M2007 – Algoritmos em Matemática Discreta — Regente: Samuel Lopes

Folha de Problemas N.º 1* — 2019/20

- ◇ Um *número de n algarismos* é uma lista de n algarismos (entre 0 e 9) tal que o primeiro algarismo da lista é diferente de 0.
- ◇ Uma *palavra* de comprimento n num determinado alfabeto é uma lista finita de n letras (não necessariamente distintas) desse alfabeto. Convenciona-se que há exatamente uma palavra de comprimento 0, que é designada por *palavra vazia*.

1. Suponha que uma prateleira tem 5 livros de matemática discreta, 2 livros de análise de algoritmos, 6 livros de cálculo e 3 livros de álgebra. Deve assumir que todos os livros são distintos.
   (a) De quantas formas é possível escolher um dos livros? Resposta: 16.
   (b) De quantas formas é possível escolher um livro de cada assunto? Resposta: $5 \times 2 \times 6 \times 3 = 180$.
2. Quantos inteiros positivos de três algarismos há? E com no máximo três algarismos? Quais são as respostas às questões anteriores se substituirmos "três" por "n"? Resposta: $9 \times 10^{n-1}$; $10^n - 1 = 99 \cdots 9$ (n algarismos).
3. Prove que o número de subconjuntos de um conjunto S, incluindo o conjunto vazio $\emptyset$ e o próprio conjunto S, é $2^{|S|}$. Indique uma correspondência bijetiva entre o conjunto dos subconjuntos de S e o conjunto de todas as funções $f : S \longrightarrow \{0, 1\}$.

   Resposta:
   $$X \subseteq S \longleftrightarrow \chi_X(s) = \begin{cases} 1 & \text{se } s \in X, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
4. Suponha que $n > 1$.
   (a) Quantos números de n algarismos há? Resposta: $9 \times 10^{n-1}$.
   (b) Quantos números de n algarismos, todos diferentes de 0, há? Resposta: 9^n.
   (c) Quantos números de n algarismos contendo pelo menos um algarismo igual a 0 há? Resposta: $9 \times 10^{n-1} - 9^n$.
5. Considere o alfabeto de 26 letras (incluindo as consoantes `W`, `X` e `Y`).

---

*Exercícios baseados na tradução dos exercícios do livro *Mathematics for Algorithm and Systems Analysis*, de E.A. Bender e S.G. Williamson, Dover.

(a) Determine o número de palavras de comprimento 4 contendo *pelo menos uma* vogal. Resposta: $26^4 - 21^4$.

(b) Determine o número de palavras de comprimento 4 contendo *uma e uma só* vogal. Resposta: $21^3 \times 4 \times 5$.

6. Num país de um planeta numa galáxia distante, o alfabeto é formado apenas pelas 5 letras `A, I, L, S` e `T`, por esta ordem. Todos os nomes têm comprimento 5, começam e acabam em consoantes e contêm exatamente 2 vogais, que não são consecutivas. Além disso, consoantes consecutivas têm de ser distintas. Quantos nomes há? Resposta: $3^3 \times 2^2$.

7. Uma *composição* de um inteiro positivo n é uma lista de inteiros positivos (designados por *partes*) cuja soma é igual a n. Por exemplo, as quatro composições de 3 são 3; 2, 1; 1, 2 e 1, 1, 1.

   (a) Pensando nas formas de inserir sinais de adição '+' e vírgulas '`,`' numa lista $\underbrace{111\cdots11}_{n}$ formada por n uns, determine o número de composições de n.

   `Exemplo:` No caso das composições de 3 temos $3 \leftrightarrow 1+1+1$; $2,1 \leftrightarrow 1+1,1$; $1,2 \leftrightarrow 1,1+1$ e $1,1,1 \leftrightarrow 1,1,1$.

   Resposta: 2^{n-1}.

   (b) Determine todas as composições de 4.

   Resposta: $4; 3,1; 2,2; 1,3; 2,1,1; 1,2,1; 1,1,2; 1,1,1,1$.

   (c) Determine todas as composições de 5 com três partes.

   Resposta: $3,1,1; 1,3,1; 1,1,3; 2,2,1; 1,2,2; 2,1,2$.

