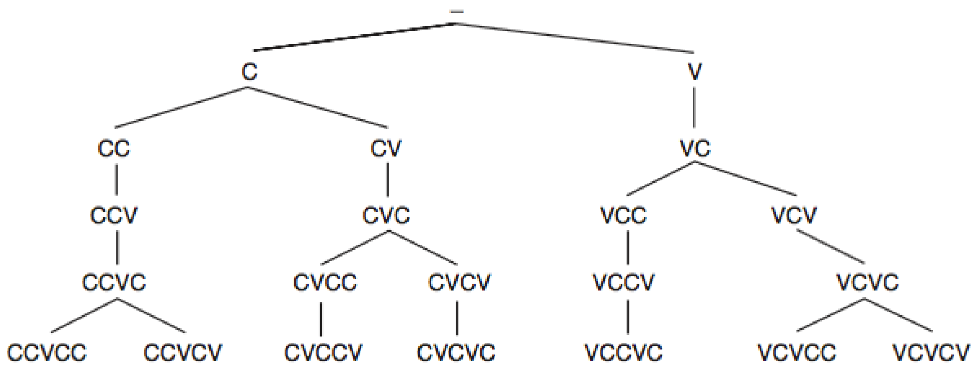
M2007 – Algoritmos em Matemática Discreta — Regente: Samuel Lopes

Folha de Problemas N.º 3* — 2019/20

◇ Recorde que rank designa a função que a cada elemento de uma lista associa o número de elementos que o antecedem e a cada folha de uma árvore de decisão associa o número de folhas à sua esquerda na representação da árvore.

1. Para a árvore de decisão abaixo (construída nas aulas teóricas), liste todos os seus vértices, exceto a raíz "–", segundo as ordens PREV, POSV e BFV.



2. Seja rank_L a função rank relativamente à ordem lexicográfica e rank_I a função rank relativamente à ordem de inserção para permutações de S_n. Responda às seguintes questões, justificando:

   (a) Determine as permutações $\sigma \in S_n$ com $\mathsf{rank}_L(\sigma) = \mathsf{rank}_I(\sigma)$, nos casos $n = 3$ e $n = 4$.

   (b) Determine $\mathsf{rank}_L(2314)$ e $\mathsf{rank}_L(45321)$.

   (c) Determine $\mathsf{rank}_I(2314)$ e $\mathsf{rank}_I(45321)$.

   (d) Determine a permutação $\sigma \in S_4$ tal que $\mathsf{rank}_L(\sigma) = 15$.

   (e) Determine a permutação $\sigma \in S_4$ tal que $\mathsf{rank}_I(\sigma) = 15$.

   (f) Determine a permutação $\sigma \in S_5$ tal que $\mathsf{rank}_L(\sigma) = 15$.

3. Construa uma árvore de decisão que liste todas as palavras de comprimento 6 formadas com as letras A e B, satisfazendo as seguintes condições:

---

*Exercícios baseados na tradução dos exercícios do livro *Mathematics for Algorithm and Systems Analysis*, de E.A. Bender e S.G. Williamson, Dover.

- Não há A's adjacentes.
- Não há três B's adjacentes.
- As folhas da árvore ocorrem pela ordem lexicográfica.

4. Construa uma árvore de decisão que liste todas as funções (estritamente) decrescentes em $[6]^{[4]}$ de forma a que as suas folhas ocorram por ordem lexicográfica, quando enumeradas da esquerda para a direita.

   (a) Determine $\mathsf{rank}(5431)$ e $\mathsf{rank}(6531)$.

   (b) Qual é a função f com $\mathsf{rank}(f) = 0$? E a função g com $\mathsf{rank}(g) = 7$?

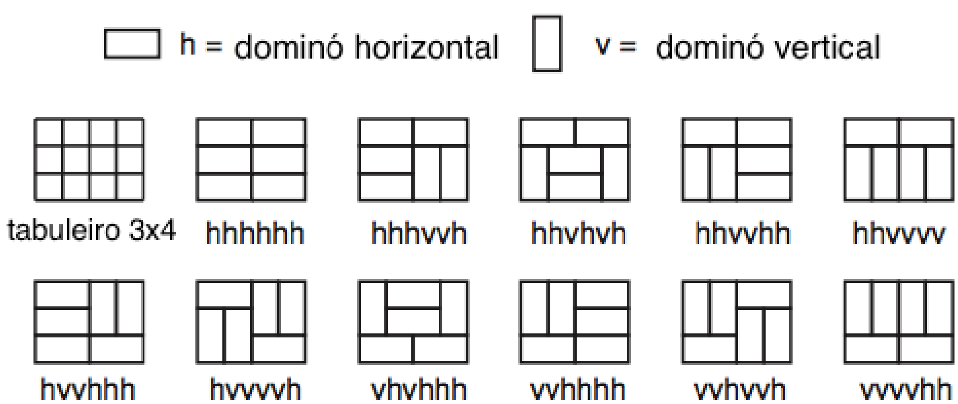
   (c) A árvore de decisão construída deve conter a árvore de decisão para as funções decrescentes em $[5]^{[4]}$. Indique-a e use-a para enumerar essas funções por ordem lexicográfica.

