APOSTILA ENEM
E VESTIBULAR

MA TE MÁ TI CA

EduCursinho

O projeto *EduCursinho - Educação e Aprovação* é uma atividade de extensão da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT) que tem por objetivo oferecer a estudantes em processo de preparação para prestarem o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e que sejam, preferencialmente, pertencentes a famílias de baixa renda, uma série de atividades educativas (aulas, resolução de exercícios, dicas e macetes etc.) que os auxiliem na obtenção de êxito no acesso ao ensino superior.

Por entender que a Universidade Pública é parte do desenvolvimento de uma sociedade, as ações de extensão surgem como uma das formas de contato entre a comunidade externa e a acadêmica - estudantes e servidores – fazendo com que a Universidade cumpra o seu papel de atuação na sociedade de maneira ampla e geral. A Universidade se torna parte do convívio social, quando, por meio de suas ações, promove um retorno à população com atividades e propostas que são alcançáveis por um ou vários grupos sociais.

Desde a sua idealização, a proposta é motivar estudantes universitários a estabelecerem um diálogo com a sociedade externa à universidade promovendo ações que atendam diretamente às demandas sociais e que proporcionem a troca de conhecimentos entre os mesmos. Neste projeto, as ações iniciais são a formação e a capacitação dos estudantes da UFMT para atuarem como professores nas diversas áreas contempladas pelo Enem: Ciências Humanas e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias.

Nesse sentido, o projeto possui a seguinte estruturação interna: coordenação geral, coordenadores de área (Física, Química, Matemática, Redação, Atualidades e Inglês) e coordenador de marketing, sendo cada uma dessas áreas gerida por um docente (interno ou externo) da UFMT. Além disso, há os estudantes que atuam como líderes de divulgação e organização e os responsáveis por cada grupo de conteúdo, subdivididos de acordo com as respectivas disciplinas.

Com o advento da pandemia do Coronavírus (Covid-19), as ações tiveram de ser alteradas, de modo a reduzir e/ou evitar prejuízos causados pelas medidas de distanciamento que foram necessárias para conter o avanço do vírus. Dessa forma, todo o projeto foi reestruturado para atender às demandas de ensino por meio da utilização de estratégias já conhecidas do ensino a distância. As aulas passaram a ser ministradas mediante ferramentas digitais, como aulas por meio de plataformas como Youtube, Google Classroom e Google Meet.

...

Diante do exposto, surgiu a ideia de elaborar uma coleção de livros digitais (e-books), que foram elaborados pela equipe do projeto (docentes/ estudantes) e divididos em cinco (5) volumes, de forma a tornar o acesso ao material de estudo por parte do público-alvo ainda mais fácil e interativo. Esses e-books foram publicados em parceria com a Editora da UFMT (EdUFMT) e são disponibilizados de forma totalmente gratuita aos alunos, reforçando ainda mais a missão da universidade de impactar positivamente a sociedade com ações que promovam crescimento social, tanto de forma local, como de forma ampla.

Esperamos que essa coleção, por meio de cada um dos volumes, seja realmente aproveitada ao máximo, pois fizemos tudo com muito carinho e dedicação para que você tenha cada vez mais acesso a informações de qualidade. O seu potencial está aí dentro, então use as ferramentas disponíveis para alavancar isso e mostre que o caminho vai ser trilhado com muita diligência e perseverança. Bons estudos e se liga nas dicas que colocamos para vocês nos capítulos.

Atenciosamente,

Equipe EduCursinho.

Coordenadora Geral: Daniele Caetano da Silva

Coordenador de Física: Murilo José Pereira de Macedo
- Danilo Oliveira dos Reis Nascimento
- Luana Andra Correa Teixeira
- Yhan Toth

Coordenadora de Inglês: Mônica Aragona
- Jessica de Almeida Barradas

Coordenadora de Matemática: Gláucia Aparecida Soares
- Gustavo Mene Ale Primo
- Rafael Simões Martins da Silva Oliveira
- Wesley Alexei Paiva

Coordenador de Marketing: Felipe Thomaz Aquino
- Gustavo Mene Ale Primo
- Livia Pereira de Alencar
- Matheus Henrique Sampaio Costa e Silva

Coordenadora de Química: Daniele Caetano da Silva
- Antônio Gierdson Lima dos Santos
- Jeferson Mangueira de Castro Lydijusse
- Stefanie Santos Silva

Coordenadora da Redação/Atualidades: Manuella Soares Jovem
- Nicole Astutti Campos
- Diane Santana Brito
- João Pedro dos Santos Menezes

MATEMÁTICA

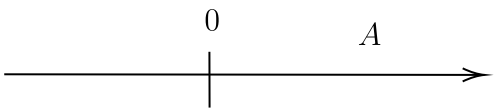
Gráficos e funções

PLANO CARTESIANO

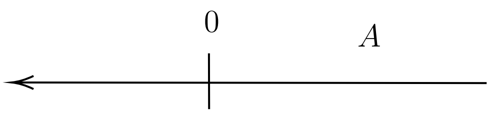
Em homenagem ao filósofo e matemático René Descartes (1596 - 1650)

Dada uma reta temos as seguintes situações de orientação horizontal:

- Orientação positiva



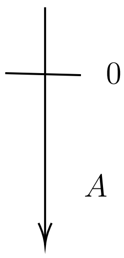
- Orientação negativa



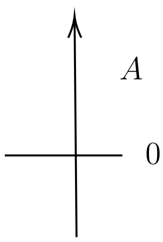
Por padrão adotamos a orientação positiva no sentido da "esquerda para a direita"

Os segmentos de orientação vertical são:

- Orientação negativa



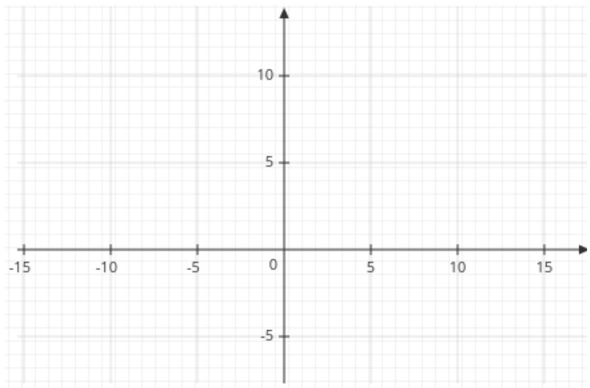
- Orientação positiva



O sentido postivo de orientação do segmento vertical positivo é "de cima para baixo"

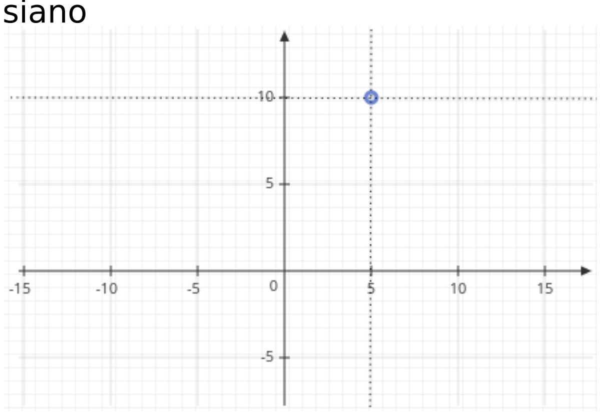
CONSTUIÇÃO DO PLANO CARTESIANO

Com a unificação das dos segmentos, vertical e horizontal, de orientação positivo temos a constituição do plano cartesiano, o eixo horizontal é eixo das abcissas



Um ponto no plano cartesiano é formado pela ligação de dois pontos por retas paralelas aos eixo, e a intersecção aos eixos coordenados, como mostra a figura

Figura 1: Ponto $(5, 10)$ no plano cartesiano



Na figura temos a representação do ponto $(5,10)$, o valor 5 diz respeito ao valor no eixo x, e o valor 10 ao valor

QUADRANTES DO PLANO CARTESIANO

Os pontos, ou par ordenado, do plano cartesiano não pertencem ao eixos coordenados, e este é divido em quatro regiões onde pos pontos estão definidos:

1. Se $x \geq 0$ e $y \geq 0$, o ponto pertente ao primeiro quadrante, formalmente como

$$Q_1 = \{(x,y)|x,y \geq 0\}$$

2. Se $x \leq$ e $y \geq 0$, o ponto pertence ao segundo quadrante, formalmente como

$$Q_2 = \{(x,y)|x \leq 0, y \geq 0\}$$

3. Se $x \leq$ e $y \leq 0$, o ponto pertence ao terceiro quadrante, formalmente como

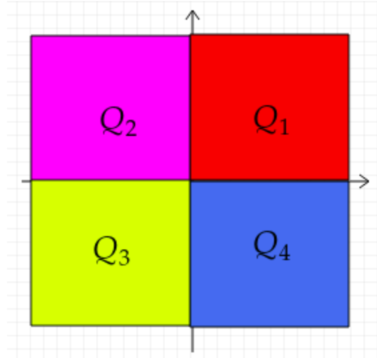
$$Q_3 = \{(x,y)|x,y \leq 0\}$$

4. Se $x \geq$ e $y \leq 0$, o ponto pertence ao quarto quadrante, formalmente como

$$Q_4 = \{(x,y)|x \geq 0, y \leq 0\}$$

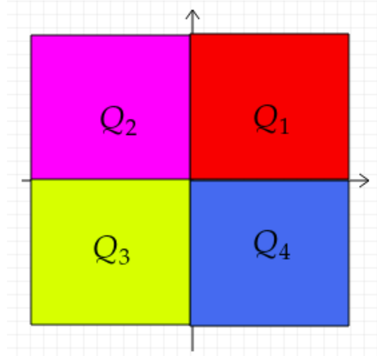
A figura abaixo mostra a construção do plano cartesiano

Figura 2: quadrantes do plano cartesiano



Em cada quadrante temos a seguinte configuração dos sinais no plano cartesiano:

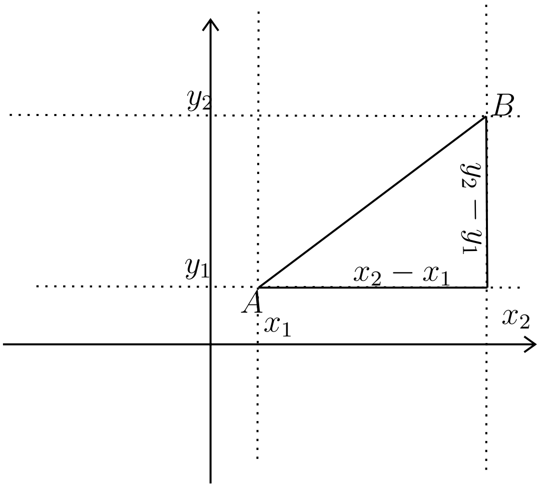
Figura 3: Sinais no plano cartesiano



A desigualdade triangular temos

DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS E DESIGULADADE TRIANGULAR

A distância entre dois pontos, $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$, no gráfico :

