Corrigido

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento de Matemática

Algoritmos em Matemática Discreta (M2007)

U.PORTO

1º teste | **16/10/2018** | **Duração: 50 minutos**

Não é permitido o uso de computadores nem de telemóveis.
Recomenda-se o uso do lápis *para o preenchimento dos quadrados. Nesse caso, o resultado deve ser suficientemente escuro de modo a permitir a leitura automática.*
Todas as questões têm a cotação $1,2$.
Nas ***questões de 1 a 4,*** *a resposta deve ser dada assinalando o quadrado respetivo,* ***preenchendo-o completamente****. Se for assinalado mais do que um quadrado, correspondendo a mais do que uma resposta para a mesma questão, a resposta será tratada como se não fosse assinalado nenhum quadrado.* ***Cada resposta errada nessas questões é penalizada com um desconto de*** $0,2$. *A resposta, devidamente justificada, à* ***questão 5*** *deve ser dada no espaço disponibilizado para o efeito.*

Questão 1 Considere as permutações de S_6 ordenadas lexicograficamente relativamente à notação de uma linha. Quantas permutações antecedem (estritamente) a permutação $(2,1,6,5,4,3)$?

■ 143 □ 139 □ 193 □ 134 □ 144 □ 194 □ 149 □ 133

Questão 2 De quantas formas é que se podem arranjar as letras de DABBADABBA?

■ 3150 □ 2105 □ 3510 □ 2510
□ 2150 □ 3015 □ 2015 □ 3105

Questão 3 Para uma sessão de fotografia, n animais (todos distintos) e k sacos de ração (todos idênticos) vão ser dispostos circularmente de forma a que hão haja sacos de ração consecutivos. De quantas formas é possível fazer estas disposições circulares?

□ $(k-1)!\binom{k-1}{n-1}$ □ $(n-1)!\binom{n-1}{k-1}$ □ $(k-1)!\binom{n-1}{k-1}$ □ $(n-1)!\binom{k}{n}$
□ $(k-1)!\binom{k}{n}$ □ $(n-1)!\binom{k-1}{n-1}$ ■ $(n-1)!\binom{n}{k}$ □ $(k-1)!\binom{n}{k}$

Questão 4 Há figos, laranjas, romãs e pêssegos com os quais se formarão cabazes, cada um contendo exatamente 10 peças de fruta. Quantos cabazes diferentes é possível formar?

□ $10!\times\binom{13}{3}$ □ $10!\times\binom{10}{4}$ □ 10^4 □ $10!\times 4^{10}$
□ $10!\times 10^4$ ■ $\binom{13}{3}$ □ 4^{10} □ $\binom{10}{4}$

Questão 5 Para $n \geq 2$, determine uma fórmula para o número de Stirling $S(n,n-2)$, que representa o número de partições do conjunto $[n]=\{1,\ldots,n\}$ com $n-2$ blocos. **Justifique a resposta de forma clara e concisa.**
Resolução: Dada uma partição de $[n]$ com $n-2$ blocos, temos duas hipóteses mutuamente exclusivas:

1. Há um bloco com três elementos e os restantes blocos são singulares.
2. Há dois blocos com dois elementos cada e os restantes blocos são singulares.

No primeiro caso, o número de partições com essa propriedade é $\binom{n}{3}$, uma vez que basta escolher os três elementos do bloco não singular e colocar os restantes em blocos singulares.
No outro caso, há $\binom{n}{4}$ escolhas possíveis para os quatro elementos que não pertencem a blocos singulares e depois $\frac{1}{2!}\binom{4}{2,2}=3$ formas de os distribuir pelos dois blocos de dois elementos cada.
Logo, temos $S(n,n-2)=3\binom{n}{4}+\binom{n}{3}$.