FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Algoritmos em Matemática Discreta (M2007)

U.PORTO

Primeiro teste **26/10/2016** **Duração: 45 minutos**

Não é permitido o uso de computadores nem de telemóveis.
Recomenda-se o uso do lápis *para o preenchimento dos quadrados. Nesse caso, o resultado deve ser suficientemente escuro de modo a permitir a leitura automática.*
Para as questões de 1 a 4, a resposta deve ser dada assinalando o quadrado respetivo, ***preenchendo-o completamente****.* *Se for assinalado mais do que um quadrado, correspondendo a mais do que uma resposta para a mesma questão, a resposta será tratada como se não fosse assinalado nenhum quadrado. A resposta, devidamente justificada, para a questão 5 deve ser dada no espaço disponibilizado para o efeito.*
As questões de 1 a 4 têm todas a cotação $1,2$*.* ***Cada resposta errada nessas questões é penalizada com um desconto de*** $0,2$***.***

1. Suponha que um saco contém dez bolas: 4 azuis, 4 vermelhas e 2 castanhas. As bolas estão numeradas de 1 a 10. É necessário escolher uma amostra **não ordenada** de 4 bolas. Quantas amostras é possível escolher com bolas de exatamente duas cores distintas?

☐ 2304 ☐ 1152 ☐ 1446 ☐ 2144 ☐ 60 ☐ 256 ■ 96
☐ 48

2. Temos 12 maçãs, 8 laranjas, 7 peras e 7 bananas. De quantas formas é possível dispor todas estas frutas em fila, supondo que frutas do mesmo tipo são indistinguíveis?

☐ $\frac{4^{34}}{34!}$ ☐ $\frac{34!}{4!}$ ☐ $\frac{34!}{12!8!7!7!} \times \frac{1}{4!}$ ☐ $34!$
☐ $12!8!7!7!$ ■ $\frac{34!}{12!8!7!7!}$ ☐ 4^{34} ☐ $\frac{34!}{12!8!7!7!} \times \frac{1}{2!}$

3. De quantas formas é possível distribuir 62 bolas brancas indistinguíveis e 8 bolas pretas numeradas de 1 a 8 por 10 caixas distintas?

☐ $\binom{62}{10} \times 10^8$ ☐ $\frac{70^{10}}{62!}$ ☐ 70^{10} ☐ $S(62,10) \times 10^8$
■ $\binom{71}{9} \times 10^8$ ☐ $\binom{62}{10} \times 8!$ ☐ $\frac{62!}{52!} \times 10^8$ ☐ $\frac{\binom{70}{10}}{62!}$

4. De quantas formas é que 5 homens e 7 mulheres se podem sentar à volta de uma mesa redonda sem que dois homens fiquem juntos?

☐ $\frac{5!7!}{12}$ ☐ $\frac{7!8!}{3!}$ ☐ $\frac{12!}{12}$ ☐ $\binom{12}{7} \times 7!5!$
☐ $\frac{\binom{12}{7}}{7} \times \frac{5!}{5}$ ■ $7!5! \times 3$ ☐ $\frac{\binom{12}{5}}{5} \times \frac{7!}{7}$ ☐ $7!5!$

5. Determine o número de permutações $\sigma \in S_{300}$ com exatamente 6 pontos fixos (isto é, com seis 1-ciclos) tais que $\sigma^3 = 1_{[300]}$, a permutação identidade. **Justifique a resposta de forma clara e concisa.**

Resolução: $\sigma^3 = 1_{[300]}$ se e só se na decomposição de σ em produto de ciclos disjuntos, a ordem de cada um desses ciclos divide 3. Logo, como 3 é primo, os ciclos de σ têm comprimento 1 ou 3. Pelas condições do problema, há exatamente 6 1-ciclos, logo há $\frac{300-6}{3} = 98$ 3-ciclos.

O número de escolhas para o conjunto dos elementos nos 1-ciclos é $\binom{300}{6}$. Escolhidos estes 6 elementos, restam 294 que formarão os 3-ciclos. Se etiquetarmos cada 3-ciclo com uma etiqueta distinta entre 1 e 98, e esquecermos a estrutura de 3-ciclo, olhando apenas para o conjunto dos elementos de cada 3-ciclo, obtemos uma partição etiquetada de um conjunto com 294 elementos, cujos blocos têm cardinal 3. Há $\binom{294}{3,3,\ldots,3}$ tais partições. Observando finalmente que cada conjunto de 3 elementos determina exatamente 2! 3-ciclos distintos, concluímos que há $(2!)^{98} \times \binom{294}{3,3,\ldots,3} \times \frac{1}{98!}$ escolhas para o conjunto dos 3-ciclos, que combinadas com as escolhas dos 6 pontos fixos dão lugar a exatamente

$$\binom{300}{6} \times (2!)^{98} \times \binom{294}{3,3,\ldots,3} \times \frac{1}{98!} = \binom{300}{6} \frac{294!}{3^{98} \times 98!} = \frac{300!}{3^{98} \times 98! \times 6!}$$

permutações.