Análise Real III - Exercícios - 2019/20

1. Considere $\mathbb{R}^2$ munido com a métrica usual.

   Sejam $A = ([0,1]\times]0,1[) \cup ([0,1] \times \{2\})$ e $B = A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$.

   a) Mostre que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é um ponto interior de A, mas não de B.

   b) Mostre que $(\frac{1}{2}, 1)$ é um ponto de fronteira de A.

   c) Indique o interior, a aderência e a fronteira dos conjuntos A e B.

   d) Dê exemplo de uma sucessão em A que seja de Cauchy mas não convirja em A.

   e) Dê uma definição adequada de diâmetro de um conjunto limitado. Use essa definição para calcular o diâmetro do conjunto A.

   f) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x + y$. Mostre que $f(A)$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

   g) Averigue se f atinge um máximo ou um mínimo em A.

   h) Dê exemplo de uma função contínua $h\colon A \to \mathbb{R}$ tal que $0 \in h(A)$, $1 \in h(A)$ e $\frac{1}{2} \notin h(A)$. É possível dar um tal exemplo trocando o conjunto A pelo seu interior?

2. Considere $\mathbb{R}^2$ munido com métrica usual. Sejam $A =]0,1[\times]0,1[$, $B = [0,1]\times]0,1[$ e $C = [0,1]\times]0,1]$. Indique o interior, a aderência e a fronteira de cada um destes conjuntos. Verifique se são abertos ou fechados. Justifique todas as respostas.

3. Averigue se, para a distância usual em $\mathbb{R}^n$, os seguintes subconjuntos são abertos, fechados ou nem uma coisa nem outra:

   a) $\cap_{n=1}^{+\infty} [0, (n+1)/n[$ em $\mathbb{R}$.

   b) $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$.

   c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\}$ em $\mathbb{R}^2$

   d) $\{X \in \mathbb{R}^n : \|X\| = 1\}$ em $\mathbb{R}^n$

4. Sejam $X = \mathcal{C}^0([a,b], \mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ e $d_u, d_i : X \times X \to \mathbb{R}$, dadas por $d_u(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|; x \in [a,b]\}$ e $d_i(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$.

   a) Mostre que d_u e d_i definem métricas em X.

b) Sejam $a = 0$, $b = 2\pi$, $f(x) = sin(x)$ e $g(x) = cos(x)$. Calcule $d_u(f, g)$ e $d_i(f, g)$.

c) Sejam $a = 0$, $b = 1$, $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, $g(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$. Calcule, caso existam, $\lim_n d_i(f_n, g)$ e $\lim_n d_u(f_n, g)$.

d) Nas hipóteses da alínea anterior, para cada $x \in [0, 1]$, calcule $lim_{n\to} f_n(x)$, e, para $n, m \in \mathbb{N}$, $d_i(f_n, f_m)$.

e) Por analogia com as noções que conhece de $\mathbb{R}$ proponha definições para "sucessão convergente" e "sucessão de Cauchy" num espaço métrico qualquer.

f) Com base na alínea anterior proponha uma interpretação para os resultados obtidos em *c*) e *d*).

5. Considere $\mathbb{R}$ munido com métrica usual. Mostre que qualquer aberto não vazio de $\mathbb{R}$ é união finita ou numerável de intervalos abertos dois a dois disjuntos.

6. Seja (X, d) um espaço métrico. Prove que

a) A união qualquer de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

b) A intersecção qualquer de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

c) A intersecção finita de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

d) A união finita de conjuntos fechados é um conjunto fechado.

e) Dê exemplos que permitam concluir que as duas alíneas anteriores não podem ser generalizadas para um número qualquer de conjuntos.

7. Averigue quais dos seguintes conjuntos são compactos:

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$;

b) $\{x \in \mathbb{R}^n : 1 \leq \|x\| \leq 2\}$;

c) um subconjunto finito de $\mathbb{R}$;

d) $\mathbb{Z}$;

e) $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

8. Seja A um subconjunto de um espaço métrico X. Um ponto x de X diz-se um *ponto de acumulação de A* se qualquer bola aberta centrada em x contiver algum ponto de A distinto de x. Mostre que:

a) x é um ponto de acumulação de A se e só existir uma sucessão injectiva de pontos de A convergindo para x (*uma sucessão diz-se injectiva se os seus termos forem todos distintos*);

b) se X for compacto e $A \subseteq X$ infinito, então A tem algum ponto de acumulação em M;

c) todo o subconjunto infinito e limitado de $\mathbb{R}^n$ tem algum ponto de acumulação.

9. Seja F um subconjunto fechado e não vazio de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, e seja y um ponto de $\mathbb{R}^n$ não pertencente a F. Mostre que existe um ponto x_0 de F à distância mínima de y (i.e., tal que $\|x - y\| \geq \|x_0 - y\| \; \forall \, x \in F$)

10. Sejam X um espaço métrico e $A \subseteq X$. Um ponto x de A diz-se um *ponto isolado de* A se existir uma bola aberta centrada em x cuja intersecção com A só contenha x. O conjunto A diz-se discreto se só contiver pontos isolados. Mostre que um conjunto discreto é compacto se e só se for finito.

11. Diga quais das seguintes afirmações são verdadeiras para um qualquer subconjunto A dum espaço métrico M:

   a) $int\left(\overline{A}\right) = int(A)$;

   b) $\overline{A} \cap A = A$;

   c) $\overline{int(A)} = A$;

   d) $fr\left(\overline{A}\right) = fr(A)$;

   e) se A for aberto, então $fr(A) \subset M \setminus A$.

12. Demonstre as seguintes relações para quaisquer subconjuntos A e B de um espaço métrico:

   a) $int(int(\,A\,)) = int(\,A)$;

   b) $int(A \cup B) \supset \; int(\,A) \cup int(\,B)$;

   c) $int(A \cap B) = int(\,A) \cap int(\,B)$;

   d) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;

   e) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

   f) $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

13. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão num espaço métrico X. Suponha que a sucessão é injectiva e discreta (i.e., cada termo da sucessão é o centro de uma bola aberta que não contém outros termos da sucessão). Mostre que as seguintes condições acerca de um ponto $y \in X$ são equivalentes:

(i) o conjunto $\{y\} \cup \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é compacto;

(ii) $\lim_{n\to\infty} x_n = y$.

14. Seja X um espaço métrico completo, e seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão decrescente (i.e., $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \ldots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \ldots$) de subconjuntos fechados e não vazios de X. Suponha que $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Mostre que $\cap_{n=1}^{+\infty} F_n$ contém exactamente um ponto.

15. Sejam A e B subconjuntos disjuntos e não vazios do espaço métrico X. Mostre que, se A for compacto e B for fechado, então existe $\epsilon > 0$ tal que $d(x, y) > \epsilon$ sempre que $x \in A$ e $y \in B$.

