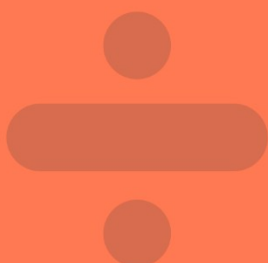


APOSTILA ENEM  
E VESTIBULAR

MA



TE



MÁ

TI



CA



O projeto *EduCursinho - Educação e Aprovação* é uma atividade de extensão da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT) que tem por objetivo oferecer a estudantes em processo de preparação para prestarem o Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) e que sejam, preferencialmente, pertencentes a famílias de baixa renda, uma série de atividades educativas (aulas, resolução de exercícios, dicas e macetes etc.) que os auxiliem na obtenção de êxito no acesso ao ensino superior.

Por entender que a Universidade Pública é parte do desenvolvimento de uma sociedade, as ações de extensão surgem como uma das formas de contato entre a comunidade externa e a acadêmica - estudantes e servidores – fazendo com que a Universidade cumpra o seu papel de atuação na sociedade de maneira ampla e geral. A Universidade se torna parte do convívio social, quando, por meio de suas ações, promove um retorno à população com atividades e propostas que são alcançáveis por um ou vários grupos sociais.

Desde a sua idealização, a proposta é motivar estudantes universitários a estabelecerem um diálogo com a sociedade externa à universidade promovendo ações que atendam diretamente às demandas sociais e que proporcionem a troca de conhecimentos entre os mesmos. Neste projeto, as ações iniciais são a formação e a capacitação dos estudantes da UFMT para atuarem como professores nas diversas áreas contempladas pelo Enem: Ciências Humanas e suas Tecnologias, Ciências da Natureza e suas Tecnologias, Linguagens, Códigos e suas Tecnologias e Matemática e suas Tecnologias.

Nesse sentido, o projeto possui a seguinte estruturação interna: coordenação geral, coordenadores de área (Física, Química, Matemática, Redação, Atualidades e Inglês) e coordenador de marketing, sendo cada uma dessas áreas gerida por um docente (interno ou externo) da UFMT. Além disso, há os estudantes que atuam como líderes de divulgação e organização e os responsáveis por cada grupo de conteúdo, subdivididos de acordo com as respectivas disciplinas.

Com o advento da pandemia do Coronavírus (Covid-19), as ações tiveram de ser alteradas, de modo a reduzir e/ou evitar prejuízos causados pelas medidas de distanciamento que foram necessárias para conter o avanço do vírus. Dessa forma, todo o projeto foi reestruturado para atender às demandas de ensino por meio da utilização de estratégias já conhecidas do ensino a distância. As aulas passaram a ser ministradas mediante ferramentas digitais, como aulas por meio de plataformas como Youtube, Google Classroom e Google Meet.

...

Diante do exposto, surgiu a ideia de elaborar uma coleção de livros digitais (e-books), que foram elaborados pela equipe do projeto (docentes/ estudantes) e divididos em cinco (5) volumes, de forma a tornar o acesso ao material de estudo por parte do público-alvo ainda mais fácil e interativo. Esses e-books foram publicados em parceria com a Editora da UFMT (EdUFMT) e são disponibilizados de forma totalmente gratuita aos alunos, reforçando ainda mais a missão da universidade de impactar positivamente a sociedade com ações que promovam crescimento social, tanto de forma local, como de forma ampla.

Esperamos que essa coleção, por meio de cada um dos volumes, seja realmente apro-

veitada ao máximo, pois fizemos tudo com muito carinho e dedicação para que você tenha cada vez mais acesso a informações de qualidade. O seu potencial está aí dentro, então use as ferramentas disponíveis para alavancar isso e mostre que o caminho vai ser trilhado com muita diligência e perseverança. Bons estudos e se liga nas dicas que colocamos para vocês nos capítulos.

Atenciosamente,

Equipe EduCursinho.

*Coordenadora Geral: Daniele Caetano da Silva*

*Coordenador de Física: Murilo José Pereira de Macedo*

- Danilo Oliveira dos Reis Nascimento
- Luana Andra Correa Teixeira
- Yhan Toth

*Coordenadora de Inglês: Mônica Aragona*

- Jessica de Almeida Barradas

*Coordenadora de Matemática: Gláucia Aparecida Soares*

- Gustavo Mene Ale Primo
- Rafael Simões Martins da Silva Oliveira
- Wesley Alexei Paiva

*Coordenador de Marketing: Felipe Thomaz Aquino*

- Gustavo Mene Ale Primo
- Livia Pereira de Alencar
- Matheus Henrique Sampaio Costa e Silva

*Coordenadora de Química: Daniele Caetano da Silva*

- Antônio Gierdson Lima dos Santos
- Jeferson Mangueira de Castro Lydijusse
- Stefanie Santos Silva

*Coordenadora da Redação/Atualidades: Manuella Soares Jovem*

- Nicole Astutti Campos
- Diane Santana Brito
- João Pedro dos Santos Menezes

# MATEMÁTICA

## Gráficos e funções

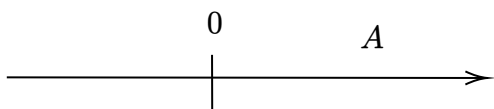


## PLANO CARTESIANO

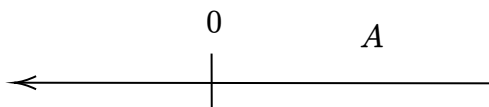
Em homenagem ao filósofo e matemático René Descartes (1596 - 1650)

Dada uma reta temos as seguintes situações de orientação horizontal:

- Orientação positiva



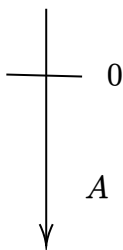
- Orientação negativa



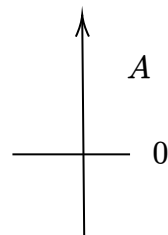
Por padrão adotamos a orientação positiva no sentido da "esquerda para a direita"

Os segmentos de orientação vertical são:

- Orientação negativa



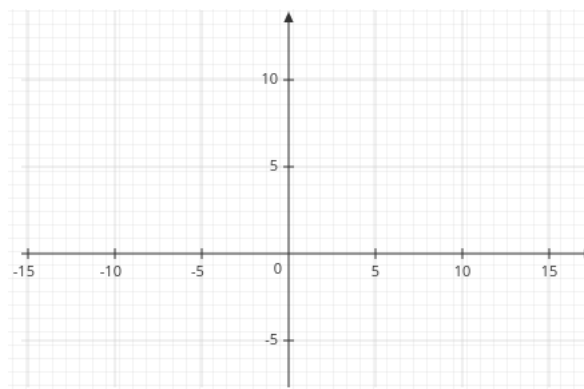
- Orientação positiva



O sentido positivo de orientação do segmento vertical positivo é "de cima para baixo"

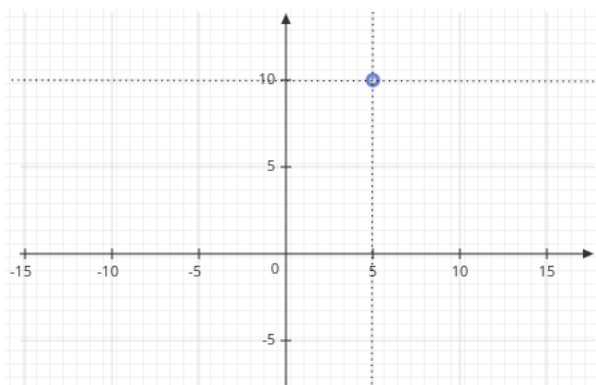
## CONSTITUIÇÃO DO PLANO CARTESIANO

Com a unificação das dos segmentos, vertical e horizontal, de orientação positivo temos a constituição do plano cartesiano, o eixo horizontal é eixo das abscissas



Um ponto no plano cartesiano é formado pela ligação de dois pontos por retas paralelas aos eixos, e a intersecção aos eixos coordenados, como mostra a figura

Figura 1: Ponto (5, 10) no plano cartesiano



Na figura temos a representação do ponto (5, 10), o valor 5 diz respeito ao valor no eixo x, e o valor 10 ao valor

## QUADRANTES DO PLANO CARTESIANO

Os pontos, ou par ordenado, do plano cartesiano não pertencem aos eixos coordenados, e este é dividido em quatro regiões onde os pontos estão definidos:

1. Se  $x \geq 0$  e  $y \geq 0$ , o ponto pertence ao primeiro quadrante, formalmente como

$$Q_1 = \{(x, y) | x, y \geq 0\}$$

2. Se  $x \leq 0$  e  $y \geq 0$ , o ponto pertence ao segundo quadrante, formalmente como

$$Q_2 = \{(x, y) | x \leq 0, y \geq 0\}$$

3. Se  $x \leq 0$  e  $y \leq 0$ , o ponto pertence ao terceiro quadrante, formalmente

como

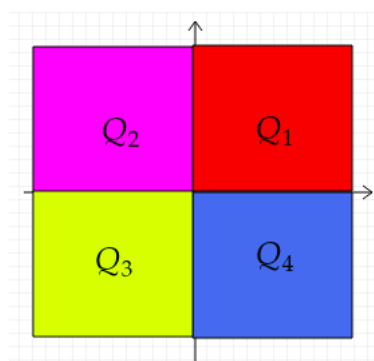
$$Q_3 = \{(x, y) | x, y \leq 0\}$$

4. Se  $x \geq 0$  e  $y \leq 0$ , o ponto pertence ao quarto quadrante, formalmente como

$$Q_4 = \{(x, y) | x \geq 0, y \leq 0\}$$

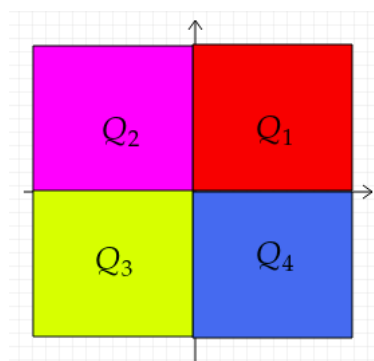
A figura abaixo mostra a construção do plano cartesiano

Figura 2: quadrantes do plano cartesiano



Em cada quadrante temos a seguinte configuração dos sinais no plano cartesiano:

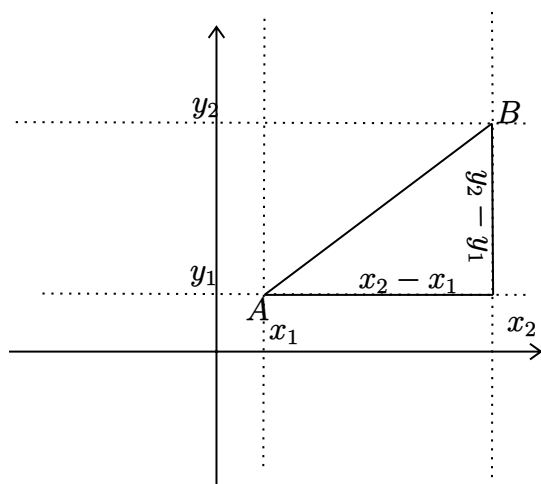
Figura 3: Sinais no plano cartesiano



A desigualdade triangular temos

## DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS E DESIGUALDADE TRIANGULAR

A distância entre dois pontos,  $A = (x_1, y_1)$  e  $B = (x_2, y_2)$ , no gráfico:

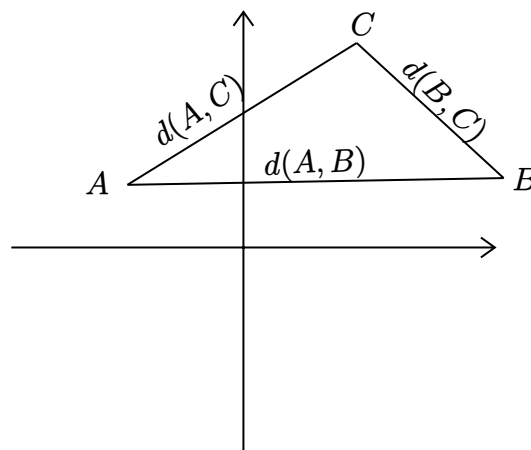


Pelo teorema de pitágoras, a hipotenusa que liga os dois pontos é distância entre eles:

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

A desigualdade triangular é a relação entre três pontos do Plano Cartesiano, onde ligados por segmentos de reta, que formam um triângulo, onde a soma de dois de lados sempre é maior que um lado, assim podemos definir uma regra geral para construção de triângulos no Plano Cartesiano

**Teorema 1** *Três pontos ligados por segmentos de reta constituem um triângulo se a soma dois segmentos forem menores ou iguais a terceiro segmento*



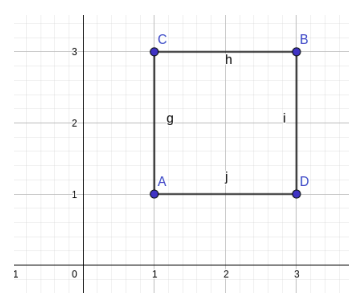
Matematicamente temos:

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(B, C)$$

## EXEMPLO

(OBMEP) Uma das diagonais de um quadrado tem extremidades  $A = (1,1)$  e  $C = (3,3)$ . Quais as coordenadas dos outros vértices:

Seguindo a ilustração:



Temos os pontos  $A = (1,1)$  e  $C = (3,3)$  a distância entre os pontos:

## GRÁFICOS E FUNÇÕES

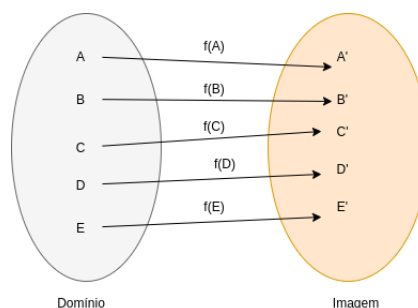
### FUNÇÕES

Uma função, informalmente, pode ser definida como um conjunto de valores que podem ser associados por meio de uma lei com outro objeto num dado conjunto

**Teorema 2** *Uma função é uma lei que associa, para cada um elemento do  $x$  a conjunto  $D$ , exatamente um elemento, conhecido como  $f(x)$ , em conjunto  $E$*

O diagrama de Venn abaixo mostra como podemos definir uma função, para cada elemento do conjunto de domínio é necessário um elemento no conjunto imagem.

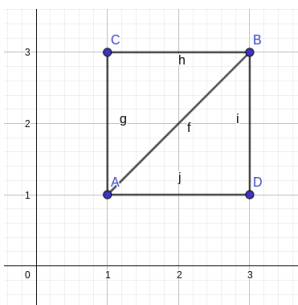
Figura 4: Diagrama de Euler-Venn: definição de função



Uma Função sempre possui uma notação indicando as várias independentes, pertencentes ao conjunto domínio, e das variáveis dependentes

$$\begin{aligned} d(A, B) &= \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2} \\ d(A, B) &= \sqrt{(3 - 1)^2 + (3 - 1)^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (2)^2} \\ d(A, B) &= \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Pelo teorema de Pitágoras temos, que a distância da entre os pontos A e C, os demais ponto que denominamos B e D desconhecidos, sendo A,B,C e D os pontos no plano cartesiano constituintes do quadrado



Por teorema de pitágoras, a medida da diagonal do quadrado é  $d = l\sqrt{2}$ , logo a aresta do quadrado é  $l = \frac{d}{\sqrt{2}}$ , sendo  $d = 2\sqrt{2}$ , então  $l = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ,  $l = 2$  portanto o valor dos pontos é:

- $A = (1, 1)$
- $B = (x_a, y_b + 2) = (1, 1 + 2) = (1, 3)$
- $C = (3, 3)$
- $D = (x_c, y_b - 2) = (3, 3 - 2) = (3, 1)$



- Variáveis independentes: são as variáveis nas quais a função é avaliada, normalmente representada por  $x, y$  e  $z$  por exemplo
- Variáveis dependentes: expressam o resultado da função depois de avaliadas por lei, são expressas por  $f(x)$  e  $g(y)$  por exemplo
- Todo o elemento do conjunto domínio tem apenas um elemento associado no conjunto imagem, como mostra as figuras no modelo de diagrama de Euler-Venn

Figura 5: Diagrama de Euler-Venn: definição de função - representação válida

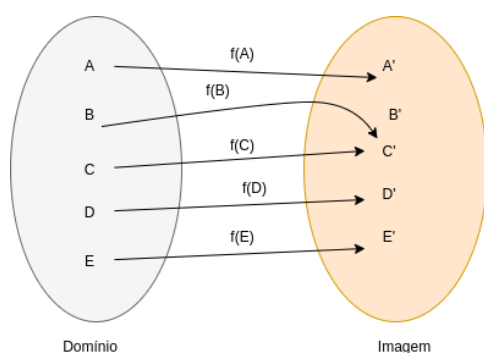
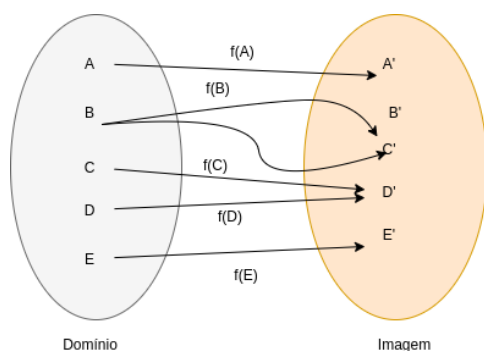


