GEOMETRIA

A geometria é provavelmente a área mais antiga da matemática, precursora da própria álgebra e sendo um dos pilares da matemática. A palavra geometria é resultado da combinação das palavras gregas *geo* e *metron/metri*, significando respectivamente Terra e medição, pois a área da geometria consiste da medição e entendimento das relações e propriedades contidas nas fíguras geométricas: comprimento, distância, ângulo, área, volume e perímetro, as fíguras geométricas por sua vez são parte integrante da natureza e da Terra (*geo*).

DEFINIÇÕES GERAIS

Antes do estudo da geometria devemos ter ciência das definições de conceitos presentes nesse ramo da matemática, dentro destes conceitos se enquadram as medidas, os ângulos, as fíguras geométricas e suas componentes.

GRANDEZAS E UNIDADES DE MEDIDA

DISTÂNCIA E COMPRIMENTO

Distância e comprimento medem o quão longe dois pontos estão entre si, e no caso de arestas essa medida é denotada como comprimento. A unidade de medida base utilizada para comprimento é o metro (símbolo m), além do metro existem seus múltiplos que são igualmente utilizados dependendo da distância/comprimento aferido.

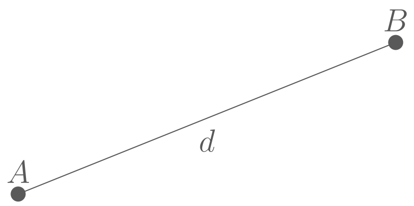


Figura 1: d representa a distância entre os pontos que formam a reta $\overline{AB}$

Nome	Sigla	Equivalência
picometro	pm	$10^{-12}m$
nanometro	nm	$10^{-9}m$
micrometro	μm	$10^{-6}m$
milimetro	mm	$10^{-3}m$
centímetro	cm	$10^{-2}m$
decímetro	dm	$10^{-1}m$
metro	m	$1m$
decâmetro	dam	$10m$
hêctometro	hm	$100m$
quilometro	km	$1000m$

Outras medidas de comprimento são:
Perímetro: comprimento do

contorno de uma fígura geométrica.
Raio: distância entre o centro de uma circunferência até seu contorno ou superfície.
Diâmetro: comprimento de reta que passe pelo centro da circunferência e cujo seus pontos de início e fim estejam sobre a circunferência
Circunferência: perímetro de uma circunferência.

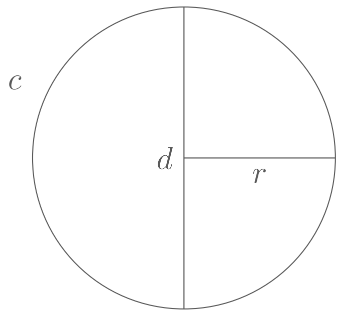


Figura 2: Raio r, diâmetro d e circunferência c de um círculo

o diâmetro de um círculo é $d = 2r$, logo o raio é $r = \frac{d}{2}$ e a circunferência/perímetro do círculo é $2\pi r$. Onde π é a constante matemática *pi*, cujo valor é aproximadamente $3.14159265...$

ÁREA

Área é a medida que expressa a quantidade de espaço bidimenssional ocupado por uma fígura geométrica, área de superfície é o equivalente da área para uma superfície ou face de um objeto tridimenssional. A unidade base para área é o metro quadrado (símbolo m^2). Seus múltiplos também acompanham o termo 'quadrado', e a equivalência é a mesma do metro, porém elevada ao quadrado. Ex.: $1m = 10^2cm$ e $1m^2 = (10^2cm)^2 = 10^4cm^2$, lembrar essa regra pode facilitar na hora da conversão de área.

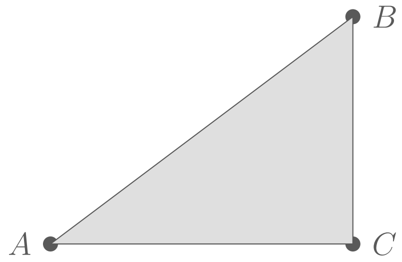


Figura 3: Área é o espaço bidimenssional ocupado pela região cinza.

