Coeficientes binomiais e multinomiais

Funções geradoras e problema MISSISSIPPI

Samuel Lopes

M2007–Algoritmos em Matemática Discreta

25 de setembro de 2019

Sumário:

Coeficientes binomiais e algumas propriedades combinatórias destes números. Função geradora dos coeficientes binomiais e segunda dedução de uma fórmula para estes números usando o polinómio de Taylor. Problema MISSISSIPPI. Coeficientes multinomiais: colocação de bolas distintas em caixas distintas, sem ordem dentro das caixas.

Subconjuntos e sequências binárias

25/09/2019

$\mathcal{P}(A)$ designa o conjunto de todos os subconjunto de A

Designar um subconjunto $X \subseteq A$ equivale a, para cada $a \in A$ indicar se $a \in X$ (indicamos 1) ou $a \notin X$ (indicamos 0).

Logo se $|A| = n$:

$$\text{subconjuntos de } A \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{array}{c}\text{sequências binárias}\\ \text{de comprimento } n\end{array}$$

Teorema Se $|A| = n$ então $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

Exemplo: Se $A = \{1, \ldots, 10\}$ então a sequência binária 0111000100 corresponde ao subconjunto $X = \{2, 3, 4, 8\}$:

conjunto A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
sequência	0	1	1	1	0	0	0	1	0	0

Note-se que $|X|$ é o número de 1's da sequência.

Coeficientes binomiais

25/09/2019

Notação: $[n] = \{1, \ldots, n\}$ e $[0] = \emptyset$

$$\binom{n}{k} = \text{ n}^{\text{o}} \text{ de subconjuntos de } [n] \text{ com } k \text{ elementos } (k \geq 0)$$

Estes números designam-se por coeficientes binomiais

Assim:

subconjuntos de $[n]$ com k elementos $\quad E \quad$ ordenações desses k elementos $\quad \leftrightsquigarrow \quad$ lista de k elementos distintos de $[n]$

Logo:

$$\binom{n}{k} \times k! = (n)_k = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} & \text{se } 0 \leq k \leq n; \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Teorema

(a) $$\binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{se } 0 \leq k \leq n; \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

(b) $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \underbrace{X}_{k \text{ elementos}} \subseteq A \longleftrightarrow \underbrace{A \setminus X}_{n-k \text{ elementos}}$$

Função geradora dos coeficientes binomiais

Sejam $x_1, \ldots, x_n$ variáveis e $P_n(x_1, \ldots, x_n) = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n)$.

Exemplo:
$$
\begin{array}{ll}
n = 1 & P_1 = 1 + x_1 \\
n = 2 & P_2 = 1 + x_1 + x_2 + x_1x_2 \\
n = 3 & P_3 = 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3
\end{array}
$$

Em geral (pela prop. distributiva) P_n é soma de termos da forma $x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ com $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots i_k \leq n$ e $k \geq 0$.

Assim: $$I \subseteq [n] \quad \leftrightsquigarrow \quad \prod_{i \in I} x_i$$

porque ao expandir $P_n(x_1, \ldots, x_n) = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n)$ temos de decidir:

no 1º fator escolher 1 OU x_1

E no 2º fator escolher 1 OU x_2

⋮

E no último fator escolher 1 OU x_n

Este é precisamente o algoritmo que nos permite obter todos os subconjuntos de $[n]$.

Função geradora dos coeficientes binomiais (cont.)

De:

$$\{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \subseteq [n] \quad \leftrightsquigarrow \quad x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$$

fazendo a substituição $x = x_1 = \cdots = x_n$ em P_n, cada monómio $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$ é transformado em x^k.

Logo o número de termos de $P_n(x, x, \ldots, x)$ iguais a x^k é $\binom{n}{k}$.

Teorema (Binómio de Newton v.1)

$$(1+x)^n = P_n(x, x, \ldots, x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k}_{\text{função geradora da sucessão } \left\{\binom{n}{k}\right\}_{k=0,\ldots,n}}$$

Teorema de Taylor

25/09/2019

Seja $f(x) = (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\binom{n}{k}}_{*} x^k$.

Pelo **Teorema de Taylor** $f(x) = \sum_{k=0}^{n} \underbrace{\frac{f^{(k)}(0)}{k!}}_{\diamond} x^k$

$$f^{(k)}(x) = (n)_k (1+x)^{n-k} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}(1+x)^{n-k} & \text{se } 0 \leq k \leq n; \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Logo, obtemos novamente:

$$\underbrace{\binom{n}{k}}_{\substack{\text{coef. de } x^k \\ \text{em } *}} = \underbrace{\frac{f^{(k)}(0)}{k!}}_{\substack{\text{coef. de } x^k \\ \text{em } \diamond}} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{se } 0 \leq k \leq n; \\ 0 & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Teorema binomial

25/09/2019

Teorema (Binómio de Newton v.2)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Prova: **Prova combinatória**

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)}_{\text{escolher } x \text{ OU } y} \cdot \underbrace{(x+y)}_{\text{escolher } x \text{ OU } y} \cdots \underbrace{(x+y)}_{\text{escolher } x \text{ OU } y}$$

$$= \sum_{k,\ell} \underbrace{?}_{\substack{\text{em que posições} \\ \text{escolhemos } x?}} \underbrace{x^k y^\ell}_{k+\ell=n}$$

Prova algébrica

$$(x+y)^n = \left(1+\frac{x}{y}\right)^n y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{x}{y}\right)^k y^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$\blacksquare$