Figura 6: Diagrama de Euler-Venn: definição de função - representação inválida



## FORMAS DE REPRESENTAÇÃO DE UMA FUNÇÃO

1. Uma função pode ter uma representação numérica de sua lei, exemplo da área de uma circunferência  $A = \pi r^2$ , de forma mais clara  $A(r) = \pi r^2$

2. Diagramas de Euler-Venn

3. Uma função com a seguinte lei:  $f(x) = \sqrt{x+2}$ , tem a seguinte notação  $\{x \in \mathbb{R} | \forall x \geq -2\}$ , que é lido como "x que pertence ao conjunto dos números reais, exceto todo valor x maior igual que -2"

4. A função  $f(x) = \cos(x^2 + 3)$ , que tem domínio com a representação  $D = \{x \in \mathbb{R}\}$ , e a imagem da função  $Im\{f(x)\} = \{-1 \leq x \leq 1\}$ , e a leitura do conjunto imagem: a função assume dos valores reais no intervalo de  $\{-1 \leq x \leq 1\}$

5. Gráficos "puramente matemáticos" como da função:  $f(x) = \frac{x^2 + \sin(x)}{x}$ , mostrado na figura 7:

6. Gráficos que mostram fenômenos reais, como o gráfico da figura 8, que mostra a evolução da média móvel de óbitos por COVID-19 até a data do dia 27 de março 2021, do Conselho Nacional de Secretários de Saúde - CONASS

Figura 7: Representação gráfica da função:  $f(x) = \frac{x^2 + \sin(x)}{x}$

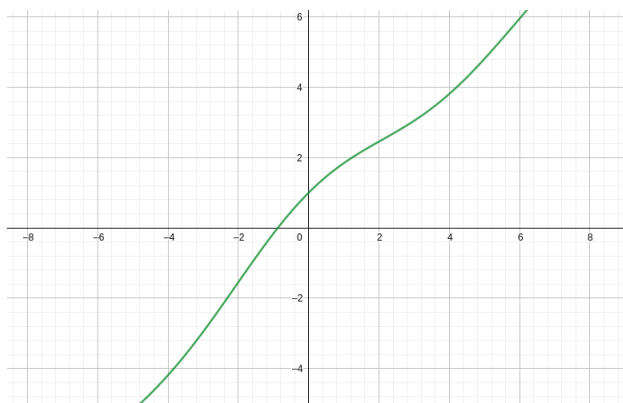


Figura 8: Evolução da média móvel de óbitos por COVID-19 - CONASS



## DOMÍNIO, CONTRADOMÍNIO E IMAGEM DE UMA FUNÇÃO

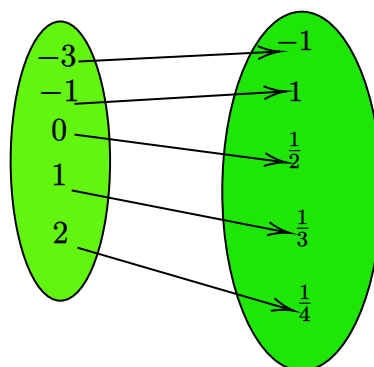
1. Domínio: o domínio de uma função é conjunto de valores possíveis que uma função pode assumir
2. Contradomínio: é conjunto que reúne todas as possibilidades de imagem de uma função

3. Imagem: conjunto possível de saída uma função segundo a lei de formação da função

Como segue o segue o exemplo:

- Seja a função  $f : A \rightarrow B$  cuja a lei de formação é:  $f(x) = \frac{1}{x+2}$
- Tomando o conjunto de valores  $A = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$
- O conjunto de saídas possíveis da função  $f(x)$  sobre o conjunto A, temos então o seguinte conjunto  $B = \{f(-3), f(-1), f(0), f(1), f(2)\}$ , sendo  $B = \left\{-1, \frac{1}{-2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$

Pela figura temos as seguintes informações:



Para o caso do diagrama:

1. Domínio é:  $D_f = \{-3, -1, 0, 1, 2\}$ , número  $x = -2$  não pertence ao domínio, porque aplicado a lei de formação da função gera uma indeterminação matemática
2. Imagem é:  $Im = \{-1, 1, 1/2, 1/3, 1/4\}$

3. Contradomínio: conjunto dos números reais

Generalizando as informações relativas a função

- Domínio de  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ,

$D_f = \{(x \in \mathbb{R}) | x \neq -2\}$ , "x" que pertence ao número dos reais, exceto  $x = -2$

- Imagem de  $f(x) = \frac{1}{x+2}$ ,

$Im = \{y \in \mathbb{R}\}$ , conjunto dos números reais

- Contradomínio:  $CD = \{y \in \mathbb{R}\}$ , conjunto dos números reais

## GRÁFICO

Todo gráfico pode ser uma representação de uma função, num plano com dois eixos, o eixo das ordenadas, eixo vertical ou simplesmente eixo y, e o eixo horizontal ou simplesmente eixo x

O gráfico cartesiano relaciona um par ordenado (x,y), e a ligação entre esses pontos se materializa a construção da curva, que é a representação da função

## FUNÇÃO DEFINIDA POR PARTES

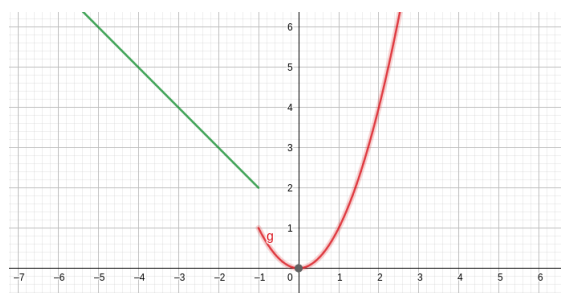
Uma função definida por partes é uma função que assume duas expressões, nesse tipo de função, o seu

"comportamento" se altera num dado intervalo, como exemplo:

Considere a função,  $f(x)$ :

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & , \text{ se } x \leq -1 \\ x^2 & , \text{ se } x > -1 \end{cases}$$

O gráfico da função é mostrado a seguir:



Nesse gráfico podemos observar temos as seguintes questões:

- A função assume dois comportamentos:
  - comportamento de função linear  $f(x) = 1 - x$ , para todos os valores inferiores ou iguais a -1
  - comportamento de função quadrática  $f(x) = x^2$ , para todos os valores maiores que -1
- A função em  $x = -2$ :  $-2 \leq -1$ , temos que a função assume o comportamento  $f(x) = 1 - x$ , logo  $f(-2) = 1 - (-2) = 1 + 2 = 3$
- A função em  $x = -1$ :  $-1 \leq -1$ , a função mantém o comportamento pela expressão  $f(x) = 1 - x$ , logo,  $f(-1) = 1 - (-1) = 2$

- A função em  $x = 0$ : como  $0 \geq -1$ , logo a função assume a expressão  $f(x) = x^2$  e  $\therefore f(0) = 0^2 = 0$

## SIMETRIA DE FUNÇÕES

Uma função é dita simétrica quando segue as seguintes propriedades:

- $(x, y) = (-x, y)$
- $(x, y) = (-x, -y)$

Assim temos as definições de funções com simetria: funções pares e funções ímpares

1. Uma função é par quando segue a seguinte propriedade:  $f(x) = f(-x)$
2. Uma função é ímpar quando segue a seguinte propriedade  $f(-x) = -f(x)$

Fica os exemplos:

1.  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ :

Se  $f(x)$  é par, então  $f(x) = f(-x)$ , então  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  e  $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1}$ , logo segue a comparação:  $f(x) = f(-x)$  e portanto  $\frac{x}{x^2+1} \neq \frac{-x}{(-x)^2+1}$ , então a função não é par

Se  $f(x)$  é ímpar, então  $f(-x) = -f(x)$ , logo  $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1}$  e  $-f(x) = (-1) \cdot \frac{x}{x^2+1}$ , logo portanto temos que  $\frac{-x}{(-x)^2+1} = (-1) \cdot \frac{x}{x^2+1}$

$\frac{-x}{x^2+1} = \frac{-x}{x^2+1}$ , como  $f(-x) = -f(x)$ , então a função é ímpar

2.  $f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$ :

Se  $f(x)$  é par, então  $f(x) = f(-x)$ , sendo  $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^4+1}$ , então

$$f(x) = f(-x), \text{ então } \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{(-x)^2}{(-x)^4+1} \Rightarrow \frac{x^2}{x^4+1} = \frac{x^2}{x^4+1}, \text{ logo } f(x) \text{ é par}$$

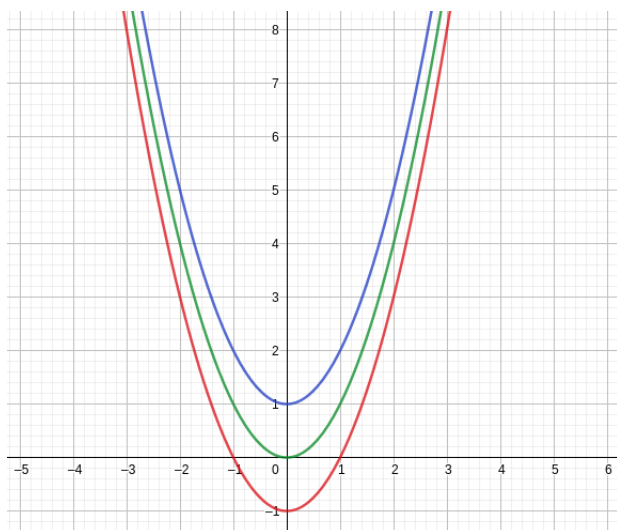
## TRANSFORMAÇÕES DE FUNÇÕES

Transformações de funções são operações aplicadas sobre uma função, no qual o resultado pode ser a translação em relação ao número, rotação em torno dos eixos coordenados, expansão e compressão.

Deslocamento vertical e horizontal de funções

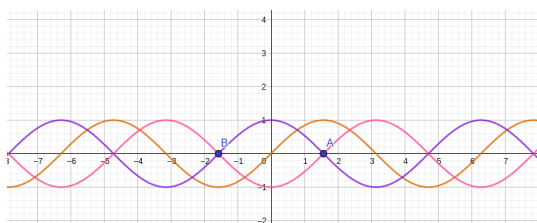
1.  $g(x) = f(x) + c$ , o gráfico  $f(x)$  é deslocado  $c$  unidades para cima
2.  $g(x) = f(x) - c$ , o gráfico  $f(x)$  é deslocado  $c$  unidades para baixo
3.  $g(x) = f(x - c)$ , o gráfico  $f(x)$  é deslocado  $c$  unidades para direita
4.  $g(x) = f(x + c)$ , o gráfico  $f(x)$  é deslocado  $c$  unidades para esquerda

Na imagem a seguir vemos as operações dos itens 1 e 2, na função  $f(x) = x^2$



- O gráfico em verde é da "função original"  $f(x) = x^2$
- O gráfico em azul é da função  $g(x) = f(x) + 1$  que tem uma translação no eixo coordenado de uma unidade para cima,  $g(x) = x^2 + 1$
- O gráfico em vermelho é função  $g(x) = f(x) - 1$  que tem uma translação no eixo coordenado de uma unidade para baixo,  $g(x) = x^2 - 1$

Sobre as transformações dos itens 3 e 4, segue:



Temos a seguinte situação:

- O gráfico em laranja representa a função  $f(x) = \sin(x)$

- O gráfico em azul representa a função  $f(x) = \sin(x + \pi/2)$  que é função seno deslocada  $\pi/2$  unidades para a esquerda ao longo do eixo x
- O gráfico em rosa representa a função  $f(x) = \sin(x - \pi/2)$  que é função seno deslocada  $\pi/2$  unidades para a direita ao longo do eixo x

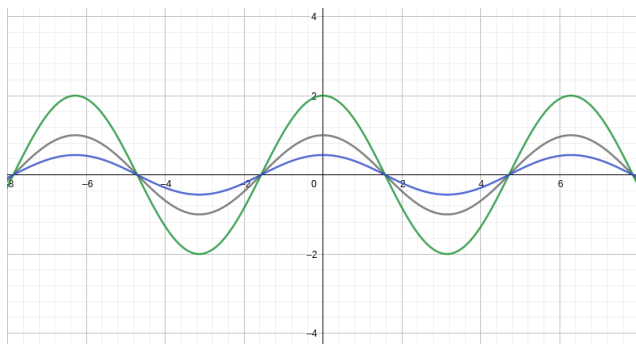
## EXPANSÃO E COMPRESSÃO DAS FUNÇÕES

Segue as seguintes propriedades de compressão e expansão de funções:

Considere

1.  $y(x) = cf(x)$ , a função sofre uma expansão vertical em fator de c
2.  $y(x) = \frac{1}{c}f(x)$ , a função sofre uma compressão vertical em fator de c
3.  $y(x) = f(cx)$ , compressão da função com fator de c, horizontalmente
4.  $y(x) = f(\frac{x}{c})$ , expansão da função com fator de c, horizontalmente
5.  $y(x) = -f(x)$ , reflexão da função em torno do eixo x
6.  $y(x) = f(-x)$ , reflexão em torno de y

Para exemplificação gráfica das propriedades 1 e 2, com a função  $f(x) = \cos(x)$

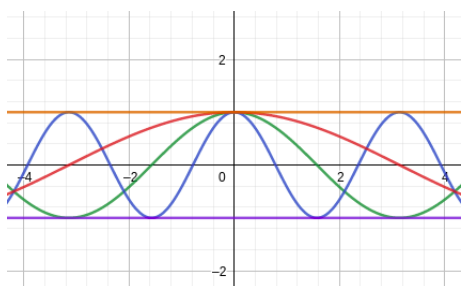


• O gráfico em cinza é da função  $f(x) = \cos(x)$

• O gráfico em verde é da função  $f(x) = 2\cos(x)$ , onde a função  $\cos(x)$  tem uma expansão vertical em fator de  $c = 2$

• O gráfico em azul é da função  $f(x) = \frac{\cos(x)}{2}$ , onde a função  $\cos(x)$  tem uma compressão vertical em fator de  $c = 2$

Usando a função  $f(x) = \cos(x)$  para mostrar as propriedade 3 e 4, na figura a seguir:

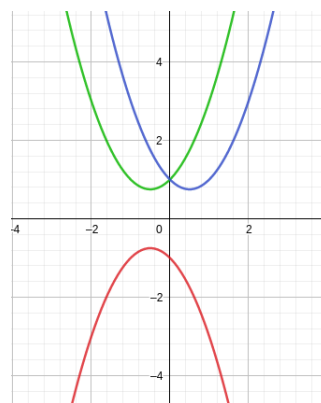


• O gráfico em verde é da função cosseno,  $f(x) = \cos(x)$

• O gráfico em azul é da função  $f(x) = \cos(2x)$ , onde a função  $f(x)$  sofre uma expansão horizontal

• O gráfico em vermelho é da função  $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

As propriedades 5 e 6, segue os exemplos gráficos com o polinômio:  $p(x) = x^2 + x + 1$



O gráfico em verde representa o polinômio  $p(x) = x^2 + x + 1$ , com a propriedade 5 há uma reflexão no eixo  $x$ , representado pelo gráfico em vermelho, e com a operação da propriedade 6 uma de reflexão no eixo  $y$

## COMBINAÇÃO DE FUNÇÕES

Duas funções podem ser combinadas para formar novas funções, semelhante a operação numérica de com soma, subtração, multiplicação e divisão.