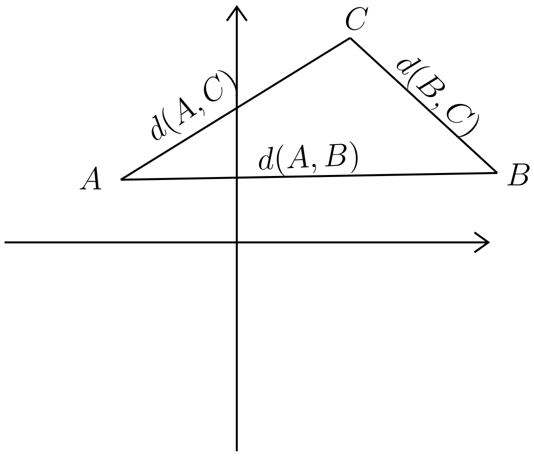


Pelo teorema de pitágoras, a hipotenusa que liga os dois pontos é distância entre eles:

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 (y_2 - y_1)^2}$$

A desiguldade triangular é a relação entre três pontos do Plano Cartesiano, onde ligados por segmentos de reta, que formam um triângulo, onde a soma de dois de lados sempre é maior que um lado, assim podemos defirnir uma regra geral para construção de triângulos no Plano Cartesiano

Teorema 1 *Três pontos ligados por segmentos de reta constituem um triângulo se a soma dois segmentos forem menores ou iguais a terceiro segmento*

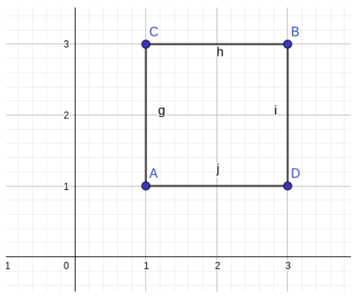


Matematicamente temos:
$d(A,B) \leq d(A,C) + d(B,C)$

EXEMPLO

1. (OBMEP) Uma das diagonais de um quadrado tem extremidades A =(1,1) e C = (3,3). Quais as coordenadas dos outros vértices:

Seguindo a ilustração:



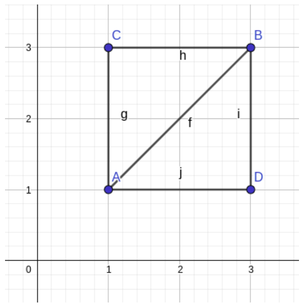
Temos os pontos A = (1,1) e C = (3,3) a distância entre os pontos:

$d(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$

$d(A,B) = \sqrt{(3-1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$

$d(A,B) = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Pelo teorema de pitágoras temos, que a distância da entre os pontos A e C, os demais ponto que denominamos B e D desconhecidos, sendo A,B,C e D os pontos no plano cartesiano constituintes do quadrado



Por teorema de pitágoras, a medida da diagonal do quadrado é $d = l\sqrt{2}$, logo a aresta do quadrado é $l = \frac{d}{\sqrt{2}}$, sendo $d = 2\sqrt{2}$, então $l = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$, $l = 2$ portanto o valor dos pontos é:

- $A = (1, 1)$
- $B = (x_a, y_b + 2) = (1, 1 + 2) = (1, 3)$
- $C = (3, 3)$
- $D = (x_c, y_b - 2) = (3, 3 - 2) = (3, 1)$

GRÁFICOS E FUNÇÕES

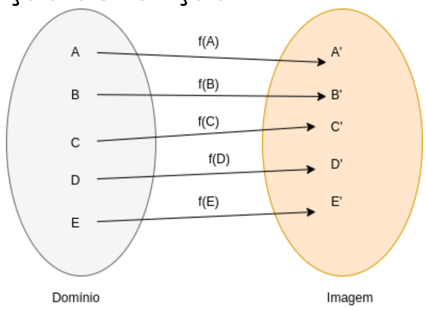
FUNÇÕES

Uma função, informalmente, pode ser definida como um conjunto de valores que podem ser associados por meio de uma lei com outro objeto num dado conjunto

Teorema 2 *Uma função é uma lei que associa, para cada um elemento do x a conjunto D, exatamente um elemento, conhecido como $f(x)$, em conjunto E*

O diagrama de Venn abaixo mostra como podemos definir uma função, para cada elemento do conjunto de domínio é necessário um elemento no conjunto imagem.

Figura 4: Diagrama de Euler-Venn: definição de função



Uma Função sempre possui uma notação indicando as várias independentes, pertencentes ao conjunto domínio, e das variáveis dependentes

• Variáveis independentes: são as variáveis nas quais a função é avaliada, normalmente representada por x,y e z por exemplo

• Variáveis dependentes: expressam o resultado da função depois de avaliadas por lei, são expressas por $f(x)$ e $g(y)$ por exemplo

• Todo o elemento do conjunto domínio tem apenas um elemento associado no conjunto imagem, como mostra as figuras no modelo de diagrama de Euler-venn

Figura 5: Diagrama de Euler-Venn: definição de função - representação válida

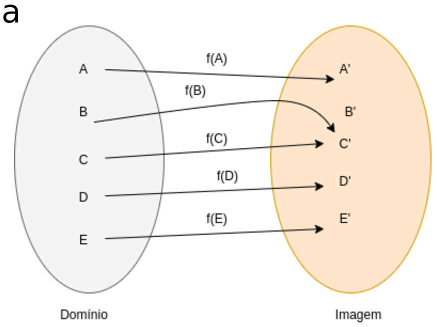
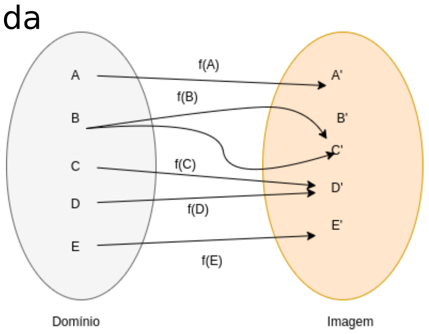


Figura 6: Diagrama de Euler-Venn: definição de função - representação inválida



FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

1. Uma função pode ter uma representação númerica de sua lei, exemplo da área de uma circunferência $A = \pi r^2$, de forma mais clara $A(r) = \pi r^2$

2. Diagramas de Euler-Venn

3. Uma função com a seguinte lei: $f(x) = \sqrt{x+2}$, tem a seguinte notação $\{x \in \mathbb{R} | \forall x \geq -2\}$, que é lido como "x que pertence ao conjunto dos números reais, exceto todo valor x maior igual que -2"

4. A função $f(x) = \cos(x^2 + 3)$, que tem domínio com a representação $D = \{x \in \mathbb{R}\}$, e a imagem da função $Im\{f(x)\} = \{-1 \leq x \leq 1\}$, e a leitura do conjunto imagem: a função assume dos valores reais no intervalo de $\{-1 \leq x \leq 1\}$

5. Gráficos "puramente matemáticos"como da função: $f(x) = \frac{x^2+\sin(x)}{x}$, mostrado na figura 4:

6. Gráficos que mostram fenômenos reais, como o gráfico da figura 5, que mostra a evolução da média móvel de óbitos por COVID-19 até a data do dia 27 de março 2021, do Conselho Nacional de Secretaŕios de Saúde - CONASS

Figura 7: Representação gráfica da função: $f(x) = \frac{x^2+\sin(x)}{x}$

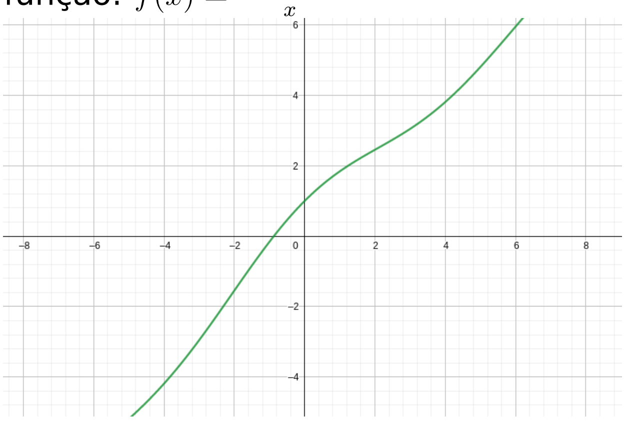
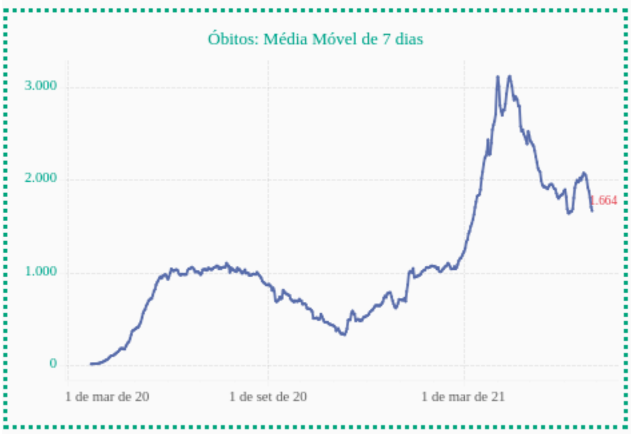


Figura 8: Evolução da média móvel de óbitos por COVID-19 - CONASS



DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO

1. Domínio: o domínio de uma função é conjunto de valores possíveis que uma função pode assumir

2. Contradomínio: é conjunto que reúne todas as possibilidades de imagem de uma função

3. Imagem: conjunto possível de saída uma função segundo a lei de formação da função

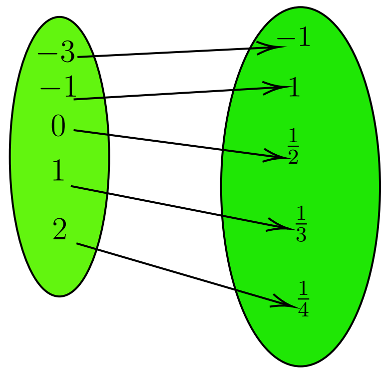
Como segue o segue o exemplo:

• Seja a função $f : A \rightarrow B$ cuja a lei de formação é: $f(x) = \frac{1}{x+2}$

• Tomando o conjunto de valores $A = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$

• O conjunto de saídas possíveis da função $f(x)$ sobre o conjunto A, temos então o seguinte conjunto $B = \{f(-3), f(-1), f(0), f(1), f(2)\}$, sendo $B = \Big\{ -1, \frac{1}{-2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \Big\}$

Pela figura temos as seguintes informações:



Para o caso do diagrama:

1. Domínio é: $D_f = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$, número $x = -2$ não pertence ao domínio, porque aplicado a lei de formação da função gera uma indeterminação matemática

2. Imagem é: $Im = \{-1, 1, 1/2, 1/3, 1/4\}$

3. Contradomínio: conjunto dos números reais

Generalizando as informações relativas a função

• Domínio de $f(x) = \frac{1}{x+2}$,

$D_f = \{(x \in \mathbb{R}) | x = 2\}$, "x"que pertence ao número dos reais, exceto x =2

• Imagem de $f(x) = \frac{1}{x+2}$,

$Im = \{x \in \mathbb{R}\}$, conjunto dos números reais

• Contradomínio: $CD = \{x \in \mathbb{R}\}$, conjunto dos números reais

GRÁFICO

Todo gráfico pode ser uma representação de uma função, num plano com dois eixos, o eixo das ordenadas, eixo vertical ou simplesmente eixo y, e o eixo horizontal ou simplesmente eixo x

O gráfico cartesiano relaciona um par ordenado (x,y), e a ligação entre esses ponto se materializa a construção da curva, que é a representação da função

