Partições e Números de Stirling

Samuel Lopes

M2007–Algoritmos em Matemática Discreta

2 de outubro de 2019

2/10/2019

Sumário:

Partições de um conjunto e blocos de uma partição. Exemplos. Números de Stirling de segunda espécie $S(n, k)$ e números de Bell $B(n)$. Relação de recorrência para os números de Stirling de segunda espécie. Cálculo de $S(n, k)$ e $B(n)$ para $n, k \leq 6$.

Explicação da notação B^A para o conjunto das funções de A em B. Cardinal deste conjunto. Função característica de um subconjunto de um conjunto dado. Cardinal do conjunto das partes de um conjunto finito dado. Multiconjuntos.

Partições de conjuntos

2/10/2019

Uma partição de um conjunto S é um conjunto (não é uma lista, i.e., é uma partição não etiquetada) de subconjuntos não vazios e dois-a-dois disjuntos de S cuja reunião é S. Cada um desses subconjuntos diz-se um bloco.

Exemplo: As partições de [4] são:

1 bloco: $\{\{1,2,3,4\}\}$

2 blocos: $\{\{1\},\{2,3,4\}\}$, $\{\{2\},\{1,3,4\}\}$, $\{\{3\},\{1,2,4\}\}$, $\{\{4\},\{1,2,3\}\}$, $\{\{1,2\},\{3,4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2,3\}\}$

3 blocos: $\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$, $\{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$, $\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$, $\{\{2,3\},\{1\},\{4\}\}$, $\{\{2,4\},\{1\},\{3\}\}$, $\{\{3,4\},\{1\},\{2\}\}$

4 blocos: $\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}$

```
sage: C = SetPartitions([1,2,3, 4]); C
Set partitions of {1, 2, 3, 4}
sage: C.cardinality()
15
sage: C.list()
[{{1, 2, 3, 4}}, {{1, 2, 3}, {4}},
 {{1, 2, 4}, {3}},  {{1, 2}, {3, 4}},
 {{1, 2}, {3}, {4}}, {{1, 3, 4}, {2}},
 {{1, 3}, {2, 4}}, {{1, 3}, {2}, {4}},
 {{1, 4}, {2, 3}}, {{1}, {2, 3, 4}},
 {{1}, {2, 3}, {4}}, {{1, 4}, {2}, {3}},
 {{1}, {2, 4}, {3}}, {{1}, {2}, {3, 4}},
 {{1}, {2}, {3}, {4}}]
```

Números de Stirling de 2ª espécie

2/10/2019

$S(n,k)$ = nº de partições do conjunto $[n]$ com k blocos

Os números $S(n,k)$ designam-se por números de Stirling de 2ª espécie.

Exemplo:

$$S(4,1) = 1, \qquad S(4,2) = \binom{4}{1} + \frac{1}{2}\binom{4}{2} = 7$$

$$S(4,3) = \binom{4}{2} = 6, \qquad S(4,4) = 1$$

Números de Stirling de 2ª espécie: relação de recorrência

Seja $P = \{B_1, \ldots, B_k\}$ uma partição de $[n]$ em k blocos. Há duas hipóteses mutuamente exclusivas:

$\{n\}$ é um dos blocos de P Neste caso, retirando esse bloco a P obtemos uma partição P' de $[n-1]$ com $k-1$ blocos. Há $S(n-1, k-1)$ partições nestas condições e as partições de $[n]$ em k blocos em que $\{n\}$ é um dos blocos obtêm-se destas adicionando-lhes o bloco $\{n\}$.

n pertence a um bloco de P com pelo menos 2 elementos Neste caso, retirando n a esse bloco obtemos uma partição de $[n-1]$ com k blocos. Há $S(n-1, k)$ partições nestas condições e as partições de $[n]$ em k blocos em que n não está isolado obtêm-se destas adicionando n a algum dos k blocos. **Há portanto k possibilidades** , para cada uma das $S(n-1, k)$ partições possíveis.

Números de Stirling de 2ª espécie: relação de recorrência (cont.)

Teorema

Os números de Stirling satisfazem a relação de recorrência

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k), \qquad (*)$$

com condições iniciais $S(n,0) = 0 = S(0,k)$, *se* $n,k \geq 1$ *e* $S(0,0) = 1$.

