Teorema multinomial e relações de recorrência

Samuel Lopes

M2007–Algoritmos em Matemática Discreta

27 de setembro de 2019

27/09/2019

Sumário:

Partições etiquetadas de um conjunto. Teorema multinomial. Relações de recorrência. Prova combinatória da relação de Pascal para os coeficientes binomiais. Condições iniciais.

Partições etiquetadas

Uma partição etiquetada de $[n]$ de tipo $(m_1, \ldots, m_k)$, onde $m_1 + \cdots + m_k = n$, é uma lista $(B_1, \ldots, B_k)$ de k subconjuntos disjuntos de $[n]$ tais que $|B_i| = m_i$. **Logo,** $[n] = \dot{\bigcup}_{i=1}^{k} B_i$.

Pelo que foi visto na última aula, o número de partições etiquetadas de $[n]$ de tipo $(m_1, \ldots, m_k)$ é $\binom{n}{m_1, \ldots, m_k}$.

Exemplos I

27/09/2019

Queremos distribuir 11 brinquedos por 4 crianças. De quantas formas o podemos fazer se a criança mais velha receber 2 brinquedos e as restantes 3 brinquedos?

Resolução: O problema é equivalente a uma partição etiquetada de tipo $(2,3,3,3)$, onde $n = 11$ é o número de brinquedos e os conjuntos da partição correspondem às crianças (que são distintas, daí termos uma partição etiquetada).

Resposta: $\binom{11}{2,3,3,3} = 92\,400.$

Exemplos II

Quantas palavras de k letras podemos formar com as letras de $ALADA$?

Resolução: Sejam $m_1 =$nº de A's, $m_2 =$nº de D's e $m_3 =$nº de L's. A resposta é a soma de coeficientes multinomiais $\binom{k}{m_1, m_2, m_3}$ sobre todas as possibilidades para m_1, m_2 e m_3 satisfazendo:

$$m_1 + m_2 + m_3 = k, \quad 0 \leq m_1 \leq 3,\ 0 \leq m_2, m_3 \leq 1.$$

Resposta:

$k = 1$	$(1,0,0)$ e as 2 permutações desta solução $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$	$3\binom{1}{1,0,0} = 3$
$k = 2$	$(2,0,0)$; $(1,1,0)$ e as 2 permutações desta solução :$(1,0,1)$ e $(0,1,1)$	$\binom{2}{2,0,0} + 3\binom{2}{1,1,0} = 7$
$k = 3$	$(3,0,0)$; $(2,1,0)$ & a permutação $(2,0,1)$; $(1,1,1)$	$\binom{3}{3,0,0} + 2\binom{3}{2,1,0} + \binom{3}{1,1,1} = 13$
$k = 4$	$(3,1,0)$ & permutação; $(2,1,1)$	$2\binom{4}{3,1,0} + \binom{4}{2,1,1} = 20$
$k = 5$	$(3,1,1)$	$\binom{5}{3,1,1} = 20$

Exemplos III

27/09/2019

De quantas formas é possível formar 4 equipas de 3, de um conjunto de 12 pessoas?

- Partições etiquetadas de tipo $(3,3,3,3)$: $\binom{12}{3,3,3,3}$.
- Na resposta anterior assumimos que as equipas eram distinguíveis (equipa A, Equipa B, etc.) uma vez que considerámos partições etiquetadas. E se não forem?

$$\left\{\begin{matrix}\text{partições}\\ \text{não etiquetadas}\end{matrix}\right\} \times \underbrace{\left\{\begin{matrix}\text{formas de}\\ \text{etiquetar}\end{matrix}\right\}}_{4!} = \underbrace{\{\text{partições etiquetadas}\}}_{\binom{12}{3,3,3,3}}$$

Resposta: $\frac{1}{4!}\binom{12}{3,3,3,3}$.

Exemplos III (cont.)

- E se quiséssemos emparelhar as equipas (indistinguíveis) duas-a-duas para uma competição?

Resposta: **resposta à questão anterior** $\times \underbrace{\binom{4}{2,2} \times \frac{1}{2!}}_{\text{partições não etiquetadas de tipo } (2,2)} = \frac{1}{(2!)^3}\binom{12}{3,3,3,3}$

OU

escolher o oponente da equipa 1 no problema inicial (3) e desetiquetar $\left(\frac{1}{4!}\right)$

OU

$$\left\{\begin{matrix}\text{equipas (sem etiqueta)}\\ \text{emparelhadas}\end{matrix}\right\} \times \underbrace{\left\{\begin{matrix}\text{etiquetar}\\ \text{“bloco 1”, “bloco 2”}\end{matrix}\right\}}_{2!} \times \underbrace{\left\{\begin{matrix}\text{etiquetar dentro}\\ \text{de cada bloco}\end{matrix}\right\}}_{(2!)^2}$$

$$= \underbrace{\{\text{partições etiquetadas}\}}_{\binom{12}{3,3,3,3}}$$

O que justifica o nome coeficiente multinomial?