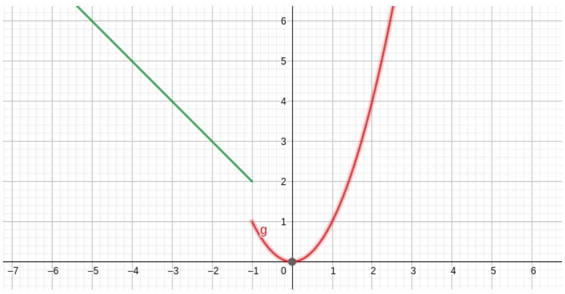
FUNÇÃO DEFINIDA POR PARTES

Uma função definida por partes é uma função que assume duas expressões, nesse tipo de função, o seu "comportamento"se altera num dado intervalo, como exempo:

Considere a função, f(x):

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{se } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{se } x > -1 \end{cases}$$

O gráfico da função é mostrado a seguir:



Nesse gráfico podemos observar temos as seguintes questões:

- A função assume dois comportamentos:
  - comportamento de função linear $f(x) = 1 - x$, para todos os valores inferiores ou iguais -1
  - comportamento de função quadrática $f(x) = x^2$, para todos os valores maiores que -1
- A função em x = -2: $-2 \leq -1$, temos que a função assume o comportamento $f(x) = 1 - x$, logo $f(-2) = 1 - (-2)$,$f(-2)1 + 2 = 3$
- A função em x = -1: $-1 \leq -1$, a função mantém o comportamento pel expressão $f(x) = 1 - x$, logo, $f(x) = 1 - (-1) = 2$
- A função em x = 0: como $0 \geq -1$, logo a função assume a expressão $f(x) = x^2$ e $\therefore \quad f(0) = 0^2 = 0$

SIMETRIA DE FUNÇÕES

Uma função é dita simétrica quando segue as seguintes propriedades:

- (x,y) = (-x, y)
- (x,y) = (-x, -y)

Assim temos as definição de funções com simetria: funções pares e funções ímpares

1. Uma função é par quando segue a seguinte a propriedade: $f(x) = f(-x)$

2. Uma função é ímpar quando segue a seguinte a propriedade $f(-x) = -f(x)$

Fica os exemplos:

1. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$:

Se $f(x)$ é par, então $f(x) = f(-x)$, então $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1}$, logo segue a comparação: $f(x) = f(-x)$ e portanto $\frac{x}{x^2+1} \neq \frac{-x}{(-x)^2+1}$, então a função não é par

Se $f(x)$ é impar, então $f(-x) = -f(x)$, logo $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1}$ e $-f(x) = (-1) \cdot \frac{x}{x^2+1}$, logo portanto temos que $\frac{-x}{(-x)^2+1} = (-1) \cdot \frac{x}{x^2+1}$

$\frac{-x}{x^2+1} = \frac{-x}{x^2+1}$, como $f(-x) = -f(x)$, então a a função é ímpar

2. $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$:

Se $f(x)$ é par, então $f(x) = f(-x)$, sendo $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^4+1}$, então

$f(x) = f(-x)$, então $\frac{x^2}{x^4+1} = \frac{(-x)^2}{(-x)^4+1} \Rightarrow \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{x^2}{x^4+1}$, logo $f(x)$ é par

TRANSFORMAÇÕES DE FUNÇÕES

Transformçãoes de funções são operações aplicadas sobre uma função, no qual o resultado pode ser a translação em relação ao número, rotação em torno dos eixos coordenados, expensão e compressão.

Deslocamento vertical e horizontal de funções

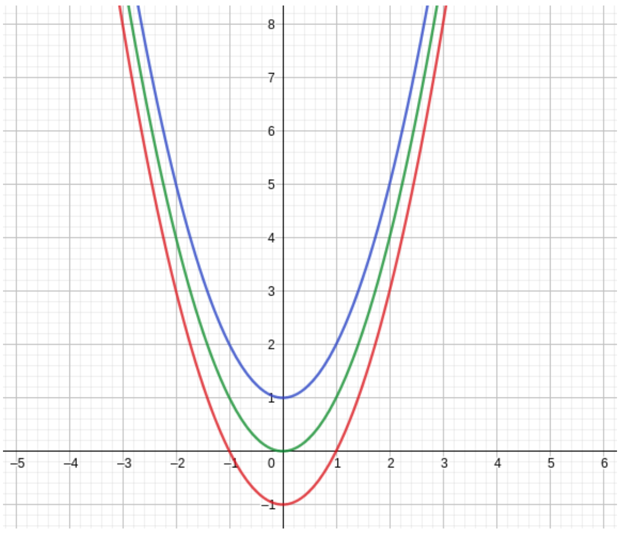
1. $g(x) = f(x) + c$, o gráfico $f(x)$ é deslocado c unidades para cima

2. $g(x) = f(x) - c$, o gráfico $f(x)$ é deslocado c unidades para baixo

3. $g(x) = f(x - c)$, o gráfico $f(x)$ é deslocado c unidades para direita

4. $g(x) = f(x + c)$, o gráfico $f(x)$ é deslocado c unidades para esquerda

Na imagem a seguir vemos as operações dos items 1 e 2, na função $f(x) = x^2$

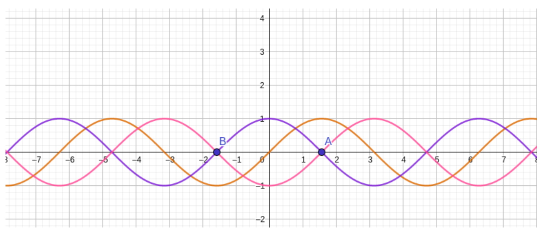


- O gráfico em verde é da "função original" $f(x) = x^2$

- O gráfico em azul é da função $g(x) = f(x)+1$ que tem uma translação no eixo coordenado de uma unidade para cima, $g(x) = x^2 + 1$

- O gráfico em vermelho é função $g(x) = f(x) - 1$ que tem uma transalação no eixo coordenado de uma unidade para baixo, $g(x) = x^2 - 1$

Sobre as transformações dos itens 3 e 4, segue:



Temos a seguinte situção:

- O gráfico em laranja representa a função $f(x) = \sin(x)$

- O gráfico em azul representa a função $f(x) = \sin(x+\pi/2)$ que é função seno desloacada $\pi/2$ unidades para a esquerda ao longo do eixo x

- O gráfico em rosa representa a função $f(x) = \sin(x-\pi/2)$ que é função seno desloacada $\pi/2$ unidades para a direita ao longo do eixo x

EXPANSÃO E COMPRESSÃO DAS FUNÇÕES

Segue as seguintes propriedades de compressão e expansão de funções:

Considere

1. $y(x) = cf(x)$, a função sofre uma expansão vertical em fator de c

2. $y(x) = \frac{1}{c}f(x)$, a função sofre uma compressão vertical em fator de c

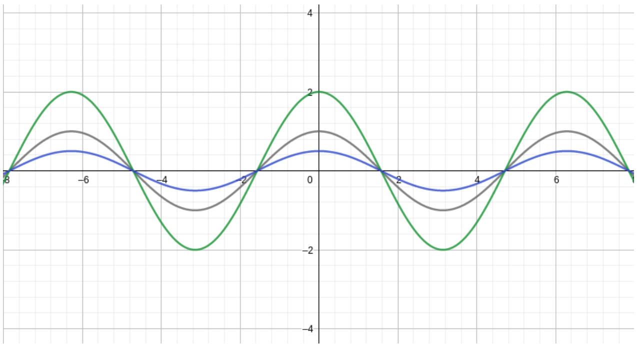
3. $y(x) = f(cx)$, compressão da função com fator de c, horizontalmente

4. $y(x) = f(\frac{x}{c})$, expansão da função com fator de c, horizontalmente

5. $y(x) = -f(x)$, reflexão da função em torno do eixo x

6. $y(x) = f(-x)$, reflexão em torno de y

Para exemplificação gráfica das propriedades 1 e 2, com a função $f(x) = \cos(x)$

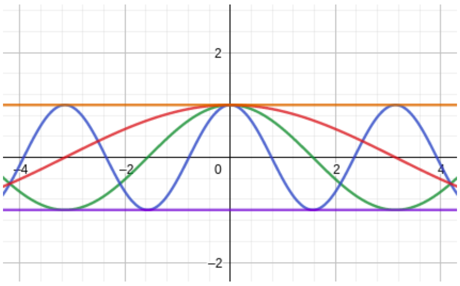


- O gráfico em cinza é da função $f(x) = \cos(x)$

- O gráfico em verde é da função $f(x) = 2\cos(x)$, onde a função $\cos(x)$ tem uma expansão vertical em fator de c = 2

- O gráfico em azul é da função $f(x) = \frac{\cos(x)}{2}$, onde a função $\cos(x)$ tem uma compressão vertical em fator de c = 2

Usando a função $f(x) = \cos(x)$ para mostrar as propriedade 3 e 4, na figura a seguir:

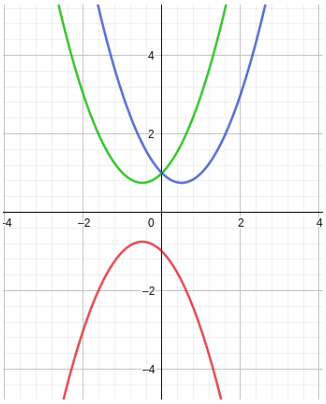


- O gráfico em verde é da função cosseno, $f(x) = \cos(x)$

- O gráfico em azul é da função $f(x) = \cos(2x)$, onde a função $f(x)$ sofre uma expansão horizontal

- O gráfico em vermelho é da função $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

As propriedades 5 e 6, segue os exemplos gráficos com o polinômio: $p(x) = x^2 + x + 1$



O gráfico em verde representa o polinômio $p(x) = x^2 + x + 1$, com a propriedade 5 há uma reflexão no eixo x, representado pelo gáfico em vermelho, e com a operação da propriedade 6 uma de reflexão no eixo y

COMINAÇÃO DE FUNÇÕES

Duas funções podem ser combinadas para formar novas funções, semelhante a operação númerica de com soma, subtração, multiplicação e divisão.