16. Sejam X um espaço métrico e $\emptyset \neq A \subseteq X$. Para $x \in X$, defina

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}.$$

Mostre que a função $x \mapsto d(x, A)$ é contínua, e que $d(x, A) = 0$ se e só se $x \in \overline{A}$.

17. Dê exemplo de uma função contínua $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e de um subconjunto fechado A de $\mathbb{R}^2$ tais que $f(A)$ não seja fechado em $\mathbb{R}$

18. Considere em $\mathcal{C}([0,1])$ (cf exercício 4) a sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida por

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 2nx,\ 0 \leq x \leq 1/2n, \\ f_n(x) &= 2 - 2nx,\ 1/2n \leq x \leq 1/n, \\ f_n(x) &= 0,\ 1/n \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge na métrica d_i para a função nula, mas que a mesma sucessão não é convergente na métrica d_u.

19. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $g_n\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{aligned} g_n(x) &= 0,\ -1 \leq x \leq -1/n, \\ g_n(x) &= -2 - 2nx,\ -1/n \leq x \leq -1/2n, \\ g_n(x) &= 2nx,\ -1/2n \leq x \leq 1/2n, \\ g_n(x) &= 2 - 2nx,\ 1/2n \leq x \leq 1/n, \\ g_n(x) &= 0,\ 1/n \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

a) Esboce os gráficos das funções g_1, g_2 e g_3.

b) Para cada $x \in [-1, 1]$, determine $g(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$.

c) Averigue se, para a métrica d_u, se tem $\lim_{n\to+\infty} g_n = g$.

20. Dê exemplo de uma sucessão $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{C}([0,1])$ que seja pontualmente convergente para a função nula (ou seja, tal que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ para cada $x \in [0,1]$) mas que não convirja na métrica d_i.

21. Considere a sucessão de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$, definida por

$$f_n(x) = \frac{n\,x}{n+1} + (\sin(x))^n.$$

a) Mostre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge pontualmente para uma função $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}$, e determine essa função.

b) Verfique se a convergência de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ para f é ou não uniforme.

22. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe c^1.

a) Mostre que f é uma contracção se e somente se existe $K \in]0,1[$ tal que $|f'(x)| \leq K$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Dê exemplo de uma função f, tal que $|f'(x)| < 1$, e que não seja uma contracção.

23. Sejam $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma contracção, X_0 o ponto fixo de f, $\epsilon > 0$ e C um conjunto limitado. Mostre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n \geq n_0$, $f^n(C) \subset D(X_0;\epsilon)$. Obtenha uma estimativa para n_0.

24. Seja $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma contracção com constante de Lipschitz $\lambda \in]0,1[$. Suponha que $h(0) = 0$, e defina $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ por $F(x,y) = ((h(x)-y)/2, x/2)$. Seja $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$.

a) Mostre que $F(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$.

b) Mostre que $(0,0)$ é o único ponto fixo de F.

25. Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = ((y-\cos x)/2, (x+1)/2)$, e considere $\mathcal{Q} = [-1,1] \times [-1,1]$.

a) Mostre que $f(\mathcal{Q}) \subseteq \mathcal{Q}$.

b) Verifique que existe $0 < \lambda < 1$ tal que, para todo o $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, a aplicação linear $Df(x,y)$ é uma contracção com constante de Lipschitz λ.

c) Conclua que f possui um e um só ponto fixo em $\mathbb{R}^2$, e que esse ponto fixo pertence a $\mathcal{Q}$.

26. a) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe c^1. Suponha que existe $0 < a < \frac{\sqrt{2}}{2}$ tal que

$$||\nabla f_1(x,y)|| \leq a, \quad ||\nabla f_2(x,y)|| \leq a, \ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

onde f_1 e f_2 denotam as componentes de f. Mostre que f é uma contracção. (*Sugestão: use o Teorema do Valor Médio para estimar* $|f_i(X) - f_i(Y)|$, $i \in \{1,2\}$.)

b) Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\frac{1}{6}\log(1+x^2+y^2),\ \frac{1}{4}\sin(x+y))$. Conclua que f tem um ponto fixo.

27. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2+y, x-y^2)$.

    a) Mostre que f é localmente invertível numa vizinhança de $(1,1)$.

    b) Averigue se f é globalmente invertível.

28. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$.

    a) Mostre que f é localmente invertível em todos os pontos.

    b) Mostre que f não é invertível.

    c) Seja $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < y < 2\pi\}$. Mostre que $f|_U : U \to f(U)$ admite inversa de classe c^∞.

    d) Determine $D(f|_U^{-1})(0,1)$.

29. Considere o sistema $\left\{ \begin{array}{l} x^2 \cos xy = a \\ e^y = b \end{array} \right.$.

    a) Mostre que existe uma vizinhança V de $(1,1)$ tal que para todo $(a,b) \in V$ o sistema dado tem pelo menos uma solução (nas variáveis x e y).

    b) Mostre que, se a vizinhança V de $(1,1)$ é suficientemente pequena, então para cada $(a,b) \in V$ o sistema tem mais do que uma solução.

30. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe c^1 tal que $f(0) = 0$. Mostre que se 1 não é um valor próprio de $Df(0)$ então existe uma vizinhança U de 0 tal que $f(X) \neq X$, $\forall X \in U - \{0\}$.

31. Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe c^1 tal que $Df(X_0)$ é um isomorfismo, $\forall X_0 \in U$. Mostre que f(U) é aberto em $\mathbb{R}^n$. Conclua que se f é injectiva, então f admite inversa de classe c^1.

32. Seja $\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x \log y, y \log x) \end{array}$.

    a) Mostre que existe uma vizinhança V de $(1,e)$ tal que $f_{|V}$ admite inversa de classe c^∞, $h : f(V) \to V$. Calcule $Dh(1,0)$.

    Seja $g : f(V) \to \mathbb{R}$ uma função de classe c^2 tal que

    $$\nabla g(f(x,y)) = (a(x-1), b(y-e)),\ \forall x,y \in V,$$

    onde a e b são números reais tais que $ab > 0$.

b) Mostre que a função $\begin{array}{rcl} \nabla g : f(V) & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & \nabla g(x,y) \end{array}$ é localmente invertível numa vizinhança do ponto $(1,0)$.

b) Verifique que $(1,0)$ é um ponto crítico da função de g .

33. Considere as funções $f(x,y) = (x^2y,\, y-x)$ e $g(x,y) = (x,\, y^3x)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   a) Calcule a derivada de $g \circ f$ no ponto $(1,0)$.

   b) Prove que f é localmente invertível em $(1,0)$ e que $g \circ f$ não é localmente invertível em $(1,0)$.

34. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Mostre que:

   a) Se f é de classe c^1, localmente invertível e a inversa local é de classe c^1, então $Df(X)$ é um isomorfismo, $\forall X \in\ R^n$.

   b) Mostre que existem funções de classe c^1 invertíveis, mas cuja inversa não é de classe c^1. Observe que para essas funções necessariamente existe $X_0 \in U$ tal que $Df(X_0)$ não é um isomorfismo.

35. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe c^1 e $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x_0) \neq 0$.

   a) Mostre que existe um aberto V contendo x_0, tal que $f'(x) \neq 0$, $\forall x \in V$.

   b) Mostre que $f|_V : V \to \mathbb{R}$ é injectiva e conclua que admite inversa de classe c^1.

36. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, seja $f_\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função dada por

$$f_\lambda(x,y) = (x^2 + \lambda\, x \cos y, \operatorname{sen}(x+y)).$$

   a) Determine todos os $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que f_λ tem inversa de classe C^1 em alguma vizinhança aberta de $(0,\pi)$.

   b) Mostre que não existe nenhuma vizinhança aberta de $(0,\pi)$ na qual f_0 admita inversa.

   c) Seja U uma vizinhança aberta de $(0,\pi)$ tal que $f_1|_U$ é invertível, e designe por g a sua inversa. Determine a aplicação linear $Dg(0,0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

37. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (e^x \operatorname{sen} y, xy)$.

   a) Calcule $Df(0,\pi)$.

   b) Determine todas as soluções do sistema $f(x,y) = (0,0)$.

c) Mostre que, dado $n \in \mathbb{N}$, existe uma vizinhança V_n de $(0,0)$ tal que para todo $(a,b) \in V_n$, o sistema $f(x,y) = (a,b)$ tem pelo menos n soluções.

d) Pela alínea c) pode concluir que existe uma vizinhança V de $(0,0)$ tal que para qualquer $(a,b) \in V$ o sistema $f(x,y) = (a,b)$ tem uma infinidade de soluções?

e) Seja $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $g(x,y) = x + y^2$. Mostre que a equação $g \circ f(x,y) = 0$ define implicitamente y como função de x numa vizinhança de $(0,\pi)$ e calcule $y'(0)$.

38. a) Seja $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe c^1 e suponha que $\exists M > 0$ tal que $||g(X)|| \leq M.||X||^2$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $Dg(0)$ é a aplicação linear nula.

b) Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(X) = A(X) + g(X)$, $\forall X \in \mathbb{R}^n$, onde A é um isomorfismo linear e g é uma função nas condições da alínea anterior. Mostre que f é localmente invertível em $0 \in \mathbb{R}^n$.

39. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x+y+z^2$. Mostre que numa vizinhança de $(1,1,2)$ a equação $f(x,y,z) = 6$ define z como função de x e y. Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1)$. Determine o maior $r \in \mathbb{R}^+$ tal que a equação $f(x,y,z) = 6$ define z como função de x e y em $\mathrm{B}((1,1);r)$.

40. Mostre que numa vizinhança de $(1,\sqrt{3})$ a equação $x(x^2+y^2) - 3(x^2-y^2) = 10$ define implicitamente y como função de x. Calcule $\frac{dy}{dx}(1)$ e $\frac{d^2y}{dx^2}(1)$.

41. Sejam $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe c^∞ e $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = y - xz - e^z$. Suponha que $g(1,1,0) = 0$ e que $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1,0) \neq 0$. Mostre que o sistema $\begin{cases} f(x,y,z) = 0 \\ g(x,y,z) = 0 \end{cases}$ define implicitamente x e z como funções, de classe c^∞, de y numa vizinhança de $(1,1,0)$. Calcule $\frac{dz}{dy}(1)$.

42. Mostre que o sistema $\begin{cases} x^2 + xy - z^2 = 0 \\ xy + z = 0 \end{cases}$ define implicitamente x e z como funções de y numa vizinhança da solução $(0,1,0)$. Calcule $\frac{dz}{dy}(1)$ e $\frac{dx}{dy}(1)$.

43. Mostre que o sistema $\begin{cases} x^2 + y^3 \cos z = 1 \\ y + z = 0 \end{cases}$ define implicitamente x e z como funções de y numa vizinhança de $(1,-\pi/2,\pi/2)$. Calcule $\frac{dx}{dy}(\frac{-\pi}{2})$ e $\frac{dz}{dy}(\frac{-\pi}{2})$.

44. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z) = x^3 + yz - xe^z$.

a) Mostre que a equação $f(x,y,z)=0$ define implicitamente z como função de x e y numa vizinhança de $(0,1,0)$.

b) Calcule $\frac{\partial z}{\partial x}(0,1)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(0,1)$ e $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(0,1)$.

45. Mostre que existem uma vizinhança U de $0 \in \mathbb{R}$ e uma única função $g: U \to \mathbb{R}$, de classe c^∞, de tal modo que $g(0)=1$ e

$$x^2 e^{g(x)} + (g(x))^2 e^x = 1, \quad \forall x \in U.$$

Calcule $g\prime(0)$ e $g\prime\prime(0)$.

46. Mostre que, numa vizinhança de (x_0, y_0, z_0, w_0)=$(0,1,0,1)$, o sistema

$$\begin{cases} xz^3 + y^2 w^3 = 1 \\ 2xy^3 + w^2 z = 0 \end{cases}$$

define implicitamente x e y como funções de z e w. Escrevendo $x = h(z,w)$ e $y = g(z,w)$, mostre que a função $F(z,w) = (h(z,w),\, g(z,w))$ admite inversa numa vizinhança de $(0,1)$.

47. Mostre que o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ 2xy + y^2 + zx = 5 \end{cases}$$

define implicitamente x e z como funções de y numa vizinhança de $(1,1,2)$. Mostre que $y=1$ é um ponto de máximo local da função $z = z(y)$ mas não é um extremo local de $x = x(y)$.

48. Sejam A uma aplicação linear de $\mathbb{R}^2$ e $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe c^1 tal que $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Determine condições suficientes sobre a aplicação linear A de tal modo que se $f \circ A(x_0,y_0) = 0$ então a equação $f \circ A(x,y) = 0$ define implicitamente x como função de y ou y como função de x numa vizinhança de (x_0, y_0).

49. Considere os conjuntos $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; x^3 + y^2 + z^2 = 2\}$ e $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; 2x^2 + y^2 + 3z^4 = 4\}$.

a) Mostre que existe uma vizinhança V de $(0,1,1)$ em $\mathbb{R}^3$ tal que $V \cap (A \cap B)$ é o traço de uma curva de classe c^∞.

b) Mostre que a recta tangente a $A \cap B$ em $(0,1,1)$ é paralela ao eixo dos $xx's$.

50. Seja $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe c^k, $k \geq 1$.

    Determine condições suficientes sobre f tais que $N_c f$ é, localmente, o traço de uma curva de classe c^k, $\forall c \in \mathbb{R}^n$. Dê exemplo de uma função que satisfaça as condições obtidas.

51. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2,\ x + y^2 + z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Considere a curva de nível $\mathcal{N} = N_{(2,0)}(f)$ de f.

    a) Mostre que todos os pontos de $\mathcal{N}$ são pontos regulares.

    b) Determine as equações cartesianas da recta tangente a $\mathcal{N}$ em $(0, 1, -1)$ e a equação cartesiana do plano normal a $\mathcal{N}$ em $(0, 1, -1)$.

    c) Mostre que, numa vizinhança de $(0, 1, -1)$, $\mathcal{N}$ pode ser descrita como uma curva parametrizada pela variável x. Use esse facto para deduzir (novamente) as equações cartesianas da recta tangente a $\mathcal{N}$ em $(0, 1, -1)$.

    d) Seja $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y, z) = 2x + y^2$. Mostre que h atinge valor máximo e valor mínimo em $\mathcal{N}$.

    e) Use o método dos multiplicadores de Lagrange para calcular o valor máximo e o valor mínimo de h em $\mathcal{N}$.

52. Sejam $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2,\ x + z)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida por $h(x, y, z) = x + 2y + 3z$. Calcule o valor máximo e o valor mínimo de h em $\mathcal{N} = N_{(1,0)}(f)$.

53. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, seja $f_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a função dada por

    $$f_\lambda(x, y, z) = (x^2 + y^2 - z^2, x + y + \lambda z).$$

    a) Determine todos os $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $(1, 0)$ é um valor regular de f_λ.

    b) Fixe agora $\lambda = 2$ e seja $\mathcal{C}$ a curva de nível dada por

    $$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_2(x, y, z) = (1, 0)\}.$$

    Determine uma equação cartesiana do plano normal a $\mathcal{C}$ no ponto $(1, 1, -1)$.

    c) Encontre todos os pontos de $\mathcal{C}$ onde a recta tangente seja horizontal (ortogonal ao eixo dos zz).

54. Considere as funções $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por

    $$f(x, y, z) = (x \cos(yz),\ ye^x \sin(z), x^2 + z), \quad g(x, y, z) = (x - y,\ y + z).$$

a) Mostre que f é localmente invertível em $X_0 = (0, 2, \frac{\pi}{2})$, sendo a inversa local de classe c^1. Calcule $D(f^{-1})(f(X_0))$, onde f^{-1} denota a inversa local de f em X_0.

b) Dê exemplo de um ponto $Y_0 \in \mathbb{R}^3$ tal que f não admite inversa local, de classe c^1, em Y_0.

c) Calcule $D(g \circ f)(X_0)$.

d) Mostre que, numa vizinhança de X_0, a equação

$$g \circ f(x, y, z) = (-2,\, 2 + \frac{\pi}{2})$$

define implicitamente y e z como funções de x. Calcule $\frac{dy}{dx}|_0$ e $\frac{dz}{dx}|_0$.

e) Determine a equação da recta tangente a $N_{(-2,\, 2+\frac{\pi}{2})}(g \circ f)$ no ponto X_0.

55. Obtenha um representante para cada um dos seguintes caminhos.

a) Segmento de extremos $A = (1, 2, 2)$ e $B = (2, -1, -3)$, orientado de A para B.

b) Triângulo de vértices $(0, 2)$, $(1, 1)$ e $(0, -1)$ percorrido uma vez no sentido indirecto.

c) Circunferência de centro $(-1, 2)$ e raio 5 percorrida uma vez no sentido directo.

d) Circunferência de centro $(-1, 2)$ e raio 5 percorrida duas vezes no sentido directo.

e) Elipse de equação $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1$ percorrida uma vez no sentido directo.

f) Intersecção do cilindro de equação $x^2 + y^2 = 4$ com o plano de equação $x + y + z = 3$ (escolha uma orientação).

56. Dado um campo $F : U \to \mathbb{R}^n$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$, diz-se que é um *campo de gradientes* se existe uma função $f : U \to \mathbb{R}$ tal que

$$\nabla f(x, y, z) = F(x, y, z), \;\; \forall (x, y, z) \in U.$$

A função f designa-se por *potencial do campo.*

Averigue se os seguintes campos de vectores são campos de gradientes e, caso a resposta seja afirmativa, calcule uma função potencial.

a) $F(x, y, z) = (yz, xz, xy)$.

b) $H(x, y, z) = (yz + z, xz, xy)$.

c) $G(x,y,z) = (ye^{xy+yz},\ (x+z)e^{xy+yz} - z\sin(yz),\ ye^{xy+yz} - y\sin(yz))$.

d) $K(x,y,z) = (2xy^3z^4,\ 3x^2y^2z^4 + yz,\ 4x^2y^3z^3 + xz)$.

57. Considere o campo de vectores $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $H(x,y) = (x+y, 2x-y)$. Calcule:

a) $\int_{C_1} H \, \mathrm{d}s$, onde C_1 é é o caminho representado pela curva $\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t^2, 1-t^3)$.

b) $\int_{C_2} H \, \mathrm{d}s$, onde C_2 é o segmento de recta com extremos $(1,0)$ e $(2,1)$ orientado de $(1,0)$ para $(2,1)$.

58. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $F(x,y) = (-y^2, xy)$.

a) Calcule $\int_C F \, \mathrm{d}s$ onde C é:

i) a elipse de equação $x^2/4 + y^2 = 1$ percorrida no sentido directo;

ii) $C_1 + C_2$, onde C_1 é o segmento de recta com extremos $(0,0)$ e $(0,1)$ e C_2 é o segmento de recta com extremos $(0,1)$ e $(1,1)$ (indique as orientações consideradas).

iii) é o segmento de recta com extremos $(0,0)$ e $(1,1)$.

b) Averigue se F é um campo conservativo.

59. Calcule $\int_C \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z \right) ds$, onde C é a curva obtida por intersecção do cilindro de equação $x^2 + y^2 = 4$ com o plano de equação $x + y + z = 0$, orientada no sentido directo.

60. Seja

$$\begin{array}{rccl} F : & \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \mapsto & \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}\,(x,y,z) \end{array}.$$

a) Verifique se F é um campo conservativo.

b) Calcule $\int_C F \, \mathrm{d}s$, onde C é o segmento de recta com extremos $(1,0,0)$ e $(1,1,1)$, orientado de $(1,0,0)$ para $(1,1,1)$.

c) Calcule $\int_C F \, \mathrm{d}s$, onde C é o caminho representado pela curva $\alpha(t) = (1+t, 2+t^2, e^t)$, $t \in [0,3]$.

61. Calcule $\int_C (2xy, x^2) \, \mathrm{d}s$, onde C é o triângulo de vértices $(-1,-1)$, $(1,-1)$ e $(0,0)$, percorrido no sentido directo.

