Teorema da Função Implícita

Motivação

1) $$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 w = e_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 w = e_2 \end{cases}$$

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2, e_1, e_2 \in \mathbb{R}$

é um sistema de duas equações e quatro variáveis.

Resolver em ordem a x e z:

$$\begin{cases} a_1 x + c_1 z = e_1 - b_1 y - d_1 w \\ a_2 x + c_2 z = e_2 - b_2 y - d_2 w \end{cases}$$

É possível resolver o sistema em ordem a x e z se e só se $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1 c_2 - a_2 c_1 \neq 0$.

A possibilidade de o resolver não depende de y e w fixados.

---

2) $x^2 + y^2 = 1$

Não é possível resolver globalmente

a equação em ordem a y: $y = \pm\sqrt{1-x^2}$

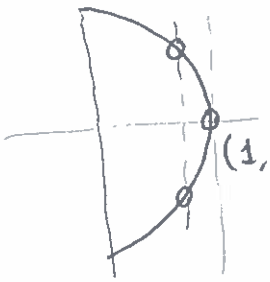
- $(0,1)$ é solução e, para $x \in]-1,1[$,

$$y = y(x) = \sqrt{1-x^2}$$

- $(0,-1)$ é solução e, para $x \in]-1,1[$,

$$y = y(x) = -\sqrt{1-x^2}$$

- o ponto $(1,0)$ tb é solução da equação mas não é possível resolvê-la em ordem a y numa vizinhança de $(1,0)$.



$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x,y)} = 2y \quad ; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)} = 2 \; ; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,0)} = 0$$

(tangente vertical).

Situação geral

$X \in \mathbb{R}^n$, $Y \in \mathbb{R}^m$, $\mathcal{U}$ aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$

$f : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^k $(k \geq 1)$

$f(X,Y) = C$, C fixado em $\mathbb{R}^m$

é um sistema com m-equações e

$(n+m)$ - variáveis

$(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ tal que $f(x_0, y_0) = C$,

isto é, (x_0, y_0) é uma solução do sistema.

O que se pretende é mostrar que é possível resolver o sistema, numa vizinhança da solução (x_0, y_0), em ordem a m-variáveis, digamos $y_1, \ldots, y_m$.

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = c_1 \\ - - - - - - - - - - \\ f_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = c_m \end{cases}$$

com (x, y) "perto" de (x_0, y_0) deverá ser equivalente a

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, \ldots, x_n) \\ - - - - - - \\ y_m = g_m(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$ para $(x_1, \ldots, x_n)$ "perto" de x_0

$X = (x_1, \ldots, x_n)$, $Y = (y_1, \ldots, y_m)$

$C = (c_1, \ldots, c_m)$.

Teorema da Função Implícita

Sejam $\mathcal{U}$ aberto de $\mathbb{R}^{n+m} \approx \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e

$f: \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^k, $k \geq 1$.

Seja $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ tal que

(i) $f(x_0, y_0) = C \in \mathbb{R}^m$

(ii) $$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}_{(x_0, y_0)} \neq 0$$

Então existem abertos V de $\mathbb{R}^{n+m}$ e W de $\mathbb{R}^n$,

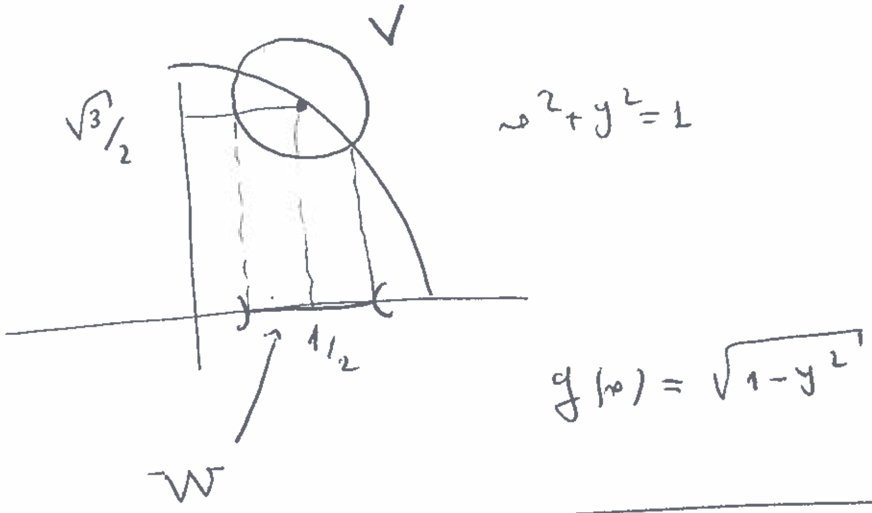
com $(x_0, y_0) \in V \subseteq \mathcal{U}$ e $x_0 \in W$, e