Seja $f(x)$ e $g(x)$ duas funções, as combinações possíveis são:

1. Soma: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. Subtração:$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. Multiplicação: $(f.g)(x) = f(x).g(x)$
4. Divisão: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Outra forma de combinação de funções é a operação de composição, como segue a definição:

Teorema 3 *Dadas as funções f e g, a função composta $f \circ g$ é definida por:*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Como exemplo temos:

Sejam as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = x - 3$ a composição:

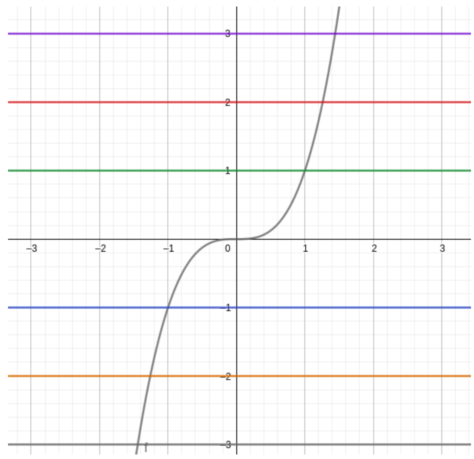
- $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$
- $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2 - 3$

FUNÇÕES INJETORAS E INVERSÃO DE FUNÇÕES

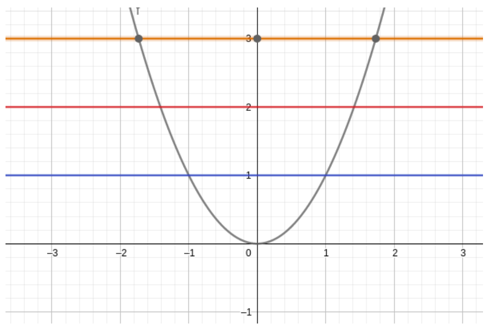
Uma função é injetora se ela nunca assume os mesmo valor duas vezes, logo $f(x_1) \neq f(x_2)$ sempre que $x_1 \neq x_2$

Teorema 4 *O teste da reta horizontal, método gráfico de determinar se uma função é injetora, consiste em traçar reta horizontal, se ela não intercepta dois ponto no eixo y então a função é injetora*

Como exemplo temos a função $f(x) = x^3$ que é uma função injetora pelo teste da reta horizontal, nenhuma reta horizontal "toca"dois valores igual no eixo vertical



Diferente da função $g(x) = x^2$ que não é uma função injetora pelo teste da reta horizontal



INVERSÃO DE FUNÇÕES

Teorema 5 *Uma função injetora com domínio em A e imagem em B. Então uma função inversa f^{-1} tem domínio em B e imagem em A, e é definida por*

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Roteiro para inversão de funções:

1. Escreva $y = f(x)$
2. Isole x na equação, com notação em termo de y (se possível)
3. Na expressão de f^{-1} como uma função de x, troque x por y, a expressão

Como exemplo temos a seguinte função $f(x) = x^3 + 2$ seguindo o processo de inversão:

$f(x) = x^3 + 2$ então segue:

$y = x^3 + 2 \Rightarrow x^3 + 2 = y$

$x^3 = y - 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y-2}$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$

A composição de uma função com sua inversa o resultado é igual a variável da função:

Sendo $f(x) = x^3 + 2$ e $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-2}$, então temos que $f \circ f^{-1}(x)$:

$f \circ f^{-1}(x) = (\sqrt[3]{x-2})^3 + 2$

$f \circ f^{-1}(x) = x - 2 + 2$

$f \circ f^{-1}(x) = x$

FUNÇÃO LINEAR

Uma função linear é uma função que se molda com uma taxa constante, segue a a seguinte lei matemática: $y = f(x) = ax + b$

Graficamente assume a geometria de uma reta, e portanto para descrever sua equação basta conhecer apenas dois pontos,

A equação geral da reta é: $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde x_0 e y_0 são os pontos conhecidos para se construir uma reta, e m é o coeficiente de inclinação da reta

Os exemplo deixa o tema mais claro:

(Stweart) À medida que a temperatura do ar seco se move para cima, ele se expande e esfria. Se a temperatura do solo for 20ºC e temperatura a uma altitude de 1 km for de 10ºC, expresse a temperatura como uma função da altitude, supondo um modelo linear seja apropriado. Esboçe o gáfico

Logo podemos adotar a seguinte notação: $T(h) = ah + b$, onde h é altura em quilometros, utilizando a equação geral da reta e desenvolvendo as operações algébricas:

Sejam os pontos :

$$p1 = (0, 20) \quad p2 = (1, 10) \qquad (1)$$

que indicam notação cartesiana: no solo, ou altura 0km, a temperatura do é de 20ºC; com 1 km de altura a temperatura do ar é 20ºC

O cáculo do coeficiente de inclinação da reta:

$m = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{10-20}{1-0}$
$m = \frac{-10}{1} = -10$

Substituindo na equação geral da reta, $y - y_0 = m(x - x_0)$, temos a seguinte situação:

$y - y_0 = m(x - x_0) \quad y - 20 = -10(x - 0)$

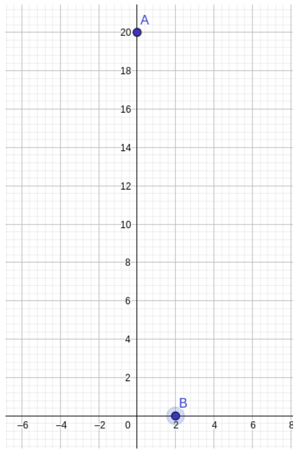
$y - 20 = -10x \Rightarrow y = 20 - 10x$

O gráfico desta função pode ser obtido com os seguintes passos:

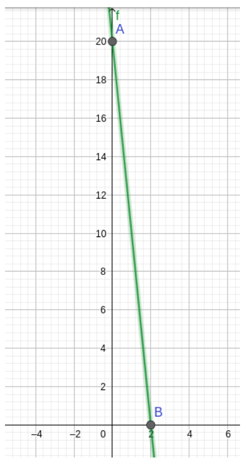
1. Tomando a função $y = 20 - 10x$, substitua x por zero: $y = 20 - 10(0) \Rightarrow y = 20$, temos o par ordenado A = (0,20)

2. Tomando a função $y = 20 - 10x$, substitua y por zero: $0 = 20 - 10x \Rightarrow x = \frac{20}{10} = 2$, temos o par ordenado B = (2,0)

3. Marque os pontos no plano cartesiano, como mostra a figura:

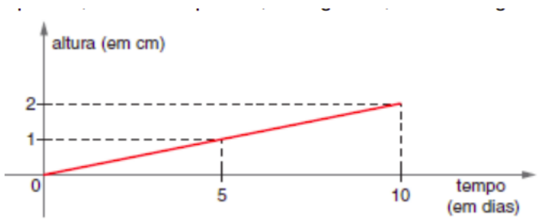


4. Trace uma reta ligando os dois pontos



Mais um exemplo :

(UERN) Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos, colocados por ele, num gráfico, resulta a figura abaixo



Se mantida sempre essa relação entre tempo e altura, a planta terá no trigésimo dia, uma altura igual a:

(a) 5

(b) 150

(c) 15

(d) 30

(e) 6

Tomando os pontos $p1 = (5, 1)$ e $p2 = (10, 2)$, calcula-se o coeficiente de inclinação da reta: $m = \frac{y-y_0}{x-x_0} \quad \therefore \quad m = \frac{2-1}{10-5} \quad \therefore \quad m = \frac{1}{5}$

A equação geral da reta fica: $y-y_0 = m(x-x_0) \quad \therefore \quad y-1 = \frac{1}{5}(x-5) \quad \therefore \quad y = \frac{x}{5}$

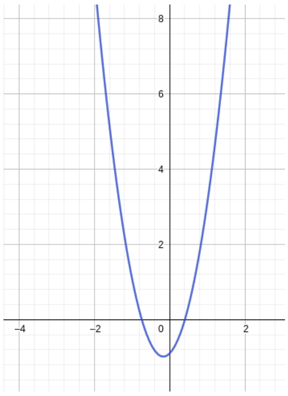
A função que determina reta é: $y(x) = \frac{x}{5}$, sendo x o tempo em dias e y altura da planta, substituindo 30 que é número de dias mencionado fica: $y(30) = \frac{30}{5} = 6$

Letra D alternativa correta

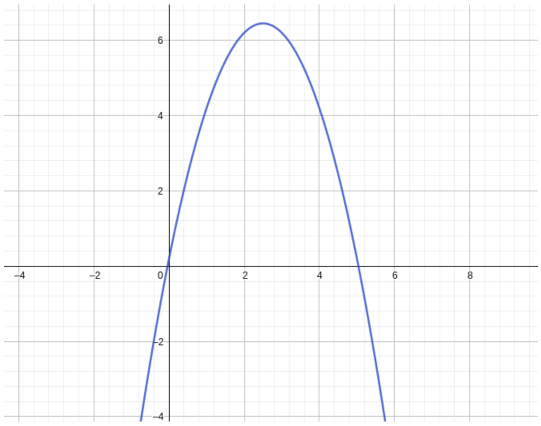
FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função quadrática, ou função do segundo grau, tema seguinte estrutura: $f(x) = ax^2 + bx + c$, possui o formato de um parábola, que pode ter sua curvatura ou concavidade voltada para cima ou para baixo.

- Concavidade para cima:



- Concavidade para baixo:



Os principais elementos de uma função quadrática são, usados também para esboçar o seu gráfico:

1. Raízes obtidas pelo método Báskara, se houver
2. Vértice
3. Uma vez sinalizados basta fazer o traçado de esboço

MÉTODO DE BÁSKARA

Método utilzado para determinar as raízes reais de uma função quadrática: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ O discriminante $b^2 - 4ac$, conhecido como delta, $\Delta = b^2 - 4ac$, determina a existência ou não de raíz real:

- se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ então a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui duas raízes reais distintas
- se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ então a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui duas raízes reais repetidas
- se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ então a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ não possui raízes reais

Segue o exemplo:

(UFOP) Em relação ao gráfico da função $f(x) = -x^2 + 4x - 3$, pode-se afirmar :

(a) é uma parábola com concavidade para cima

(b) seu vértice é o ponto $V = (2, 1)$

(c) intercepta o eixo das abscissas em $P = (-3, 0)$ e $Q = (3, 0)$

(d) o seu eixo é o eixo das ordenadas

(e) intercepta o eixo das ordenadas em $R = (0, 3)$

Passos para solucionar a questão:

Seja a função $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

1. Calcular o discriminante, delta: $\Delta = b^2 - 4ac$, $\quad \Delta = (4)^2 - 4.(-1).(-3)\Delta = 16 - 12 = 4$

2. Análise do valor do discriminante: como $\Delta > 0 = 4$, logo temos duas raízes reais distintas

3. Cálculo do valor das raízes:

- $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{-2a}$, logo: $x_1 = \frac{-4+\sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-4+2}{-2} = 1$
- $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{-2a}$ $x_2 = \frac{-4-\sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-4-2}{-2} = 3$
  Raízes reais $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$

4. Vértice: o vértice de uma parábola é média artimética de suas raízes: $V = \frac{x_1+x_2}{2}$, então o ponto de vértice é $v = \frac{1+3}{3} = 4$, o valor da função no vética é $f(2) = -(2^2) + 4.2 - 3 = 1$

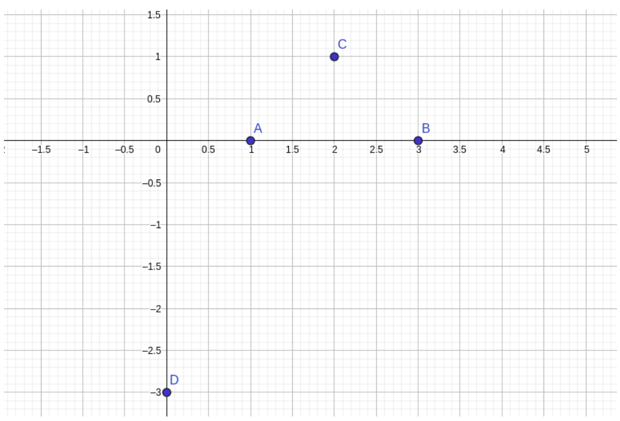
5. Ponto de intersecção com eixo das ordenadas: substituir zero na função $f(0) = -0^2 - 4.0 - 3 = -3$