Seja  $f(x)$  e  $g(x)$  duas funções, as combinações possíveis são:

1. Soma:  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
2. Subtração:  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
3. Multiplicação:  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

#### 4. Divisão: $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

Outra forma de combinação de funções é a operação de composição, como segue a definição:

**Teorema 3** Dadas as funções  $f$  e  $g$ , a função composta  $f \circ g$  é definida por:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Como exemplo temos:

Sejam as funções  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = x - 3$  a composição:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (x - 3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

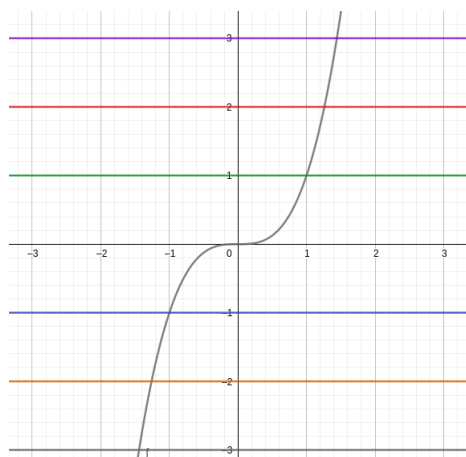
$$\text{e } (g \circ f)(x) = g(f(x)) = x^2 - 3$$

## FUNÇÕES INJETORAS E INVERSÃO DE FUNÇÕES

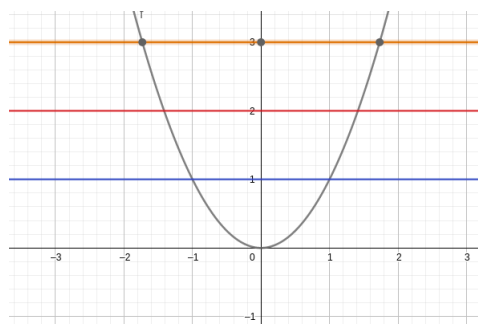
Uma função é injetora se ela nunca assume os mesmo valor duas vezes, logo  $f(x_1) \neq f(x_2)$  sempre que  $x_1 \neq x_2$

**Teorema 4** O teste da reta horizontal, método gráfico de determinar se uma função é injetora, consiste em traçar reta horizontal, se ela não intercepta dois ponto no eixo  $y$  então a função é injetora

Como exemplo temos a função  $f(x) = x^3$  que é uma função injetora pelo teste da reta horizontal, nenhuma reta horizontal "toca" dois valores igual no eixo vertical



Diferente da função  $g(x) = x^2$  que não é uma função injetora pelo teste da reta horizontal



## INVERSÃO DE FUNÇÕES

**Teorema 5** Uma função injetora com domínio em  $A$  e imagem em  $B$ . Então uma função inversa  $f^{-1}$  tem domínio em  $B$  e imagem em  $A$ , e é definida por

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$$

Roteiro para inversão de funções:

1. Escreva  $y = f(x)$
2. Isole  $x$  na equação, com notação em termo de  $y$  (se possível)



3. Na expressão de  $f^{-1}$  como uma função de  $x$ , troque  $x$  por  $y$ , a expressão

Como exemplo temos a seguinte função  $f(x) = x^3 + 2$  seguindo o processo de inversão:

$$f(x) = x^3 + 2 \quad \text{então segue:}$$

$$y = x^3 + 2 \Rightarrow x^3 + 2 = y$$

$$x^3 = y - 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 2}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$$

A composição de uma função com sua inversa o resultado é igual a variável da função:

Sendo  $f(x) = x^3 + 2$  e  $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 2}$ , então temos que  $f \circ f^{-1}(x)$ :

$$f \circ f^{-1}(x) = (\sqrt[3]{x - 2})^3 + 2$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x - 2 + 2$$

$$f \circ f^{-1}(x) = x$$

## FUNÇÃO LINEAR

Uma função linear é uma função que se molda com uma taxa constante, segue a seguinte lei matemática:  $y = f(x) = ax + b$

Graficamente assume a geometria de uma reta, e portanto para descrever sua equação basta conhecer apenas dois pontos,

A equação geral da reta é:  $y - y_0 = m(x - x_0)$ , onde  $x_0$  e  $y_0$  são os pontos conhecidos para se construir uma reta, e  $m$  é o coeficiente de inclinação da reta

Os exemplo deixa o tema mais claro:

(Stewart) À medida que a temperatura do ar seco se move para cima, ele se expande e esfria. Se a temperatura do solo for 20°C e temperatura a uma altitude de 1 km for de 10°C, expresse a temperatura como uma função da altitude, supondo um modelo linear seja apropriado. Esboçe o gráfico

Logo podemos adotar a seguinte notação:  $T(h) = ah + b$ , onde  $h$  é altura em quilômetros, utilizando a equação geral da reta e desenvolvendo as operações algébricas:

Sejam os pontos :

$$p_1 = (0, 20) \quad p_2 = (1, 10)$$

que indicam notação cartesiana: no solo, ou altura 0km, a temperatura do é de 20°C; com 1 km de altura a temperatura do ar é 10°C

O cálculo do coeficiente de inclinação da reta:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{10 - 20}{1 - 0}$$

$$m = \frac{-10}{1} = -10$$

Substituindo na equação geral



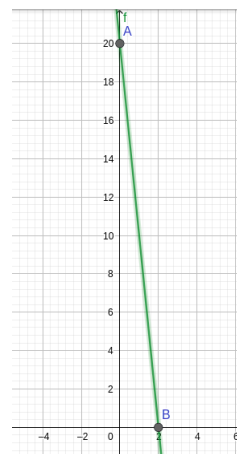
da reta,  $y - y_0 = m(x - x_0)$ , temos a seguinte situação:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 20 = -10(x - 0)$$

$$y - 20 = -10x \Rightarrow y = 20 - 10x$$

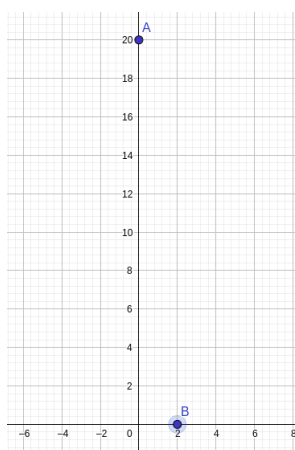
O gráfico desta função pode ser obtido com os seguintes passos:



1. Tomando a função  $y = 20 - 10x$ , substitua  $x$  por zero:  $y = 20 - 10(0) \Rightarrow y = 20$ , temos o par ordenado  $A = (0, 20)$

2. Tomando a função  $y = 20 - 10x$ , substitua  $y$  por zero:  $0 = 20 - 10x \Rightarrow x = \frac{20}{10} = 2$ , temos o par ordenado  $B = (2, 0)$

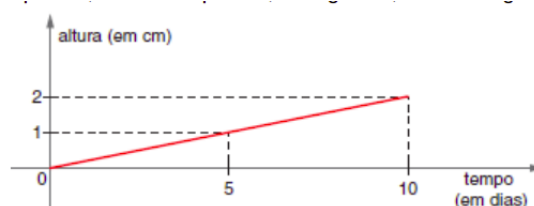
3. Marque os pontos no plano cartesiano, como mostra a figura:



4. Traçe uma reta ligando os dois pontos

Mais um exemplo :

(UERN) Um botânico mede o crescimento de uma planta, em centímetros, todos os dias. Ligando os pontos, colocados por ele, num gráfico, resulta a figura abaixo



Se mantida sempre essa relação entre tempo e altura, a planta terá no trigésimo dia, uma altura igual a:

- (a) 5
- (b) 150
- (c) 15
- (d) 30
- (e) 6

Tomando os pontos  $p_1 = (5, 1)$  e  $p_2 = (10, 2)$ , calcula-se o coeficiente de inclinação da reta:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

$$\therefore m = \frac{2 - 1}{10 - 5}$$

$$\therefore m = \frac{1}{5}$$

A equação geral da reta fica:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$\therefore y - 1 = \frac{1}{5}(x - 5)$$

$$\therefore y = \frac{x}{5}$$

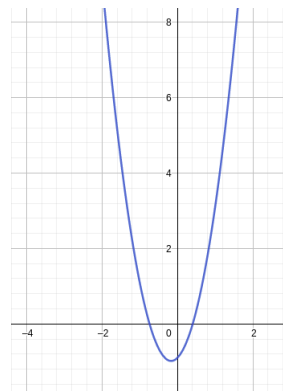
A função que determina a reta é:  
 $y(x) = \frac{x}{5}$ , sendo  $x$  o tempo em dias e  $y$  altura da planta, substituindo 30 que é número de dias mencionado fica:  
 $y(30) = \frac{30}{5} = 6$

Letra D alternativa correta

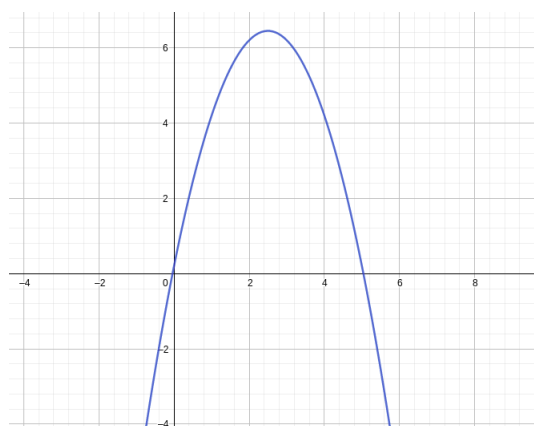
## FUNÇÃO QUADRÁTICA

Uma função quadrática, ou função do segundo grau, tem a seguinte estrutura:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , possui o formato de uma parábola, que pode ter sua curvatura ou concavidade voltada para cima ou para baixo.

- Concavidade para cima:



- Concavidade para baixo:



Os principais elementos de uma função quadrática são, usados também para esboçar o seu gráfico:

1. Raízes obtidas pelo método Bhaskara, se houver
2. Vértice
3. Uma vez sinalizados basta fazer o traçado de esboço

## MÉTODO DE BHASKARA

Método utilizado para determinar as raízes reais de uma função

quadrática:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

O discriminante  $b^2 - 4ac$ , conhecido como delta,  $\Delta = b^2 - 4ac$ , determina a existência ou não de raiz real:

- se  $\Delta = b^2 - 4ac > 0$  então a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  possui duas raízes reais distintas
- se  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$  então a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  possui duas raízes reais repetidas
- se  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$  então a função  $f(x) = ax^2 + bx + c$  não possui raízes reais

### EXEMPLO

1. (UFOP) Em relação ao gráfico da função  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ , pode-se afirmar:

- (a) é uma parábola com concavidade para cima
- (b) seu vértice é o ponto  $V = (2, 1)$
- (c) intercepta o eixo das abscissas em  $P = (-3, 0)$  e  $Q = (3, 0)$
- (d) o seu eixo é o eixo das ordenadas
- (e) intercepta o eixo das ordenadas em  $R = (0, 3)$

Passos para solucionar a questão:

Seja a função  $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

1. Calcular o discriminante, delta:  
 $\Delta = b^2 - 4ac$ ,  $\Delta = (4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-3) \Delta = 16 - 12 = 4$

2. Análise do valor do discriminante: como  $\Delta > 0 = 4$ , logo temos duas raízes reais distintas

3. Cálculo do valor das raízes:

$$\bullet x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{-2a}, \text{ logo: } x_1 = \frac{-4 + \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-4 + 2}{-2} = 1$$

$$\bullet x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{-2a} \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{4}}{2(-1)} = \frac{-4 - 2}{-2} = 3$$

Raízes reais  $x_1 = 1$  e  $x_2 = 3$

4. Vértice: o vértice de uma parábola é média aritmética de suas raízes:  $V = \frac{x_1 + x_2}{2}$ , então o ponto de vértice é  $v = \frac{1+3}{2} = 2$ , o valor da função no vértice é  $f(2) = -(2^2) + 4 \cdot 2 - 3 = 1$

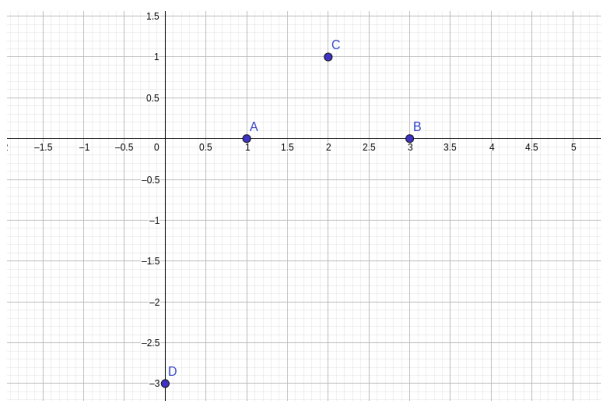
5. Ponto de intersecção com eixo das ordenadas: substituir zero na função  $f(0) = -0^2 - 4 \cdot 0 - 3 = -3$

6. Com os pontos:

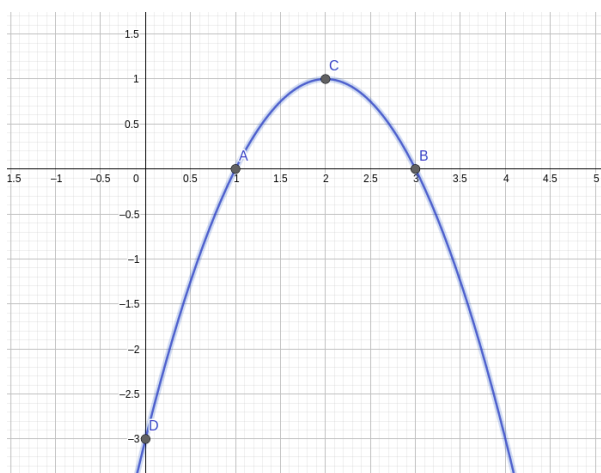
- Raízes:  $A = (1, 0)$ ,  $B = (3, 0)$
- Vértice:  $C = (2, 1)$
- Intersecção com eixo y:  $D = (0, -3)$

basta marcar no plano cartesiano e traçar uma parábola ligando os pontos

Pontos no plano cartesiano:



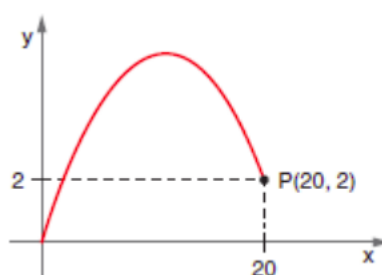
Esboço do gráfico:



Analisando as alternativas:

- (a) é uma parábola com concavidade para cima - Falsa, a parábola é voltada para baixo
- (b) seu vértice é o ponto  $V = (2, 1)$  - Correta
- (c) intercepta o eixo das abscissas em  $P = (-3, 0)$  e  $Q = (3, 0)$  - Falsa
- (d) o seu eixo é o eixo das ordenadas - Falso, sem contexto
- (e) intercepta o eixo das ordenadas em  $R = (0, 3)$  - Falsa

2. (FURG-RS) Um jogador de futebol se encontra a uma distância de 20 m da trave do gol adversário, quando chuta uma bola que vai bater exatamente sobre essa trave, de altura 2 m. Se a equação da trajetória da bola em relação ao sistema de coordenadas indicado na figura é  $y(x) = ax^2 + (1 - 2a)x$ , a altura máxima atingida pela bola é:



- (a) 6,00 m
- (b) 6,01 m
- (c) 6,05 m
- (d) 6,10 m
- (e) 6,50 m

Resolução:

Pelo gráfico se conhece o ponto:  $(20, 2)$

Substituindo na função:  $y(x) = ax^2 + (1 - 2a)x$  temos:  $y(20) = a(20)^2 + (1 - 2a)20$   $\therefore 2 = a(20)^2 + (1 - 2a)20$

$2 = 400a + 20 - 40a \Rightarrow 360a + 20 = 2 \Rightarrow 360a = -18 \therefore a = \frac{-18}{360}$  simplificando por nove  $a = \frac{-2}{40}$  e por dois  $a = \frac{-1}{20}$

Substituindo o valor de  $a$  na função temos:  $y(x) = ax^2 + (1 - 2a)x \Rightarrow y(x) = \frac{-1}{20}x^2 + (1 - 2\frac{-1}{20})x$

$$y(x) = \frac{-x^2}{20} + (1 + \frac{2}{20})x$$

$$y(x) = \frac{-x^2}{20} + (\frac{20+2}{20})x$$

$$y(x) = \frac{-x^2}{20} + (\frac{22}{20})x$$

Se substituir  $x = 20$  na função temos:

$$y(x) = \frac{-x^2}{20} + (\frac{22}{20})x$$

$$y(20) = \frac{-(20)^2}{20} + (\frac{22}{20})20$$

$$y(20) = \frac{-400}{20} + \frac{22 \cdot 20}{20}$$

$$y(20) = \frac{-400}{20} + \frac{440}{20}$$

$$y(20) = -20 + 22$$

$y(20) = 2$ , valor coincidente com o apresentado pelo gráfico na questão, então é correto afirmar que  $a = \frac{-1}{20}$

O ponto de máximo da função de trajetória é coincidente com vértice da parábola, então podemos utilizar o método de Bhaskara para determinar a solução, porém como o termo  $c$  da função é zero, a raiz pode ser determinada da seguinte maneira:

$$\frac{-x^2}{20} + (\frac{22}{20})x = 0, \quad x(\frac{-x}{20} + \frac{22}{20}) = 0, \quad x = 0 \text{ e } (\frac{-x}{20} + \frac{22}{20}) = 0, \text{ resolvendo a equação temos: } \frac{-x}{20} + \frac{22}{20} = 0$$

$$\frac{-x}{20} = \frac{-22}{20} \quad \therefore \quad 20(\frac{-x}{20} = \frac{-22}{20})$$

$$x = 22$$

Logo as raízes são  $R_1 = (0, 0)$  e  $R_2 = (22, 0)$

$$\text{O ponto de vértice é: } v = \frac{R_1 + R_2}{2} = \frac{0 + 22}{2} = 11$$

Logo  $y(x) = \frac{-x^2}{20} + \frac{22x}{20}$ , sendo avaliada em  $x = 11$  dá o valor do máximo da trajetória

$$y(11) = \frac{-(11)^2}{20} + \frac{22 \cdot 11}{20}$$

$$y(11) = \frac{-121}{20} + \frac{242}{20}$$

$$y(11) = -6,05 + 12,1 = 6,05$$

A altura máxima é 6,05 m, a opção correta letra c

## FUNÇÕES POLINOMIAIS

Como já mencionado nos tópicos anteriores, uma função é uma lei matemática que relaciona uma variável dois valores  $x$  e  $y$  com uma lei de formação  $f(x)$ , onde  $(x, y = f(x))$ , funções de primeiro  $f(x) = ax + b$  e segundo grau  $f(x) = ax^2 + bx + c$  são polinômios, de primeiro e segundo grau.