8. Recorde o exemplo das aulas teóricas em que temos um alfabeto formado pelas 5 letras `A, I, L, S` e `T`, por esta ordem; os nomes têm comprimento 6, começam e acabam em consoantes, contêm exatamente 2 vogais, que não são consecutivas, e consoantes consecutivas são distintas. Suponha que os nomes são ordenados lexicograficamente num dicionário. Determine o último nome da primeira terça parte do dicionário (isto é, o 216º nome) e o primeiro nome da segunda terça parte do dicionário.

   Resposta: LTITIT e SALALS, respetivamente.

9. Considere-se novamente o alfabeto e a regra de formação de nomes do exercício 8, mas tome-se a seguinte ordem *não standard*: Sejam

$$C_1 = \{(2,4),(2,5),(3,5)\} \quad \text{(posições possíveis das vogais)},$$
$$C_2 = \{\mathrm{AA}, \mathrm{AI}, \mathrm{IA}, \mathrm{II}\} \quad \text{(listas de vogais nas posições possíveis)},$$
$$C_3 = \{\mathrm{LL}, \mathrm{LS}, \mathrm{LT}, \mathrm{SL}, \mathrm{SS}, \mathrm{ST}, \mathrm{TL}, \mathrm{TS}, \mathrm{TT}\} \quad \text{(listas de consoantes isoladas)},$$
$$C_4 = \{\mathrm{LS}, \mathrm{LT}, \mathrm{SL}, \mathrm{ST}, \mathrm{TL}, \mathrm{TS}\} \quad \text{(listas de consoantes consecutivas)}.$$

Assim, podemos identificar a lista dos nomes possíveis com o produto cartesiano $C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4$. Por exemplo, SISTAS $\leftrightarrow ((2,5), \mathrm{IA}, \mathrm{SS}, \mathrm{ST})$. Então a ordem não standard corresponde a tomar a ordem lexicográfica associada ao produto cartesiano $C_1 \times C_2 \times C_3 \times C_4$, onde em cada C_i a ordem usada é a ordem lexicográfica correspondente. Por exemplo, em C_1 temos $(2,4) < (2,5) < (3,5)$ e em C_2 temos AA < AI < IA < II.

Quais são os primeiros 7 nomes e os últimos 7 nomes relativamente à ordem não standard?

Resposta: Os primeiros 7 nomes são: LALALS, LALALT, LALASL, LALAST, LALATL, LALATS, LASALS e o último é TSITIT.

10. Recorde que o número de elementos de um multiconjunto leva em consideração a multiplicidade de cada elemento. Por exemplo, $|\{1,1,3\}_*| = 3$.

    (a) Quantos multiconjuntos com 4 elementos, pertencentes ao conjunto $\{a,b,c\}$, há? Resposta: $\binom{6}{2} = 15$.

    (b) Quantos multiconjuntos com elementos pertencentes ao conjunto $\{a,b,c\}$ há? Resposta: Uma infinidade (numerável).

11. Pretendemos determinar o número de formas de 3 rapazes e 4 raparigas se sentarem em fila.

    (a) De quantas formas é que tal se pode fazer, se não houver restrições adicionais? Resposta: $7!$.

    (b) De quantas formas é que tal se pode fazer, se os rapazes tiverem de ficar todos juntos e também as raparigas tiverem de ficar todas juntas? Resposta: $3!4! \times 2$.

    (c) De quantas formas é que tal se pode fazer, se os rapazes e as raparigas tiverem de alternar? Resposta: $3!4!$.

12. Repita o exercício 11 supondo que há 3 rapazes e 3 raparigas. Resposta: $6!; 3!3! \times 2; 3!3! \times 2$.

13. Quais são as respostas aos exercícios 11 e 12 se os rapazes e as raparigas se tiverem de sentar numa mesa redonda? Resposta: Com os números do exercício 11 as respostas são $6!; 3!4!$ e 0. Com os números do exercício 12 as respostas são $5!; 3!3!$ e $2!3!$.

14. De quantas formas é possível formar uma lista de duas letras distintas, escolhidas do conjunto das letras da palavra COMBINATORIA? E de três letras distintas? E de quatro letras distintas? Resposta: $9 \times 8; 9 \times 8 \times 7; 9 \times 8 \times 7 \times 6$.