existe uma função $g: W \longrightarrow \mathbb{R}^m$, de classe C^k,

tais que

$$\left.\begin{array}{l} (x, y) \in V \\ f(x,y) = C \end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{l} x \in W \\ y = g(x) \end{array}\right.$$

Diz-se que a equação $f(x,y) = 0$ <u>define implicitamente y como função de x</u> numa vizinhança da solução (x_0, y_0)



Demonstração

Trocando f por $f-c$ (isto é $f(x)-c,\ \forall x \in \mathcal{U}$) podemos assumir que $c = 0 \in \mathbb{R}^m$.

Considere-se
$$\varphi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$
$$(x,y) \mapsto (x, f(x,y))$$

φ é de classe C^k, $\varphi(x_0,y_0) = (x_0, 0)$ e

$$J(\varphi)\Big|_{(x_0,y_0)} = \begin{bmatrix} \underset{(n\times n)}{Id} & \underset{(n\times m)}{0} \\ \underset{(m\times n)}{B} & \underset{(m\times m)}{A} \end{bmatrix}$$

$i \times j$
linhas colunas

onde
$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)},$$

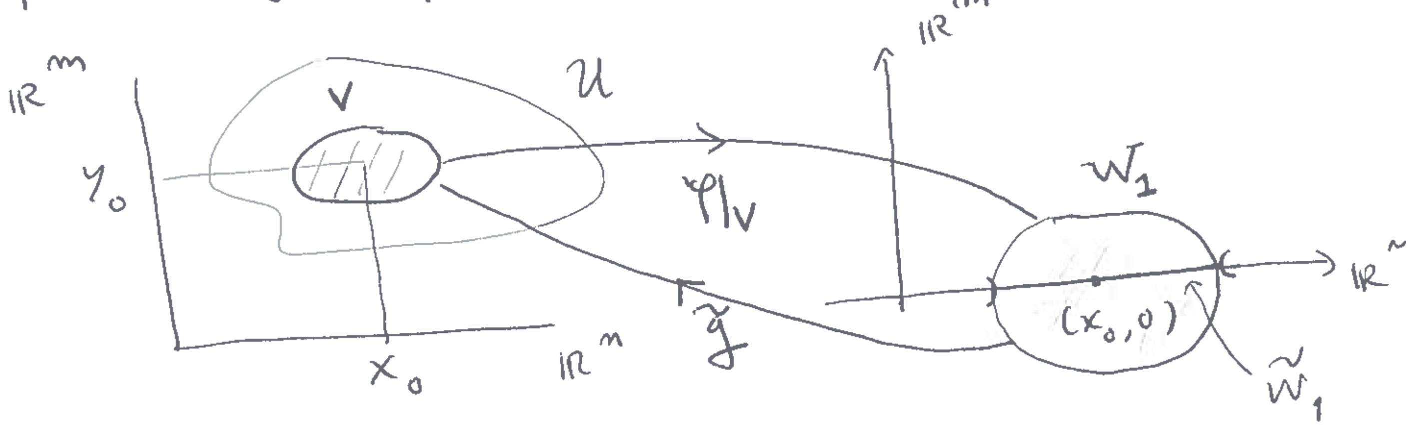
$$B = \left[\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m} \end{array}\right]\Bigg|_{(x_0,y_0)}$$

sendo $f_1, \ldots, f_m$ as funções componentes de f.

Decorre que $\det J(\varphi)\big|_{(x_0,y_0)} = \det A \neq 0$, por hipótese.

Assim, φ é localmente invertível em (x_0, y_0) (pelo Teorema da Função Inversa).