6. Com os pontos:

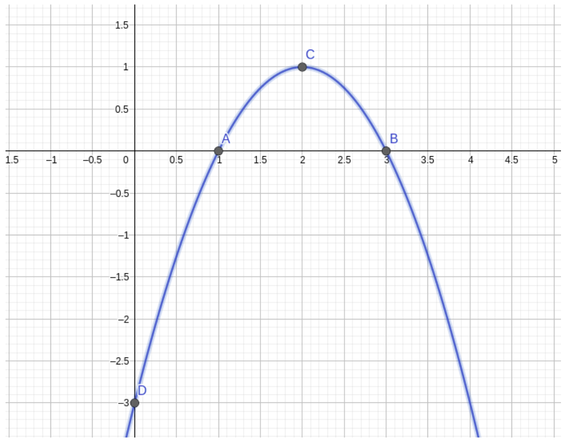
- Raízes: $A = (1, 0)$, $B = (3, 0)$
- Vértice: $C = (2, 1)$
- intersecção com eixo y: $D = (0, -3)$

basta marcar no plano cartesiano e traçar uma parábola ligando os pontos

Pontos no plano cartesiano:



Esboço do gráfico:



Analisando as alternativas:

(a) é uma parábola com concavidade para cima - Falsa, a parábola é voltada para baixo

(b) seu vértice é o ponto $V = (2, 1)$ - Correta

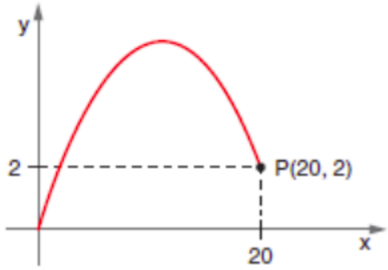
(c) intercepta o eixo das abscissas em $P = (-3, 0)$ e $Q = (3, 0)$ - Falsa

(d) o seu eixo é o eixo das ordenadas -Falso, sem contexto

(e) intercepta o eixo das ordenadas em $R = (0, 3)$ - Falsa

Segundo exemplo:

(FURG - RS)Um jogador de futebol se encontra a uma distância de 20 m da trave do gol adversário, quando chuta uma bola que vai bater exatamente sobre essa trave, de altura 2 m. Se a equação da trajetória da bola em relação aosistema de coordenadas indicado na figura é $y(x) = ax^2 + (1-2a)x$, a altura máxima atingida pela bola é:



(a) 6,00 m

(b) 6,01 m

(c) 6,05 m

(d) 6,10 m

(e) 6,50 m

Resolução:

Pelo gráfico se conhece o ponto: $(20, 2)$

Substituindo na função: $y(x) = ax^2 + (1-2a)x$ temos: $y(20) = a(20)^2 + (1-2a)20 \quad \therefore \quad 2 = a(20)^2 + (1-2a)20$

$2 = 400a + 20 - 40a \Rightarrow 360a + 20 = 2 \Rightarrow 360a = -18 \quad \therefore \quad a = \frac{-18}{360}$ simplificando por nove $a = \frac{-2}{40}$ e por dois $a = \frac{-1}{20}$

Subustituindo o valor de a na função temos: $y(x) = ax^2 + (1-2a)x \Rightarrow y(x) = \frac{-1}{20}x^2 + \left(1 - 2\frac{-1}{20}\right)x$

$y(x) = \frac{-x^2}{20} + \left(1 + \frac{2}{20}\right)x$

$y(x) = \frac{-x^2}{20} + \left(\frac{20+2}{20}\right)x$

$y(x) = \frac{-x^2}{20} + \left(\frac{22}{20}\right)x$

Se substituir x = 20 na função temos:

$y(x) = \frac{-x^2}{20} + \left(\frac{22}{20}\right)x$

$y(20) = \frac{-(20)^2}{20} + \left(\frac{22}{20}\right)20$

$y(20) = \frac{-400}{20} + \frac{22.20}{20}$

$y(20) = \frac{-400}{20} + \frac{440}{20}$

$y(20) = -20 + 22$

$y(20) = 2$, valor coincidente com o apresentado pelo gráfico na questão, então é correto afirmar que $a = \frac{-1}{20}$

O ponto de máximo da função de trajetório é coincidente com vértice da parábola, então podemos utilizar o método de báskara para determinar a solução, porém como o termo c da função é zero, a raíz pode ser determinada das seguinte maneira: $\frac{-x^2}{20} + \left(\frac{22}{20}\right) = 0$, $x\left(\frac{-x}{20} + \frac{22}{20}\right) = 0$, $x = 0$ e $\left(\frac{-x}{20} + \frac{22}{20}\right) = 0$, resolvendo a equação temos: $\frac{-x}{20} + \frac{22}{20} = 0$

$\frac{-x}{20} = \frac{-22}{20} \quad \therefore \quad 20\left(\frac{-x}{20} = \frac{-22}{20}\right)$

$x = 22$

Logo as raízes são $R_1 = (0,0)$ e $R_2 = (22,0)$

O ponto de vértice é: $v = \frac{R1+R2}{2} = \frac{0+22}{2} = 11$

Logo $y(x) = \frac{-x^2}{20} + \frac{22x}{20}$, sendo avaliada em x = 11 dá o valor do máximo da trajetória

$y(11) = \frac{-(11)^2}{20} + \frac{22.11}{20}$

$y(11) = \frac{-121}{20} + \frac{242}{20}$

$y(11) = -6,05 + 12,1 = 6,05$

A altura máxima é 6,05 m, a opção correta letra c

FUNÇÕES POLINOMIAIS

Como já mencionado nos tópicos anteriores, uma função é uma lei matemática que relaciona uma variável dois valores x e y com uma lei de formação $f(x)$, onde $(x, y = f(x))$, funções de primeiro $f(x) = ax + b$ e segundo grau $f(x) = ax^2 + bx + c$ são polinômios, de primeiro e segundo grau.

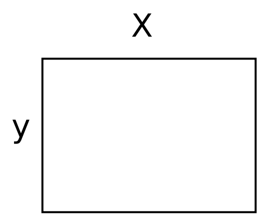
Antes de definir o polinômio é necessário definir expressões algébricas e monômios:

1. Conjunto de operações finitas (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação),entre variáveis nos quais os resultados fazem sentido no conjunto do números reais. Expressões algébricas são denotadas por letras maiúsculas, e as variáveis por letras minúsculas: $F = 9x^2 - \frac{8y^4}{3}$ e $E = \frac{\sqrt[3]{a^2+bc^3}}{a^2+b^2+1}$

2. Monômio: é uma expressão algébrica definida pelo produto de um número real não nulo por um número finito de expoentes inteiros e não negativos, cujas bases são variáveis

Como exemplo:

- A figura a seguir mostra um retângulo, as expressões de perímetro e área são:
  - Área: $A = x.y$
  - Perímetro: $P = 2x + 2y$



- potenciação dos seguintes monômios:
  - $\left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^4 = \frac{1}{(2)^4}x^{2.4}y^{3.4} = \frac{1}{16}x^8y^{12}$
  - $(-\sqrt{3}abc^3)^2 = (-\sqrt{3})^2.a^2.b^2.c^{3.2} = (-\sqrt{3})^2.a^2.b^2.c^6 = (-3^{1/2})^2.a^2.b^2.c^6 = -3.a^2.b^2.c^6$

Um polinômio é uma soma finita de monômios, por exemplo $p(x) = 3x^3y -$

$4xy^2 + \sqrt{3}xy + 8$, $p(x)$ é o polinômio na variável x, $p(x,y)$ é o polinômio nas variáveis x e y, e $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ é polinômio nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$ O grau de um polinômio é valor do maior expoente entre os monômios

A valoração númerica de um polinômio:

Dado o polinômio: $E(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$, a valoração em x = -1 é: $E(-1) = (-1)^5 + (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$, $E(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0$

Vamos apenas tratar de polinômios de uma variável na seguinte forma: $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

Exemplo (OBM): Determine o polinômio p(x), de grau 2, tal que: p(1) = 3, p(-2) = 9 e p(x) = p(-x):

Um polinômio de grau 2 é dado pela forma $P(x) = ax^2 + bx + c$, usando a condição P(x) = P(-x):

$P(x) = ax^2 + bx + c$

$P(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c$

$P(x) = P(-x)$

$ax^2 + bx + c = a(-x)^2 + b(-x) + c$

$ax^2 + bx + c = ax^2 - bx + c$

$ax^2 + c = ax^2 + c$

$bx = -bx \Rightarrow b = -b \Rightarrow b = 0$

Portanto a lei de formação do polinômio é $P(x) = ax^2 + c$, usando as condições p(1) = 3, p(-2) - 9, logo:

$P(x) = ax^2 + c \Rightarrow P(1) = a(1)^2 + c \Rightarrow 3 = a + c \Rightarrow a + c = 3$

$P(x) = ax^2 + c \Rightarrow P(-2) = a(-2)^2 + c \Rightarrow 9 = 4a + c \Rightarrow 4a + c = 9$ Fazendo uma substituição: $a + c = 3 \Rightarrow c = 3 - a \quad \therefore$ $4a + c = 94a + (3 - a) = 9 \Rightarrow 4a + 3 - a = 9 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{3} = 2$

E então temos a = 2, logo $a + c = 3 \Rightarrow 2 + c = 3 \Rightarrow c = 3 - 2 = 1$ logo com as constantes a = 2 e c = 1, e a lei de formação: $P(x) = 2x^2 + 1$

SOMA, SUBTRAÇÃO E MULTIPLICAÇÃO

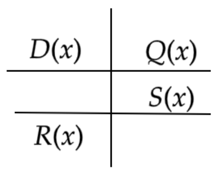
1. Soma: sejam dois polinômios $P(x) = x^2 + 3x - 4$ e $Q(x) = x^2 + 2$, $P(x) + Q(x) = (x^2 + 3x - 4) + (x^2 + 2) = x^2 + 3x - 4x^2 + 2 = 2x^2 + 3x - 2$

2. Subtração: sejam dois polinômios $P(x) = x^2 + 3x - 4$ e $Q(x) = x^2 + 2$, $P(x) + Q(x) = (x^2 + 3x - 4) - (x^2 + 2) = x^2 + 3x - 4 - x^2 - 2 = 3x - 6$

3. Multiplicação: sejam dois polinômios $P(x) = x^2 + 3x - 4$ e $Q(x) = x^2 + 2$, $P(x).Q(x) = (x^2 + 3x - 4).(x^2 + 2) = x^2(x^2 + 2) + 3x(x^2 + 2) - 4(x^2 + 2) = x^4 + 2x^2 + 3x^3 + 6x - 4x^2 - 8 = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$

DIVISÃO DE POLINÔMIOS

A divisão de polinômios segue o modelo de uma divisão normal, com dividendo $D(x)$, divisor $Q(x)$, solução $S(x)$ e resto $R(x)$, no formato de funções como mostra a imagem



Sejam os polinômios $A(x) = 5x^4 - 4x^2 + 3x - 1$ e $B(x) = x^2 - 3x + 4$, logo a divisão $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{5x^4 - 4x^2 + 3x - 1}{x^2 - 3x + 4} = \frac{5x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 3x - 1}{x^2 - 3x + 4}$

O método de divisão segue o que está a seguir:

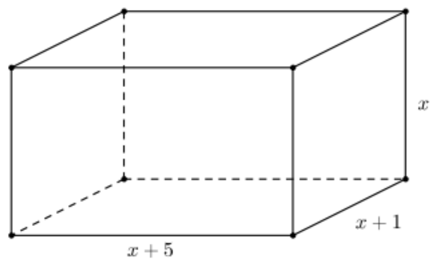
$5x^4+0x^3-4x^2+3x-1$	x^2-3x+4
$-5x^4+15x^3-20x^2$	$5x^2+15x+21$
$15x^3-24x^2+3x-1$	
$-15x^3+45x^2-60x$	
$21x^2-57x\ -1$	
$-21x^2-57x\ -1$	
$6x\ -\ 85$	

Sendo $D(x)=5x^4-4x^2+3x-1$ e o divisor $Q(x)=x^2-3x+4$, o quociente $S(x) = 5x^2+15x+21$ e resto $R(x) = 6x-85$ O método consiste e equalizar o quociente com o monômio com presente no divisor, com um "chute"do valor para o quociente, e subtração com divisor, até que o resto seja zero ou que o polinômio de resto tenha um grau menor que polinômio do divisor:

Sendo: $\frac{A(x)}{B(x)}=S(x)+\frac{R(x)}{D(x)}$

EXEMPLOS

1. (OBMEP) A figura abaixo representa um paralelepípedo reto-retângulo



Determine:

(a) Expressão do volume:

O volume de um paralelepípedo é calculado $v=a.b.c$, onde a,b e c são as dimensões:

$a=x+5, b=x+1ec=x$

$v=a.b.c \therefore v=(x+5)(x+1)(x)$

$v = (x^2+x+5x+5)(x) \therefore v(x) = (x^2+6x+5)(x)$

$v(x)=x^3+6x^2+5x$

(b) o volume para x = 3 $v(3) = 3^3 + 6.3^2+5.3$

$v(3)=27+54+15=96$

2. (UFSCAR) Em relação a P(x) de terceiro grau, sabe-se que $P(-1) = 2$, $P(2)=7$, $P(1)=2$ e $P(0)=1$.

