Teorema da Função Inversa

<u>ideia</u> $F: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ $\mathcal{U}$ aberto em $\mathbb{R}^n$

- F é invertível? (G tq $G \circ F = Id$)
- F é invertível numa viz. de $x_0 \in \mathcal{U}$ fixado?

(global / local)

<u>1º caso</u> $f(x,y) = (ax+by, cx+dy)$

$$\begin{cases} ax+by = e_0 \\ cx+dy = f_0 \end{cases}$$

inverter f é equivalente a mostrar que

$\forall (e_0, f_0) \in \mathbb{R}^2$ existe uma única (x_0, y_0) tq

$f(x_0, y_0) = (e_0, f_0)$

Ora, tratando-se de um sistema linear,

tal é possível se $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \neq 0$

inverter a função corresponde a inverter a matriz.

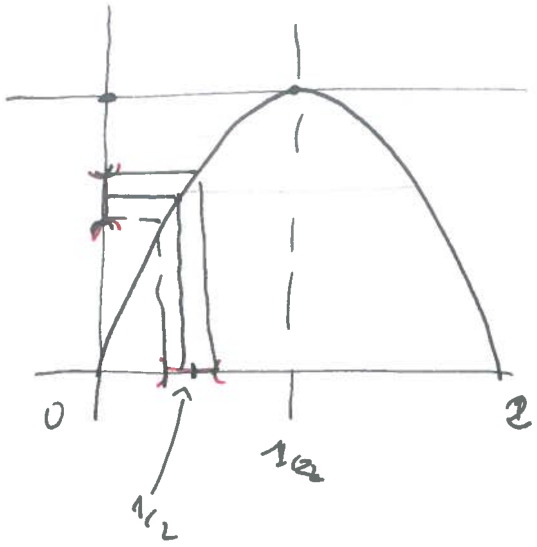
matriz dos coeficientes

que tb. é $J(f)_{(x_0,y_0)}$

Se $\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = 0$ então para cada (e_0, f_0) ou o sistema tem uma infinidade de soluções ou nenhuma. //

2º caso

$f(x) = 1 - (1-x)^2$



$f \nearrow 3/4$

- na vizinhança de $1/2$ está definida a inversa

$y<1$

$\left(y = 1-(1-x)^2 \Rightarrow 1-y = (1-x)^2 \Rightarrow \right.$

$\left. \Rightarrow 1-x = \sqrt{1-y} \Rightarrow x = 1 - \sqrt{1-y} \right)$ porquê?

$+$

- na vizinhança de 1 não está definida a inversa.

a diferença é a perda de injectividade

Nota

Quebra de injectividade num intervalo, f de classe C^1 $\Rightarrow f'(\xi)=0$ para algum ξ

condição

$f' \neq 0$ no intervalo

(g inversa, g de classe C^1

$(g\circ f)' = f' g$

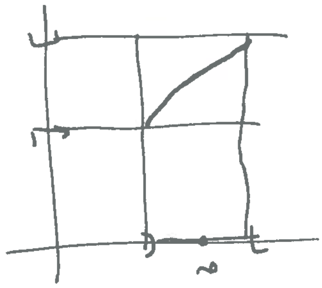
$f(x) = f(y)$, $x \neq y$

$f(x) - f(y) = f'(\xi)(x-y)$

$\therefore f'(\xi) = 0$

f de classe C^1

Th. se $f'(x_0) \neq 0$ então f é localmente invertível em x_0 e a inversa é de classe C^1



De $f^{-1} \circ f = Id$

temos

$$(f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = 1$$

$$\therefore \quad (f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}$$

A condição $f'(x_0) \neq 0$ traduz-se em $\mathbb{R}^n$

para $Df(x_0)$ é isomorfismo

$$\Updownarrow$$

$Jf(x_0)$ é invertível

$$\Updownarrow$$

$\det Jf(x_0) \neq 0$.