   (d) Indique de que forma é que todas as partes deste exercício podem ser interpretadas em termos de subconjuntos de um conjunto.

5. Modifique o algoritmo estudado para a listagem das folhas de uma árvore de decisão pela ordem *depth-first*, de forma a obter um algoritmo que liste todos os vértices da árvore pela ordem PREV. Repita o exercício para a ordem POSV.

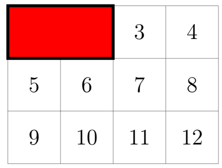
6. Neste exercício vamos estudar coberturas de um tabuleiro de dimensões $m \times n$ com peças de dominó 1×2, em que cada dominó pode ser disposto de forma horizontal ($h = 1 \times 2$) ou vertical ($v = 2 \times 1$), cobrindo exatamente duas posições do tabuleiro. O objetivo é cobrir todas as peças do tabuleiro $m \times n$ de forma a que cada posição fique coberta por um e um só dominó (e portanto sem haver peças de dominó sobrepostas).

   Exemplo: No caso $m = 3$ e $n = 4$ temos as seguintes hipóteses:

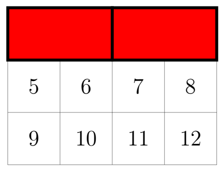


   Uma cobertura por dominós de um tabuleiro pode ser completamente descrita por uma sequência de h's e v's (no caso de um tabuleiro 3×4 são necessários 6 símbolos porque

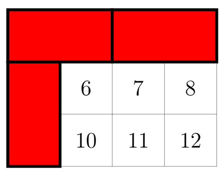
$3 \times 4 = 12$ e cada dominó ocupa 2 posições). Se convencionarmos que as entradas do tabuleiro são ordenadas de cima para baixo e depois da esquerda para a direita, então por exemplo a sequência *hhvhvh* associada a um tabuleiro 3×4 corresponde à disposição com um dominó horizontal a começar na primeira entrada livre do tabuleiro:



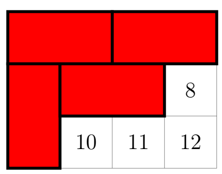
depois uma peça horizontal na nova primeira entrada livre do tabuleiro:



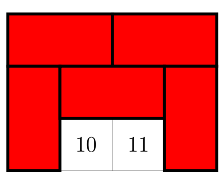
depois uma peça vertical na nova primeira entrada livre:



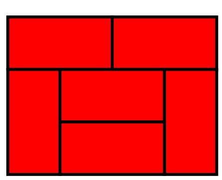
depois uma peça horizontal na nova primeira entrada livre:



depois uma peça vertical na nova primeira entrada livre:



e finalmente uma peça horizontal, obtendo-se a seguinte cobertura:



Observe-se que nem todas as sequências de 6 h's e v's correspondem a coberturas de um tabuleiro 3×4. Por exemplo, a sequência *hhhhhv* não corresponde a nenhuma cobertura.

(a) Construa uma árvore de decisão que permita obter todas as coberturas com dominós de um tabuleiro 3×4, confirmando que há de facto exatamente 11 possibilidades.

(b) Dizemos que duas coberturas de um tabuleiro são *isomorfas* se uma se puder obter da outra por rotação ou reflexão. Determine o conjunto das coberturas de um tabuleiro 4×4 com dominós que são isomorfas à cobertura $vvhvvhhh$.

(c) Determine um conjunto de coberturas com dominós de um tabuleiro 4×4, duas-a-duas não isomorfas, tal que qualquer cobertura de um tabuleiro 4×4 é isomorfa a uma (e uma só) dessas coberturas.

7. Considere em S_8 a ordem lexicográfica, relativamente à notação de uma linha das permutações.

   (a) Calcule $\mathsf{rank}(87612345)$.

