apenas 5 letras: A, I, L, S e T, nesta ordem. Todos os nomes têm exatamente 6 letras, começam e terminam com consoantes e contêm exatamente 2 vogais, que não podem ser consecutivas. Consoantes consecutivas têm de ser distintas. Assim, por ordem lexicográfica, os primeiros nomes são: LALALS, LALALT, LALASL, LALAST, LALATL, LALATS, LALILS e os últimos sãoTSITAT, TSITIL, TSITIS, TSITIT.

Assim:

- as vogais podem aparecer nas posições $(2, 4)$, $(2, 5)$ e $(3, 5)$;
- em qualquer um dos casos, as consoantes aparecem isoladas em 2 posições e num grupo de 2 consoantes.

Exemplo: nomes juvianos (cont.)

Temos então o seguinte procedimento/algoritmo para gerar todos os nomes:

- Escolher as posições das vogais (3 hipóteses)
- Escolher a 1ª vogal (2 hipóteses)
- Escolher a 2ª vogal (2 hipóteses)
- Escolher a 1ª consoante isolada (3 hipóteses)
- Escolher a 2ª consoante isolada (3 hipóteses)
- Escolher a 1ª consoante do grupo de duas (3 hipóteses)
- Escolher a 2ª consoante do grupo de duas (2 hipóteses)

Quantos nomes? Temos então $3 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 = 648$ nomes.

Exemplo: nomes juvianos (cont.)

16/09/2019

Podemos ver o procedimento anterior como uma decomposição em produto cartesiano $P \times V^2 \times C^2 \times D$, onde:

$$\begin{aligned} P &= \{(2,4),(2,5),(3,5)\} \\ V &= \{\text{A, I}\} \\ C &= \{\text{L, S, T}\} \\ D &= \{\text{LS, LT, SL, ST, TL, TS}\}\,. \end{aligned}$$

Para esta decomposição, TSITAT corresponde à lista $((3,5),\mathrm{I},\mathrm{A},\mathrm{T},\mathrm{T},\mathrm{TS})$.