Nome	Sigla	Equivalência
picometro quadrado	pm^2	$10^{-24}m^2$
nanometro quadrado	nm^2	$10^{-18}m^2$
micrometro quadrado	μm	$10^{-12}m^2$
milimetro quadrado	mm^2	$10^{-6}m^2$
centímetro quadrado	cm^2	$10^{-4}m^2$
decímetro quadrado	dm^2	$10^{-2}m^2$
metro quadrado	m^2	$1m^2$
decâmetro quadrado are	dam^2 are	$100m^2$
hêctometro quadrado hectare	hm^2 ha	10^4m^2
quilometro quadrado	km^2	10^6m^2

VOLUME

Assim como a área expressa a quantidade de espaço bidimenssional ocupado por uma fígura geométrica, o volume expressa a quantidade de espaço tridimenssional ocupado por um objeto. No caso do volume existe duas unidades de medida base, o metro cúbico e o litro, ambos são usados regularmente, na qual o litro é a unidade mais usada para volumes pequenos, enquanto o metro cúbico é usado para expressar volumes maiores.

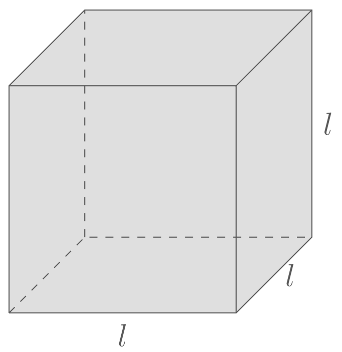


Figura 4: Cubo, cujo volume se dá por l^3, onde l é o comprimento das arestas

Nome	Sigla	Equivalência
milimetro cúbico	mm^3	$10^{-9}m^3$
centímetro cúbico mililitro	cm^3 ml	$10^{-6}m^3$
decímetro cúbico litro	dm^3 l	$10^{-3}m^3$
metro cúbico	m^3	$1m^2$

ÂNGULO

Ângulo é uma medida de inclinação entre duas retas ou dois planos, desde que eles não sejam paralelos entre si, no contexto da geometria os ângulos estão presentes em todos os vértices das fíguras geométricas. As unidades de medida mais comuns para ângulo são graus (símbolo $^\circ$), radianos (símbolo rad) e gradianos (símbolo gon).
Quanto no escopo das funções trigonométricas a unidade de medida mais utilizada é o radiano, por outro lado, em aplicações de engenharia e na geometria a unidade mais usada é o grau. Considerando um grau α em graus, sua conversão para radianos se dá por $rad(\alpha) = \alpha \cdot \pi/180$

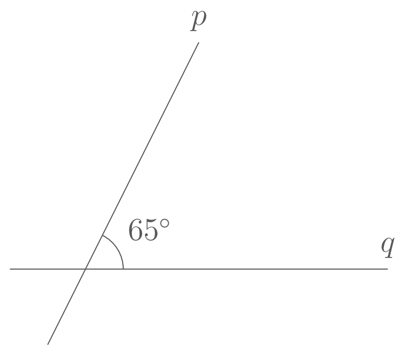


Figura 5: Ângulo entre as retas p e q

O ângulo apresenta uma importância muito grande no desenvolvimento da geometria e dos problemas geométricos, sendo o ângulo uma grandeza imprescindível no desenrolar da matemática entorno das fíguras geométricas, principalmente os triângulos.

FÍGURAS GEOMÉTRICAS E SUAS COMPONENTES

PONTO

A primeira componente das fíguras geométricas e a mais simples delas é o ponto, o mesmo deve ser imaginado como um ponto infinitesimal, não possuindo comprimento, área ou perímetro. Quando um ponto é integrante de uma fígura geométrica o mais comum é chamarmos ele de *vértice*

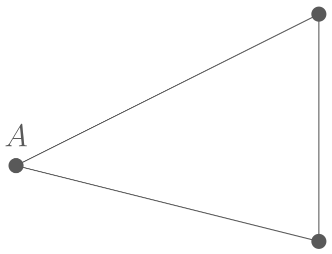


Figura 6: Triângulo com o vértice A em realce

A partir de dois pontos A e B podemos traçar uma reta $\overline{AB}$ entre eles e caso exista um terceiro ponto C sob a mesma reta, então esses três pontos são **colineares**.

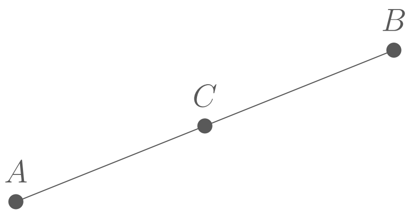


Figura 7: Pontos colineares A,B e C

RETA

A reta é um conjunto de pelo menos dois pontos, no caso dois pontos quaisquer A e B podem gerar a reta $\overline{AB}$, como na figura 7. Assim como o ponto é idealmente infinitesimal a reta idealmente não possui espessura. Quando uma reta é parte integrante de uma figura geométrica sua denominação é *aresta*.