Teorema: Sejam $\mathcal{U}$ aberto de $\mathbb{R}^n$, $f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 e $x_0 \in \mathcal{U}$ tq $Df(x_0)$ é isomorfismo (ou $\det J(f)(x_0) \neq 0$). Então f é localmente invertível em x_0 com inversa de classe C^1, isto é existem abertos V e W, $x_0 \in V \subseteq \mathcal{U}$ e $f(x_0) \in W$ tais que $f(V) = W$ e $f|_V : V \longrightarrow W$

T. F. Inversa

Um exemplo

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \rightsquigarrow (x^2 e^y , y^2 x)$$

$f(0,0) = (0,0)$

$J(f)\big|_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$f(1,1) = (e, 1)$$

Inversa local de f em $(1,1)$:

$f(x,y) = (x_0, y_0)$ com (x_0, y_0) "perto" de $(e,1)$

isto é
$$\begin{cases} x^2 e^y = x_0 \\ y^2 x = y_0 \qquad (y_0 \neq 0) \end{cases}$$

localmente:
$$\begin{cases} (y_0/y^2)^2 \cdot e^y = x_0 \quad (\dots) \\ x = y_0/y^2 \qquad (y \neq 0) \end{cases}$$

Existência: • f é de classe C^1

• $J(f)\big|_{(1,1)} = \begin{bmatrix} 2xe^y & xe^y \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}\Bigg|_{(1,1)}$

$$\therefore \det J(f)\big|_{(1,1)} = \det \begin{bmatrix} 2e & e \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 3e \neq 0$$

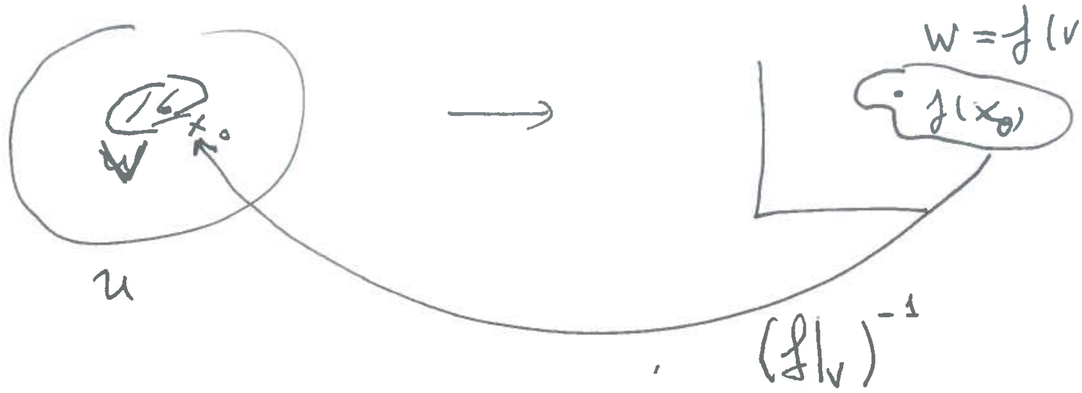
O Teorema da Função Inversa garante a existência de abertos V de $\mathbb{R}^2$, $(1,1) \in V$, e W de $\mathbb{R}^2$, $(e,1) = f(1,1) \in W$ tais que $f|_V : V \longrightarrow W$ admite inversa $(f|_V)^{-1} : W \longrightarrow V$ que é de classe C^1.

Em particular, $\forall (x_1, y_1) \in W$ o sistema
$$\begin{cases} x^2 e^y = x_1 \\ y^2 x = y_1 \end{cases}$$
admite uma única solução $(x_0, y_0) \in V$.

$$D(f_1^{-1})(e,1) = [\mathbb{D} f(1,1)]^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 2/3e & -1/3 \\ -\frac{1}{3e} & 2/3 \end{bmatrix}$$

admite inversa de classe C^{Ω} ⟶ $(f|_V)^{-1}$



Além disso $\quad D(f|_V^{-1})(f(x_0)) = (Df(x_0))^{-1}$.

Fim - 7ª aula

1 - exemplo:

$$f(x,y,z) = (x^2 e^{\cos z} + y^4,\ x^2 + y^3,\ z + y^2)$$

$$(1, 1, \pi/2) = (2,\ 2,\ 1 + \pi/2)$$

$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ não é invertível

$f(-1, 1, \pi/2) = f(1, 1, \pi/2)$ não é injetiva.

$$J(f) = \begin{bmatrix} 2x e^{\cos z} & 4y^3 & -\sin z \cdot x^2 e^{\cos z} \\ 2x & 3y^2 & 0 \\ 0 & 2y & 1 \end{bmatrix}_{(1,1,\pi/2)}$$

f é de classe C^1 (...)