Antes de definir o polinômio é necessário definir expressões algébricas e monômios:

1. Conjunto de operações finitas (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação), entre variáveis nos quais os resultados fazem sentido no

conjunto dos números reais. Expressões algébricas são denotadas por letras maiúsculas, e as variáveis por letras minúsculas:  $F = 9x^2 - \frac{8y^4}{3}$  e  $E = \frac{\sqrt[3]{a^2+bc^3}}{a^2+b^2+1}$

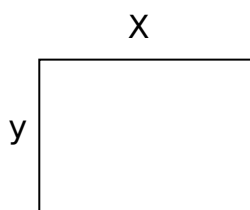
2. Monômio: é uma expressão algébrica definida pelo produto de um número real não nulo por um número finito de expoentes inteiros e não negativos, cujas bases são variáveis

Como exemplo:

- A figura a seguir mostra um retângulo, as expressões de perímetro e área são:

- Área:  $A = x \cdot y$

- Perímetro:  $P = 2x + 2y$



- potenciação dos seguintes monômios:

$$\begin{aligned} - \left(\frac{1}{2}x^2y^3\right)^4 &= \frac{1}{2^4}x^{2 \cdot 4}y^{3 \cdot 4} = \frac{1}{16}x^8y^{12} \\ - (-\sqrt{3}abc^3)^2 &= (-\sqrt{3})^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^{3 \cdot 2} = \\ &= (-\sqrt{3})^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^6 = (-3^{1/2})^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^6 = \\ &= -3 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot c^6 \end{aligned}$$

Um polinômio é uma soma finita de monômios, por exemplo  $p(x) = 3x^3y - 4xy^2 + \sqrt{3}xy + 8$ ,  $p(x)$  é o polinômio na variável  $x$ ,  $p(x, y)$  é o polinômio nas variáveis  $x$  e  $y$ , e  $p(x_1, x_2, \dots, x_n)$  é polinômio nas variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . O grau

de um polinômio é valor do maior expoente entre os monômios

A valoração numérica de um polinômio:

Dado o polinômio:  $E(x) = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ , a valoração em  $x = -1$  é:  $E(-1) = (-1)^5 + (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1$ ,  $E(-1) = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 = 0$

Vamos apenas tratar de polinômios de uma variável na seguinte forma:  $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$

Exemplo (OBM): Determine o polinômio  $p(x)$ , de grau 2, tal que:  $p(1) = 3$ ,  $p(-2) = 9$  e  $p(x) = p(-x)$ :

Um polinômio de grau 2 é dado pela forma  $P(x) = ax^2 + bx + c$ , usando a condição  $P(x) = P(-x)$ :

$$P(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P(-x) = a(-x)^2 + b(-x) + c$$

$$P(x) = P(-x)$$

$$ax^2 + bx + c = a(-x)^2 + b(-x) + c$$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - bx + c$$

$$ax^2 + c = ax^2 + c$$

$$bx = -bx \Rightarrow b = -b \Rightarrow b = 0$$

Portanto a lei de formação do polinômio é  $P(x) = ax^2 + c$ , usando as condições  $p(1) = 3$ ,  $p(-2) = 9$ , logo:

$$P(x) = ax^2 + c \Rightarrow P(1) = a(1)^2 + c \Rightarrow 3 = a + c \Rightarrow a + c = 3$$

$$P(x) = ax^2 + c \Rightarrow P(-2) = a(-2)^2 + c \Rightarrow 9 = 4a + c \Rightarrow 4a + c = 9$$

Fazendo uma substituição:  $a + c = 3 \Rightarrow c = 3 - a$   $\therefore$   
 $4a + c = 9 \Rightarrow 4a + (3 - a) = 9 \Rightarrow 4a + 3 - a = 9 \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = \frac{6}{3} = 2$

E então temos  $a = 2$ , logo  $a + c = 3 \Rightarrow 2 + c = 3 \Rightarrow c = 3 - 2 = 1$  logo com as constantes  $a = 2$  e  $c = 1$ , e a lei de formação:  $P(x) = 2x^2 + 1$

## SOMA, SUBTRAÇÃO E MULTIPLICAÇÃO

1. Soma: sejam dois polinômios  $P(x) = x^2 + 3x - 4$  e  $Q(x) = x^2 + 2$ ,  
 $P(x) + Q(x) = (x^2 + 3x - 4) + (x^2 + 2) = x^2 + 3x - 4x^2 + 2 = 2x^2 + 3x - 2$

2. Subtração: sejam dois polinômios  $P(x) = x^2 + 3x - 4$  e  $Q(x) = x^2 + 2$ ,  
 $P(x) - Q(x) = (x^2 + 3x - 4) - (x^2 + 2) = x^2 + 3x - 4 - x^2 - 2 = 3x - 6$

3. Multiplicação: sejam dois polinômios  $P(x) = x^2 + 3x - 4$  e  $Q(x) = x^2 + 2$ ,  
 $P(x) \cdot Q(x) = (x^2 + 3x - 4) \cdot (x^2 + 2) = x^2(x^2 + 2) + 3x(x^2 + 2) - 4(x^2 + 2) = x^4 + 2x^2 + 3x^3 + 6x - 4x^2 - 8 = x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 6x - 8$

## DIVISÃO DE POLINÔMIOS

A divisão de polinômios segue o modelo de uma divisão normal, com dividendo  $D(x)$ , divisor  $Q(x)$ , solução  $S(x)$  e resto  $R(x)$ , no formato de funções como mostra a imagem

$D(x)$	$Q(x)$
	$S(x)$
$R(x)$	

Sejam os polinômios  $A(x) = 5x^4 - 4x^2 + 3x - 1$  e  $B(x) = x^2 - 3x + 4$ , logo a divisão  $\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{5x^4 - 4x^2 + 3x - 1}{x^2 - 3x + 4} = \frac{5x^4 + 0x^3 + 4x^2 + 3x - 1}{x^2 - 3x + 4}$

O método de divisão segue o que está a seguir:

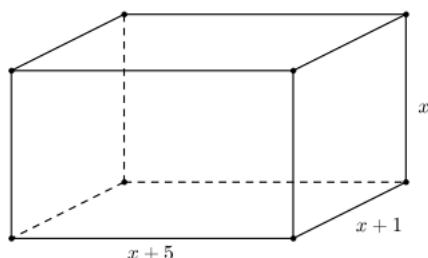
$5x^4 + 0x^3 - 4x^2 + 3x - 1$	$x^2 - 3x + 4$
$-5x^4 + 15x^3 - 20x^2$	$5x^2 + 15x + 21$
$15x^3 - 24x^2 + 3x - 1$	
$-15x^3 + 45x^2 - 60x$	
$21x^2 - 57x - 1$	
$-21x^2 + 63x + 84$	
$6x - 85$	

Sendo  $D(x) = 5x^4 - 4x^2 + 3x - 1$  e o divisor  $Q(x) = x^2 - 3x + 4$ , o quociente  $S(x) = 5x^2 + 15x + 21$  e resto  $R(x) = 6x - 85$ . O método consiste em equalizar o quociente com o monômio com presente no divisor, com um "chute" do valor para o quociente, e subtração com divisor, até que o resto seja zero ou que o polinômio de resto tenha um grau menor que polinômio do divisor:

$$\text{Sendo: } \frac{A(x)}{B(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{D(x)}$$

## EXEMPLOS

1. (OBMEP) A figura abaixo representa um paralelepípedo reto-retângulo



Determine:

(a) Expressão do volume:

O volume de um paralelepípedo é calculado  $v = a.b.c$ , onde  $a, b$  e  $c$  são as dimensões:

$$a = x + 5, b = x + 1 \text{ e } c = x$$

$$v = a.b.c \therefore v = (x + 5)(x + 1)(x)$$

$$v = (x^2 + x + 5x + 5)(x) \therefore v(x) = (x^2 + 6x + 5)(x)$$

$$v(x) = x^3 + 6x^2 + 5x$$

(b) o volume para  $x = 3$   $v(3) = 3^3 + 6.3^2 + 5.3$

$$v(3) = 27 + 54 + 15 = 96$$

2. (UFSCAR) Em relação a  $P(x)$  de terceiro grau, sabe-se que  $P(-1) = 2$ ,  $P(2) = 7$ ,  $P(1) = 2$  e  $P(0) = 1$ .

(a) Determine a equação reduzida da reta que passa pelo ponto que o gráfico da função  $P(x)$  cruza o eixo  $y$ , sabendo que essa reta tem coeficiente angular numericamente igual à soma dos coeficientes de  $P(x)$

Se  $P(x)$  é um polinômio de terceiro grau, logo a lei geral de formação genérica é  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  e a equação reduzida é  $y = ax + b$ , a soma dos coeficientes é basicamente substituição de  $x = 1$  na lei geral de formação, ainda que genérica:

$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ , com a avaliação em  $x = 1$

$$P(1) = a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d, \text{ como } P(1) = 2, \text{ logo}$$

$$P(1) = a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d = 2$$

$a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d = 2$ , sendo  $y = ax + b$  a equação reduzida da reta, e  $a$  o coeficiente angular, sendo  $a = 2$

Como o polinômio cruza o eixo  $y$  no mesmo ponto que a reta, então:

$$P(0) = 1, \text{ logo } y(0) = P(0)$$

$$y(0) = a.0 + b \rightarrow a.0 + b = 1$$

$$b = 1 \therefore y = 2x + 1$$

(b) Determine  $P(x)$ :

Com as seguintes condições (Prévia da próxima seção):  $P(-1) = 2$ ,  $P(0) = 1$ ,  $P(1) = 2$ ,  $P(2) = 7$ , temos

$$P(-1) = 2$$

$$a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) + d = 2$$

$$P(0) = 0$$

$$a.0^3 + b.0^2 + c.0 + d = 1 \therefore d = 1$$

$$P(1) = 2$$

$$a.1^3 + b.1^2 + c.1 + d = 2$$

$$P(2) = 7$$

$$a.2^3 + b.2^2 + c.2 + d = 7$$

Com o alinhamento das equações



$$(I) -a + b + c = 1$$

$$(II) a + b + c = 1$$

$$(III) 8a + 4b + 2c = 6$$

Somando as equações (I) e (II)

$$-a + b + c = 1 +$$

$$a + b + c = 1 \Leftrightarrow$$

$$2(b + c) = 2 \Rightarrow b + c = 1$$

Somando as equações (I) e (III)

$$(III) 8a + 4b + 2c = 6$$

$$(I) 8(-a + b + c = 1)$$

$$(III) 8a + 4b + 2c = 6 +$$

$$(I) - 8a + 8b + 8c = 8$$

$$12b + 10c = 14, \text{ tomando } b + c = 1 \text{ com } b = 1 - c$$

$$12b + 10(1 - b) = 14$$

$$12b + 10 - 10b = 14 \Leftrightarrow 2b = 4$$

$$b = \frac{4}{2} = 2$$

Sendo  $b = 2$  e  $c = 1 - b$  logo

$$c = 1 - 2 = -1$$

e  $-a + b + c = 1$ , então temos

$$-a + 2 - 1 = -1 \Leftrightarrow a = 2$$

Então os coeficientes do polinômio  $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$$P(x) = 2x^3 + 2x^2 - x + 1$$

## SISTEMAS DE EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

Um sistema de equações do primeiro grau, ou sistema linear, é um conjunto de expressões algébricas com diferentes variáveis do primeiro grau

## SISTEMA DE EQUAÇÕES COM DUAS EQUAÇÕES

$$ax + by = f$$

$cx + dy = e$  Um exemplo de como montar um sistema de equação linear

(OBMEP) Em um sítio há somente dois tipos de animais: porcos e perus, totalizando 26 cabeças e 72 patas. Qual a quantidade de animais de cada tipo?

Denotando o número de perus por  $x$  e porcos por  $y$ , temos a seguinte equação:  $x + y = 26$  para o número de cabeças, e para o número de patas temos  $2x$  e  $2y$ , porque cada animal tem duas patas, a equação fica:  $2x + 2y = 72$

$$x + y = 26$$

$$2x + 2y = 72$$

Um sistema de equações de forma generalizada, com  $m$  equações e  $n$  linhas:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n$$

As variáveis são indexadas por números pela quantidade finita de letras

## MÉTODO DE ADIÇÃO

Método consiste em adicionar e/ou subtrair variáveis membro a membro, de modo a manter apenas uma variável com solução explícita, o método permite a utilização de multiplicação de uma expressão algébrica por uma constante para resolução do sistema, o exemplo abaixo ajuda a compreender melhor

(IMPA) Um cientista M.A. Luco tem duas provetas (recipientes para líquidos) e cada uma delas está cheia e cada uma delas está cheia com a substância química (plutônio ou patetônio). Se a capacidade dos dois recipientes somadas é 375ml e sua diferença é 75ml, quanto ele possui de cada substância, sabendo que ele possui mais plutônio que patetônio?

Sendo  $x$  a quantidade de plutônio e  $y$  a quantidade de patetônio, pela sentença **Se a capacidade dos dois recipientes somadas é 375ml** então temos a seguinte equação:

$$x + y = 375$$

E da sentença **e sua diferença é 75ml** podemos extrair a seguinte equação:

$$x - y = 75$$

Logo temos o sistema com as seguintes equações:

$$x + y = 375$$

$$x - y = 75$$

A solução:

$$\begin{array}{r} x + y = 375 \\ + \\ x - y = 75 \\ \hline 2x + 0y = 450 \end{array}$$

Com o resultado  $2x = 450 \Rightarrow x = \frac{450}{2} = 225$ , substituindo em na equação:

$$x + y = 375 \Rightarrow x = 375 - y \Rightarrow x = 375 - 225 = 150$$

## MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO

Consiste basicamente em "resolver" uma equação e em seguida substituir a resolução em outra equação, como segue o exemplo a seguir:

(IMPA). L. Santana retirou de um caixa eletrônico 330, 00 reais entre cédulas de 50, 00 reais e 10, 00 reais num total de 17 cédulas. Qual a quantidade de cada um dos tipos de cédulas?

Sendo  $x$  a quantidade de notas de 50 reais e  $y$  as notas de 10 reais, temos a seguinte equação:  $50x + 10y = 330$

A quantidade de notas é 17, logo a equação temos :  $x + y = 17$ , então temos:

(I)  $50x + 10y = 330$

(II)  $x + y = 17$

A solução fica:

Tomando a segunda equação  
 $x + y = 17$  temos:

$$x + y = 17, \quad x = 17 - y$$

Substituindo na primeira equação:

$$50x + 10y = 330, \quad 50(17 - y) + 10y = 330, \quad 850 - 50y + 10y = 330, \quad -40y = 330 - 850, \quad y = \frac{520}{40} = 13$$

Utilizando a equação  $x + y = 17$ , sendo  $y = 13$ , então:

$$x + y = 17, \quad x + 13 = 17, \quad x = 17 - 13 = 4$$

Então são quatro notas de 50 reais e 13 notas de 10 reais

Outro exemplo para melhor contextualização:

(ENEM) Uma companhia de seguros levantou dados sobre os carros de determinada cidade e constatou que são roubados, em média, 150 carros por ano. O número de carros roubados da marca X é o dobro do número de carros roubados da marca Y, e as marcas X e Y juntas respondem por cerca de 60% dos carros roubados. O número esperado de carros roubados da marca Y é:

(a) 20

(b) 30

(c) 40

(d) 50

(e) 60

Como a quantidade de carros roubados X é o dobro de Y, logo temos a seguinte relação  $x = 2y$ ,  $x - 2y = 0$

Como a quantidade de carros roubados da soma das marcas é 60% do total roubado, então temos:  $60\% \times 150 = \frac{60}{100} \times 150 = \frac{6}{10} \times 150 = \frac{3}{5} \times 150 = \frac{3 \cdot 150}{5} = 90 \quad \therefore \quad x + y = 90$

A soma dos carros roubados das marcas x e y é 90:  $x + y = 90$

pelo método de substituição temos:  $x + y = 90$ , sendo  $x = 2y$  segue  $2y + y = 90$ ,  $3y = 90$ ,  $y = \frac{90}{3}$ ,  $y = 30$

Como o exercício pede a quantidade de carros da marca y roubados, então como  $y = 30$ , a resposta correta é a letra b

## FUNÇÕES EXPONENCIAIS

Uma função exponencial é uma função importante da matemática, visto que aborda os conceitos de crescimento populacional, e possui a seguinte estrutura geral de formação  $E(x + y) = E(x)E(y)$

Além da lei de definição  $E(x + y) = E(x)E(y)$ , uma função exponencial tem a variável no expoente e não na base, situação contrária do polinômio:

- $f(x) = a^x$  é uma função exponencial
- $f(x) = x^a$  é uma função polinomial

A função exponencial usa as regras de operações de potenciação, a operação de potenciação é o produto de um dado número pelo número de vezes do seu expoente, como os exemplos a seguir:

1.  $11^2 = 11 \times 11 = 121$
2.  $17^0 = 1$  Todo número elevado a zero é igual a 1
3.  $(-4)^4 = (-4).(-4).(-4).(-4) = 256$
4.  $5^2.5^3.5^4 = 5^{2+3+4} = 5^9 = 1953125$
5.  $\frac{3^2.3^0.3^7}{27}$ , como  $27 = 3^3$ ,  $\frac{3^2.3^0.3^7}{3^3} = 3^{2+0+7}.3^{-3} = 3^9.3^{-3} = 3^{9-3} = 3^6 = 729$

Em termos de funções exponenciais, vamos trabalhar apenas com funções com a seguinte estrutura:  $f(x) = a^x$ , onde  $x$  é uma variável do conjunto dos números reais, e a base é suas propriedades são:

Seja  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a$  é um número fixo que pertence ao conjunto dos números reais,

$$1. a^x.a^y = a^{x+y}$$

$$2. a^x.b^x = (a.b)^x$$

$$3. a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$4. \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$5. a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$$

$$6. a^0 = 1$$

Funções exponenciais são frequentemente utilizadas em modelos populacionais com a seguinte lei geral de formação:  $P(x) = P_0.e^{(bx)}$ , onde  $e$  é o número de Euler,  $e = 2,718281....$

## FUNÇÕES LOGARÍTMICAS

Uma função logarítmica segue as propriedades do logaritmo, e também é o operador inverso da potenciação, a definição de logaritmos é:

**Teorema 6** *Precisamente, se  $a > 0$  e  $a \neq 0$  e  $b > 0$ , o logaritmo de  $b$  na base  $a$  é o expoente que devemos colocar na potência da base  $a$  com um resultado de  $b$ , é a solução da seguinte equação:*

$$a^y = b$$

A solução dessa equação é:  $y = \log_a b$

Exemplo simples:

$\log_2 4$  para resolver essa simples expressão temos a seguinte situação:

Queremos determinar um número que quando elevado seja 4 tendo base 2:  $2^x = 4$

$$\log_2 x = 2$$

O logaritmo natural é o logaritmo na base do número de Euler = e denotado por  $\log_e x = \ln$

A notação  $\log$  é típica para logaritmo de base 10

As propriedades do logaritmo são:

1.  $\log_a 1 = 0$
2.  $\log_a a = 1$
3.  $a^{\log_a b} = b$
4.  $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$
5.  $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$
6.  $\log_a (b^k) = k \cdot \log_a b$
7.  $\ln(e) = 1$

## EXEMPLOS COM FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

1. (Escola Naval) O elemento químico Califórnio,  $Cf^{251}$ , emite partículas alfa, transformando-se em Cúrio,

$Cm^{247}$ . Essa desintegração obedece à função exponencial  $N(t) = N_0 e^{-\alpha t}$  onde  $N(t)$  é a quantidade de partículas de  $Cf^{251}$  no instante  $t$  em determinada amostra;  $N_0$  é quantidade de partículas no instante inicial; e  $\alpha$  é uma constante, chamada constante de desintegração. Sabendo que em 898 anos a concentração de  $Cf^{251}$  é reduzida à metade, pode-se afirmar que o tempo necessário para que a quantidade de  $Cf^{251}$  seja apenas 25% da quantidade inicial está entre:

- (a) 500 a 1000 anos
- (b) 1000 a 1500 anos
- (c) 1500 a 2000 anos
- (d) 2000 a 2500 anos
- (e) 2500 a 3000 anos

Resolução: primeiro precisamos determinar a constante *alpha*, em  $t = 898$  anos a quantidade inicial diminui pela metade, tempo de desintegração, então temos:

$$N(898) = \frac{N_0}{2}$$

$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-\alpha 898}$ , com temos o fator  $N_0$  em ambos os lados e a equação fica

$\frac{1}{2} = e^{-\alpha 898}$  aplicando o logaritmo natural em ambos os lados da equação temos

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(e^{-\alpha 898})$ , pela propriedade dos logaritmos temos:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\alpha 898 \therefore -\alpha 898 = \left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\alpha = \frac{-\ln(1/2)}{898} = 0,001$$

Logo a função fica  $N(t) = N_0 e^{-0,001t}$ , o tempo para 25% da quantidade inicial é metade do tempo em relação a primeira desintegração, então a quantidade é:

$$\frac{N_0}{4} = N_0 e^{-0,001t}, \quad \frac{1}{4} = e^{-0,001t}$$

$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln(e^{-0,001t}), -0,001t =$   
 $\ln(1/4), \quad t = \frac{-\ln(1/4)}{0,001}, t = 1386,294$  Como  
 $t = 1386,294$ , então temos a letra b,  
 como resultado correto

2. (OBMEP) O processo de resfriamento de um determinado corpo descrito por  $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$ , onde  $T(t)$  é a temperatura do corpo, em grau Celsius, no instante  $t$ , dado em minutos,  $T_A$  é a temperatura ambiente, supostamente constante, e  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de  $-18^\circ\text{C}$ . Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu  $0^\circ\text{C}$  após 90 minutos e chegou a  $-16^\circ\text{C}$  após 270 minutos.

(a) Encontre os valores numéricos das constantes  $\alpha$  e  $\beta$

Sendo a função  $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$ , tendo  $T_A = -18^\circ\text{C}$  logo temos  $T(t) = -18 + \alpha \cdot 3^{\beta t}$ , tendo os seguintes valores de contorno  $T(90) = 0$  e  $T(270) = -16$  então temos:

$$T(90) = -18 + \alpha 3^{\beta 90} \Leftrightarrow 0 = -18 + \alpha 3^{\beta 90}$$

$$-18 + \alpha \cdot 3^{\beta 90} = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 3^{\beta 90} = 18$$

$$\alpha = \frac{18}{3^{\beta 90}} \Rightarrow \alpha = 18 \cdot 3^{-\beta 90}$$

Tomando  $T(270) = -16$  então temos:

$$T(270) = -18 + 18 \cdot 3^{-\beta 90} \cdot 3^{-\beta 270}$$

$$-16 = -18 + 18 \cdot 3^{\beta 180} \Rightarrow -18 + 18 \cdot 3^{\beta 180} = -16$$

$$-18 + 18 \cdot 3^{\beta 180} = -16$$

$$18 \cdot 3^{\beta 180} = -16 + 18$$

$$18 \cdot 3^{\beta 180} = 2 \Rightarrow 3^{\beta 180} = \frac{2}{18}$$

$$3^{\beta 180} = \frac{1}{9} \Rightarrow \log_3 3^{\beta 180} = \log_3 \left(\frac{1}{9}\right)$$

$$180\beta \log_3(3) = \log_3(9^{-1}) \Rightarrow 180\beta = -1 \log_3(9)$$

$$180\beta = -2 \Rightarrow \beta = \frac{-2}{180} = \frac{-1}{90}$$

Tomando  $T(90) = 0$  logo:

$$T(t) = -18 + \alpha \cdot 3^{\frac{-1}{90}t}$$

$$T(90) = -18 + \alpha \cdot 3^{\frac{-90}{90}}$$

$$0 = -18 + \alpha \cdot 3^{-1}$$

$$-18 + \alpha \cdot 3^{-1} = 0$$

$$\frac{\alpha}{3} = 18 \Rightarrow \alpha = 3 \cdot 18 = 54$$

Então temos  $\alpha = 54$  e  $\beta = \frac{-1}{90}$

E a função fica:  $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$

$$T(t) = -18 + 54 \cdot 3^{\frac{-t}{90}}$$

(b) Determine o valor de  $t$  para qual a temperatura do corpo no congelador é apenas  $\left(\frac{2}{3}\right)^\circ\text{C}$  superior à temperatura no ambiente

Logo esta temperatura:  $T = \frac{2}{3} - 18$

$$T(t) = -18 + 54 \cdot 3^{\frac{-t}{90}}$$

$$-18 + 54 \cdot 3^{\frac{-t}{90}} = -18 + \frac{2}{3}$$

$$54 \cdot 3^{\frac{-t}{90}} = \frac{2}{3}$$

$$3^{\frac{-t}{90}} = \frac{2}{3 \cdot 54}$$

$$3^{\frac{-t}{90}} = \frac{2}{162}$$

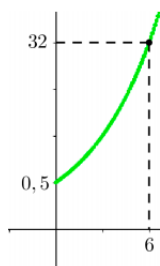
$$3^{\frac{-t}{90}} = \frac{1}{81}$$

$$\log_3 \left( 3^{\frac{-t}{90}} \right) = \log_3 (81^{-1})$$

$$\frac{-t}{90} \log_3 3 = -1 \log_3 (81)$$

$$\frac{-t}{90} = -4 \Rightarrow t = 360, \text{ tempo de 360 minutos}$$

3. (OBMEP) Admita que um tipo de eucalipto tenha expectativa de crescimento exponencial, nos primeiros anos após seu plantio, modelado pela função  $y(t) = a^{t-1}$ , na qual  $y$  representa altura da planta em metro,  $t$  é considerado em ano, e  $a$  é uma constante maior que 1. O gráfico representa a função  $y$



Admita ainda que  $y(0)$  fornece a altura da muda quando plantadas, e deseja-se cortar os eucaliptos quando as mudas crescerem  $7,5m$  após o plantio. O tempo entre a plantação e corte, em ano, é igual a:

- (a) 3
- (b) 4
- (c) 6
- (d)  $\log_2 7$
- (e)  $\log_2 15$

Resolução:

Tomando a equação  $y(t) = a^{t-1}$  e a condição de  $y(0) = 0,5$ , logo:  $y(0) = 0,5 \Rightarrow a^{0-1} = 0,5 \Rightarrow a^{-1} = \frac{1}{2}$

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2$$

Logo temos a seguinte expressão:  $y = 2^{t-1}$ , tendo a  $y = 7,5m$ , logo o tempo é:

$$y(t) = 2^{t-1} \Rightarrow 2^{t-1} = 7,5$$

$$2^t \cdot 2^{-1} = 7,5 \Rightarrow \frac{2^t}{2} = 7,5$$

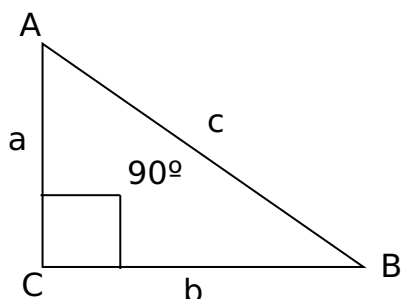
$2^t = 15 \Rightarrow t = \log_2 15$ , sendo a alternativa e

## TRIGONOMETRIA

Trigonometria é campo da matemática que estuda as relações entre comprimentos de dois lados de um triângulo retângulo para diferentes valores de seus ângulos, usados no estudo de circunferências, esferas e também no estudo de funções

### RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS NO TRIÂNGULO RETÂNGULO

Um triângulo retângulo é uma figura plana com três lados, constituídos por segmentos de reta, com um ângulo de  $90^\circ$



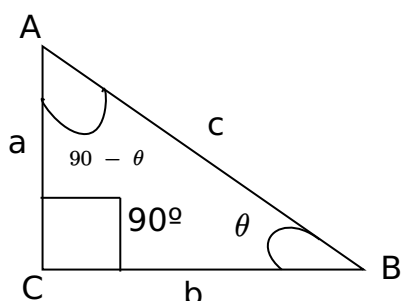
Na figura temos a representação de um triângulo retângulo, onde A, B e C são os vértices, ponto de encontro entre duas arestas, e as arestas que ligam dois vértices

Todos os ângulos diferentes do ângulo reto são menores que  $90^\circ$  ou  $\frac{\pi}{2}$  radianos, e a soma dos ângulos de um triângulo é igual a  $180^\circ$  ou a  $\pi$  radianos.

A relação fundamental para conversão de ângulos em graus para radiano é:

$180 = \pi$ ,  $180^\circ$  é igual a  $\pi$  radianos

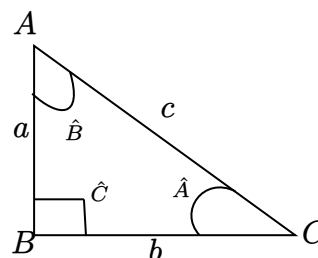
A figura abaixo mostra um triângulo retângulo com um ângulo de  $90^\circ$  e um ângulo  $\theta$



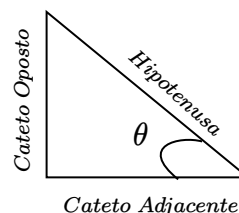
Somando os ângulos  $\hat{A} = 90$ ,  $\hat{B} = \theta$  e  $\hat{C} = 90 - \theta$ , somando os ângulos

temos:  $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 90 + \theta + (90 - \theta) = 90 + \theta + 90 - \theta = 180$

A figura com a generalização:

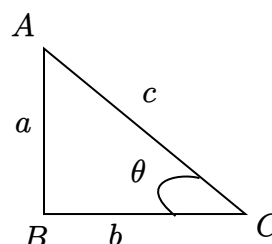


Um triângulo retângulo possui dois catetos e hipotenusa, maior lado do triângulo, e com isso podemos definir as relações trigonométricas: seno, cosseno e tangente, para determinar essas relações é necessário ter um ângulo de referência para a definição destas relações:



## DEFINIÇÃO DAS RELAÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Tomando como a figura abaixo, sendo A, B e C vértice e a, b e c arestas do triângulo de ângulo  $\theta$ :





1. Seno:  $\sin(\theta) = \frac{\text{Cateto Oposto}}{\text{Hipotenusa}}$

2. Cosseno:  $\cos(\theta) = \frac{\text{Cateto Adjacente}}{\text{Hipotenusa}}$

3. Usando o teorema de pitágoras, com a toda dos valores de seno e cosseno do ângulo  $\theta$  temos:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

Para qualquer valor de  $\theta$  temos a seguinte relação fundamental

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

4.  $\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

5.  $\cos(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$

6. seno da soma de dois ângulos:

$$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\cos(\theta_1)$$

7. cosseno da soma de dois ângulos:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)$$

8. Tangente de um ângulo  $\theta$ :

$$\tan(\theta) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

$$\tan(\theta) = \frac{a}{b}$$

9. Cotangente de um ângulo  $\theta$ :

$$\cot(\theta) = \frac{b}{a}$$

$$\cot(\theta) = \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}}$$

10. Secante de um ângulo  $\theta$ :

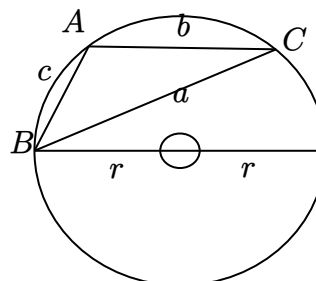
$$\sec(\theta) = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

11. Cossecante de um ângulo  $\theta$

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

## LEI DOS SENOS E COSSENOS

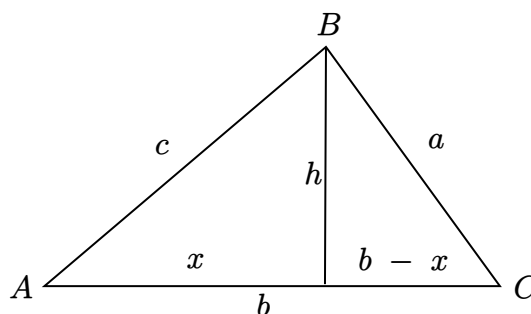
A seguinte relação:



Podemos então inferir a lei dos senos, sendo a, b e c arestas e A, B e C vértices do triângulo inscrito na circunferência:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2r$$

A lei dos cossenos segue a relação do triângulo:



As relações inferidas são:

1.  $x = \cos(\hat{A}) \rightarrow$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\hat{A})$$

2.  $x^2 + h^2 = c^2 \rightarrow$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\hat{B})$$

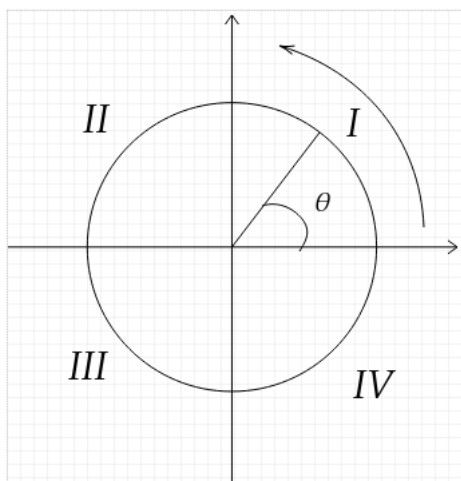
$$3. (b-x)^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$b^2 - 2bx + x^2 + h^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\hat{C})$$

## FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Uma função trigonométrica é definida com a análise dos pontos localizados sobre uma circunferência, nesse contexto o sistema de coordenadas é uma circunferência de raio unitário, seguindo a linha da figura:



Um ponto P presente na circunferência pode ser associado a coordenadas dos eixos coordenados, por associação temos:  $\{P \in C\} \rightarrow \{x \in R\}$

$$\{P \in C\} \rightarrow \{y \in R\}$$

Sendo C a circunferência de raio unitário, e também podemos fazer a associação de um ângulo com valores presentes nos eixos coordenados

$$\{\theta \in R\} \rightarrow \{x \in R\}$$

$$\{\theta \in R\} \rightarrow \{y \in R\}$$

Assim podemos definir as funções  $f(\theta) = \sin(\theta)$  e  $g(\theta) = \cos(\theta)$ , são funções periódicas, onde num dado espaço a função assume mesmo valor:

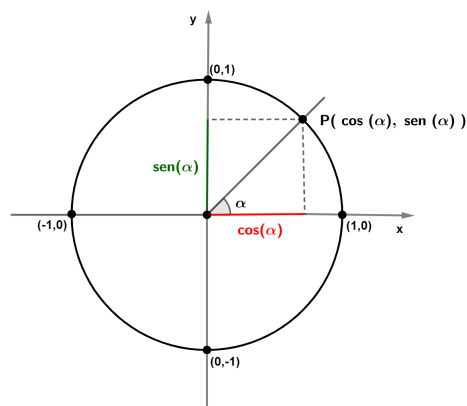
- $\sin(\theta) = \sin(\theta + 2\pi)$
- $\cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi)$

A imagem das funções seno e cosseno são:

- $-1 \leq \sin(\theta) \leq 1 = |\sin(\theta)| = 1$
- $-1 \leq \cos(\theta) \leq 1 = |\cos(\theta)| = 1$

A função tangente  $f(x) = \tan(x)$ , na variável x, é definida como  $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ , com domínio,  $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\}$

A relação fundamental trigonométrica, observada pela figura:

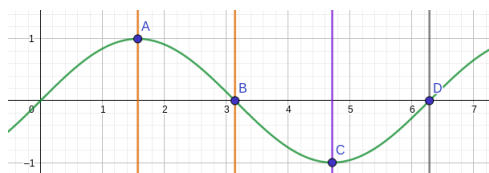


Os catetos do triângulo inscrito no triângulo são de medidas  $\sin(\alpha)$  e  $\cos(\alpha)$ , por teorema de Pitágoras temos a seguinte relação fundamental:

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  (a variável alfa foi substituída por x)

O gráfico das funções trigonométricas, com avaliação nos pontos  $\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$

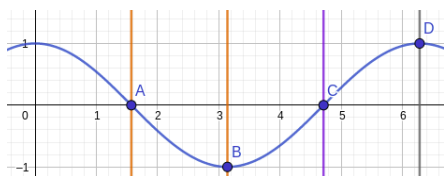
### 1. Função seno $f(x) = \sin(x)$



Sendo

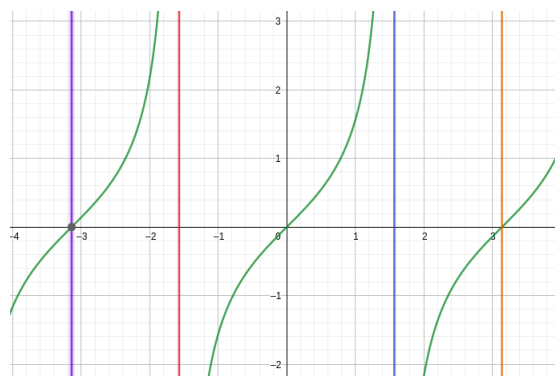
- $f(0) = 0 \rightarrow \sin(0) = 0$
- $f(\frac{\pi}{2}) = 1 \rightarrow \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
- $f(\pi) = 0 \rightarrow \sin(\pi) = 0$
- $f(\frac{3\pi}{2}) = -1 \rightarrow \sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$
- $f(2\pi) = 0 \rightarrow \sin(2\pi) = 0$

### 2. Função cosseno $f(x) = \cos(x)$



- $f(0) = 1 \rightarrow \cos(0) = 1$
- $f(\frac{\pi}{2}) = 0 \rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$
- $f(\pi) = -1 \rightarrow \cos(\pi) = -1$
- $f(\frac{3\pi}{2}) = 0 \rightarrow \cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$
- $f(2\pi) = 1 \rightarrow \cos(2\pi) = 1$

3. Função tangente  $f(x) = \tan(x)$  cujo o domínio é  $D_f = \{(x \in \mathbb{R}) | x \neq \pi/2 + k\pi\}$ , nos pontos  $x \neq \pi/2 + k\pi$  a função é descontínua, pela divisão por zero, uma vez que  $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$



4. Função Cotangente  $f(x) = \cot(x)$ , sendo definida como  $f(x) = \cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

5. Função Secante  $f(x) = \sec(x)$ , sendo definida como  $f(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \sec(x)$

## TABELA DE ÂNGULOS NOTÁVEIS

Os ângulos notáveis com valores conhecidos das relações trigonométricas seno, cosseno e tangente, para os ângulos de  $30^\circ$  ou  $\frac{\pi}{6}$ ,  $45^\circ$  ou  $\frac{\pi}{4}$  e  $60^\circ$  ou  $\frac{\pi}{3}$

	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
Senô	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

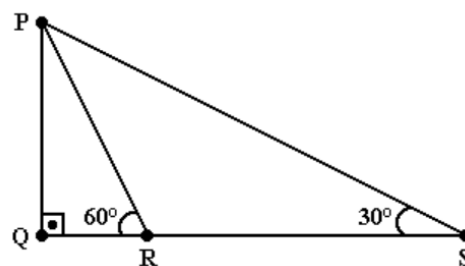
## FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

São funções que quando compostas com sua função trigonométrica correspondente tem como "saída" o ângulo correspondente:

1. Função inversa da função seno  $f(x) = \sin(x)$  é a função arcosseno  $f^{-1}(x) = \arcsin(x)$
2. Função inversa da função cosseno  $f(x) = \cos(x)$  é a função arcocosseno  $f^{-1}(x) = \arccos(x)$
3. Função inversa da função tangente  $f(x) = \tan(x)$  é a função arcotangente  $f^{-1}(x) = \arctan(x)$
4. Função inversa da função

## EXEMPLOS:

1. (UFPE) Considere os triângulos PQR e PQS da figura. Se  $RS = 100$ , quanto vale PQ?



- (a)  $100\sqrt{3}$
- (b)  $50\sqrt{3}$
- (c) 50
- (d)  $\frac{50\sqrt{3}}{3}$
- (e)  $25\sqrt{3}$

Sendo  $RS = 100$ , e medida QR desconhecida, podemos atribuir a variável  $x$ , logo  $QS = 100 + x$ , logo temos as seguintes relações  $\tan(30^\circ) = \frac{PQ}{QS}$  e  $\tan(60^\circ) = \frac{PQ}{QR}$ , sendo  $30^\circ = \frac{\pi}{6}$  e  $60^\circ = \frac{\pi}{3}$

Logo temos  $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{y}{x}$  e também temos:

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{y}{100+x}$$

$$\text{Logo } \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{y}{x} \quad \therefore \quad \sqrt{3} = \frac{y}{x} \Rightarrow y = \sqrt{3}x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}x}{100+x} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}x}{100+x}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{x}{100+x} \Rightarrow 3x = 100 + x \Rightarrow 3x - x = 100 \Rightarrow 2x = 100 \Rightarrow x = \frac{100}{2} = 50$$

Como  $y = \sqrt{3}x$  então  $y = 50\sqrt{3}$ , letra b resposta correta

2. (OBMEP) Se  $\sin(x) + \cos(x) = \frac{5}{6}$ , então  $\sin(2x)$  é igual a:

- (a)  $-\frac{7}{36}$
- (b)  $-\frac{11}{36}$
- (c)  $-\frac{13}{36}$
- (d)  $-\frac{17}{36}$
- (e)  $-\frac{19}{36}$

Tomando a expressão  $\sin(x) + \cos(x) = \frac{5}{6}$  temos a seguinte situação:

$$(\sin(x) + \cos(x))^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\frac{25}{36}$$

$$\sin^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) + \cos^2(x) = \frac{25}{36}$$

Sendo  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  e  $\sin(2x) = \sin(x + x) = \sin(x)\cos(x) + \cos(x)\sin(x)$

$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ , então a expressão fica:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) + 2\sin(x)\cos(x) = \frac{25}{36}$$

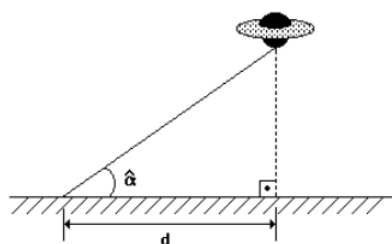
$$1 + \sin(2x) = \frac{25}{36}$$

$$\sin(2x) = \frac{25}{36} - 1$$

$$\sin(2x) = \frac{25-36}{36}$$

$\sin(2x) = \frac{-11}{36}$ , letra b a resposta correta

3. (UNIRIO) Um disco voador é avistado, numa região plana, a uma certa altitude, parado no ar. Em certo instante, algo se desprende da nave e cai em queda livre, conforme mostra a figura. A que altitude se encontra esse disco voador?



(I) - A distância  $d$  é conhecida;

(II) - A medida do ângulo  $\alpha$  e a  $\tan(\alpha)$  do mesmo ângulo são conhecidas.

Então, tem-se que:

- (a) a I sozinha é suficiente para responder à pergunta, mas a II, sozinha, não
- (b) a II sozinha é suficiente para responder à pergunta, mas a I, sozinha não
- (c) I e II, juntas, são suficientes para responder à pergunta, mas nenhuma delas, sozinha, não é
- (d) ambas são, sozinhas, suficientes para responder à pergunta
- (e) a pergunta não pode ser respondida por falta de dados

Resposta correta é a letra C, uma vez que a distância, seja a distância de interesse da nave, seja a distância vertical projetada, podem ser inferidas com os valores em questão, uma vez que podemos usar as relações trigonométricas para deduzir o valor da distância projetada e também o teorema de Pitágoras para a distância do círculo até este ponto

# MATEMÁTICA

## Geometria



## GEOMETRIA

A geometria é provavelmente a área mais antiga da matemática, precursora da própria álgebra e sendo um dos pilares da matemática. A palavra geometria é resultado da combinação das palavras gregas *geo* e *metron/metri*, significando respectivamente Terra e medição, pois a área da geometria consiste da medição e entendimento das relações e propriedades contidas nas figuras geométricas: comprimento, distância, ângulo, área, volume e perímetro, as figuras geométricas por sua vez são parte integrante da natureza e da Terra (*geo*).

### DEFINIÇÕES GERAIS

Antes do estudo da geometria devemos ter ciência das definições de conceitos presentes nesse ramo da matemática, dentro destes conceitos se enquadram as medidas, os ângulos, as figuras geométricas e suas componentes.

## GRANDEZAS E UNIDADES DE MEDIDA

### DISTÂNCIA E COMPRIMENTO

Distância e comprimento medem o quão longe dois pontos estão entre si, e no caso de arestas essa medida é denotada como comprimento. A unidade de medida base utilizada para comprimento é o metro (símbolo  $m$ ), além do metro existem seus múltiplos que são igualmente utilizados dependendo da distância/comprimento aferido.

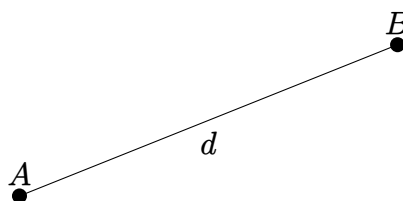


Figura 9:  $d$  representa a distância entre os pontos que formam a reta  $\overline{AB}$

Nome	Sigla	Equivalência
picômetro	$pm$	$10^{-12}m$
nanometro	$nm$	$10^{-9}m$
micrometro	$\mu m$	$10^{-6}m$
milimetro	$mm$	$10^{-3}m$
centímetro	$cm$	$10^{-2}m$
decímetro	$dm$	$10^{-1}m$
metro	$m$	$1m$
decâmetro	$dam$	$10m$
hêctometro	$hm$	$100m$
quilometro	$km$	$1000m$

Outras medidas de compri-

mento são:

**Perímetro:** comprimento do contorno de uma figura geométrica.

**Raio:** distância entre o centro de uma circunferência até seu contorno ou superfície.

**Diâmetro:** comprimento de reta que passe pelo centro da circunferência e cujo seus pontos de início e fim estejam sobre a circunferência

**Circunferência:** perímetro de uma circunferência.

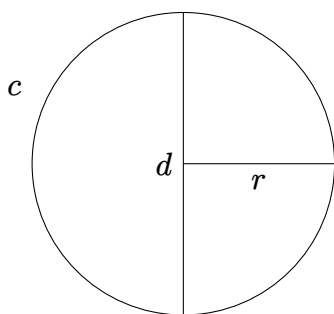


Figura 10: Raio  $r$ , diâmetro  $d$  e circunferência  $c$  de um círculo

o diâmetro de um círculo é  $d = 2r$ , logo o raio é  $r = \frac{d}{2}$  e a circunferência/perímetro do círculo é  $2\pi r$ . Onde  $\pi$  é a constante matemática *pi*, cujo valor é aproximadamente 3.14159265...

## ÁREA

Área é a medida que expressa a quantidade de espaço bidimensional ocupado por uma figura geométrica, área de superfície é o equivalente da área para uma superfície ou face de um objeto tridimensional. A unidade

base para área é o metro quadrado (símbolo  $m^2$ ). Seus múltiplos também acompanham o termo 'quadrado', e a equivalência é a mesma do metro, porém elevada ao quadrado. Ex.:  $1m = 10^2cm$  e  $1m^2 = (10^2cm)^2 = 10^4cm^2$ , lembrar essa regra pode facilitar na hora da conversão de área.

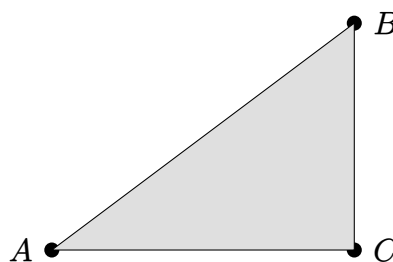


Figura 11: Área é o espaço bidimensional ocupado pela região cinza.

Nome	Sigla	Equivalência
picômetro quadrado	$pm^2$	$10^{-24}m^2$
nanometro quadrado	$nm^2$	$10^{-18}m^2$
micrometro quadrado	$\mu m^2$	$10^{-12}m^2$
milimetro quadrado	$mm^2$	$10^{-6}m^2$
centímetro quadrado	$cm^2$	$10^{-4}m^2$
decímetro quadrado	$dm^2$	$10^{-2}m^2$
metro quadrado	$m^2$	$1m^2$
decâmetro quadrado	$dam^2$	$100m^2$
are	$are$	
hêctometro quadrado	$hm^2$	$10^4m^2$
hectare	$ha$	
quilometro quadrado	$km^2$	$10^6m^2$

## VOLUME

Assim como a área expressa a quantidade de espaço bidimensional ocupado por uma figura geométrica, o volume expressa a quantidade de espaço tridimensional ocupado por um objeto. No caso do volume existe



duas unidades de medida base, o metro cúbico e o litro, ambos são usados regularmente, na qual o litro é a unidade mais usada para volumes pequenos, enquanto o metro cúbico é usado para expressar volumes maiores.

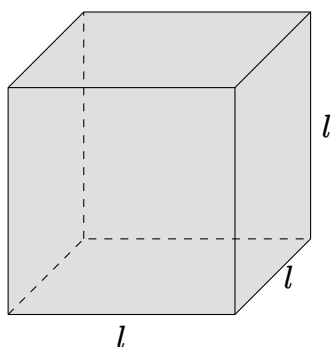


Figura 12: Cubo, cujo volume se dá por  $l^3$ , onde  $l$  é o comprimento das arestas

Nome	Sigla	Equivalência
milímetro cúbico	$mm^3$	$10^{-9}m^3$
centímetro cúbico	$cm^3$	$10^{-6}m^3$
mililitro	$ml$	
decímetro cúbico	$dm^3$	$10^{-3}m^3$
litro	$l$	
metro cúbico	$m^3$	$1m^3$

## ÂNGULO

Ângulo é uma medida de inclinação entre duas retas ou dois planos, desde que eles não sejam paralelos entre si, no contexto da geometria os ângulos estão presentes em todos os vértices das figuras geométricas. As unidades de medida mais comuns para ângulo são graus (símbolo  $^\circ$ ), radianos (símbolo  $rad$ ) e gradianos (símbolo  $gon$ ).

Quanto no escopo das funções trigonométricas a unidade de medida mais utilizada é o radiano, por outro lado, em aplicações de engenharia e na geometria a unidade mais usada é o grau. Considerando um grau  $\alpha$  em graus, sua conversão para radianos se dá por  $rad(\alpha) = \alpha \cdot \pi/180$

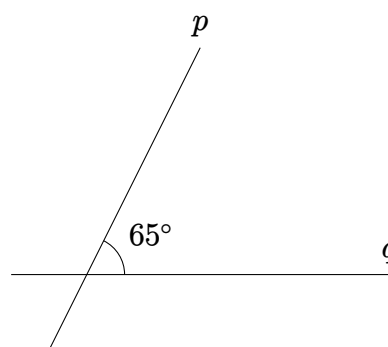


Figura 13: Ângulo entre as retas  $p$  e  $q$

O ângulo apresenta uma importância muito grande no desenvolvimento da geometria e dos problemas geométricos, sendo o ângulo uma grandeza imprescindível no desenrolar da matemática entorno das figuras geométricas, principalmente os triângulos.