Portanto existem abertos V de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ tais que $(x_0, y_0) \in V \subseteq \mathcal{U}$, e W_1 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $\varphi(V) = W_1$, e $\varphi(x_0, y_0) = (x_0, 0) \in W_1$, existe $\tilde{g} : W_1 \to V$, de classe C^k, tal que $\tilde{g} \circ \varphi|_V = Id|_V$ (inversa local)



Considere-se $\tilde{W}_1 = \{(x,0) \in W_1\}$

e $W = \{x \in \mathbb{R}^n : (x,0) \in \tilde{W}_1\}$, que é um

aberto de $\mathbb{R}^n$.

Escreva-se $\tilde{g}(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$

Para $(x,y) \in W_1$ qualquer tem-se

$$(x,y) = \varphi \circ g(x,y) = \varphi(g_1(x,y), g_2(x,y)) =$$

$$= (g_1(x,y), f(g_1(x,y), g_2(x,y)))$$

Assim $\left[\begin{array}{l} x = g_1(x,y) \text{ e } y = f(x, g_2(x,y)) \\ \forall (x,y) \in W_1 \end{array}\right]$

Em particular para $(x,0) \in \tilde{W}_1$ ($\Leftrightarrow x \in W$)

tem-se $0 = f(x, g_2(x,0))$

Defina-se $g : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$ por

$g(x) = g_2(x,0)$. Tem-se que g é de classe C^k,

$g(x_0) = g_2(x_0, 0) = y_0$ e

$$\left.\begin{array}{l} x \in W \\ y = g(x) \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x,y) = 0 \\ (x,y) \in V \end{array}\right.$$

Para obter a implicação contrária observe-se que se $(x,y) \in \tilde{V}$ e $f(x,y)=0$ então $\varphi(x,y) = (x, f(x,y)) = (x,0)$, $\underline{\underline{x \in W}}$.

De $(x,y) = \tilde{g} \circ \varphi(x,y) = \tilde{g}(x,0) =$

$$= (g_1(x,0), g_2(x,0)) = (g_1(x,0), g(x)),$$

conclui-se que $y = g(x)$, com $x \in W$. ▨

<u>Exemplo</u> A equação

$$2x^2y^3 - x^6y^5 = -16 \qquad (*)$$

pode ser resolvida em ordem a x numa vizinhança de $(1,2)$.

Considerar $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y) \rightsquigarrow 2x^2y^3 - x^6y^5$$

$(*)$ é equivalente a $f(x,y) = -16 \quad (**)$

Para aplicar o Teorema da Função Implícita há que verificar:

i) f é de classe C^1 (de facto é de classe C^∞)

ii) $(1,2)$ é solução da equação $(**)$

$$f(1,2) = 2.1.8 - 1.32 = -16$$

(ii) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2)} = 4xy^3 - 6x^5y^5\Big|_{(1,2)} =$

$= 32 - 6.32 = -5\times 32 = -160 \neq 0$

Assim, existem abertos V de $\mathbb{R}^2$ e W de $\mathbb{R}$ tais que $(1,2) \in V$ e $2 \in W$, e existe $g: W \to \mathbb{R}$ de classe C^1 (de facto C^∞) tais que

$$\left.\begin{array}{l}(x,y)\in V\\ f(x,y)=16\end{array}\right] \iff \left[\begin{array}{l}2\in W\\ x=g(y)\end{array}\right.$$

Portanto se $y \in W$ tem-se $f(g(y),y)=16$

$x = x(y) = g(y)$. Derivação implícita:

$$2\,(x(y))^2 \cdot y^3 - (x(y))^6 \cdot y^5 = 16, \quad y \in W$$

$$4x \cdot \frac{dx}{dy} \cdot y^3 + 6x^2y^2 - 6x^5 \cdot \frac{dx}{dy} \cdot y^5 - 5x^6y^4 = 0$$

$$\underbrace{(4xy^3 - 6x^5y^5)}_{\frac{\partial f}{\partial x}} \frac{dx}{dy} = \underbrace{-6x^2y^2 + 5x^6y^4}_{-\frac{\partial f}{\partial y}}$$

substituindo: $-160 \left.\frac{dx}{dy}\right|_2 = -24 + 80 = 56$

$$\boxed{\left.\frac{dx}{dy}\right|_2 = -\frac{7}{20}}$$

notar:

$$f(x(y), y) = 16, \quad \forall y \in W$$

tem-se

explicar

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(y),y)} \cdot \left.\frac{dx}{dy}\right|_{y} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x(y),y)} = 0$$