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\det]{} 6 - 4 - 8 = -6 \neq 0$$

f é localmente invertível em $(1, 1, \pi/2)$ i.e. existem abertos V, W tq $(1, 1, \pi/2) \in V$,

$f(1,1,\pi/2) = (2, 2, 1+\pi/2) \in W$ e $f|_V : V \longrightarrow W$

tem inversa de classe C^1. Além disso

$$J(f_{|V}^{-1})\underbrace{(2, 2, 1+\pi/2)}_{f(1,1,\pi/2)} = \left(J(f)(1,1,\pi/2)\right)^{-1}$$

$$(\ldots) \quad J(f_{|V}^{-1})(2,2,1+\pi/2) = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 4 & -4 & -2 \end{bmatrix} \times \frac{1}{-6}$$

$$Df^{-1}(2,2,1+\pi/2)(u,v,w) = (3u - 6v + 3w, -2u + 2v - 2w, 4u - 4v - 2w) \times (-1/6)$$

<u>Nota</u> esta possibilidade de inversa local corresponde a dizer que é possível resolver o sistema

$$\begin{cases} x^2 e^{\cos z} + y^4 = x_1 \\ x^2 + y^3 = y_1 \\ z + y^4 = z_1 \end{cases}$$

para (x_1, y_1, z_1) próximo de $(2, 2, 1+\pi/2)$ (que tem solução $(1, 1, \pi/2)$)

Ideia de demonstração do Teorema

ponto chave
mostra a existência
de inversa local
contínua

① Simplificação

$f(x_0) = y_0 \qquad A = Df(x_0)$ isomorfismo

$$\boxed{h(x) = A^{-1}\left(f(x + x_0) - y_0\right)}$$

$$h(0) = A^{-1}\left(f(x_0) - y_0\right) = A^{-1}(0) = 0$$

$$Dh(0) = D(A^{-1})\left(f(x_0) - y_0\right) \circ Df(x_0) =$$

$$= A^{-1} \circ Df(x_0) = Id.$$

tem-se $h(0) = 0$ e $Dh(0) = Id$ $\quad h$ de classe C^1

Nota $\Rightarrow \quad g(x) = f(x + x_0) - y_0$

$$g = T_2^{-1} \circ f \circ T_1 \qquad \begin{aligned} T_1(x) &= x + x_0 \\ T_2(y) &= y + y_0 \end{aligned}$$

$$h = A^{-1} \circ g$$

Se h é localmente invertível numa viz. de 0
(c/ inversa local de classe C^1)
então

$$h^{-1} \circ h = \underbrace{(h^{-1} \circ A^{-1})}_{} \circ g = Id.$$

logo a inversa local de g é $g^{-1} = h^{-1} \circ A^{-1}$

$$g = T_2^{-1} \circ f \circ T_1 \longrightarrow f = T_2 \circ g \circ T_1^{-1}$$

$$f^{-1} = T_1 \circ g^{-1} \circ T_2^{-1}$$

$$\boxed{\therefore f^{-1} = T_1 \circ h^{-1} \circ A^{-1} \circ T_2}$$

Tb sai que $Df^{-1}(f(x_0)) = A^{-1}$.

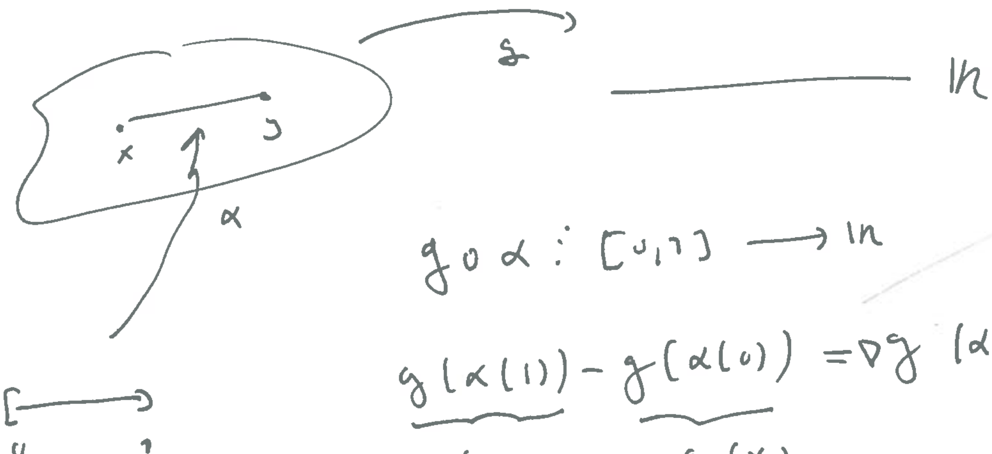
---

② Um resultado auxiliar

Teorema do valor Médio (para funções escalares)