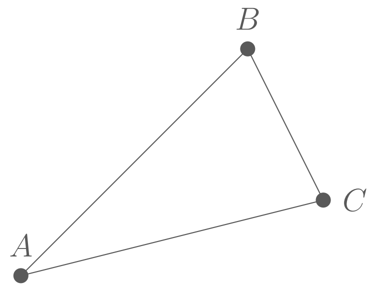


Figura 8: Retas $\overline{AB}$,$\overline{BC}$ e $\overline{AC}$ do triângulo ABC

Uma reta p é **perpendicular** a reta q se o ângulo formado entre elas for de 90 graus.

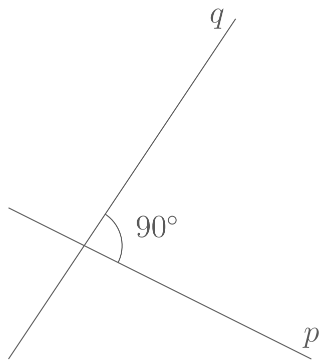


Figura 9: Retas perpendiculares p e q

Duas retas p e q são consideradas **paralelas entre si**, se qualquer reta r perpendicular a reta p também for perpendicular a reta q. Outra forma de descrever retas paralelas é através do **Quinto Postulado de Euclides** que diz: Supondo que duas retas p e q são cortadas por uma terceira reta r. Se a soma dos ângulos formados um mesmo lado da reta r resultar em 180 graus, então m e n são retas paralelas entre si.

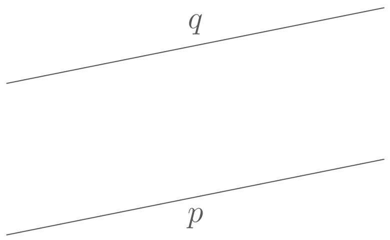


Figura 10: Retas paralelas p e q

PLANO E SUPERFÍCIE

Quando se tem 3 ou mais pontos o resultado da conexão deles é tido como superfície, plano ou fígura geométrica dependendo da área da matemática e do contexto de estudo, porém vale ter em mente que também existem superfícies não bidimensionais. Uma excessão a isso são os círculos e as elipses que não possuem vértices. No contexto da geometria a ser estudado nesse capítulo a conexão de 3 ou mais vértices geram exclusivamente fíguras geométricas.

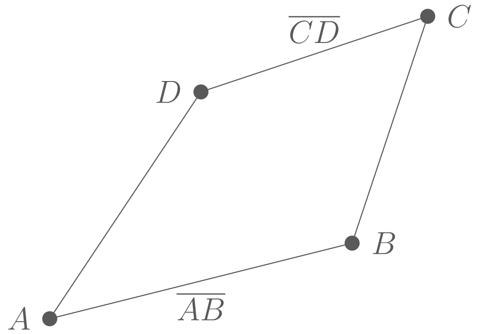


Figura 11: Um quadrilátero $ABCD$ com as arestas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ realçadas

SÓLIDOS

No contexto de fíguras geométricas tridimenssionais, ou chamados sólidos, os sólidos podem ser formados por 4 ou mais pontos ou através manipulação de fíguras geométricas bidimensionais num espaço tridimenssional. Todos objetos físicos que conhecemos podem ser abstraídos como formas geométricas, independente da complexidade.
Grandezas notórias das componentes citadas:

- Ponto, vértice: distância relativo a outro objeto.
- Reta: comprimento, distância e ângulo relativos a outro objeto.
- Superfície: área, perímetro.
- Sólido: volume.

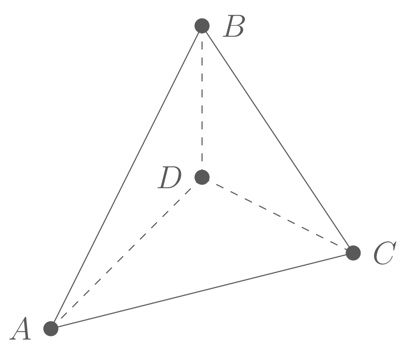


Figura 12: Tetraedro, o objeto tridimenssional com menos faces

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As funções trigonométricas são funções que relacionam diversas propriedades da geometria, notoriamente as propriedades dos triângulos. Partindo do princípio que polígonos de mais arestas podem ser decompostos em triângulos, então as funções trigonométricas podem facilmente serem correlacionadas com demais formas geométricas não curvilíneas.