   (b) Determine $\sigma \in S_8$ tal que $\mathsf{rank}(\sigma) = 20\,160$.

8. Considere o jogo das Torres de Hanói denotado por $H(8, A, B, C)$, em que os discos de 1 a 8 estão numerados do menor para o maior, como é usual. Suponha que a haste A tem os discos $6, 5, 2, 1$; que a haste B não tem nenhum disco; que a haste C tem os discos $8, 7, 4, 3$. Neste exercício, designamos esta configuração por *configuração básica*.

   (a) Qual é o caminho na árvore de decisão para $H(8, A, B, C)$ que corresponde à configuração básica?

   (b) Qual foi a jogada que originou a configuração básica, e qual era a configuração do jogo antes dessa jogada?

   (c) Qual foi a jogada anterior à que originou a configuração básica e qual era a configuração do jogo antes dessa jogada?

   (d) Qual será a próxima jogada depois da que originou a configuração básica?

   (e) Qual é o rank, na lista de todas as jogadas em $H(8, A, B, C)$, da jogada que originou a configuração básica?

9. Considere-se a lista $\overrightarrow{\text{GRAY}}(9)$.

   (a) Qual é o elemento que precede 110010000? e o que sucede 110010000?

   (b) Qual é o primeiro elemento da segunda metade da lista $\overrightarrow{\text{GRAY}}(9)$?

(c) Calcule $\mathsf{rank}(111111111)$.

(d) Determine o elemento S de $\overrightarrow{\mathrm{GRAY}}(9)$ tal que $\mathsf{rank}(S) = 372$.

10. [Este problema tem partes um pouco mais desafiantes e pode ser considerado opcional.] Considere o jogo das Torres de Hanói com quatro hastes A, C, B, X e n discos numerados de 1 a n, com raios crescentes. As regras são idênticas às do jogo usual, mas há duas hastes auxiliares B e X. O problema consiste em transferir os n discos de A para C usando as hastes auxiliares B e X. Seja h'_n o número mínimo de jogadas necessárias para resolver o jogo usual das Torres de Hanói com 3 hastes e n discos. Seja f_n o número mínimo de jogadas necessárias para resolver o novo jogo das Torres de Hanói com 4 hastes e n discos.

(a) Recorde que $h_n = 2^n - 1$ é o número de jogadas necessárias para resolver o jogo das Torres de Hanói usando o algoritmo recursivo $H(n, A, B, C)$. Mostre por indução que $h'_n = h_n$.

(b) Calcule f_n para $n = 1, 2, 3$, aproveitando o processo para também descrever, sequências otimais de jogadas.

Vamos descrever uma estratégia recursiva para resolver o jogo das Torres de Hanói com 4 hastes e n discos. Escolhem-se inteiros $p \geq 0$ e $q > 0$ tais que $p + q = n$. Vamos agora descrever a estratégia $G(p, q, A, B, X, C)$. Para executar $G(p, q, A, B, X, C)$, procedemos da seguinte forma:

(i) Se $p = 0$, então $q = n$. Nesse caso usamos o algoritmo $H(n, A, B, C)$ para deslocar os discos $1, \ldots, n$ de A para C.

(ii) Se $p > 0$, escolhem-se inteiros $i \geq 0$ e $j > 0$ tais que $i + j = p$. Usamos o procedimento $G(i, j, A, B, C, X)$ para deslocar os discos $1, 2, \ldots, p$ para X. De seguida, usamos $H(q, A, B, C)$ para deslocar os discos $p+1, \ldots, n$ para C. Por fim, usamos $G(i, j, X, A, B, C)$ para deslocar os discos $1, 2, \ldots, p$ para C, terminando a transferência de discos. De todas as escolhas possíveis para i e j, escolhemos a que minimiza o número de jogadas.

Finalmente, para deslocar os n discos, escolhemos a estratégia da forma $G(p, q, A, B, X, C)$, com $n = p + q$, que minimiza o número de jogadas. Designamos este número por s_n.

(c) Quais são os casos mais simples neste algoritmo recursivo? Como é que determinamos os inteiros i e j que minimizam o número de jogadas? Use o método que indicou para resolver o problema para $n \leq 6$.

(d) Estabeleça uma relação de recorrência para a sucessão s_n.

(e) Prove que $f_n \leq \min_{q>0}\{2f_{n-q} + h_q\}$, com $f_0 = 0$. Use a recursividade.