## FÍGURAS GEOMÉTRICAS E SUAS COMPONENTES

### PONTO

A primeira componente das figuras geométricas e a mais simples delas é o ponto, o mesmo deve ser imaginado como um ponto infinitesimal, não possuindo comprimento, área ou perímetro. Quando um ponto

é integrante de uma figura geométrica o mais comum é chamarmos ele de *vértice*

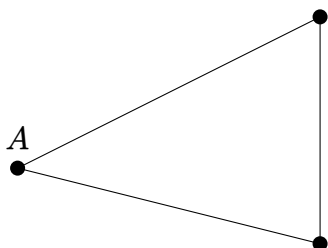


Figura 14: Triângulo com o vértice  $A$  em realce

A partir de dois pontos  $A$  e  $B$  podemos traçar uma reta  $\overline{AB}$  entre eles e caso exista um terceiro ponto  $C$  sob a mesma reta, então esses três pontos são **colineares**.

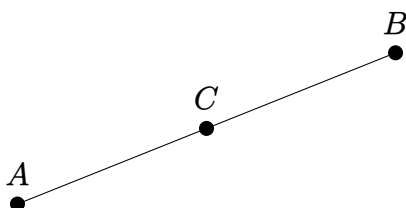


Figura 15: Pontos colineares  $A, B$  e  $C$

## RETA

A reta é um conjunto de pelo menos dois pontos, no caso dois pontos quaisquer  $A$  e  $B$  podem gerar a reta  $\overline{AB}$ , como na figura 15. Assim como o ponto é idealmente infinitesimal a reta idealmente não possui espessura. Quando uma reta é parte integrante de uma figura geométrica sua denominação é *aresta*.

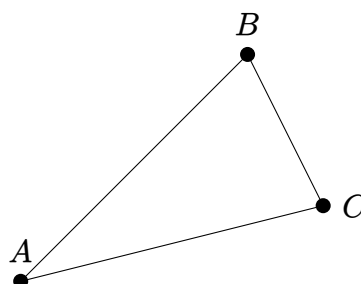


Figura 16: Retas  $\overline{AB}, \overline{BC}$  e  $\overline{AC}$  do triângulo  $ABC$

Uma reta  $p$  é **perpendicular** a reta  $q$  se o ângulo formado entre elas for de 90 graus.

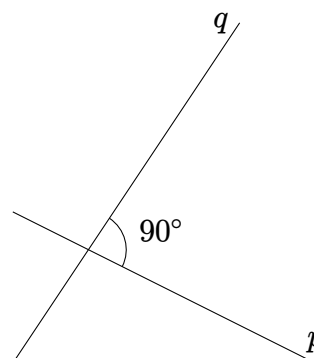


Figura 17: Retas perpendiculares  $p$  e  $q$

Duas retas  $p$  e  $q$  são consideradas **paralelas entre si**, se qualquer reta  $r$  perpendicular a reta  $p$  também for perpendicular a reta  $q$ . Outra forma de descrever retas paralelas é através do **Quinto Postulado de Euclides** que diz: Supondo que duas retas  $p$  e  $q$  são cortadas por uma terceira reta  $r$ . Se a soma dos ângulos formados um mesmo lado da reta  $r$  resultar em 180 graus, então  $m$  e  $n$  são retas paralelas entre si.

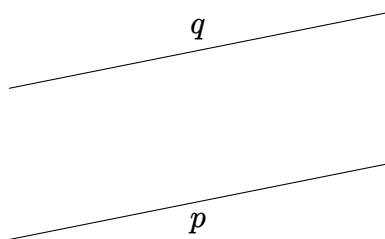


Figura 18: Retas paralelas  $p$  e  $q$

## PLANO E SUPERFÍCIE

Quando se tem 3 ou mais pontos o resultado da conexão deles é tido como superfície, plano ou figura geométrica dependendo da área da matemática e do contexto de estudo, porém vale ter em mente que também existem superfícies não bidimensionais. Uma exceção a isso são os círculos e as elipses que não possuem vértices. No contexto da geometria a ser estudado nesse capítulo a conexão de 3 ou mais vértices geram exclusivamente figuras geométricas.

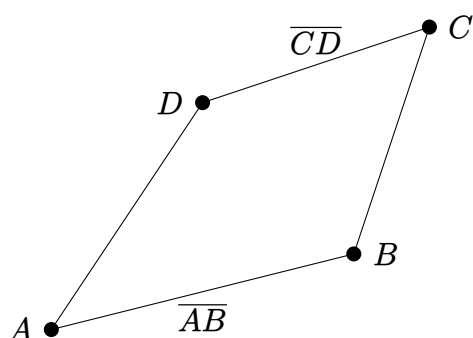


Figura 19: Um quadrilátero  $ABCD$  com as arestas  $\overline{AB}$  e  $\overline{CD}$  realçadas

## SÓLIDOS

No contexto de figuras geométricas tridimensionais, ou chamados sólidos, os sólidos podem ser formados por 4 ou mais pontos ou através manipulação de figuras geométricas bidimensionais num espaço tridimensional. Todos objetos físicos que conhecemos podem ser abstraídos como formas geométricas, independente da complexidade.

Grandezas notórias das componentes citadas:

- Ponto, vértice: distância relativo a outro objeto.
- Reta: comprimento, distância e ângulo relativos a outro objeto.
- Superfície: área, perímetro.
- Sólido: volume.

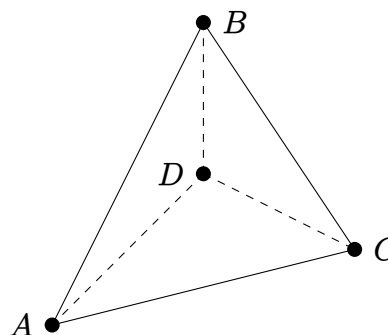
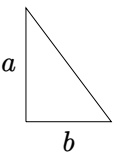
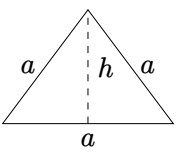
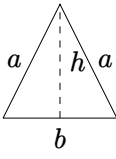
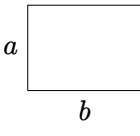
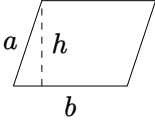
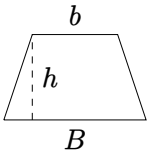
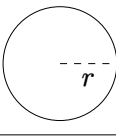
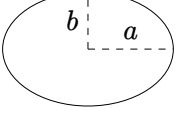


Figura 20: Tetraedro, o objeto tridimensional com menos faces

## ÁREA E VOLUME

Tabela 1: Área de figuras planas comuns

Figura		Área	Perímetro
Triângulo retângulo		$\frac{a \cdot b}{2}$	$a + b + \sqrt{a^2 + b^2}$
Triângulo equilátero		$\frac{a \cdot h}{2}$ ou $\frac{h^2}{\sqrt{3}}$ ou $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$	$3a$
Triângulo isósceles		$\frac{b \cdot h}{2}$	$2a + b$
Retângulo		$a \cdot b$	$2(a + b)$
Paralelogramo		$b \cdot h$	$2(a + b)$
Trapézio		$\frac{(b + B) \cdot h}{2}$	$b + B + 2\sqrt{h^2 + \left(\frac{B-b}{2}\right)^2}$
Círculo		$\pi \cdot r^2$	$2\pi \cdot r$
Elipse		$a \cdot b \cdot \pi$	<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Não existe fórmula para descrever o perímetro de uma elipse.

## FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

As funções trigonométricas são funções que relacionam diversas propriedades da geometria, notoriamente as propriedades dos triângulos. Partindo do princípio que polígonos de mais arestas podem ser decompostos em triângulos, então as funções trigonométricas podem facilmente serem correlacionadas com demais formas geométricas não curvilíneas.

### O CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO

O círculo trigonométrico é um conceito que apresenta visualmente a relação entre as funções trigonométricas *seno* e *coseno* e o triângulo retângulo. Mas antes vamos relembrar algumas denominações relacionadas aos triângulos.

Dado o triângulo retângulo  $ABC$  abaixo:

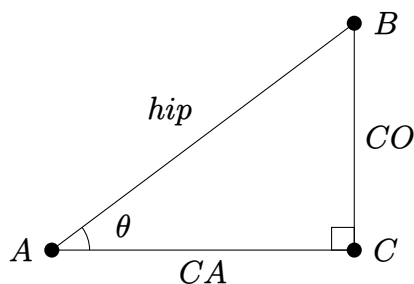


Figura 21: Triângulo retângulo  $ABC$

a aresta  $\overline{AB}$  é denominada hipote-

nusa ou abreviadamente *hip*, a aresta  $\overline{BC}$  é denominada cateto oposto ou  $CO$  e a aresta  $\overline{AC}$  é denominada cateto adjacente ou  $CA$  pois o mesmo é adjacente ao ângulo  $\theta$ . Voltando ao círculo trigonométrico, imagine um círculo de raio unitário  $r = 1$  com origem em  $(0,0)$  cuja sombra da semirreta do raio sobre o eixo  $x$  forme o triângulo  $ABC$  conforme a figura 22.

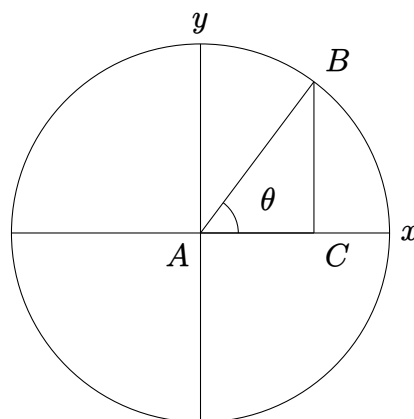
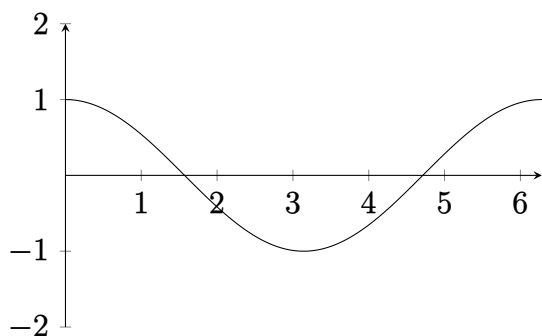


Figura 22: Círculo trigonométrico

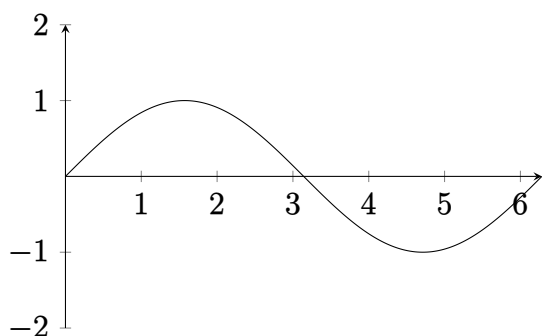
Agora, imagine que o vértice  $B$  rotaciona sobre a circunferência, portanto a reta  $\overline{AB}$  acompanha o vértice  $B$  formando um movimento que se assemelha ao ponteiro de um relógio. Com esse exercício de imaginação é possível notar que o ângulo  $\theta$  muda conforme a reta  $AB$  rotaciona, bem como o comprimento de  $\overline{AC}$  e  $\overline{BC}$

Começando com o ângulo  $\theta = 0$  e traçando o comprimento da aresta  $\overline{AC}$  ao longo do eixo  $x$  até  $\theta = 2\pi$  obtemos o seguinte gráfico:



Por coincidência esse gráfico é a representação da função cosseno, e nesse caso podemos observar que a função cosseno também representa o comprimento do cateto adjacente em função do ângulo  $\theta$ , é possível então deduzir que  $CA = \cos(\theta)$ , porém essa dedução está incompleta, pois só abrange o caso onde  $hip = 1$ .

Podemos também traçar o comprimento da aresta  $\overline{BC}$  (cateto oposto) ao longo do eixo  $x$  e obtaremos um gráfico similar:



No caso esse gráfico é a representação da função seno, e novamente poderíamos deduzir que  $CO = \sin(\theta)$ , porém novamente essa dedução estaria correta apenas para  $hip = 1$ . Para obter uma equivalência geral que descreva o as dimensões do

triângulo retângulo utilizando as funções trigonométricas podemos mudar o raio do círculo trigonométrico para um  $r$  qualquer, e nesse caso obtemos os seguintes gráficos:

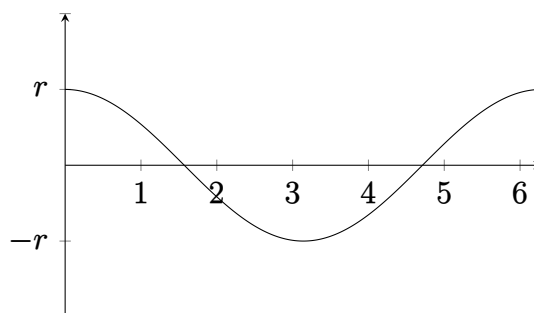


Figura 23: Função cosseno com amplitude  $r$

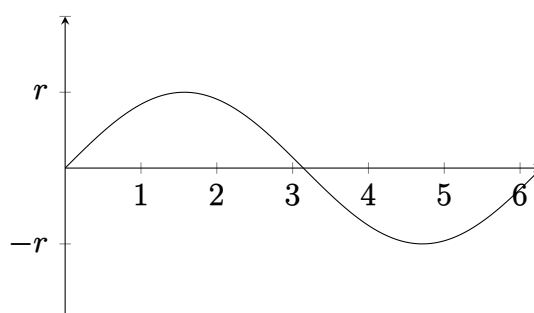


Figura 24: Função seno com amplitude  $r$

A forma da onda é a mesma do cosseno e seno, respectivamente, porém a amplitude agora passou a ser  $r$ . Voltando a tentar deduzir uma fórmula para o comprimento do cateto oposto e o cateto adjacente temos que:

$$CO = r \cdot \sin(\theta) \quad (1)$$

$$CA = r \cdot \cos(\theta) \quad (2)$$

sabendo que  $r = \text{hip}$  temos então:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{CO}{\text{hip}} \quad (3)$$

$$\text{e } \cos(\theta) = \frac{CA}{\text{hip}} \quad (4)$$

A relação da função tangente e o triângulo retângulo é difícil de ser explicada através do círculo trigonométrico sem o auxílio de animações visuais, porém podemos chegar numa relação através da igualdade conhecida onde:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\text{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}$$

substituindo  $\text{sen}(\theta)$  e  $\cos(\theta)$  pelas equações (3) e (4) respectivamente, temos:

$$\text{tg}(\theta) = \frac{CO}{\text{hip}} \cdot \frac{\text{hip}}{CA} \quad (5)$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{CO}{\cancel{\text{hip}}} \cdot \frac{\cancel{\text{hip}}}{CA} \quad (6)$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{CO}{CA} \quad (7)$$

Por fim temos as três equações que descrevem as razões trigonométricas de um triângulo retângulo:

$$\text{sen}(\theta) = \frac{CO}{\text{hip}} \quad (8)$$

$$\cos(\theta) = \frac{CA}{\text{hip}} \quad (9)$$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{CO}{CA} \quad (10)$$

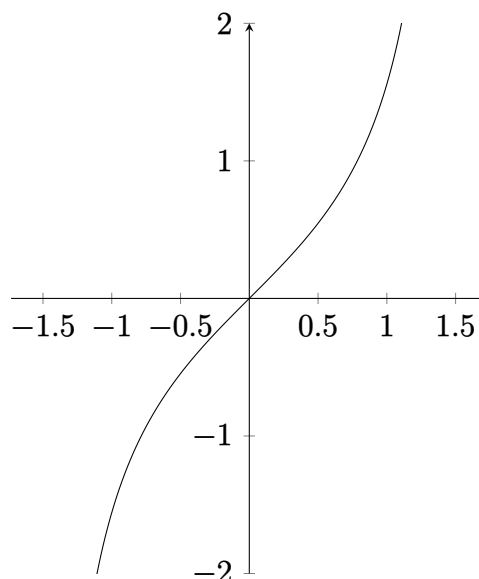


Figura 25: Gráfico da função tangente

Devido a complexidade em se calcular o resultado das funções trigonométricas seno, cosseno e tangente, muitos exercícios que envolvem essas funções acabam por usar valores bem conhecidos, ou valores tabelados, isso é verdade principalmente para os vestibulares.

	$30^\circ \left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45^\circ \left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60^\circ \left(\frac{\pi}{3}\right)$
sen	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tg	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Tabela 2: Tabela de ângulos notáveis

## TEOREMA DE PITÁGORAS

O teorema de Pitágoras é uma relação importante entre o comprimento das arestas de um triângulo retângulo, sendo fundamental em muitos exercícios de geometria e frequentemente tópico necessário para o desenvolvimento de questões de vestibular.