(a) Determine a equação reduzida da reta que passa pelo ponto que o gráfico da função $P(x)$ cruza o eixo y, sabendo que essa reta tem coeficiente angular numericamente igual à soma dos coeficientes de P(x)

Se $P(x)$ é um polinômio de terceiro grau, logo a lei geral de formação genérica é $P(x) = ax^3 + bx^2+cx+d$ e a equação reduzida é $y = ax+b$, a soma dos coeficientes é basicamente substituição de x = 1 na lei geral de formação, ainda que genérica:

$P(x) = ax^3+bx^2+cx+d$, com a avaliação em x = 1

$P(1) = a.1^3+b.1^2+c.1+d$, como $P(1)=2$, logo

$P(1)=a.1^3+b.1^2+c.1+d=2$

$a.1^3+b.1^2+c.1+d=2$, sendo $y = ax+b$ a equação reduzida da reta, e a o coeficiente angular, sendo $a = 2$

Como o polinômio cruza o eixo y no mesmo ponto que a reta, então:

$P(0) = 1$, logo $y(0) = P(0)$

$y(0) = a.0 + b \rightarrow a.0 + b = 1$

$b = 1 \quad \therefore \quad y = 2x + 1$

(b) Determine P(x):

Com as seguintes condições (Prévia da próxima seção): $P(-1) = 2, P(0) = 1, P(1) = 2, P(2) = 7$, temos

$P(-1) = 2$

$a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 2$

$P(0) = 0$

$a.0^3 + b.0^2 + c.0 + d = 1 \quad \therefore \quad d = 1$

$P(1) = 2$

$a1^3 + b1^2 + c1 + d = 2$

$P(2) = 7$

$a2^3 + b2^2 + c2 + d = 7$

Com o alinhamento das equações

$(I) - a + b + c = 1$

$(II) a + b + c = 1$

$(III) 8a + 4b + 2c = 6$

Somando as equações (I) e (II)

$-a + b + c = 1 +$

$a + b + c = 1 \Leftrightarrow$

$2(b + c) = 2 \Rightarrow b + c = 1$

Somando as equações (I) e (III)

$(III) 8a + 4b + 2c = 6$

$(I) 8(-a + b + c = 1)$

$(III) 8a + 4b + 2c = 6 +$

$(I) - 8a + 8b + 8c = 8$

$12b + 10c = 14$, tomando $b + c = 1$ com $b = 1 - c$

$12b + 10(1 - b) = 14$

$12b + 10 - 10b = 14 \Leftrightarrow 2b = 4$

$b = \frac{4}{2} = 2$

Sendo $b = 2$ e $c = 1 - b$ logo

$c = 1 - 2 = -1$

e $-a + b + c = 1$, então temos

$-a + 2 - 1 = -1 \Leftrightarrow a = 2$

Então os coeficientes do polinômio $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$P(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 1$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Um sistema de equações do primeiro grau, ou sistema linear, é um conjunto de expressões algébricas com diferentes variáveis do primeiro grau

SISTEMA DE EQUAÇÕES COM DUAS EQUAÇÕES

$ax + by = f$

$cx + dy = e$ Um exemplo de como montar um sistema de equação linear

(OBMEP)Em um sítio há somente dois tipos de animais: porcos e perus, totalizando 26 cabeças e 72 patas. Qual a quantidade de animais de cada tipo?

Denotando o númemero de perus por x e porcos por y, temos a seguinte equação: $x + y = 26$ para o número de cabeças, e para o número de patas temos 2x e 2y, porque cada animal tem duas patas, a equação fica: $2x + 2y = 72$

$x + y = 26$

$2x + 2y = 72$

Um sistema de equações de forma generalizada, com m equações e n linhas:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n$

As variáveis são indexidas por números pela quantidade finita de letras

MÉTODO DE ADIÇÃO

Método consiste em adicionar e/ou subtrair variáveis membro a membro, de modo a manter apenas uma variável com solução explícita, o método permite a utilização de multiplicação de uma expressão algébrica por uma constante para resolução do sistema, o exemplo abaixo ajda a compreender melhor

(IMPA) Um cientista M.A. Luco tem duas provetas (recipientes para líquidos) e cada uma delas está cheia e cada uma delas está cheia comuma substância química (plutônio ou patetônio). Se a capacidade dos dois recipientes somadas é 375ml e sua diferença é 75ml, quanto ele possui de cadasubstância, sabendo que ele possui mais plutônio que patetônio?

Sendo x a quantidade de plutônio e y a quantidade de patetônio, pela sentença **Se a capacidade dos dois recipientes somadas é 375ml** então temos a seguinte equação:

$x + y = 375$

E da sentença **e sua diferença é 75ml** podemos extrair a seguinte equação:

$x - y = 75$

Logo temos o sistema com as seguintes equações:

$x + y = 375$

$x - y = 75$

A solução:

$$\begin{array}{rcl} x + y &=& 375 \\ + && \\ x - y &=& 75 \\ \hline 2x + 0y &=& 450 \end{array}$$

Com o resultado $2x = 450 \Rightarrow x = \frac{450}{2} = 225$, substituindo em na equação:

$x + y = 375 \Rightarrow x = 375 - y \Rightarrow x = 375 - 225 = 150$

MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Consiste basicamente em "resolver"uma equação e em seguida substituir a resolução em outra equação, como segue o exemplo a seguir:

(IMPA). L. Santana retirou de um caixa eletrônico 330, 00 reais entre cédulas de 50, 00 reais e 10, 00 reais num total de 17 cédulas. Qual a quantidade de cada um dos tipos de cédulas?

Sendo x a quantidade de notas de 50 reais e y as notas de 10 reais, temos a seguinte equação: $50x+10y = 330$

A quatindade de notas é 17, logo a equação temos : $x + y = 17$, então temos:

(I) $50x + 10y = 330$

(II) $x + y = 17$

A solução fica:

Tomando a segunda equação $x + y = 17$ temos:

$x + y = 17, \quad x = 17 - y$

Substituindo na primeira equação:

$50x+10y = 330, \quad 50(17-y)+10y = 330, \quad 850 - 50y + 10y = 330, \quad -40y = 330 - 850, \quad y = \frac{520}{40} = 13$

Utilizando a equação $x + y = 17$, sendo y = 13, então:

$x + y = 17, \quad x + 13 = 17, \quad x = 17 - 13 = 4$

Então são quatro notas de 50 reais e 13 notas de 10 reais

Outro exemplo para melhor contextualização:

(Enem): Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca Y é:

(a) 20

(b) 30

(c) 40

(d) 50

(e) 60

Como a quantidade de carros roubados roubados X é o dobro de Y, logo temos a seguinte relação $x = 2y, \quad x - 2y = 0$

Como a quantidade de carros roubados da soma das marcas é 60% do total roubado, então temos: $60\% \times 150 = \frac{60}{100} \times 150 = \frac{6}{10} \times 150 = \frac{3}{5} \times 150 = \frac{3.150}{5} = 90 \quad \therefore \quad x + y = 90$

A soma dos carros roubados das marcas x e y é 90: $x + y = 90$

pelo método de substituição temos: $x + y = 90$, sendo $x = 2y$ segue $2y + y = 90, \quad 3y = 90, \quad y = \frac{90}{3}, \quad y = 30$

Como o exercício pede a quantidade de carros da marca y roubados, então como y = 30, a resposta correta é a letra b

FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Uma função exponencial é uma função importante da matemática, visto que aborda os conceitos de crecimento populacional, e possui a seguinte estrutura geral de formação $E(x + y) = E(x)E(y)$

Além da lei de definição $E(x + y) = E(x)E(y)$, uma função exponencial tem a variável no expoente e não na base, situação contrária do polinômio:

- $f(x) = a^x$ é uma função exponencial
- $f(x) = x^a$ é uma função polinomial

A função exponencial usa as regras de operações de potenciação, a operação de potenciação é o produto de um dado número pelo número de vezes do seu expoente, como os exemplos a seguir:

1. $11^2 = 11 \times 11 = 121$
2. $17^0 = 1$ Todo número elevado a zero é igual a 1
3. $(-4)^4 = (-4).(-4).(-4).(-4) = 256$
4. $5^2.5^3.5^4 = 5^{2+3+4} = 5^9 = 1953125$
5. $\frac{3^2.3^0.3^7}{27}$, como 27 = 3^3, $\frac{3^2.3^0.3^7}{3^3} = 3^{2+0+7}.3^{-3} = 3^9.3^{-3} = 3^{9-3} = 3^6 = 729$

Em termos de funções exponenciais, vamos trabalhar apenas com funções com a seguinte estrtura: $f(x) = a^x$, onde x é uma variável do conjunto dos números reais, e a base é suas propriedades são:

Seja $a \in \mathbb{R}$, a é um número fixo que pertence ao conjunto dos números reais,

1. $a^x.a^y = a^{x+y}$
2. $a^x.b^x = (a.b)^x$
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
4. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
5. $a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$
6. $a^0 = 1$

Funções esponenciais são frequentemente utilizadas em modelos populacionais com a seguinte lei geral de formação: $P(x) = P_0.e^{(bx)}$, onde e é o número de Euler, e = 2,718281....

FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Uma função logarítmica segue as propriedades do logarítmo, e também é o operador inverso da potenciação, a definição de logarítmos é:

Teorema 6 *Precisamente, se a > 0 e $a \neq 0$ e b > 0, o logarítmo de b na base é o expoente que devemos colocar na potência da base a com um resultado de b, é a solução da seguinte equação:*

$a^y = b$

A solução dessa equação é: $y = \log_a b$

Exemplo simples:

$\log_2 4$ para resolver essa simples expressão temos a seguinte situação:

Queremos determinar um número que quando elevado seja 4 tendo base 2: $2^x = 4$

logo x = 2

O logarítmo natural é o logarítmo na base do número de Euler = e denotado por $\log_e x = ln$

A notação $\log$ é típica para logarítmo de base 10

As propriedades do logarítmo são:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $a^{\log_a b} = b$
4. $\log_a(b.c) = \log_a b + \log_a c$
5. $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$

6. $\log_a(b^k) = k.\log_a b$
7. $\ln(e) = 1$

EXEMPLOS COM FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

(Escola Naval) O elemento químico Califórnio, Cf^{251}, emite particulas alfa, transformando- se em Cúrio, Cm^{247}. Essa desintegração obedece à função exponencial $N(t) = N_0e^{-\alpha t}$ onde N(t) é a quantidade de particulas de Cf^{251} no instante t em determinada amostra;N_0 é quantidade de partículas no instante inicial; e α é uma constante,chamada constante de desintegração.Sabendo que em 898 anos a concentração de Cf^{251} é reduzida à metade, pode-se afirmar que o tempo necessário para que a quantidade de Cf^{251} seja apenas 25% da quantidade inicial está entre:

(a) 500 a 1000 anos
(b) 1000 a 1500 anos
(c) 1500 a 2000 anos
(d) 2000 a 2500 anos
(e) 2500 a 3000 anos

Resolução: primeiro precisamos determinar a constante $alpha$, em t = 898 anos a quantidade inicial diminui pela metade, tempo de desintegração, então temos:

$N(898) = \frac{N_0}{2}$

$\frac{N_0}{2} = N_0e^{-\alpha 898}$, com temos o fator N_0 em ambos os lados e a equação fica

$\frac{1}{2} = e^{-\alpha 898}$ aplicando o logarítmo natural em ambos os lados da equação temos

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(e^{-\alpha 898}\right)$, pela propriedade dos logarítmos temos:

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\alpha 898 \therefore -\alpha 898 = \left(\frac{1}{2}\right) = \alpha = \frac{-\ln(1/2)}{898} = 0,001$

Logo a função fica $N(t) = N_0e^{-0,001t}$, o tempo para 25% da quantidade inicial é metade do tempo em relação a primeira desintegração, então a quantidade é:

$\frac{N_0}{4} = N_0e^{-0,001t}$, $\frac{1}{4} = e^{-0,001t}$

$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(e^{-0,001t}\right), -0,001t = \ln(1/4)$, $t = \frac{-\ln(1/4)}{0,001}, t = 1386,294$ Como t = 1386,294, então temos a letra b, como resultado correto

(OBEMP) O processo de resfriamento de um determinado corpo descrito por $T(t) = T_A + \alpha.3^{\beta t}$, onde $T(t)$ é a temperatura do corpo, em grau Celsius, no instante t, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, supostamente constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de -18ºC. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0ºC após 90 minutos e chegou a -16ºC após 270 minutos.

(a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β

Sendo a função $T(t) = T_A + \alpha.3^{\beta t}$, tendo $T_A = -18C$ logo temos $T(t) = -18 + \alpha.3^{\beta t}$, tendo os seguintes valores de contorno

$T(90) = 0$ e $T(270) - 16$ então temos:

$T(90) = -18 + \alpha 3^{\beta 90} \Leftrightarrow 0 = -18 + \alpha.3^{\beta 90}$

$-18 + \alpha.3^{\beta 90} = 0 \Rightarrow \alpha.3^{\beta 90} = 18$

$\alpha = \frac{18}{3^{\beta 90}} \Rightarrow \alpha = 18.3^{-\beta 90}$

Tomando $T(270) = -16$ então temos:

$T(270) = -18 + 18.3^{-\beta 90}.3^{-\beta 270}$

$-16 = -18 + 18.3^{\beta 180} \Rightarrow -18 + 18.3^{\beta 180} = -16$

$-18 + 18.3^{\beta 180} = -16$

$18.3^{\beta 180} = -16 + 18$

$18.3^{\beta 180} = 2 \Rightarrow 3^{\beta 180} = \frac{2}{18}$

$3^{\beta 180} = \frac{1}{9} \Rightarrow \log_3 3^{\beta 180} = \log_3\left(\frac{1}{9}\right)$

$180\beta \log_3(3) = \log_3(9^{-1}) \Rightarrow 180\beta = -1\log_3(9)$

$180\beta = -2 \Rightarrow \beta = \frac{-2}{180} = \frac{-1}{90}$

Tomando T(90) = 0 logo:

$T(t) = -18 + \alpha.3^{\frac{-1}{90}t}$

$T(90) = -18 + \alpha.3^{\frac{-90}{90}}$

$0 = -18 + \alpha.3^{-1}$

$-18 + \alpha.3^{-1} = 0$

$\frac{\alpha}{3} = 18 \Rightarrow \alpha = 3.18 = 54$

Então temos $\alpha = 54$ e $\beta = \frac{-1}{90}$

E a função fica: $T(t) = T_A + \alpha.3^{\beta t}$
$T(t) = -18 + 54.3^{\frac{-t}{90}}$

(b) Determine o valor de t para qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)$ ºC superior à temperatura no ambiente

Logo esta temperatura: $T = \frac{2}{3} - 18$

$T(t) = -18 + 54.3^{\frac{-t}{90}}$

$-18 + 54.3^{\frac{-t}{90}} = -18 + \frac{2}{3}$

$54.3^{\frac{-t}{90}} = \frac{2}{3}$

$3^{\frac{-t}{90}} = \frac{2}{3.54}$

$3^{\frac{-t}{90}} = \frac{2}{162}$

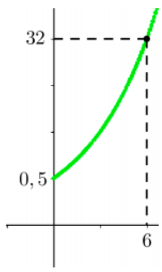
$3^{\frac{-t}{90}} = \frac{1}{81}$

$\log_3\left(3^{\frac{-t}{90}}\right) = \log_3(81^{-1})$

$\frac{-t}{90}\log_3 3 = -1\log_3(81)$

$\frac{-t}{90} = -4 \Rightarrow t = 360$, tempo de 360 minutos

(OBMEP) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função $y(t) = a^{t-1}$, na qual y representa altura da planta em metro, t é considerado em ano, e a é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função y



Admita ainda que $y(0)$ fornece a altura da muda quando plantadas, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem $7,5m$ após o plantio. O tempo entre a plantação e corte, em ano, é igual a:

(a) 3

(b) 4

(c) 6

(d) $\log_2 7$

(e) $\log_2 15$

Resolução:

Tomando a equação $y(t) = a^{t-1}$ e a condição de $y(0) = 0,5$, logo: $y(0) = 0,5 \Rightarrow a^{0-1} = 0,5 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2$

Logo temos a seguinte expressão: $y = 2^{t-1}$, tendo a $y = 7,5m$, logo o tempo é:

$y(t) = 2^{t-1} \Rightarrow 2^{t-1} = 7,5$

$2^t.2^{-1} = 7,5 \Rightarrow \frac{2^t}{2} = 7,5$

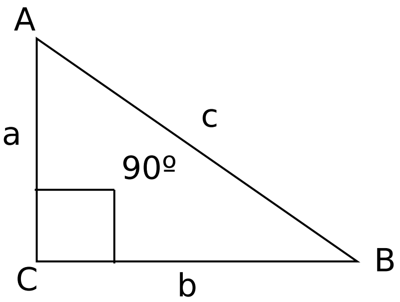
$2^t = 15 \Rightarrow t = \log_2 15$, sendo e a alternativa e

TRIGONOMETRIA

Trigonometria é campo da matemática que estuda as relações entre comprimentos de dois lados de um triângulo retângulo para diferentes valores de seus ângulos, usados no estudo de circunferências, esferas e também no estudo de funções

RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Um triângulo retângulo é uma figura plana com três lados, constituídos por segmentos de reta , com um ângulo de 90º



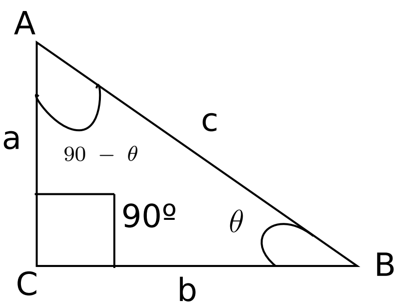
Na figura temos a representação de um triângulo retângulo, onde A,B e C são os vértices, ponto de encontro entre duas arestas, e as arestas que ligam dois vértices

Todos os angulos diferente do ângulo reto são menores que 90º $\frac{\pi}{2}$ radianos, e soma dos ângulos de triângulo é igual a 180º ou a π radianos.

A relação fundamental para conversão de ângulos em graus para radiano é:

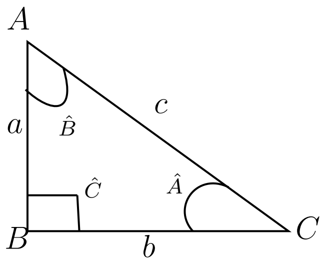
$180 = \pi$, 180º é igual a π radianos

A figura abaixo mostra um triângulo retângulo com um ângulo de 90 e um ângulo θ

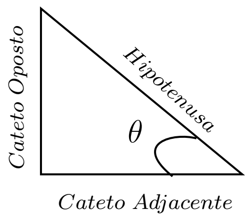


Somando os ângulos $\widehat{A} = 90$, $\widehat{B} = \theta$ e $\widehat{C} = 90 - \theta$, somando os ângulos temos: $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 90 + \theta + (90 - \theta) = 90 + \theta + 90 - \theta = 180$

A figura com a generalização:

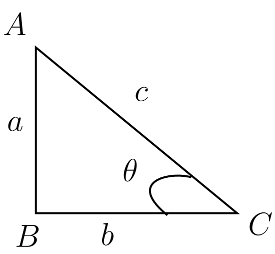


Um triângulo retângulo possui dois catetos e hipotenusa, maior lado do triângulo, e com isso podemos definir as relações trigonométricas: seno, cosseno e tangente, para determinar essas relações é necessário ter um ângulo de referência para a definição destas relações:



DEFINIÇÃO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Tomando como a figura abaixo, sendo A,B e C vértice e a,b e c arestas do triângulo de ângulo θ:



1. Seno: $\sin(\theta) = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$

2. Cosseno: $\cos(\theta) = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$

3. Usando o teorema de pitágoras, com a toda dos valores de seno e cosseno do ânguo θ temos:

   $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{c^2}$

   Para qualquer valor de θ temos a seguinte relação fundamental

   $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$

4. $\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

5. $\cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

6. seno da soma de dois ângulos:

   $\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1)$

7. cosseno da soma de dois ângulos: $\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$

8. Tangente de um ângulo θ:

   $\tan(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$

   $\tan(\theta) = \frac{a}{b}$

9. Cotangente de um ângulo θ:

   $\cot(\theta) = \frac{b}{a}$

   $\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$

10. Secante de um ângulo θ:

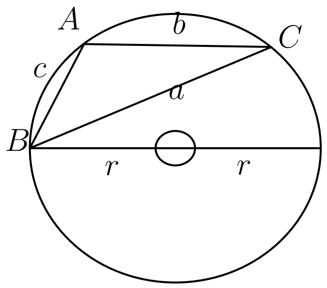
    $\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$