O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

O círculo trigonométrico é um conceito que apresenta visualmente a relação entre as funções trigonométricas *seno e cosseno* e o triângulo retângulo. Mas antes vamos relembrar algumas denominações relacionadas aos triângulos.
Dado o triângulo retângulo ABC abaixo:

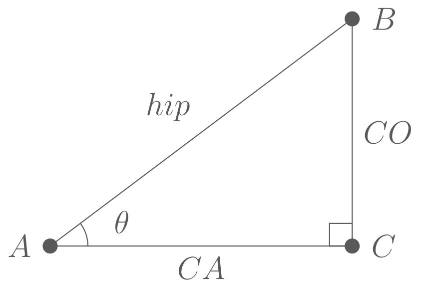


Figura 13: Triângulo retângulo ABC

a aresta $\overline{AB}$ é denominada hipotenusa ou abreviadamente hip, a aresta $\overline{BC}$ é denominada cateto oposto ou CO e a aresta $\overline{AC}$ é denominada cateto adjacente ou CA pois o mesmo é adjacente ao ângulo θ. Voltando ao círculo trigonométrico, imagine um círculo de raio unitário $r = 1$ com origem em (0,0) cuja sombra da semirreta do raio sobre o eixo x forme o triângulo ABC conforme a fígura 14.

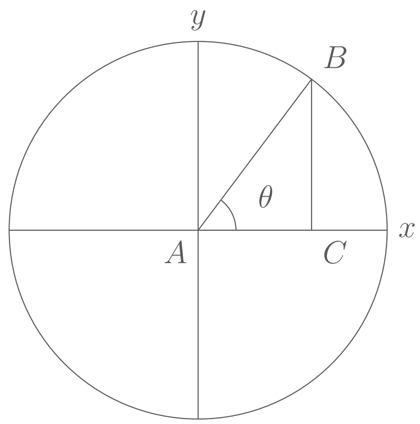
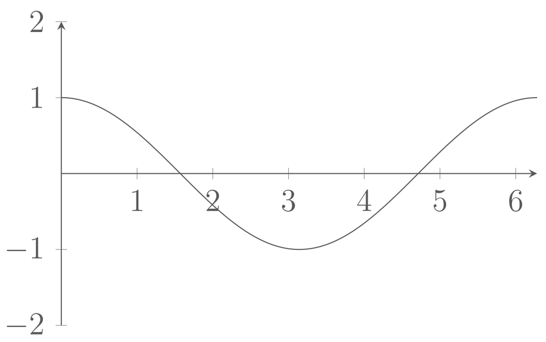


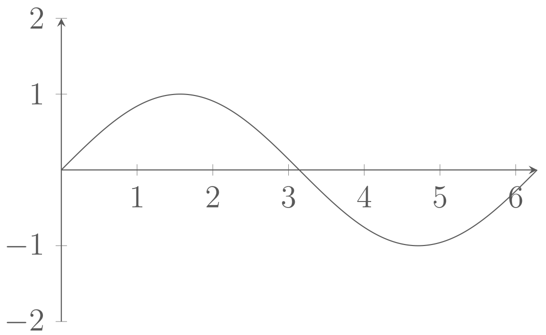
Figura 14: Círculo trigonométrico

Agora, imagine que o vértice B rotaciona sobre a circunferência, portanto a reta $\overline{AB}$ acompanha o vértice B formando um movimento que se assemelha ao ponteiro de um relógio. Com esse exercício de imaginação é possivel notar que o ângulo θ muda conforme a reta AB rotaciona, bem como o comprimento de $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$

Começando com o ângulo $\theta = 0$ e traçando o comprimento da aresta $\overline{AC}$ ao longo do eixo x até $\theta = 2\pi$ obtemos o seguinte gráfico:



Por coincidência esse gráfico é a representação da função cosseno, e nesse caso podemos observar que a função cosseno também representa o comprimento do cateto adjacente em função do ângulo θ, é possível então deduzir que $CA = cos(\theta)$, porém essa dedução está incompleta, pois só abrange o caso onde $hip = 1$.
Podemos também traçar o comprimento da aresta $\overline{BC}$ (cateto oposto) ao longo do eixo x e obteremos um gráfico similar:



No caso esse gráfico é a representação da função seno, e novamente poderiamos deduzir que $CO = sen(\theta)$, porém novamente essa dedução estaria correta apenas para $hip = 1$. Para obter uma equivalência geral que descreva o as dimensões do triângulo retângulo utilizando as funções trigonométricas podemos mudar o raio do círculo trigonométrico para um r qualquer, e nesse caso obtemos os seguintes gráficos:

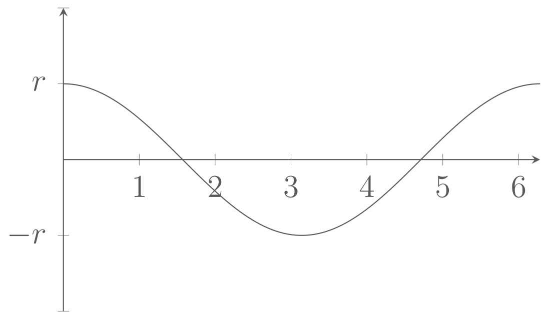


Figura 15: Função cosseno com amplitude r

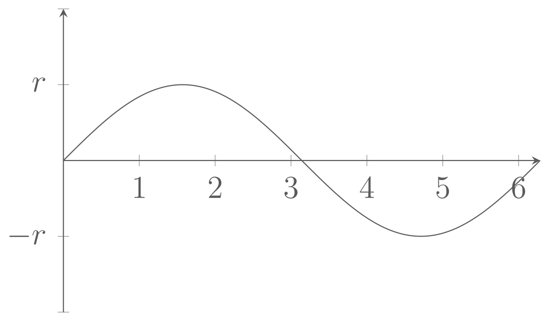


Figura 16: Função seno com amplitute r

A forma da onda é a mesma do cosseno e seno, respectivamente, porém a amplitude agora passou a ser r. Voltando a tentar deduzir uma fórmula para o comprimento do cateto oposto e o cateto adjacente temos que:

$$CO = r \cdot sen(\theta) \tag{1}$$

$$CA = r \cdot cos(\theta) \tag{2}$$

sabendo que $r = hip$ temos então:

$$sen(\theta) = \frac{CO}{hip} \quad (3)$$

$$\text{e} \quad cos(\theta) = \frac{CA}{hip} \quad (4)$$

A relação da função tangente e o triângulo retângulo é díficil de ser explicada através do círculo trigonométrico sem o auxilio de animações visuais, porém podemos chegar numa relação através da igualdade conhecida onde:

$$tg(\theta) = \frac{sen(\theta)}{cos(\theta)}$$

substituindo $sen(\theta)$ e $cos(\theta)$ pelas equações (3) e (4) respectivamente, temos:

$$tg(\theta) = \frac{CO}{hip} \cdot \frac{hip}{CA} \quad (5)$$

$$tg(\theta) = \frac{CO}{\cancel{hip}} \cdot \frac{\cancel{hip}}{CA} \quad (6)$$

$$tg(\theta) = \frac{CO}{CA} \quad (7)$$

Por fim temos as três equações que descrevem as razões trigonométricas de um triângulo retângulo:

$$sen(\theta) = \frac{CO}{hip} \quad (8)$$

$$cos(\theta) = \frac{CA}{hip} \quad (9)$$

$$tg(\theta) = \frac{CO}{CA} \quad (10)$$

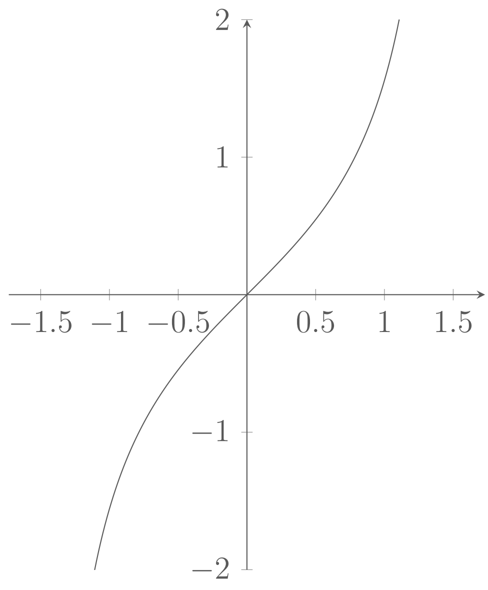


Figura 17: Gráfico da função tangente

Devido a complexidade em se cálcular o resultado das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, muitos exercícios que envolvem essas funções acabam por usar valores bem conhecidos, ou valores tabelados, isso é verdade inclusive para os vestibulares.