$\nabla f(x,y)|_{(x',1)}$

Derivação Implícita

do Teorema da Função Implícita tem-se

$$f(x, g(x)) = 0, \quad \forall x \in W$$

Definindo $G(x) = (x, g(x)), \quad x \in W$

$$W \subseteq \mathbb{R}^n \xrightarrow{G} \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m}_{U} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

tem-se

$$f \circ G(x) = 0, \quad \forall x \in W,$$

portanto $\left. Df \right|_{(x,g(x))} \circ \left. DG \right|_{x} = \underset{m \times n}{\Theta}$.

$$\underbrace{\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{array}\right]_{(x,g(x))}}_{m \times n \quad | \quad m \times m} \times \underbrace{\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hline \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{array}\right]_{x}}_{m \times n} =

$$\underset{m\times n}{\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}}_{\ \ m\times m} \times \underset{m\times n}{\overset{n\times n}{\begin{bmatrix} Id \\ C \end{bmatrix}}} = \Theta$$

$$\therefore \; A + BC = \Theta \qquad \therefore \; C = -B^{-1}.A$$

isto é

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}\Bigg|_{x_0} =$$

$$- \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)} \right)^{-1} \times \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdots & & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}$$

Exemplo

Considerar $\begin{cases} xu + yv^2 = 0 \\ xv^3 + y^2u^6 = 1 \end{cases}$.

Numa vizinhança de $(\underset{x}{1}, \underset{y}{0}, \underset{u}{0}, \underset{v}{1})$ este sistema define implicitamente (y, v) em função de (x, u), isto é, é possível resolver o sistema em ordem às variáveis y e v (numa vizinhança de $(1,0,0,1)$).

. $f: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$(x,y,u,v) \rightsquigarrow (xu + yv^2, xv^3 + y^2u^6)$

- f é de classe C^1

- $f(1,0,0,1) = (0, 1)$

- $\det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix}_{|(1,0,0,1)} = \det \begin{bmatrix} v^2 & 2yv \\ 2yu^6 & 3xv^2 \end{bmatrix}_{|(1,0,$

$= \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \neq 0$

(...)

Existem abertos V de $\mathbb{R}^4$ e W de $\mathbb{R}^2$,

$(1,0,0,1) \in V$, $\quad (\underset{x}{1}, \underset{u}{0}) \in W$ e existe

$g: W \longrightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 (C^∞) tais que

$$\left.\begin{array}{l} (x,y,u,v) \in V \\ f(x,y,u,v) = (0,1) \end{array}\right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x,u) \in W \\ (y,v) = g(x,u) = \\ = (y(x,u), v(x,u)) \end{array}\right.$$

com $\quad y(1,0) = 0 \quad$ e $\quad v(1,0) = 1$.

Derivando em ordem à variável x:

$$\begin{cases} u + 2y \dfrac{\partial v}{\partial x} v + \dfrac{\partial y}{\partial x} \cdot v^2 = 0 & (1) \\ v^3 + 3xv^2 \dfrac{\partial v}{\partial x} + 2y \dfrac{\partial y}{\partial x} u^6 = 0 \end{cases}$$

Assim

$$\begin{cases} 0 + \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{(1,0)} = 0 \\ 1 + 3 \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{(1,0)} = 0 \end{cases} \quad \therefore \quad \begin{array}{l} \left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{(1,0)} = 0 \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{(1,0)} = -1/3 \end{array}$$