15. De quantas formas é possível formar uma lista de duas letras escolhidas do conjunto das letras da palavra COMBINATORIA, se as letras não puderem ser usadas mais vezes do que a multiplicidade com que ocorrem em COMBINATORIA? E listas de três letras, nas mesmas condições? Resposta: $6 \times 8 + 3 \times 9$; $3 \times 3 \times 8 + 9 \times 8 \times 7$.

16. Queremos formar palavras de 3 letras usando as letras da palavra AMARELAR.

    (a) Quantas palavras é possível formar sem letras repetidas? Resposta: $5 \times 4 \times 3$.

(b) Quantas palavras é possível formar se for permitida a repetição ilimitada de letras?
Resposta: 5^3.

(c) Quantas palavras é possível formar se for permitida a repetição de letras, limitada ao número de vezes que a letra ocorre na palavra AMARELAR?

Resposta: $1 + 2 \times 4 \times 3 + 5 \times 4 \times 3$.

17. Com a generalização do uso de mensagens escritas, conjetura-se que por volta do ano 2050 a escrita se terá deteriorado consideravelmente. Nessa altura, o dicionário admite para a escrita da palavra 'RELEVO' qualquer combinação (com repetição) das letras R, E, L, V e O, sujeita às seguintes regras:

- o comprimento máximo da palavra é 6;
- a palavra deve conter pelo menos um L;
- a palavra deve começar com um R e terminar com um O;
- a palavra só tem um R e um O.

(a) Qual é o número de formas admissíveis (em 2050) de escrever RELEVO?
Resposta: $1 + (3^2 - 2^2) + (3^3 - 2^3) + (3^4 - 2^4)$.

(b) A grafia mais popular (em 2050) é aquela que, na ordem lexicográfica, aparece cinco posições acima de RELEVO. Qual é? Resposta: REELVO.

18. [Ver exercício 17.] Em 2075 a escrita estará ainda mais deteriorada! Nessa altura, o dicionário admite para a escrita da palavra 'RELEVO' qualquer combinação (com repetição) das letras R, E, L, V e O, sujeita às seguintes regras:

- o comprimento máximo da palavra é 6;
- a palavra deve conter pelo menos um L;
- a palavra deve começar com uma lista não vazia de R's e terminar com uma lista não vazia de O's, não sendo permitidos outros R's ou O's.

(a) Qual é o número de formas admissíveis (em 2075) de escrever RELEVO?
Resposta: $1 \times 10 + (3^2 - 2^2) \times 6 + (3^3 - 2^3) \times 3 + (3^4 - 2^4) \times 1 = 162$.

(b) A grafia mais popular (em 2075) é aquela que, na ordem lexicográfica, aparece cinco posições acima de RELEVO. Qual é? Resposta: REEVLO.

19. Prove que o número de listas sem repetição cujos elementos são escolhidos de um conjunto com n elementos é aproximadamente igual a $n!e$. Na contagem devem ser consideradas listas de todos os comprimentos possíveis, entre 0 e n.

Resposta:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = n!(e - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}) \sim n!e.$$

20. Num jogo de Poker, determine o número de mãos possíveis de 6 cartas com 3 pares (e portanto sem nenhum triplo). Resposta: $\binom{13}{3}\binom{4}{2}^3$.

21. No Poker, um *straight* é formado por 5 cartas consecutivas da sequência `A`, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, `J`, `Q`, `K`, `A`, não levando em consideração o naipe das cartas. Numa mão com 5 cartas, qual o número possível de *straights* distintos?

    Resposta: 10×4^5, se se incluirem os *straight flush* ou $10 \times (4^5 - 4)$ caso contrário.

22. Qual é o número de composições de n com exatamente k partes (ver o exercício 7)? Resposta: $\binom{n-1}{k-1}$.

23. Quantas palavras distintas é possível formar reordenando as letras de EXERCICIOS? Resposta: $\binom{10}{2,2,2,1,1,1,1}$.