11. Cossecante de um ângulo θ

    $\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$

LEI DOS SENOS E COSSENOS

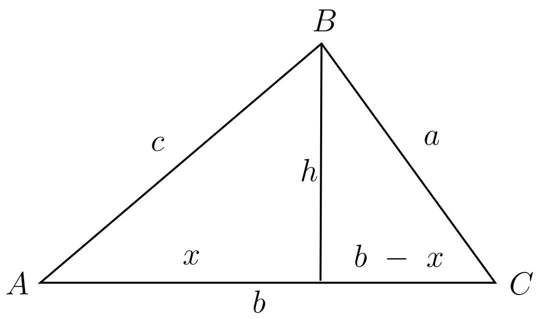
A seguinte relação:



Podemos então então inferir a lei dos senos, sendo a,b e c arestas e A, B e C vértices do triângulo inscrito na circunferência:

$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2r$

A lei dos cossenos segue a relação do triângulo:



As relações inferidas são:

1. $x = \cos(\widehat{A}) \rightarrow$

   $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{A})$

2. $x^2 + h^2 = c^2 \rightarrow$

   $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{B})$

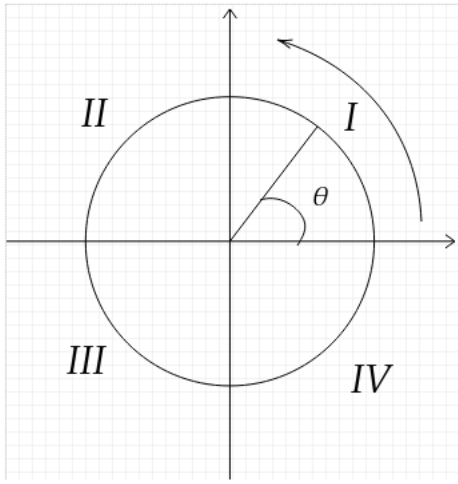
3. $(b-x)^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow$

   $b^2 - 2bx + x^2 + h^2 = a^2 \rightarrow$

   $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\widehat{C})$

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Uma função trigonométrica é defina com a análise dos pontos localizados sobre uma circunferência, nesse contexto o sistema de coordenadas é uma circunferência de raio unitário, seguindo a linha da figura:



Um ponto P presente na circunferência pode ser associado a coordenadas dos eixos coordenados, por associação temos: $\{P \in C\} \rightarrow \{x \in R\}$

$\{P \in C\} \rightarrow \{y \in R\}$

Sendo C a circunferência de raio unitário, e também podemos fazer a associção de um ângulo com valores presentes nos eixos coordenados

$\{\theta \in R\} \rightarrow \{x \in R\}$

$\{\theta \in R\} \rightarrow \{y \in R\}$

Assim podemos definir as funções $f(\theta) = \sin(\theta)$ e $g(\theta) = \cos(\theta)$, são funções periódiocas, onde num dado espaço a função assume mesmo valor:

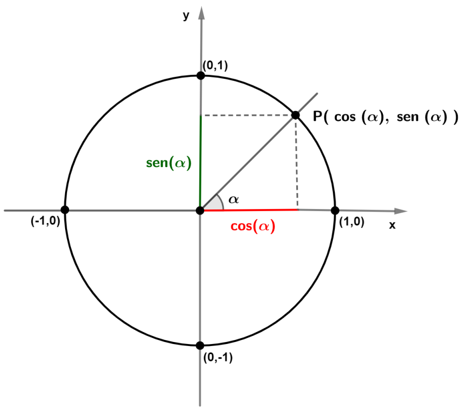
- $\sin(\theta) = \sin(\theta + 2\pi)$
- $\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi)$

A imagem das funções seno e cosseno são:

- $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1$ = $|\sin(\theta)| = 1$
- $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$ = $|\cos(\theta)| = 1$

A função tangente $f(x) = \tan(x)$, na variável x, é definida como $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, com domínio, $D_f = \{(x \in \mathbb{R})|x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$

A relação fundamental trigonométrica, observada pela figura:

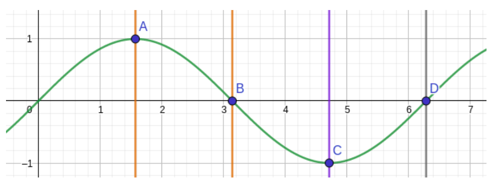


Os catetos do triâgulo inscrito no triângulo são de medidas $\sin(\alpha)$ e $\cos(\alpha)$, por teorema de pitágoras temos a seguinte relação fundamental:

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ (a variálvel alfa foi substituída por x)

O gráfico das funções trigonométricas, com avaliação nos pontos $\left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\right\}$

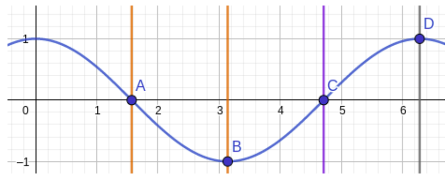
1. Função seno $f(x) = \sin(x)$



Sendo

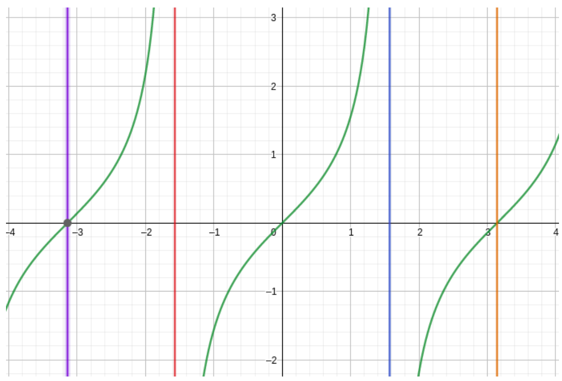
- $f(0) = 0 \to \sin(0) = 0$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \to \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
- $f(\pi) = 0 \to \sin(\pi) = 0$
- $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1 \to \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$
- $f(2\pi) = 0 \to \sin(2\pi) = 0$

2. Função cosseno $f(x) = \cos(x)$



- $f(0) = 0 \to \cos(0) = 1$
- $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \to \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
- $f(\pi) = -1 \to \cos(\pi) = -1$
- $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0 \to \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$
- $f(2\pi) = 1 \to \cos(2\pi) = 0$

3. Função tangente $f(x) = \tan(x)$ cujo o domínio é $D_f = \{(x \in \mathbb{R})|x \neq \pi/2 + k\pi\}$, nos pontos $x \neq \pi/2 + k\pi$ a função é descontínua, pela divisão por zero, uma vez que $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



4. Função Cotangente $f(x) = \cot(x)$, sendo definida como $f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

5. Função Secante $f(x) = \sec(x)$, sendo definida como $f(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$

TABELA DE ÂNGULOS NOTÁVEIS

Os ângulos notáveis com valores conhecidos das relações trigonométricas seno, cosseno e tangente, para os ângulos de 30º ou $\frac{\pi}{6}$, 45º ou $\frac{\pi}{4}$ e 60º $\frac{\pi}{3}$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

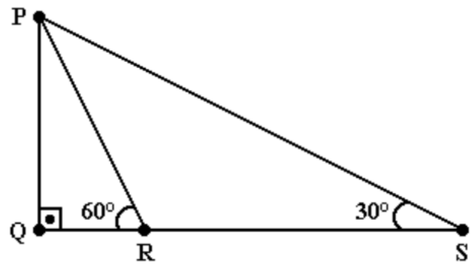
FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

São funções que quando compostas com sua função trigonométrica correspondente tem como "saída"o ângulo correspondente:

1. Função inversa da função seno $f(x) = \sin(x)$ é a função arcosseno $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$
2. Função inversa da função cosseno $f(x) = \cos(x)$ é a função arcocosseno $f^{-1}(x) = \arccos(x)$
3. Função inversa da função tangente $f(x) = \tan(x)$ é a função arcotangente $f^{-1}(x) = \arctan(x)$
4. Função inversa da função

EXEMPLOS:

1. (UFPE) Considere os triângulos PQR e PQS da figura. Se RS = 100, quanto vale PQ?



(a) $100\sqrt{3}$

(b) $50\sqrt{3}$

(c) 50

(d) $\frac{50\sqrt{3}}{3}$

(e) $25\sqrt{3}$

Sendo RS = 100, e medida QR desconhecida, podemos atribuir a variável x, logo $QS = 100 + x$, logo temos as seguintes relações $\tan(30) = \frac{PQ}{QS}$ e $\tan(60) = \frac{PQ}{QR}$, sendo 30º = $\frac{\pi}{6}$ e 60ºC = $\frac{\pi}{3}$

Logo temos $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{y}{x}$ e também temos:

$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{y}{100+x}$

Logo $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{y}{x} \quad \therefore \quad \sqrt{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \sqrt{3}x$

$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}x}{100+x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}x}{100+x}$

$\frac{1}{3} = \frac{x}{100+x} \Rightarrow 3x = 100 + X \Rightarrow 3x - x = 100 \Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow x = \frac{100}{2} = 50$

Como $y = \sqrt{3}x$ então $y = 50\sqrt{3}$, letra b resposta correta

2. (OBMEP) Se $\sin(x) + \cos(x) = \frac{5}{6}$, então $\sin(2x)$ é igual a:

(a) $\frac{-7}{36}$
(b) $\frac{-11}{36}$
(c) $\frac{-13}{36}$
(d) $\frac{-17}{36}$
(e) $\frac{-19}{36}$

Tomando a expressão $\sin(x)+\cos(x) = \frac{5}{6}$ temos a seguinte situação:

$$(\sin(x) + \cos(x))^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$(\sin(x) + \cos(x)) \cdot (\sin(x) + \cos(x)) = \frac{25}{36}$$

$$\sin^2(x)+2\sin(x)\cos(x)+\cos^2(x) = \frac{25}{36}$$

Sendo $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ e $\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x)$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, então a expressão fica:

$$\sin^2(x)+\cos^2(x)+2\sin(x)\cos(x) = \frac{25}{36}$$

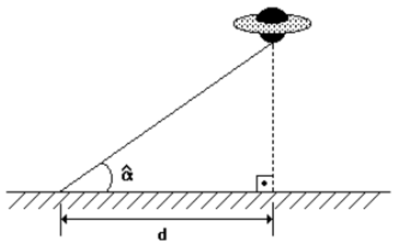
$$1 + \sin(2x) = \frac{25}{36}$$

$$\sin(2x) = \frac{25}{36} - 1$$

$$\sin(2x) = \frac{25-36}{36}$$

$\sin(2x) = \frac{-11}{36}$, letra b a resposta correta

3. (UNIRIO) Um disco voador é avistado, numa região plana, a uma certa atitude, parado no ar. Em certo instante, algo se desprende da nave e cai em queda livre, conforme mostra a figura. A que altitude se encontra esse disco voador?



(I) - A distância d é conhecida;

(II) - A medida do ângulo α e a $\tan(\alpha)$ do mesmo ângulo são conhecida.

Então, tem-se que:

(a) a I sozinha é suficiente para responder à pergunta, mas a II, sozinha, não
(b) a II sozinha é suficiente para responder à pergunta, mas a I, sozinha não
(c) I e II, juntas, são suficientes para responder à pargunta, mas nenhuma delas, sozinha, não é
(d) ambas são, sozinhas, suficientes para responder à pergunta
(e) a pergunta não pode ser respondida por falta de dados

Resposta correta é a letra C, uma vez que a distância, seja a distância de interesse da nave, seja a distância vertical projetada, podem ser inferidas com os valores em questão, uma vez que podemos usar as relações trigonométricas para deduzir o valor da distância projetada e também o teorema de pitágoras para a distância do círculo até este ponto