Derivando em ordem à variável $\underline{\underline{u}}$:

$$\begin{cases} x + \dfrac{\partial y}{\partial u} v^2 + 2yv\dfrac{\partial v}{\partial u} = 0 \\ 3v^2 x \dfrac{\partial v}{\partial u} + 2yu^6 \cdot \dfrac{\partial y}{\partial u} + 6y^2u^5 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Assim $\quad 1 + \left.\dfrac{\partial y}{\partial u}\right|_{(1,0)} = 0 \quad \therefore \quad \left.\dfrac{\partial y}{\partial u}\right|_{(1,0)} = -1$

$$3\left.\frac{\partial v}{\partial u}\right|_{(1,0)} = 0$$

Para calcular $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ derivam-se as equações de (1) em ordem à variável x:

$$\begin{cases} 2\dfrac{\partial y}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} v + 2y\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} v + 2y\dfrac{\partial v}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} + \\ + \dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot v^2 + 2v\dfrac{\partial y}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ 3v^2\dfrac{\partial v}{\partial x} + 3v^2\dfrac{\partial v}{\partial x} + 6xv\dfrac{\partial v}{\partial x} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} + 3xv^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \\ + 2u^6\left(\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2y\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \end{cases}$$

$x = 1, \quad y = 0, \quad u = 0, \quad v = 1$

$$\left.\frac{\partial y}{\partial u}\right|_{(1,0)} = -1, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial u}\right|_{(1,0)} = 0, \quad \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{(1,0)} = 0, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{(1,0)} = -1/3$$

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{(1,0)} = 0 \\ -1 - 1 + 6/9 + 3 \left.\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{(1,0)} = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{(1,0)} = 0 \quad e \quad \left.\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right|_{(1,0)} = 4/9$$

Se quisermos calcular $\left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial x \partial u}\right|_{(1,0)} \overset{\text{p7?}}{=} \left.\dfrac{\partial^2 y}{\partial u \partial x}\right|_{(1,0)}$

podemos derivar as equações de (1) em ordem à variável $\underline{u}$ ou as equações de (2) em ordem à variável $\underline{x}$.

Corolário (do Teorema da Função Implícita)

Sejam U aberto de $\mathbb{R}^n$, $f: U \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, $c \in \mathbb{R}$, e x_0 um ponto regular de $N_c(f)$, isto é $f(x_0) = c$ e $Df(x_0) \neq \vec{0}$.
Então existe um aberto V tq $x_0 \in V$ e $V \cap N_c(f)$ é um gráfico.

dem: Como x_0 é ponto regular existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\left.\frac{\partial f}{\partial x_j}\right|_{x_0} \neq 0$

Assim, existem V aberto de $\mathbb{R}^n$, $x_0 \in V$, W aberto de $\mathbb{R}^{n-1}$ e existe $g: W \to \mathbb{R}$ de classe C^1 tais que

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = c \\ x \in V \end{array}\right] \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_j = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \\ (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in W \end{array}\right.$$

$N_c(f) \cap V = \{(x_1, \dots, x_{j-1}, g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), x_{j+1}, \dots, x_n)$

Multiplicadores de Lagrange

U aberto do $\mathbb{R}^{n+m}$

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 (C^k, $k \geq 1$)

$$N_c(f) = \{(x,y) \in U : f(x,y) = c\}, \quad c = (c_1, \ldots, c_m)$$

$$\begin{cases} f_1(x,y) = c_1 \\ \cdots \\ f_m(x,y) = c_m \end{cases}$$

(x_0, y_0) diz-se um ponto regular de $N_c(f)$ se $f(x_0, y_0) = c$ e os m vectores $Df_1(x_0, y_0), \ldots, Df_m(x_0, y_0)$ são linearmente independentes.

Considerando a matriz Jacobiana de f em (x_0, y_0):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} & \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{array}\right]\Bigg|_{(x_0,y_0)} = J(f)(x_0,y_0)$$

Decorre facilmente que (x_0, y_0) é ponto regular se $J(f)(x_0,y_0)$ admite uma sub-matriz $m\times m$ de determinante não nulo. (portanto envolvendo $\underline{\underline{m}}$ variáveis)

No que se segue vamos supor que tal matriz é

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial y_m} \end{bmatrix}\Bigg|_{(x_0,y_0)}$$

Pelo Teorema da Função Implícita conclui-se que <u>localmente</u> $N_c(f)$ é um gráfico:

$$N_c(f) \cap V = \{ (x, g(x)) ; x \in W \}$$

sendo g de classe C^1 (C^k), V aberto, $(x_0, y_0) \in V$,

$x = (x_1, \ldots, x_n)$, W aberto.