Exemplo: Partições de [4] com 3 blocos

2/10/2019

$\{4\}$ **é um dos blocos** $\rightsquigarrow$ partições de [3] com 2 blocos:

$$\{\{1\},\{2,3\}\}, \quad \{\{2\},\{1,3\}\}, \quad \{\{3\},\{1,2\}\}$$

Logo obtemos as partições:

$$\{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}, \quad \{\{2\},\{1,3\},\{4\}\}, \quad \{\{3\},\{1,2\},\{4\}\}$$

$\{4\}$ **não é um dos blocos** $\rightsquigarrow$ partições de [3] com 3 blocos:

$$\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$$

E escolher o bloco onde fica o 4:

$$\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}, \quad \{\{1\},\{2,4\},\{3\}\}, \quad \{\{1\},\{2\},\{3,4\}\}$$

O triângulo dos números de Stirling de 2ª espécie

2/10/2019

Assim, usando a relação de recorrência $(*)$ e as respetivas condições iniciais, podemos obter a seguinte tabela

Triângulo dos números de Stirling de 2ª espécie

$S(n,k)$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1

Números de Bell

2/10/2019

Pelo que vimos, o número total de partições de um conjunto com n elementos é

$$B(n) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k) = S(n,0) + S(n,1) + \cdots + S(n,n-1) + S(n,n).$$

Este número é designado por número de Bell de ordem n e obtém-se somando a linha n do triângulo dos números de Stirling de 2ª espécie.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	$B(n)$
0	1	0	0	0	0	0	0	0	$B(0) = 1$
1	0	1	0	0	0	0	0	0	$B(1) = 1$
2	0	1	1	0	0	0	0	0	$B(2) = 2$
3	0	1	3	1	0	0	0	0	$B(3) = 5$
4	0	1	7	6	1	0	0	0	$B(4) = 15$
5	0	1	15	25	10	1	0	0	$B(5) = 52$
6	0	1	31	90	65	15	1	0	$B(6) = 203$
7	0	1	63	301	350	140	21	1	$B(6) = 877$

OEIS

THE ON-LINE ENCYCLOPEDIA OF INTEGER SEQUENCES®

Funções

Notação

2/10/2019

$\mathbb{N}$ **ou** $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ $=$ conjunto dos inteiros não negativos

B^A $= \{$funções $f : A \longrightarrow B\}$

Exemplo: Se $A = [n]$ então $f \in B^{[n]} \leftrightsquigarrow (f(1), f(2), \ldots, f(n)) \in B^n$

Teorema

Se A e B são conjuntos finitos, então $\left|B^A\right| = |B|^{|A|}$.

Prova: Usar a regra do produto. $\blacksquare$

Exemplo: $A = \{\heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit\}$, $g \in \mathbb{N}^A$, $g = (7, 5, 9, 0)$.
Note-se que g NÃO ESTÁ BEM DEFINIDA! porque não é possível determinar com esta informação e.g. qual o elemento $x \in A$ tal que $g(x) = 5$.
É necessário explicitar primeiro uma ordem em A. Por exemplo, se definirmos $\heartsuit < \diamondsuit < \clubsuit < \spadesuit$, então $g(\diamondsuit) = 5$, mas se definirmos $\diamondsuit < \spadesuit < \heartsuit < \clubsuit$, então $g(\spadesuit) = 5$.

Sucessões e subconjuntos

2/10/2019

Exemplo:

$$\begin{array}{ccl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \leftrightarrow & \text{sucessões reais} \\ f & \mapsto & (f_n)_{n\geq 0} \text{ onde } f_n = f(n) \end{array}$$

Teorema

Seja X um conjunto finito e $\mathcal{P}(X)$ o conjunto dos subconjuntos de X. Então

$$|\mathcal{P}(X)| = \left|\{0,1\}^X\right| = 2^{|X|}$$

Prova: Dado $A \subseteq X$, seja $\chi_A : X \to \{0,1\}$ a respetiva função característica definida por $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$.

A correspondência

$$A \in \mathcal{P}(X) \leftrightsquigarrow \chi_A \in \{0,1\}^X$$

é bijetiva, logo $|\mathcal{P}(X)| = \left|\{0,1\}^X\right| = 2^{|X|}$. ∎

Multiconjuntos

2/10/2019

Seja X um conjunto. Um multiconjunto cujos elementos pertencem a X corresponde a uma lista $(m(x))_{x \in X}$ das multiplicidades dos elementos $x \in X$ no multiconjunto.

Logo:

$$\begin{array}{c}\text{multiconjuntos cujos}\\ \text{elementos pertencem a } X\end{array} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{array}{c}\text{funções}\\ m : X \longrightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}\end{array} \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^X$$

Exemplo:

Os multiconjuntos de elementos de X nos quais cada elemento tem multiplicidade não superior a k correspondem às funções em $\{0, 1, \ldots, k\}^X$, e como tal há exatamente

$$\left|\{0, 1, \ldots, k\}^X\right| = (k+1)^{|X|}$$

multiconjuntos nestas condições.