62. Considere em $\mathbb{R}^2$ a circunferência C de raio 1, centrada na origem e percorrida no sentido directo. Determine todas as aplicações lineares A de $\mathbb{R}^2$ tais que $\int_C A \, \mathrm{d}s = 0$.

63. Sejam
$U_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0\}$, $U_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y \neq 0\}$ e $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Considere o campo de vectores $F : U \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$.

a) Mostre que F é um campo fechado.

b) Mostre que o trabalho realizado pelo campo F ao longo da circunferência centrada na origem, de raio 1 e percorrida uma vez no sentido directo, é igual a 2π. Conclua que F não é um campo de gradientes.

c) Mostre que a função $f_1(x,y) = arctg(\frac{y}{x})$, $(x,y) \in U_1$, é um potencial da restrição de F a U_1.

d) De $arctg(\frac{y}{x}) = arccotg(\frac{x}{y})$, $x \neq 0 \neq y$, conclua que a função
$f_2(x,y) = arccotg(\frac{x}{y})$, $(x,y) \in U_2$, é um potencial da restrição de F a U_2.

e) Seja C um caminho simples e fechado, contido em U, tal que $(0,0)$ não pertence à componente limitada de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Apresente um argumento *intuitivo* que permita concluir que $\int_C F \, \mathrm{d}s = 0$.

f) Seja C um caminho simples e fechado, contido em U, tal que $(0,0)$ pertence à componente limitada de $\mathbb{R}^2 \setminus C$. Apresente um argumento *intuitivo* que permita concluir que $\int_C F \, \mathrm{d}s = 2\pi$

64. Seja $\begin{array}{rcl} F : \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (-yz \operatorname{sen} xy, -xz \operatorname{sen} xy, \cos xy) \end{array}$.

a) Mostre que F é um campo de gradientes.

b) Calcule $\int_C F \, \mathrm{d}s$, onde C é o segmento de recta de extremos $A = (0,0,1)$ e $B = (\pi, 0, 2)$, orientado de A para B.

c) Determine todos os pontos $X \in \mathbb{R}^3$ tais que $\int_{C_X} F \, \mathrm{d}s = 0$, onde C_X é um caminho qualquer de extremos $(0,0,0)$ e X.

d) Seja $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ uma curva de classe c^1, não constante, tal que $F(\alpha(t)) = \alpha'(t), \forall t \in [0,1]$. Mostre que $\alpha(1) \neq \alpha(0)$ (i.e. a curva não representa um caminho fechado).

65. Dado um campo $F : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^n$, define-se a divergência de F por $div(F)(x,y,x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x,y,z)$, e, quando $n = 3$, o *rotacional* de F por

$$rot(F)(x,y,z) = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y})(x,y,z)$$

Calcule a divergência e o rotacional dos seguintes campos:

a) $F(x,y,z) = (x^2, xyz, yz^2)$

b) $G(x,y,z) = (y\log(x), x\log(y), xy\log(z))$

c) $H(x,y,z) = (x^2, \sin(xy), e^x yz)$

d) $K(x,y,z) = (e^{xy}\sin(z), e^{xz}\sin(y), e^{yz}\cos(x))$

66. Sejam $F, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campos de classe C^2, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de classe C^2, e $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que

    a) $rot(\nabla f) = 0$;

    b) $div(rot(F)) = 0$;

    c) $div(\varphi F) = \nabla\varphi \cdot F + \varphi div(F)$;

    d) $div(F \times G) = rot(F) \cdot G - F \cdot rot(G)$.

67. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Deduza a seguinte expressão, em coordenadas cilíndricas:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\mathbf{e_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{e_z},$$

onde $\mathbf{e_r} = (\cos(\theta), \sin(\theta), 0)$, $\mathbf{e}_\theta = (-\sin(\theta), \cos(\theta), 0)$ e $\mathbf{e_z} = (0, 0, 1)$.

68. Considere os seguintes campos de vectores definidos em $\mathbb{R}^3$:

$$F(x,y,z) = (yz, xz, xy) \text{ e } G(x,y,z) = (yz+z, xz+x, xy).$$

Seja C o caminho representado pela curva

$$\alpha(t) = (t + e^t\cos(\frac{\pi}{2}t), e^t\sin(\frac{\pi}{2}t), t^2),\ \ t \in [0,1],$$

e seja $\tilde{C}$ o segmento de extremo inicial $(0,0,0)$ e extremo final $(1,1,1)$.

    a) Calcule $\int_C F ds$ de duas maneiras distintas:

        a1) usando o facto de que o campo F é um campo de gradientes;

        a2) usando *apenas* o facto de que o campo F é conservativo.

    b) Calcule $\int_{\tilde{C}} G ds$.

69. Considere o campo de vectores

$$F(x,y) = (\cos(x) + e^x - y^3, \sin(y) + xy + x^3).$$

Calcule $\int_C F ds$, onde C é a circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1, percorrida duas vezes no sentido directo.
(*Sugestão: use uma decomposição* $F = G + H$, *sendo* G *um campo de gradientes.*)

70. Considere o campo de vectores $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = (ye^{xy+z},\ z + xe^{xy+z},\ e^{xy+z}).$$

a) Mostre que F não é um campo de gradientes.

b) Seja C o caminho representado por $\alpha(t) = (cos(t),\ sin(t),\ t)$, $t \in [0, 2\pi]$; calcule $\int_C F ds$.

c) Seja $\tilde{C}$ um caminho fechado contido no plano de equação $y = 3$. Mostre que $\int_{\tilde{C}} F ds = 0$.

71. Considere o campo de vectores $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por

$$F(x, y) = (xy^2 + y^3,\ 3xy^2 + y^2 + x^2 y).$$

a) Mostre que F é um campo de gradientes.

b) Calcule

$$\int_{C_1} F\, ds \quad \text{e} \quad \int_{C_1} F\, ds + \int_{C_2} F\, ds,$$

onde C_1 é o segmento de extremos $A = (0, 0)$ e $B = (1, 1)$, orientado de B para A, e C_2 é o caminho representado por $\alpha(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

c) Calcule $\int_C G\, ds$, onde $G(x, y) = (xy^2 + y^3 - y + x^6,\ 3xy^2 + y^2 + x^2 y + x + e^y)$ e C é a elipse de equação $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ percorrida duas vezes no sentido indirecto.

72. Considere o campo de vectores $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = (cos(yz),\ -xzsin(yz),\ -xysin(yz) + 1).$$

a) Determine uma função potencial do campo de vectores F.

b) Seja C o caminho representado por $\alpha(t) = (t,\ (t-1)^2,\ t^3)$, $t \in [0, 1]$. Calcule $\int_C F ds$.

c) Determine todos os pontos $X = (x, 0, z) \in \mathbb{R}^3$ para os quais $\int_{C_X} F ds = 0$, onde C_x é um caminho de extremos $(0, 0, 0)$ e $(x, 0, z)$.