Consideremos o multinómio

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n.$$

Usando a propriedade distributiva (e a propriedade comutativa), ao expandir a expressão acima obtemos monómios da forma

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_k^{m_k}, \quad \text{com } m_i \geq 0 \text{ e } m_1 + \cdots + m_k = n.$$

De quantas formas é que podemos obter um tal monómio? Por aplicação da propriedade distributiva a

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \cdot (x_1 + x_2 + \cdots + x_k) \cdots (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$

devemos escolher em cada fator (i.e. para cada posição entre 1 e n) uma das variáveis (i.e., um índice entre 1 e k), repetindo m_1 vezes a variável x_1, m_2 vezes a variável x_2, ..., m_k vezes a variável x_k.
cf. problema MISSISSIPI com variáveis=letras.

Função geradora dos coeficientes multinomiais

Logo o coeficiente de $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_k^{m_k}$ em $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ é $\binom{n}{m_1, \ldots, m_k}$. Daqui obtemos:

Teorema (Teorema multinomial)

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{\substack{m_i \geq 0 \\ m_1 + \cdots + m_k = n}} \binom{n}{m_1, \ldots, m_k} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_k^{m_k}.$$

Dizemos também que $(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n$ é a **função geradora** dos coeficientes multinomiais $\binom{n}{m_1, \ldots, m_k}$.

Relações de recorrência

27/09/2019

Vejamos outra forma de calcular os coeficientes binomiais

$$\binom{n}{k} = \text{n}^{\text{o}} \text{ de subconjuntos de } [n] \text{ com } k \text{ elementos}$$

Seja $S \subseteq [n]$. Há duas possibilidades mutuamente exclusivas:

$n \notin S$ Logo S é um subconjunto de $[n-1]$ com k elementos e há exatamente $\binom{n-1}{k}$ possibilidades para S.

$n \in S$ Logo S obtém-se acrescentando n a um subconjunto de $[n-1]$ com $k-1$ elementos e há exatamente $\binom{n-1}{k-1}$ possibilidades para $S \setminus \{n\}$.

Logo:

$$\underbrace{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}}_{\text{relação de recorrência}} \qquad (*)$$

Relações de recorrência (cont.)

27/09/2019

Assim, usando a relação de recorrência $(*)$, podemos obter $\binom{n}{k}$ à custa de termos **inferiores** desta sucessão (i.e., termos da forma $\binom{m}{\ell}$ com $m < n$).

Iterando, conseguimos obter o valor de $\binom{n}{k}$ à custa da relação de recorrência $(*)$ e das condições iniciais:

$$\binom{n}{k} = 0 \quad \text{se } k > n \qquad \text{e} \qquad \binom{n}{0} = 1, \quad \forall\, n \geq 0.$$

Triângulo de Pascal

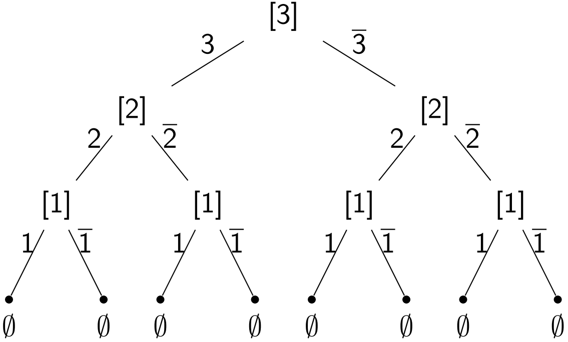
$$\binom{n}{k}$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	2	1	0	0	0	0	0
3	1	3	3	1	0	0	0	0
4	1	4	6	4	1	0	0	0
5	1	5	10	10	5	1	0	0
6	1	6	15	20	15	6	1	0

Exemplo: transposição da recursividade para a geração de subconjuntos

Exemplo:

subconjuntos de [3] $\leftrightsquigarrow$ caminhos na árvore de [3] a $\emptyset$



(**árvore binária completa,** com 2^3 **folhas**)