U aberto de $\mathbb{R}^n$
e $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.
$x, y \in U$ tq o segmento $\overline{xy}$ de extremos x e y está contido em U. Então existe $z \in \overline{xy}$
tq $\boxed{(g(y) - g(x)) = Dg(z) \,|\, (y - x)}$

dem:



$(g \circ \alpha)'(t_0)$

$$g \circ \alpha : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\underbrace{g(\alpha(1))}_{g(y)} - \underbrace{g(\alpha(0))}_{g(x)} = Dg(\alpha(t_0)) \,|\, (\alpha(1) - \alpha(0))$$

$$= Dg(z) \cdot | (y - x)$$

∎

③ Demonstração para a versão simplificada (34)

$h: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 $0 \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$

$h(0)=0$ $Dh(0) = Id.$

Então existem abertos V e W t.q. $0 \in V$, $0 \in W$

$h(V) = W$, $V \subseteq \mathcal{U}$ e $h|_V : V \to W$ é

bijectiva e tem inversa contínua.

<u>dem</u>: para $y \in \mathbb{R}^n$

define-se $g_y(x) = y + x - h(x)$

É claro que $\left[\begin{array}{c} \text{existir } x \text{ t.q. } h(x) = y \\ \Updownarrow \\ g_y(x) = x \end{array}\right]$

por lá

i.e. determinar uma pré-imagem de y é equivalente a obter um ponto fixo de $g_y(\cdot)$

Seja $g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$
$x \mapsto x - h(x)$

g é de classe C^1, $g(0)=0$, e

$Dg(0) = Id - Dh(0) = \mathcal{O}_n$ – aplicação linear nula

Por continuidade de Dg existe $\varepsilon > 0$

tq $\|x\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|\nabla g_i(x)\| \leq 1/2m$, $\forall i \in \{1, .., 2m\}$.

onde $g = (g_1, .., g_m)$

Assim, se $x \in D(0;\varepsilon)$ então

$$\|g(x)\| = \|g(x) - g(0)\| \leq \sum_{i=1}^{m} |g_i(x) - g_i(0)|$$

$$\underset{\text{T.V.M.}}{\leq} \sum_{i=1}^{m} |\nabla g_i(t_i x)|\, |x| \leq \quad *$$

$t_i \in [0,1]$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\|\nabla g_i(t_i x)\|}_{\leq 1/2m} . \|x\| \leq 1/2 \|x\| \leq \varepsilon/2$$

reter

Portanto, se $y \in D(0; \varepsilon/2)$ e $x \in D(0; \varepsilon)$

tem-se

$$\|g_y(x)\| = \|y + g(x)\| \leq \|y\| + \|g(x)\| \leq$$

$$\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Isto é

$$g_y(D(0;\varepsilon)) \subseteq D(0;\varepsilon), \quad \forall y \in D(0; \varepsilon/2)$$

Também

$$\| g_y(x_1) - g_y(x_0) \| = \| g(x_1) - g(x_0) \| \leq$$

$$\leq \tfrac{1}{2} \| x_1 - x_0 \|, \quad \forall x_1, x_0 \in D(0;\varepsilon)$$

sendo esta desigualdade obtida como em (*)

Decorre que:

- Para cada $y \in D(0;\varepsilon/2)$ g_y é uma contracção de razão $1/2$ de $D(0;\varepsilon)$ em $D(0;\varepsilon)$. A aplicação, x fixo,

$$y \in D(0;\varepsilon/2) \rightsquigarrow g_y(x) = y + x - h(x)$$

é contínua.