73. Considere o campo de vectores $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por

$$F(x, y, z) = (e^{\cos(yz)},\ -xz \sin(yz) e^{\cos(yz)} + 2y,\ -xy \sin(yz) e^{\cos(yz)}).$$

a) Determine um potencial do campo F.

b) Calcule $\int_{C_1} Fds$ e $\int_{C_2} Fds$, onde
C_1 é o caminho representado por $\alpha_1(t) = (cos(t),\, sin(t),\, 0)$, e C_2 é o caminho representado por $\alpha_2(t) = (cos(t),\, sin(t),\, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

c) Calcule $\int_{C_3} Gds$, onde C_3 é o segmento de extremo inicial $(0, 2, 1)$ e de extremo final $(0, 1, 2)$, e
$G(x, y, z) = F(x, y, z) + (0, 0, z)$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

74. Considere os seguintes campos de vectores definidos em $\mathbb{R}^3$:
$F(x, y, z) = (2xyz,\, x^2z,\, x^2y)$, $G(x, y, z) = (y, 0, z)$ e $H = F + G$.

a) Determine um potencial do campo F.

b) Sendo C_1 o caminho representado pela curva $\alpha(t) = (t,\, e^t,\, t^2)$, $t \in [0, 1]$, calcule $\int_{C_1}\; H\, ds$.

c) Sendo C_2 o segmento de extremo inicial $(1,\, e,\, 1)$ e extremo final $(0,\, 1,\, 0)$, calcule $\int_{C_1+C_2}\; H\, ds$

75. Considere os seguintes campos de vectores definidos em $\mathbb{R}^2$: $H = F + G$,
$F(x, y,) = (\cos(y) + y\cos(x),\, -x\sin(y) + 2y + \sin(x))$ e $G(x, y) = (y, -x)$.

a) Determine um potencial do campo F.

b) Sendo C o caminho representado pela curva $\alpha(t) = (\pi\cos(t),\, \pi\sin(t))$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, calcule $\int_{-C}\; H\, ds$.

76. Considere os seguintes campos de vectores definidos em $\mathbb{R}^3$:

$$F(x, y, z) \;=\; (y^2e^z,\, 2xye^z + z,\, xy^2e^z + y),\; e\;\; G(x, y, z) = (0,\, -z,\, 2y)$$

a) Determine um potencial do campo F.

b) Mostre que $H = F + G$ não é um campo de gradientes.

c) Usando a alínea anterior pode concluir que *existe um caminho fechado* $\tilde{C}$ *tal que* $\int_{\tilde{C}} H\, ds \neq 0$?

d) Calcule $\int_C H\, ds$, onde C é o caminho representado pela curva $\alpha(t) = (2e^t,\, t,\, t)$, $t \in [0, 1]$.

77. Considere o campo de vectores $F : U \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x, y, z) = (z\log(y),\, \frac{xz}{y},\, x\log(y) - x),$$

onde $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\; y > 0\}$.

a) Mostre que F não é um campo de gradientes.

b) Calcule $\int_C F ds$, onde C é o segmento de extremo inicial $(1,1,1)$ e de extremo final $(1,2,3)$.

c) Dê um exemplo, devidamente justificado, de um caminho fechado $\bar{C}$ tal que $\int_{\bar{C}} F ds \neq 0$.)

78. a) Determine uma função $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, não identicamente nula, de tal modo que o campo $H(x,y,z) = (h(y), x\,h(y)+z^2, 2\,z\,y)$ seja conservativo.

b) Para a função h obtida em (a), calcule $\int_{\mathcal{C}} H\,ds$, onde $\mathcal{C}$ admite a parametrização $(t, t^2, t^3 - t\cos(2\pi t))$, $0 \leq t \leq 1$.

79. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^3$ o campo de vectores dado por

$$F(x,y,z) = \left(\frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}\right). \qquad (1)$$

a) Mostre que F não é um campo de gradientes

b) Mostre que, se $\mathcal{C}$ for um qualquer caminho fechado, C^1 por pedaços, que esteja contido no plano $z=0$ e não passe pela origem, então $\int_{\mathcal{C}} F\,ds = 0$.

80. Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um campo de vectores dado por

$$F(x,y,z) = (\lambda xy - z, x^2, z + \gamma x),$$

onde λ e γ são certas constantes.

a) Determine λ e γ de modo que F seja um campo de gradientes

b) Para os valores de λ e γ determinados em (a), calcule $\int_{\mathcal{C}} F\,ds$, onde $\mathcal{C}$ é o caminho representado pela curva $\alpha(t) = (\cos(t), \operatorname{sen}(t), \frac{t}{\pi})$, $t \in [0,\pi]$.

81. O campo gravítico criado por uma massa centrada na origem $(0,0,0)$ é, em cada ponto $X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, um vector que aponta para a origem e é inversamente proporcional ao quadrado da distância desse ponto à origem (o factor de proporcionalidade depende da massa sobre a qual se exerce a força). Assim, e a menos de um factor constante, esse campo é dado por $H(X) = \frac{1}{\|X\|^2} \cdot (-\frac{1}{\|X\|}X)$.

a) Mostre que H é conservativo e obtenha uma sua função potencial.

b) Fixado $A \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, seja $T(X)$ o trabalho realizado pelo campo H quando uma partícula se move de A para X. Calcule $\lim_{\|X\|\to+\infty} T(X)$.

82. Sejam $\alpha\colon [a,b] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ uma curva de classe C^1 e $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que $\alpha\,(t) = \|\alpha\,(t)\| \cdot (\cos(\varphi\,(t)), \operatorname{sen}(\varphi\,(t)))$. Seja C o caminho representado pela curva α.

   a) Mostre que $\displaystyle\int_C \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) ds = \varphi\,(b) - \varphi\,(a)$.

   b) Conclua que, se α for uma curva fechada, então

$$\frac{1}{2\pi}\int_C \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, +\frac{x}{x^2+y^2}\right) ds \in \mathbb{Z}.$$

83. Calcule $\int_C F ds$ usando o teorema de Green:

   a) $F(x,y) = (x^2 - y^2, -2xy)$ e C é o quadrado de vértices $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ e $(0,2)$ percorrido no sentido directo;

   b) $F(x,y) = (x\cos x - e^y, -y^2 - xe^y)$ e C é uma curva simples e fechada, percorrida no sentido directo e que delimita uma região nas condições do teorema de Green;

   c) $F(x,y) = (3x^3 - y^3, x^3 + 2y^3)$ e C é a circunferência de raio 1 e centro $(0,0)$ percorrida no sentido indirecto.

84. Calcule a área da região de $\mathbb{R}^2$ limitada pela curva de equação $\rho = 3\operatorname{sen} 2\theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$.