	30° $\left(\frac{\pi}{6}\right)$	45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$	60° $\left(\frac{\pi}{3}\right)$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 1: Tabela seno, cosseno e tangente

TEOREMA DE PITÁGORAS

O teorema de Pitágoras é uma relação importante entre o comprimento das arestas de um triângulo retângulo, sendo fundamental em muitos exercícios de geometria e frequentemente tópico necessário para o desenvolvimento de questões de vestibular.
Dado o triângulo retângulo abaixo:

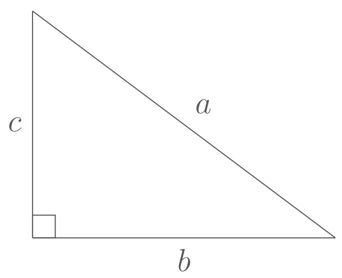


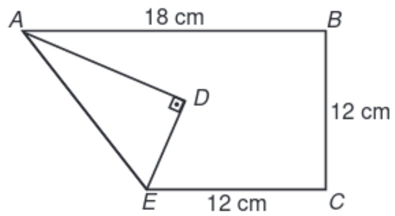
Figura 18: Triângulo retângulo

O teorema de Pitágoras diz que: "*Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos.*", traduzindo para a forma matemática:

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{11}$$

EXERCÍCIOS

1. (ENEM 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura:



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento $\overline{AE}$ é:

a) $2\sqrt{22}cm$

b) $6\sqrt{3}cm$

c) $12cm$

d) $6\sqrt{5}cm$

e) $12\sqrt{2}cm$

Solução: Esse é um simples problema que pode ser resolvido com o teorema de Pitágoras. Sabe-se que o triângulo ADE é resultado da dobra de uma folha de papel retângular de $18cm$ por $12cm$, observando pode-se notar que a aresta (ou segmento) $\overline{AD}$ tem comprimento $12cm$, e o comprimento da segmento $\overline{DE}$ é $18 - 12cm = 6cm$. Portanto, segundo o teorema de Pitágoras o segmento

$\overline{AE}$ é:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 \quad (12)$$
$$\overline{AE}^2 = 12^2 + 6^2 \quad (13)$$
$$\overline{AE} = \sqrt{12^2 + 6^2} \quad (14)$$
$$\overline{AE} = \sqrt{180} \quad (15)$$

fatorando 180 temos:

$$\overline{AE} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} \quad (16)$$
$$\overline{AE} = 6\sqrt{5} \quad (17)$$

Portando a resposta correta é d) $6\sqrt{5}cm$.

2. (ENEM 2019) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento. O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro $d = 40cm$, que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é $h = 60cm$, conforme ilustrado na figura. Use $3,14$ como aproximação para π.

Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

a) 16.628

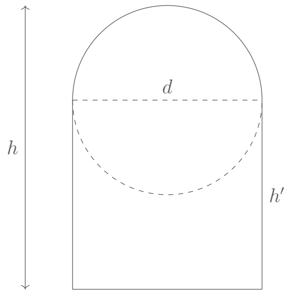
b) 22.280

c) 28.560

d) 41.120

e) 66.240

Solução: Analisando o problema, podemos redesenhar a placa usando duas formas geométricas, um retângulo de lados d e h' e uma circunferência de diâmetro d.



A área da placa pode ser obtida com a soma da área do retângulo com a metade da área da circunferência, mas para calcularmos a área do retângulo devemos calcular o comprimento h' que nada mais é que $h - \frac{d}{2}$, portanto $h' = 40cm$, resolvendo:

$$A_{placa} = \frac{A_{circ}}{2} + A_{ret} \quad (18)$$
$$A_{circ} = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 1256cm^2 \quad (19)$$
$$A_{ret} = h' \cdot d = 1600cm^2 \quad (20)$$
$$A_{placa} = \frac{1256}{2} + 1600 = 2228cm^2 \quad (21)$$

Como o exercício pede a área total das dez placas, é só multiplicarmos a área de uma placa por dez e temos

$22280cm^2$, portanto a alternativa correta é b) 22.280