$$g(x) = (g_1(x_1, \ldots, x_n), g_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$$

No ponto regular (x_0, y_0) define-se:

espaço normal a $N_c(f)$ em (x_0, y_0):

$$\text{span}\{ Df_1(x_0, y_0), \ldots, Df_m(x_0, y_0) \} = \mathbb{V}$$

que é um espaço vectorial de dimensão $\underline{\underline{m}}$

espaço afim normal a $N_c(f)$ em (x_0, y_0):

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : (x - x_0, y - y_0) \in \mathbb{V} \} =$$

$$= \{ (x_0, y_0) \} + \mathbb{V}$$

espaço tangente a $N_c(f)$ em (x_0, y_0)

$$T_{(x_0,y_0)} N_c(f) = \{ v \in \mathbb{R}^{n+m} : v \mid \nabla f_i(x_0, y_0) = 0,$$

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}$$

que é um espaço vectorial de dimensão $\underline{\underline{n}}$

e

espaço afim tangente a $N_c(f)$ em (x_0, y_0):

$$\{(x_0, y_0)\} + T_{(x_0,y_0)} N_c(f) =$$

$$= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : (x - x_0, y - y_0) \in T_{(x_0,y_0)} N_c(f) \}.$$

Exemplo: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 10 \\ x + y + z + w = 0 \end{cases}$

$$f_1(x,y,z,w) = x^2+y^2+z^2+w^2$$

$$f_2(x,y,z,w) = x+y+z+w$$

$$(x_0,y_0) = (\underbrace{1,2,}_{x_0}\underbrace{-1,-2}_{y_0}) = X_0$$

$$\left.\begin{array}{l} Df_1(1,2,-1,-2) = (2,4,-2,-4) \\ Df_1(1,2,-1,-2) = (1,1,1,1) \end{array}\right\} L.I.$$

mod

$$(x,y,z,w) = \alpha(2,4,-2,-4) + \beta(1,1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 2\alpha+\beta \\ y = 4\alpha+\beta \end{array}\right\} \quad y - x = 2\alpha \qquad \beta = x - 2\alpha =$$

$$z = -2\alpha+\beta \qquad = x - y + x = 2x - y$$

$$w = -4\alpha+\beta$$

$$z = x - y + 2x - y$$

$$w = 2x - 2y + 2x - y$$

$$\boxed{\begin{array}{l} z = 3x - 2y \\ w = 4x - 3y \end{array}}$$

af:

$$\begin{cases} x-1 = 2\alpha+\beta \\ y-2 = 4\alpha+\beta \\ z+1 = -2\alpha+\beta \\ w+2 = \end{cases} \quad (--) \qquad \begin{array}{l} z = 3x-2y \\ w = 4x-3y \end{array}$$

ορθογ τγ

$$\begin{cases} (x,y,z,w) \mid (2,4,-2,-4) = 0 \\ (x,y,z,w) \mid (1,1,1,1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z - 2w = 0 \\ x + y + z + w = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2w + z - 2y \\ 2w + z - \underline{2y} + z + \underline{y} + w = 0 \end{cases}$$

$$y = 3w + 2z$$

$$x = 2w + z - 6w - 4z =$$

$$= -3z - 4w$$

$$\boxed{\begin{aligned} y &= 3w + 2z \\ x &= -4w - 3z \end{aligned}}$$

αλ: (000)

$$\begin{cases} (x-1, y-2, z+1, w+2) \mid (2,4,-2,-4) = 0 \\ (x-1, y-2, z+1, w+2) \mid (1,1,1,1) = 0 \end{cases}$$

(00-)

$$\begin{cases} y = 3w + 2z + 10 \\ x = -4w - 3z + 10 \end{cases}$$

αν $(1,2,-1,-2)$

$-2 = -6 + 2z + c$

$\therefore c = 10$

<u>Teorema</u> $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1, $\mathcal{U}$ aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ ponto regular de $N_c(f)$, $c = (c_1, \dots, c_m)$