85. Sejam C_1 e C_2 circunferências percorridas no sentido directo tais que C_2 está no interior da região limitada por C_1. Seja $F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ um campo de vectores de classe C^1 definido em $\mathbb{R}^2$. Mostre que:

   a) $\int_{C_1} F\ \mathrm{d}s - \int_{C_2} F\ \mathrm{d}s = \int_D \left(\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, onde D é a região limitada por C_1 e C_2;

   b) se $\mathrm{D}F(X)$ é uma aplicação linear simétrica (matriz simétrica), $\forall X \in \mathbb{R}^2$, então $\int_{C_1} F\ \mathrm{d}s = \int_{C_2} F\ \mathrm{d}s$.

86. Seja D uma região de $\mathbb{R}^2$ na qual se pode aplicar o teorema de Green, U um aberto de $\mathbb{R}^2$ tal que $D \subseteq U$ e $f: U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Mostre que $\int_{\partial D}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}, -\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) ds = 0$.

87. Recorra ao Teorema de Green para calcular a área de D, onde D é a região de $\mathbb{R}^2$ limitada pela elipse de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, onde $a > 0$ e $b > 0$.

88. Calcule a área de D, onde D é a região de $\mathbb{R}^2$ limitada pelo traço da curva $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (e^{-t} \cos t, e^{-t} \text{sen}\, t)$, e o segmento de extremos $(e^{-2\pi}, 0)$ e $(1, 0)$.

89. a) Determine condições necessárias e suficientes sobres os campos $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, de classe c^1, da forma $F = (F_1, F_2, 0)$, para os quais que $\text{rot}\, F(x, y, z) = (0, 0, 1)$, $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

b) Para os campos obtidos na alínea anterior, recorra ao Teorema de Green para calcular $\int_{C_r^+} F ds$, onde C_r^+ é a circunferência de equações $z = 0$, $x^2 + y^2 = r^2$, percorrida no sentido directo.

90. Sejam $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$, $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$, e $g \colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ uma função de classe C^2 (ou seja, que admite um prolongamento de classe C^2 a um aberto que contém $\mathcal{D}$) tal que $g(\mathcal{D}) = \mathcal{S}$.

a) Mostre que $\det(\text{Jac}\, g(x, y)) = 0$ para todo o (x, y) em $\mathcal{D}$.

b) Defina um campo de vectores em B por $H(x, y) = \left(g_1 \frac{\partial g_2}{\partial x}, g_1 \frac{\partial g_2}{\partial y}\right)$. Mostre que $\int_{\mathcal{S}} H\, ds = 0$.

c) Suponha que $f \colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ é uma função de classe C^2 cuja restrição a $\mathcal{S}$ é a identidade. Mostre, a partir da definição, que $\int_{\mathcal{S}} \left(f_1 \frac{\partial f_2}{\partial x},\ f_1 \frac{\partial f_2}{\partial y}\right) ds \neq 0$.

d) Conclua que $g|_{\mathcal{S}}$ não é a identidade.

e) Conclua que qualquer função $h \colon \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ de classe C^2 tem algum ponto fixo. (Caso não tenha, construa uma função g como acima e tal que $g|_{\mathcal{S}}$ seja a identidade.)

91. Determine a área do helicóide definido por

$$x = r\cos(\theta),\ y = r\sin(\theta),\ z = \theta,$$

onde $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq r \leq 1$.

92. Calcule $\int_S f dS$, onde $f(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ e S é o helicóide descrito no exercício anterior.

93. Calcule $\int_S f dS$, onde $f(x, y, z) = z^2$ e S é a esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio 1.

94. Suponha que a temperatura de um ponto de $\mathbb{R}^3$ é dada por $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$. Calcule o fluxo de calor através da superfície $x^2 + z^2 = 2$, $0 \leq y \leq 2$. (O campo associado à função temperatura é $F = -\nabla T$).

95. Seja S a superfície fechada constituída pela semi-esfera $x^2+y^2+z^2=1$, $z \leq 0$, e pela sua base $x^2+y^2 \leq 1$, $z=0$. Seja E o campo eléctrico definido por $E(x,y,z)=(2x,2y,2z)$. Calcule o fluxo eléctrico através de S.

96. Calcule $\int_S rot(F)\cdot NdS$, onde S é a superfície $x^2+y^2+3z^2=1$, $z \leq 0$, e $F(x,y,z)=(y,-x,zx^3y^2)$.

97. Recorra ao Teorema de Stokes para calcular $\int_C(-y^3,x^3,-z^3)ds$, onde C é a curva obtida pela intersecção do cilindro de equação $x^2+y^2=1$ com o plano de equação $x+y+z=1$.

98. Sejam C_1 o caminho representado pela circunferência de equações $x^2+y^2=4$ e $z=1$, percorrida uma vez no sentido directo, e C_2 o caminho representado pela circunferência de equações $x^2+y^2=4$ e $z=3$, percorrida uma vez no sentido directo. Seja $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ um campo de vectores de classe C^1 tal que $rot(F)(x,y,z)=(2x,-y,-z)$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

    Mostre que $\int_{C_1} Fds=\int_{C_2} Fds+8\pi$.

99. Calcule $\int_S F\cdot NdS$, onde $F(x,y,z)=(xy^2,x^2y,y)$, e S é a superfície constituída pelo cilindro $x^2+y^2=1$, $-1\leq z\leq 1$, e pelos discos $x^2+y^2\leq 1$ e $z=1$, e $x^2+y^2\leq 1$ e $z=-1$.

100. Seja S uma superfície fechada e sem bordo. Use o Teorema de Gauss para concluir se F é um campo de classe C^2 definido em R^3, então

$$\int_S rot(F)\cdot NdS=0.$$

101. Calcule $\int_S F\cdot NdS$, onde $F(x,y,z)=(x^3,y^3,z^3)$, e S é a esfera unitária centrada na origem.

102. Calcule $\int_{\partial B} F\cdot NdS$, onde $F(x,y,z)=(1,1,z(x^2+y^2)^2)$, e ∂B é a superfície bordo do cilindro sólido $x^2+y^2\leq 1$, $0\leq z\leq 1$.

103. Considere a superfície gráfico associada à função $f:D\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=y$, e $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leq 1\}$. Calcule

$$\int_{C^+}(-y^3+e^x,\cos(z)+y^3,e^y+x^3)ds,$$

onde C^+ representa a curva bordo de S percorrida no sentido directo.

104. Considere o campo de vectores $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$F(x,y,z) = (x + 3xy^2z,\ y - y^3z + x\cos(z),\ -2z + e^{(x^2+y^2)}),$$

e as superfícies, orientadas com "normal exterior", N,

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 4\},$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ -1 \leq z \leq 1\},$$
$$S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \geq 0\}.$$

a) Mostre que $\int_{S_1} F \cdot N\, dS = 0$.

b) Calcule $\int_{S_2} F \cdot N dS$.

c) Calcule $\int_{S_3} rot(F) \cdot N\, dS$.

