M2007 – Algoritmos em Matemática Discreta — Regente: Samuel Lopes

Folha de Problemas N.º 2* — 2019/20

- ◇ Quando for conveniente usaremos a seguinte notação: $[n] = \{1, \dots, n\}$.
- ◇ Dada uma função f com domínio da forma $[n]$, podemos identificá-la com a sua escrita em notação de uma linha, $(f(1), f(2), \dots, f(n))$, considerando no domínio a ordem usual.
- ◇ Dados conjuntos A e B, o conjunto das funções de A em B é denotado por B^A.

1. Nas alíneas abaixo são dadas permutações numa das seguintes três formas: notação de uma linha, notação de duas linhas, em ciclo. Escreva a permutação nas outras duas formas e a sua inversa nas três formas.

   (a) $(1\ 5\ 7\ 8)(2\ 3)(4)(6)$ [em ciclo].

   (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 7 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $(5, 4, 3, 2, 1)$ [em notação de uma linha].

   (d) $(5\ 4\ 3\ 2\ 1)$ [em ciclo].

2. Uma ilusionista tem à sua frente quatro copos invertidos, em fila. Ela põe uma bola dentro do copo na primeira posição. De seguida, rapidamente troca as posições dos copos na primeira e terceira posições, depois troca os copos na primeira e quarta posições e depois troca os copos na segunda e terceira posições. Ela faz esta sequência de movimentos um total de cinco vezes. Qual é a posição final da bola?

3. Seja f uma permutação do conjunto $\{1, \dots, n\}$. Vamos designar o ciclo de f que contém 1 por *ciclo gerado por* 1.

   (a) Qual é o número de permutações de $\{1, \dots, n\}$ cujo ciclo gerado por 1 tem comprimento n?

   (b) Qual é o número de permutações de $\{1, \dots, n\}$ cujo ciclo gerado por 1 tem comprimento k?

   (c) Se a resposta dada à pergunta (3b) estiver correta, quando somamos as respostas para os valores de k entre 1 e n deveremos obter $n!$. Explique porquê e verifique se a sua resposta à pergunta (3b) satisfaz esta propriedade.

4. Considere as seguintes permutações escritas em forma de ciclo.

---

*Exercícios baseados na tradução dos exercícios do livro *Mathematics for Algorithm and Systems Analysis*, de E.A. Bender e S.G. Williamson, Dover.

(a) Calcule $(1\ 2\ 3)^{300}$.

(b) Calcule $((1\ 3)(2\ 5\ 4))^{300}$.

(c) Mostre que para toda a permutação f de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, se tem que f^{60} é a permutação identidade. Determine também f^{61}.

5. Neste exercício identificamos as funções em $[k]^{[n]}$ com a sua escrita $x_1 x_2 \cdots x_n$ em notação de uma linha, e ordenamos estas sequências segundo a ordem lexicográfica.

   (a) Enumere, por ordem lexicográfica, todas as funções estritamente decrescentes em $[5]^{[3]}$. Observe que essa lista pode ser identificada com a lista de todos os subconjuntos de $[5]$ com 3 elementos.

   (b) Para cada elemento da forma $x_1 x_2 x_3$ da lista obtida em (5a), calcule $\binom{x_1-1}{3} + \binom{x_2-1}{2} + \binom{x_3-1}{1} + 1$. Qual é o significado destes números em termos da lista obtida em (5a)?

   (c) Enumere, por ordem lexicográfica, todas as funções estritamente crescentes em $[5]^{[3]}$. Observe que essa lista pode ser identificada com a lista de todos os subconjuntos de $[5]$ com 3 elementos, ordenados por ordem lexicográfica.

   (d) Qual é a fórmula análoga à fórmula em (5b), para a questão (5c)?

   [`Sugestão:` Para cada elemento $x_1 x_2 x_3$ da lista em (5c), considere o elemento $(6 - x_1)(6 - x_2)(6 - x_3)$.]

   (e) Na lista, ordenada lexicograficamente, de todas as funções estritamente decrescentes em $[9]^{[5]}$, determine o antecessor e o sucessor de 98321.

   (f) Quantos elementos ocorrem antes de 98321 na lista de (5e)?

6. O objetivo deste exercício é evidenciar uma técnica que permite obter todas as partições de um conjunto com n elementos. Esta técnica é particularmente útil para pequenos valores de n. Iremos definir uma classe de funções, designadas por *funções de crescimento condicionado*, cujos conjuntos de imagens recíprocas de elementos da sua imagem é precisamente o conjunto das partições de $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

   (a) Dizemos que uma função $f \in [n]^{[n]}$ é uma *função de crescimento condicionado* se $f(1) = 1$ e se $i > 1$, $f(i) - 1$ é menor ou igual ao máximo do conjunto $\{f(k) \mid 1 \leq k < i\}$. Quais das seguintes funções, escritas em notação de uma linha, são funções de crescimento condicionado? Justifique.

   $$(2, 2, 3, 3), \qquad (1, 2, 3, 3, 2, 1), \qquad (1, 1, 1, 3, 3), \qquad (1, 2, 3, 1).$$

   (b) Enumere, usando a ordem lexicográfica, todas as funções de crescimento condicionado para $n = 4$. Utilize notação de uma linha e para cada uma, descreva a partição do domínio determinada pelas imagens recíprocas dos elementos da sua imagem.

(c) Enumere segundo a ordem lexicográfica as primeiras quinze funções de crescimento condicionado para $n = 5$. Utilize notação de uma linha. Para as funções ocupando as posições 5, 10 e 15 na lista, descreva a partição do domínio determinada pelas imagens recíprocas dos elementos da imagem da função.

7. Determine o número de funções $f \in [5]^{[6]}$ cuja imagem tem cardinal 3.

8. De quantas formas é que é possível distribuir 6 bolas distintas por 5 caixas distintas, de forma a que haja exatamente duas caixas vazias?

9. Determine:

   (a) o número de multiconjuntos de cardinal 6 cujos elementos pertencem ao conjunto $\{a, b, c, d\}$.

   (b) o número de funções crescentes (no sentido lato) em $[4]^{[6]}$.

   (c) o número de listas decrescentes (no sentido lato) de comprimento 6, cujos elementos pertencem ao conjunto $[4]$.

   (d) o número de funções estritamente crescentes em $[9]^{[6]}$.