<u>Então</u>

$$\boxed{T_{(x_0,y_0)} N_c(f) = \{ v \in \mathbb{R}^{n+m} ; \ \exists \alpha :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathcal{U} \text{ tq } \alpha(t) \in N_c(f), \forall t, \ \alpha \text{ é de classe } C^1, \ \alpha(0) = (x_0, y_0), \ \alpha'(0) = v \}}$$

<u>dem</u> Como antes vamos assumir que

$N_c(f) \cap \mathcal{U} = \{ (x, g(x)) ; x \in W \}$ gráfico

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$g(x) = (g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n))$

Seja α uma curva de classe C^1 contida em $N_c(f)$ tq $\alpha(0) = (x_0, y_0)$ e $\alpha'(0) \neq 0$.

tem-se que

$$f_i \circ \alpha(t) = c_i \quad , \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

$$\therefore \quad Df_i(\alpha(0)) \Big| \alpha'(0) = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, m\}$$

pela def: $\quad \alpha'(0) \in T_{(x_0, y_0)} N_c(f)$;

Agora para cada $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\alpha_i(t) = (x_0 + t e_i \, , \, g_1(x_0 + t e_i), \dots, g_m(x_0 + t e_i))$$

$\operatorname{tr} \alpha_i \subseteq N_c(f)$

$\alpha_i(0) = (x_0, g(x_0)) = (x_0, y_0)$

$$V_i = \alpha_i'(0) = (0, \dots, 0, \underset{\underset{i}{\uparrow}}{1}, 0, \dots, 0, \left.\frac{\partial g_1}{\partial x_i}\right|_{(x_0, y_0)}, \dots, \left.\frac{\partial g_m}{\partial x_i}\right|_{(x_0, \dots)})$$

Cada V_i é ortogonal a Df_j (já sabemos..)

pq

$$V_i \Big| Df_j(x_0, y_0) = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial y_s} \cdot \frac{\partial g_s}{\partial x_i} = 0$$

(é a derivação implícita)

recordando que $\quad y_s = g_s(x_1, \dots, x_n)$

Os V_i são n-vectores L.I. $\therefore$ geram $T_{(x_0,y_0)} N_c(f)$.

Seja $w \neq \vec{0}$ um vector de $T_{(x_0,y_0)} N_c(f)$

$$w = \sum_{i=1}^{n} \beta_i V_i$$

$$\beta(t) = (\underbrace{x_1^0 + \beta_1 t, \dots, x_n^0 + \beta_n t}_{\beta_0(t)}, g_1(\beta_0(t)), \dots g_m(\beta_0(t)))$$

Por construção:

- β é de classe C^1
- $\beta(0) = (x_0, y_0)$
- $\beta(t) \in N_c(f)$
- $\beta'(0) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i V_i$ $\longrightarrow$ para verificar.

$$\beta'(0) = \left(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_1}{\partial x_j}\Big|_{x_0} \cdot \beta_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_m}{\partial x_j}\Big|_{x_0} \beta_j\right)$$

#

Corolário

(generalização do método dos multiplicadores de Lagrange)

$f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, U aberto de $\mathbb{R}^{n+m}$,

f de classe C^1, $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$.

$h: U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1.

Se x_0 é ponto de extremo local de h em $N_c(f)$ então

- x_0 é ponto singular de $N_c(f)$

ou

- x_0 é ponto regular de $N_c(f)$ e

$$\nabla h(x_0) \in \text{span}\{Df_1(x_0), \dots Df_m(x_0)\}$$

dem: seja v um vector qq de $T_{x_0} N_c(f)$

(admitindo que x_0 é regular)

e $\alpha_v(t)$ uma curva de classe C^1, $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$

tq. $\cdot\ \mathrm{tr}\, \alpha_v \subseteq N_c(f)$

$\cdot\ \alpha_v(0) = x_0$

$\cdot\ \alpha_v'(0) = v$

$h \circ \alpha_v :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow \mathbb{R}$ tem extremo

local em $t=0$. Assim

$$0 = (h \circ \alpha_v)'(0) = Dh(\alpha_v(0)) \mid \alpha_v'(0) =$$

$$= Dh(x_0) \mid v$$

$\therefore$ Como v é qq o resultado segue.

um exemplo.