Assim, pela versão paramétrica do Teorema do Ponto Fixo de Banach, concluímos que, para cada $y \in D(0;\varepsilon/2)$, existe um e um só $x_y \in D(0;\varepsilon)$ tal que

$g_y(x_y) = x_y$, isto é $h(x_y) = y$, (37)

e a aplicação $y \rightsquigarrow x_y$ é contínua.

Observe-se também que, para cada $y \in D(0, \varepsilon/2)$,

se $\| x_y \| = \varepsilon$ então

$\varepsilon = \| x_y \| = \| g_y(x_y) \| = \| y + g(x_y) \| \leq$

$\leq \| y \| + \varepsilon/2 \leq \varepsilon$.

usando (*)

Assim $\| y \| = \varepsilon/2$

Portanto se $y \in B(0; \varepsilon/2)$ então $x_y \in B(0; \varepsilon)$

Finalmente considere-se

$$W = B(0; \varepsilon/2)$$

$$V = \underbrace{h^{-1}(W)}_{\text{aberto}} \cap B(0; \varepsilon)$$

$\forall y \in W \quad \exists!\, x \in V$ tq $h(x) = y$.

Além disso a inversa é contínua

14

Introduzir $\|A\|$

$$\|A(u)\| = \left\|A \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i\right\| \leq \left\|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i A(e_i)\right\|$$

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i \qquad \leq \sum_{i=1}^{m} \|A(e_i)\| \leq M$$

$$\sum \alpha_i^2 \leq 1$$

$$\|u\| \leq 1$$

$$\|A\| = \sup_{\|u\| \leq 1} \|A(u)\|$$

$$\|A(u)\| \leq \|A\| \cdot \|u\|$$

$\|u\| = 1$ ok. $u \neq \vec{0}$ $\quad u = \|u\| \left(\frac{1}{\|u\|} \cdot u\right)$ $\quad A(u) = \|u\| \cdot$

$u = \vec{0}$ ok.

$$\left\| \frac{1}{\|x-x_0\|}\left(f(x) - f(x_0)\right) - A\left(\frac{1}{\|x-x_0\|} \cdot x - x_0\right) \right\|$$

[illegible] $\frac{1}{\varepsilon}$

[illegible]

A matriz. O [illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

(4) - Derivação da função inversa

Sabemos que $\dfrac{\|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \to 0$

onde $A = Df(x_0)$,

e queremos provar que, para $y=f(x)$ e $y_0=f(x_0)$,

$$\frac{\|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)-A^{-1}(y-y_0)\|}{\|y-y_0\|} \to 0$$

Ora:

$$\frac{\|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)-A^{-1}(y-y_0)\|}{\|y-y_0\|} =$$

$$= \frac{\|x-x_0 - A^{-1}(f(x)-f(x_0))\|}{\|f(x)-f(x_0)\|} =$$

$$= \frac{\|A^{-1}[A(x-x_0) - f(x)+f(x_0)]\|}{\|x-x_0\|} \times \frac{\|x-x_0\|}{\|f(x)-f(x_0)\|} \leq$$

$$\leq \underbrace{\|A^{-1}\|}\cdot \frac{\|f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \times \underbrace{\left(\frac{\|f(x)-f(x_0)\|}{\|x-x_0\|}\right)^{-1}}$$

comentar:

norma de uma aplicação linear

limitado

comentar:

$$\frac{A(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = A\left(\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}\right)$$

$\longrightarrow 0$

$y \to y_0$

$(x \to x_0$

$$0 < a \leq \left\| A\left(\frac{x-x_0}{\|x-x_0\|}\right)\right\| \leq b$$

e $Df(x_0) = A$

A invertível.

Observações / Comentários

1) Em geral não se conhecem os abertos V, W e $(f|_V)^{-1}$, apenas se determina $Df^{-1}(f(x_0))$

2) $Df(x_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ é isomorfismo

$$\Updownarrow$$

$Jf(x_0)$ é invertível

$$\Updownarrow$$

$$\det J(f)|_{x_0} \neq 0$$

3) O Teorema apenas garante a existência de inversa local

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \rightsquigarrow (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

$$f(x, y) = f(x, y + 2k\pi), \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \forall k \in \mathbb{Z},$$

portanto f não admite inversa.

Ora f é de classe C^1 e

$$\det J(f)|_{x_0} = \det \begin{bmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{bmatrix} = e^{2x} \neq 0$$

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$