105. Considere as superfícies

$$S_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 = z^2,\ \ z \in [1,2]\},$$

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ z = 1\},\ ,$$
$$S_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + (z-2)^2 =\ 4,\ z \geq 2\},$$

e sejam
$$\bar{S} = S_1 \cup S_2 \qquad S = S_1 \cup S_2 \cup S_3.$$

Sejam $F,\, G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(x,y,z) =\ (x^2 + z^2,\ x + y^2 + 2z,\ e^{xyz})$ e $G(x,y,z) = (x + yz^3,\ \cos(xz),\ zy + x^6)$

a) Calcule $\int_{S_1}\ z\, dS$.

b) Fixe uma orientação de $\bar{S}$, N, e para essa escolha calcule $\int_{\bar{S}} rot(F) \cdot N\, dS$.

c) Calcule $\int_S G \cdot N\, dS$.

106. Considere a superfície

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ z \leq 1\}$$

e o sistema de coordenadas

$$\varphi(u,v) = (2\cos(u)\sin(v),\ 2\sin(u)\sin(v),\ 2\cos(v)),\ \ (u,v) \in D = [0,\ 2\pi]\times[\frac{\pi}{3},\ \pi].$$

a) Calcule as coordenadas locais de $P = (\sqrt{2},\, \sqrt{2},\, 0)$ e o vector normal, N_φ, em P. Faça um esboço da superfície e assinale a orientação induzida em S pelo sistemas de coordenadas $(\varphi,\, D)$, e a orientação induzida por esta no bordo de S.

b) Calcule $\int_S\; z^2\; dS$.

c) Seja B o sólido limitado por S e pelo disco

$$S_0 = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3 :\, x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

Descreva o sólido B em coordenadas esféricas.
Sugestão: separe os casos $\varphi \in [0,\, \frac{\pi}{3}]$ e $\varphi \in [\frac{\pi}{3},\, \pi]$.

d) Sejam $S_1 = S \cup S_0$ e $G(x, y, z) = (y^2 z^2,\, yz,\, x\cos(y))$. Observando que S_1 limita o sólido B, use o Teorema de Gauss e a alínea anterior para calcular $\int_{S_1}\; G \cdot N\, dS$.

107. Considere a superfície cilíndrica

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 :\, y^2 + z^2 = 1,\, 0 \leq x \leq 1\}$$

e as coordenadas $\varphi(u, v) = (v,\, \cos(u),\, \sin(u))$, $(u, v) \in D = [0,\, 2\pi] \times [0, 1]$. Em S considere a orientação N_φ definida por esta parametrização.

a) Calcule as coordenadas locais de $P = (\frac{1}{2},\, 0,\, 1)$ e o vector normal a S em P. Faça um esboço da superfície e indique a orientação de S, e a orientação induzida nas duas curvas que constituem o bordo de S.

b) Calcule $\int_S\; z^2 e^x\; dS$.

c) Considere o campo de vectores

$$F(x, y, z) = (\ln(1 + x^2 + y^2 + z^2),\, (x - 1)ze^{xyz},\, z + x).$$

Verifique que pode aplicar o Teorema de Stokes a S e F. Calcule

$$\int_S rot(F) \cdot N_\varphi\; dS.$$

d) Sejam

$$D_1 = \{(0, y, z) :\, y^2 + z^2 \leq 1\} \quad e \quad D_2 = \{(1, y, z) :\, y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Considere $S_0 = S \cup D_1 \cup D_2$ com a orientação induzida por N_φ, e o campo $F(x, y, z) = (xz + 2yz,\, y^3 + \sin(x),\, z^3 + xy)$. Aplique o Teorema de Gauss para calcular $\int_{S_0}\; F \cdot N\, dS$.

108. Considere a superfície gráfico, S, dada pela parametrização

$$\varphi(u,v) = (u,\ v,\ \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}),\ \ (u,v) \in D = [1,\ 2] \times [0,\ 1].$$

Considere S com a orientação induzida, N_φ.

a) Calcule a área de S.

b) Calcule $\int_S F \cdot N_\varphi \, dS$, onde $F(x,y,z) = (\sqrt{x},\ z,\ xy)$.

c) Considere o campo de vectores $G(x,y,z) = (y^5 x,\ yz,\ 0)$.
Calculer $\int_S rot(G) \cdot N_\varphi \, dS$

109. a) Seja $\mathcal{E}$ o elipsóide de equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, onde $a, b, c > 0$. Dado $(x,y,z) \in \mathcal{E}$, seja $\eta(x,y,z)$ a distância de $(0,0,0)$ ao plano tangente a $\mathcal{E}$ em (x,y,z). Obtenha uma fórmula explícita para $\eta(x,y,z)$.

b) Seja N o campo unitário normal que aponta para o exterior de $\mathcal{E}$. Indique um campo de vectores $F(x,y,z)$ tal que, para cada $(x,y,z) \in \mathcal{E}$, se tenha $F(x,y,z) \cdot N(x,y,z) = \frac{1}{\eta(x,y,z)}$.

c) Use o teorema da divergência para concluir que $\int_{\mathcal{E}} \frac{1}{\eta} \, dS = \frac{4\pi}{3}(\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c})$.

110. Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^3$, $f\colon U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, $B \subseteq U$ uma esfera sólida (fechada), $\mathcal{S}$ a superfície esférica que delimita B, e N o campo unitário normal a $\mathcal{S}$ que aponta para o exterior de B (*normal exterior*)

a) Mostre que, se f for harmónica (i.e., $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \equiv 0$), então

$$\int_{\mathcal{S}} f \, \nabla f \, dS = \int_B \|\nabla f\|^2 \, dx\, dy\, dz.$$

b) Seja $G\colon U \to \mathbb{R}^3$ um campo de vectores de classe C^1 tal que $\operatorname{rot} G|_B \equiv 0$, $\operatorname{div} G|_B \equiv 0$ e $G \cdot N|_{\mathcal{S}} \equiv 0$. Mostre que a restrição de G a B é o campo nulo.

c) Na alínea anterior, pode retirar a condição de ser $G \cdot N|_{\mathcal{S}} \equiv 0$ e obter ainda a mesma conclusão?

d) Para que outros sólidos B são válidas as conclusões de (a) e (b).

111. Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície parameterizada. Mostre que o espaço tangente num ponto P de S, $T_P S$, é igual ao conjunto dos vectores $v \in \mathbb{R}^3$ que se podem obter como vectores velocidade de curvas de classe C^1 cujo traço está contido em S, e que no instante $t = 0$ passam por P com velocidade v.

112. Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^3$ e $f : U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Mostre que se $c \in \mathbb{R}$ é um valor regular então $N_c(f)$ é localmente o gráfico de uma função de classe C^1.