24. Nalguns jogos de cartas o naipe de uma carta é irrelevante, distinguindo-se as cartas apenas pelo seu valor facial. Assim, há apenas 13 cartas distintas no conjunto das 52 cartas do baralho. Nesse caso, de quantas formas distintas pode ser ordenado um baralho de 52 cartas?

    Resposta: Partições etiquetadas de $\{1,\dots,52\}$ de tipo $\underbrace{(4,4,\dots,4)}_{13}$, isto é, $\binom{52}{4,\dots,4}$.

25. Numa terra longínqua, os nomes escrevem-se com as letras `A, I, L, S` e `T`, por essa ordem. Cada nome tem 7 letras, começa e acaba com uma consoante, não contém vogais consecutivas nem 3 ou mais consoantes consecutivas. Quaisquer duas consoantes consecutivas têm de ser distintas. Um exemplo de um nome admissível é LASLALS, mas LASLASS e LASLAAS não são admissíveis.

    (a) Indique os primeiros 4 nomes na ordem lexicográfica.
    Resposta: LALALAL, LALALAS, LALALAT, LALALIL.

    (b) Indique os últimos 4 nomes na ordem lexicográfica.
    Resposta: TSITSAT, TSITSIL, TSITSIS, TSITSIT.

    (c) Quantos nomes é possível formar? Resposta: $3 \times 3 \times (3 \times 2)^2 \times 2^2 + 3^4 \times 2^3$.

26. Prove, usando argumentos combinatórios (por exemplo bijeções) que

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \quad \text{e que} \quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

27. Supondo $n > 0$, prove as seguintes relações envolvendo os números de Stirling de segunda espécie $S(n,k)$:

$$S(n,n) = 1, \quad S(n,n-1) = \binom{n}{2}, \quad S(n,1) = 1, \quad S(n,2) = 2^{n-1} - 1.$$

28. O *número de Bell* B_n é o número de partições de um conjunto com n elementos. Assim,

$$B_n = S(n,1) + S(n,2) + \cdots + S(n,n), \quad \text{para } n > 0.$$

(a) Prove que $B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i}$, onde por convenção $B_0 = 1$.

Resposta: Construir o bloco da partição que contém $n+1$ e contar o número de partições recursivamente em função do número de elementos desse bloco.

(b) Usando a fórmula acima, calcule B_n para todo o $0 \leq n \leq 5$.

Resposta: $B_0 = 1$, $B_1 = 1$, $B_2 = 2$, $B_3 = 5$, $B_4 = 15$, $B_5 = 52$.

29. Consideremos as permutações $a_1, \ldots, a_9$ dos elementos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

(a) Quantas dessas permutações satisfazem a propriedade $a_i < a_{i+1}$ para todo o $i \leq 8$? Resposta: 1.

(b) Quantas dessas permutações satisfazem a propriedade $a_i < a_{i+1}$ para todo o $i \leq 8$, exceto para $i = 5$? Resposta: $\binom{9}{5} - 1$.

Código SageMath para alguns dos exercícios com ordem lexicográfica e outras:

```
PV=[[2,4],[2,5],[3,5]]
VV=['AA','AI','IA','II']
CI=['LL','LS','LT','SL','SS','ST','TL','TS','TT']
CC=['LS','LT','SL','ST','TL','TS']

nomes=[]
codigo=[]

for i in PV:
    for j in VV:
        for k in CI:
            for l in CC:
                if i==[2,4]:
                    nome=k[0]+j[0]+k[1]+j[1]+l
                elif i==[2,5]:
                    nome=k[0]+j[0]+l+j[1]+k[1]
                elif i==[3,5]:
                    nome=l+j[0]+k[0]+j[1]+k[1]
                nomes.append(nome)
                codigo.append([i,j,k,l])

#len(nomes)
nomes_lex=sorted(nomes)

print '%6s %18s %28s %10s %2s' % ('número', 'ordem não standard', 'código', 'ordem lex', '  ')

for i in range(len(nomes)):
    if nomes[i]==nomes_lex[i]:
        print '%6s %18s %28s %9s %2s' % (i+1,nomes[i], codigo[i], nomes_lex[i], '=')
    else:
        print '%6s %18s %28s %9s %2s' % (i+1,nomes[i], codigo[i], nomes_lex[i], '!=')
```