Poker
25/09/2019

baralho 52 cartas, distribuídas por 4 naipes e 13 valores

par 2 cartas com o mesmo valor (mas não mais de 2)

triplo 3 cartas com o mesmo valor (mas não mais de 3)

mão 5 cartas

Full House mão com 1 par $+$ 1 triplo

O nº de Full Houses possíveis é

$$\underbrace{(13)_2}_{\text{valores par e triplo}} \times \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{naipes par}} \times \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{naipes triplo}} = 3\,744$$

O nº de mãos com exatamente 2 pares é

$$\underbrace{\binom{13}{2}}_{\text{valores dos pares}} \times \underbrace{11}_{\text{outro valor}} \times \underbrace{\binom{4}{2}}_{\substack{\text{naipes par}\\ \text{“menor” valor}}} \times \underbrace{\binom{4}{2}}_{\substack{\text{naipes par}\\ \text{“maior” valor}}} \times \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{naipes outro}} = 123\,552$$

Problema MISSISSIPPI
25/09/2019

Quantas palavras é possível formar usando todas as letras da palavra **MISSISSIPPI** ?

I $\rightsquigarrow$ 4 M $\rightsquigarrow$ 1 P $\rightsquigarrow$ 2 S $\rightsquigarrow$ 4 (11 letras)

1º processo A palavra fica determinada indicando as 4 posições (entre 1 e 11) em que ocorre o *I*, a posição em que ocorre o *M*, as 2 posições em que ocorre o *P* e as 4 posições em que ocorre o *S*.

Exemplo: MISSISSIPI $\leftrightsquigarrow$ $(\underbrace{\{2,5,8,11\}}_{\text{I}}, \underbrace{\{1\}}_{\text{M}}, \underbrace{\{9,10\}}_{\text{P}}, \underbrace{\{3,4,6,7\}}_{\text{S}})$

Assim, a resposta é

$$\binom{11}{4} \times \binom{11-4}{1} \times \binom{11-4-1}{2} \times \binom{11-4-1-2}{4} = \frac{11!}{4!1!2!4!}$$

Problema MISSISSIPPI (cont.)

25/09/2019

2º processo

- Começar simplificando—assumir que as letras são todas distintas: I_1, I_2, I_3, I_4, M_1, P_1, P_2 e S_1, S_2, S_3, S_4.
- Assim podemos formar $11!$ palavras distintas.
- Cada uma destas palavras obtém-se de forma única a partir de uma palavra nas condições iniciais (algumas letras repetidas), E ordenando os I's, M's, P's e S's.

Assim

$$11! = \begin{array}{c}\text{nº de palavras com}\\ \text{as letras de } \textbf{MISSISSIPPI}\end{array} \times \underbrace{4!}_{\text{etiq. I's}} \times \underbrace{1!}_{\text{etiq. M}} \times \underbrace{2!}_{\text{etiq. P's}} \times \underbrace{4!}_{\text{etiq. S's}}$$

Logo, mais uma vez obtemos $\begin{array}{c}\text{nº de palavras com}\\ \text{as letras de } \textbf{MISSISSIPPI}\end{array} = \dfrac{11!}{4!1!2!4!}$

$$\left\{\begin{array}{c}\text{palavras com}\\ \text{letras repetidas}\end{array}\right\} \times \left\{\begin{array}{c}\text{formas de etiquetar}\\ \text{letras repetidas}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\text{palavras com todas}\\ \text{as letras distintas}\end{array}\right\}$$

Coeficientes multinomiais

25/09/2019

Podemos generalizar o problema anterior da seguinte forma.

- Temos k caixas (letras) distintas e n bolas (posições) distintas
- Pretendemos distribuir as bolas pelas caixas t.q. a caixa i fique com exatamente m_i bolas (m_i corresponde à multiplicidade da letra correspondente)
- Logo temos de ter $m_1 + \cdots + m_k = n$ (nº total de bolas)

De quantas formas é possível distribuir as bolas pelas caixas?

Coeficientes multinomiais (cont.)

25/09/2019

Temos o seguinte procedimento:

escolher as m_1 bolas para a caixa 1 $\rightsquigarrow \binom{n}{m_1}$

E escolher as m_2 bolas para a caixa 2, das $n - m_1$ restantes $\rightsquigarrow \binom{n - m_1}{m_2}$

E $\vdots$

E escolher as m_k bolas para a caixa k, das

$n - (m_1 + \cdots + m_{k-1}) = m_k$ restantes $\rightsquigarrow \binom{m_k}{m_k}$

Resposta:

$$\binom{n}{m_1} \times \binom{n - m_1}{m_2} \times \binom{n - m_1 - m_2}{m_3} \times \cdots \times \binom{m_k}{m_k} = \frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$$

Coeficientes multinomiais (cont.)

25/09/2019

Denotamos este número por

$$\binom{n}{m_1, \ldots, m_k} = \frac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$$

e designamo-lo por **coeficiente multinomial** .

Teorema (permutações de um multiconjunto)

O número de listas de comprimento n formadas por elementos de k tipos distintos, em que o elemento de tipo i ocorre exatamente m_i vezes na lista é o coeficiente multinomial $\binom{n}{m_1, \ldots, m_k}$.

Exemplo: $\binom{n}{k} = \binom{n}{k, n-k}$ [Temos 2 caixas: numa pomos os objetos escolhidos e na outra os rejeitados.]