Dado o triângulo retângulo abaixo:

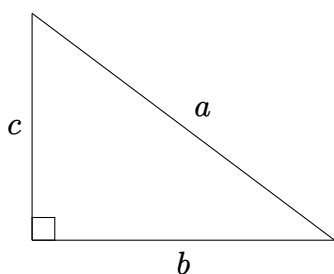


Figura 26: Triângulo retângulo

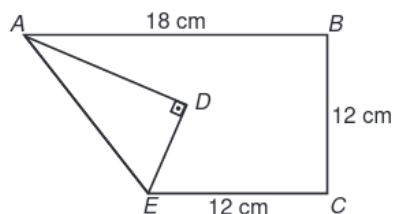
O teorema de Pitágoras diz que:  
"Em qualquer triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados

dos comprimentos dos catetos.", traduzindo para a forma matemática:

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad (11)$$

## EXERCÍCIOS

4. (ENEM 2019) Construir figuras de diversos tipos, apenas dobrando e cortando papel, sem cola e sem tesoura, é a arte do origami (ori = dobrar; kami = papel), que tem um significado altamente simbólico no Japão. A base do origami é o conhecimento do mundo por base do tato. Uma jovem resolveu construir um cisne usando a técnica do origami, utilizando uma folha de papel de 18 cm por 12 cm. Assim, começou por dobrar a folha conforme a figura:



Após essa primeira dobradura, a medida do segmento  $\overline{AE}$  é:

- (a)  $2\sqrt{22}cm$
- (b)  $6\sqrt{3}cm$
- (c)  $12cm$
- (d)  $6\sqrt{5}cm$
- (e)  $12\sqrt{2}cm$



**Solução:** Esse é um simples problema que pode ser resolvido com o teorema de Pitágoras. Sabe-se que o triângulo  $ADE$  é resultado da dobra de uma folha de papel retângular de  $18\text{cm}$  por  $12\text{cm}$ , observando pode-se notar que a aresta (ou segmento)  $\overline{AD}$  tem comprimento  $12\text{cm}$ , e o comprimento do segmento  $\overline{DE}$  é  $18 - 12\text{cm} = 6\text{cm}$ . Portanto, segundo o teorema de Pitágoras o segmento  $\overline{AE}$  é:

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 \quad (12)$$

$$\overline{AE}^2 = 12^2 + 6^2 \quad (13)$$

$$\overline{AE} = \sqrt{12^2 + 6^2} \quad (14)$$

$$\overline{AE} = \sqrt{180} \quad (15)$$

fatorando 180 temos:

$$\overline{AE} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} \quad (16)$$

$$\overline{AE} = 6\sqrt{5} \quad (17)$$

Portando a resposta correta é  
**d)  $6\sqrt{5}\text{cm}$ .**

5. (ENEM 2019) Uma administração municipal encomendou a pintura de dez placas de sinalização para colocar em seu pátio de estacionamento. O profissional contratado para o serviço inicial pintará o fundo de dez placas e cobrará um valor de acordo com a área total dessas placas. O formato de cada placa é um círculo de diâmetro  $d = 40\text{cm}$ , que tangencia lados de um retângulo, sendo que o comprimento total da placa é  $h = 60\text{cm}$ , conforme ilustrado na figura. Use 3,14 como aproximação para  $\pi$ .



Qual é a soma das medidas das áreas, em centímetros quadrados, das dez placas?

(a) 16.628

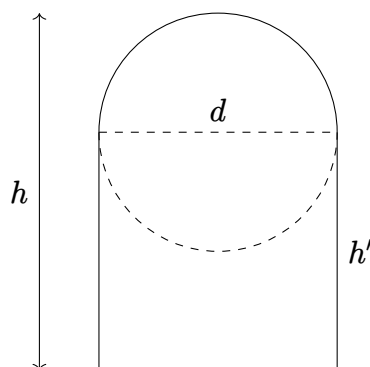
(b) 22.280

(c) 28.560

(d) 41.120

(e) 66.240

**Solução:** Analisando o problema, podemos redesenhar a placa usando duas formas geométricas, um retângulo de lados  $d$  e  $h'$  e uma circunferência de diâmetro  $d$ .



A área da placa pode ser obtida com a soma da área do retângulo com a me-

tade da área da circunferência, mas para calcularmos a área do retângulo devemos calcular o comprimento  $h'$  que nada mais é que  $h - \frac{d}{2}$ , portanto  $h' = 40cm$ , resolvendo:

$$A_{placa} = \frac{A_{circ}}{2} + A_{ret} \quad (18)$$

$$A_{circ} = \pi \left( \frac{d}{2} \right)^2 = 1256cm^2 \quad (19)$$

$$A_{ret} = h' \cdot d = 1600cm^2 \quad (20)$$

$$A_{placa} = \frac{1256}{2} + 1600 = 2228cm^2 \quad (21)$$

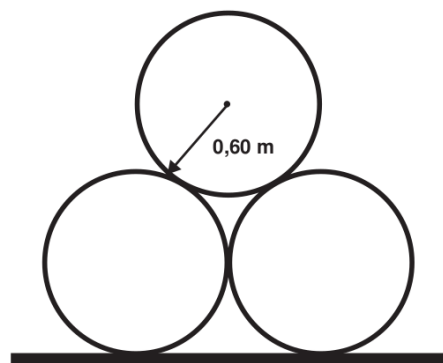
Como o exercício pede a área total das dez placas, é só multiplicarmos a área de uma placa por dez e temos  $22280cm^2$ , portanto a alternativa correta é **b) 22.280**

6. (ENEM 2017) Um caminhão de grande porte entalou embaixo do viaduto no cruzamento das avenidas Borges de Medeiros e Loureiro da Silva no sentido Centro-Bairro, próximo à Ponte de Pedra, na capital. Esse veículo vinha de São Paulo para Porto Alegre e transportava três grandes tubos, conforme ilustrado na foto.



Considere que o raio externo de cada cano da imagem seja  $0,60m$  e que eles estejam em cima de uma

carroceria cuja parte superior está a  $1,30m$  do solo. O desenho representa a vista traseira do empilhamento dos canos.

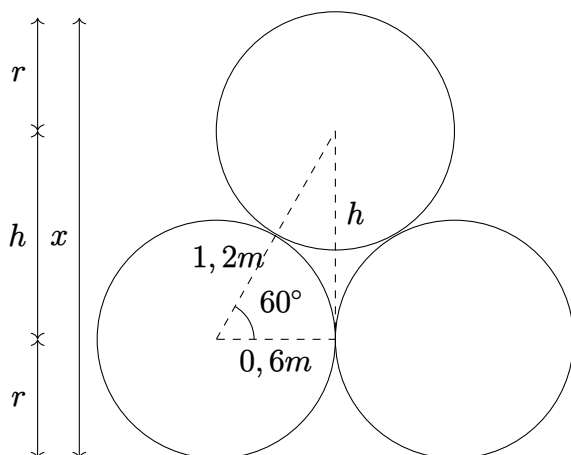


A margem de segurança recomendada para que um veículo passe sob um viaduto é que a altura total do veículo com a carga seja, no mínimo,  $0,50m$  menor do que a altura do vão do viaduto. Considere  $1,7$  como aproximação para  $\sqrt{3}$ . Qual deveria ser a altura mínima do viaduto, em metro, para que esse caminhão pudesse passar com segurança sob seu vão?

- (a) 2,82
- (b) 3,52
- (c) 3,70
- (d) 4,02
- (e) 4,20

**Solução:** Em resumo o problema pede a altura da pilha de tubos, acrescido da altura da carroceria do caminhão ( $1,30m$ ) e a margem de segurança ( $0,50m$ ). Considerando que a altura da pilha de tubos seja  $x$ , portanto a resposta é  $x + 1,80m$ . Basta

portanto encontrarmos a altura da pilha de tubos, e analisando o problema temos o seguinte:



Perceba que entre o centro das circunferências podemos formar um triângulo equilátero que pode ser então dividido em dois triângulos retângulos de arestas  $1,20m$ ,  $0,60m$  e  $h$ . A altura total  $x$  é composta por  $h + 2r$ , onde o  $r$  se refere ao raio do círculo  $0,60m$ , e a resposta final pode ser reescrita como  $h + 3m$ . Para encontrar o  $h$  devemos lembrar da relação entre as funções trigonométricas e os triângulos retângulos e como  $h$  é o cateto oposto ao ângulo  $60^\circ$  temos que:

$$\text{sen}(60^\circ) = \frac{h}{1,20m} \quad (22)$$

Consultando a tabela 2, temos que  $\text{sen}(60^\circ) = \sqrt{3}/2$ , portanto da equação 22 temos:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{h}{1,20m} \quad (23)$$

$$h = 1,2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (24)$$

$$h = 1,02 \quad (25)$$

Logo, a resposta final dada por  $h + 3m$  resulta em  $4,02m$ . Portanto a resposta correta é **d) 4,02**. É possível calcular o valor de  $h$  usando o teorema de Pitágoras, porém caímos numa raiz quadrada que é difícil de calcular sem o auxílio de uma calculadora.

7. (UNICAMP 2016) Um cilindro circular reto, cuja altura é igual ao diâmetro da base, está inscrito numa esfera. A razão entre os volumes da esfera e do cilindro é igual a:

(a)  $4\sqrt{2}/3$

(b)  $4/3$

(c)  $3\sqrt{2}/4$

(d)  $\sqrt{2}$

**Solução:** O problema não especifica o raio da esfera nem da base do cilindro, porém ele nos informa que o cilindro está inscrito na esfera e que a altura do cilindro é a mesma do diâmetro da base, portanto analisando o problema chegamos na seguinte representação gráfica:

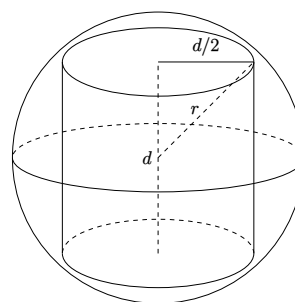
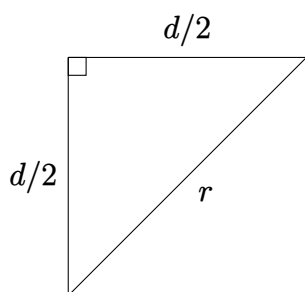


Figura 27: Cilindro

O volume do cilindro é facilmente calculável dado um diâmetro  $d$  arbitrário, porém não possuímos o raio da esfera, na qual devemos obter com os parâmetros que já temos. Note que se traçarmos uma reta do centro do cilindro até a circunferência da base do cilindro temos então uma reta cujo comprimento coincide com o raio da esfera, além disso formamos um triângulo isósceles e retângulo com arestas  $d/2$ ,  $d/2$  e  $r$ .



Logo, utilizando o teorema de Pitágoras obtemos que o raio é:

$$r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2 \quad (26)$$

$$r^2 = \frac{d^2}{2} \quad (27)$$

$$r = \frac{d}{\sqrt{2}} \quad (28)$$

Agora podemos calcular o volume da esfera:

$$V_e = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad (29)$$

$$V_e = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^3 \pi = \frac{2d^3\pi}{3\sqrt{2}} \quad (30)$$

E o volume do cilindro:

$$V_c = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot d \quad (31)$$

$$V_c = \frac{d^3\pi}{4} \quad (32)$$

Portanto a razão entre o volume da esfera e do cilindro é:

$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{2d^3\pi}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{d^3\pi} \quad (33)$$

$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{2d^3\pi}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{d^3\pi} \quad (34)$$

$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{8}{3\sqrt{2}} \quad (35)$$

Racionalizando:

$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{8}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \quad (36)$$

$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{8\sqrt{2}}{3 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{2}}{3} \quad (37)$$

Portanto a resposta correta é  
**a)  $4\sqrt{2}/3$**

# MATEMÁTICA

## Conjuntos numéricos



## TEORIA DE CONJUNTOS

Operações entre conjuntos vem da facilidade que elas trazem para a resolução de problemas numéricos do cotidiano. Faremos uma pequena introdução dos conjuntos numéricos (dos Naturais passando pelos Reais e indo até os Complexos). Utilizaremos o diagrama de Venn-Euler para definirmos algumas operações entre os conjuntos. Essas operações consistem em formar um conjunto de elementos e trabalhar com eles, sendo que as operações principais são a União, Intersecção, Diferença e Conjunto Complementar.

Quando os elementos que formam um conjunto são números, Esses conjuntos são chamados de Conjuntos Numéricos e serão o nosso objeto de estudo.

### CONJUNTOS NUMÉRICOS

Os Conjuntos Numéricos são conjuntos que reúnem diversos outros conjuntos cujos elementos são números. Estes são conhecidos por conjunto dos:

1. Números Naturais  $\mathbb{N}$ ;
2. Números Inteiros  $\mathbb{Z}$ ;
3. Números Racionais  $\mathbb{Q}$ ;
4. Números Irracionais  $\mathbb{I}$ ;
5. Números Reais  $\mathbb{R}$ ;

### 6. Números Complexos $\mathbb{C}$ ;

Na sequência abaixo, estudaremos cada um desses conjuntos.

### CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS - $\mathbb{N}$

Os números naturais surgiram da necessidade de se contar quantidades de coisas, como ovelhas, gado, frutas, etc...

Com exceção do número zero (0), todos os números naturais possuem um antecessor, o zero não tem porque não há como contar menos uma ovelha em um pasto que não tem nenhuma ovelha.

Esse conjunto é representado da seguinte forma:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots n \dots\}$$

os Números Naturais possuem alguns subconjuntos importantes, que são:

1. Os conjuntos dos números naturais não nulos:

$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots n \dots\}$$

2. O conjunto dos números Pares:

$$\mathbb{N}_p = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots 2n \dots\}$$

3. O conjunto dos números Ímpares:

$$\mathbb{N}_i = \{1, 3, 5, 7, \dots 2n + 1 \dots\}$$

4. O conjunto dos números primos:

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \dots\}$$

## NÚMEROS CARDINAIS E ORDINAIS

Os números naturais são usados para contar e ordenar as coisas. Em todo caso eles podem ser conhecidos de diferentes formas:

### 1. Números naturais Cardinais:

Quando usamos os números naturais para contar elementos de um determinado conjunto, chamamos de números Cardinais.

Ex: Contar conjunto de carros, canetas, laranjas, etc...

#### Números cardinais com flexão de gênero:

- Um / uma; - Duzentos / duzentas; - Quinhentos / quinhentas. - Oitocentos / oitocentas.

#### Números cardinais com flexão de número:

- Milhão / milhões; - Bilhão / bilhões.

### 2. Números naturais Ordinais:

Chamamos de números Ordinais quando necessitamos de ordenar alguma coisa ou conjunto, no sentido de classificá-lo:

Ex: Andares de um edifício, Você não fala andar 1, andar

2, Você fala primeiro andar, segundo andar... etc.

Competidores, Você não fala lugar 1, lugar 2... Você fala Primeiro lugar, segundo lugar...

Os números ordinais também podem apresentar flexão de gênero e número.

#### Números ordinais com flexão de gênero:

- Terceiro/ terceira; - Sétimo/ sétima; - Décimo/ décima; - Centésimo/ centésima.

#### Números ordinais com flexão de número:

- Primeiro/ primeiros; - Terceiro/ terceiros; - Décimo/ décimos; - Trigésimo/ Trigésimos.

Nota: a diferença entre os números ordinais e os números cardinais consiste no fato de que o número ordinal faz referência a alguma ordem e o número cardinal traz um número objetivo, uma quantidade.

### 3. Relação dos Principais Números Ordinais:

1.º - primeiro;

2.º - segundo;

3.º - terceiro;

4.º - quarto;

5.º - quinto;

6.º - sexto;

7.º - sétimo;

8.º - oitavo;

9.<sup>o</sup> - nono;  
10.<sup>o</sup> - décimo;  
11.<sup>o</sup> - décimo primeiro ou undécimo;  
12.<sup>o</sup> - décimo segundo ou duodécimo;  
13.<sup>o</sup> - décimo terceiro;  
14.<sup>o</sup> - décimo quarto;  
15.<sup>o</sup> - décimo quinto;  
16.<sup>o</sup> - décimo sexto;  
17.<sup>o</sup> - décimo sétimo;  
18.<sup>o</sup> - décimo oitavo;  
19.<sup>o</sup> - décimo nono;  
20.<sup>o</sup> - vigésimo;  
21.<sup>o</sup> - vigésimo primeiro;  
22.<sup>o</sup> - vigésimo segundo;  
23.<sup>o</sup> - vigésimo terceiro;  
24.<sup>o</sup> - vigésimo quarto;  
25.<sup>o</sup> - vigésimo quinto;  
26.<sup>o</sup> - vigésimo sexto;  
27.<sup>o</sup> - vigésimo sétimo;  
28.<sup>o</sup> - vigésimo oitavo;  
29.<sup>o</sup> - vigésimo nono;  
30.<sup>o</sup> - trigésimo;  
40.<sup>o</sup> - quadragésimo;  
50.<sup>o</sup> - quinquagésimo;  
60.<sup>o</sup> - sexagésimo;  
70.<sup>o</sup> - septuagésimo ou setuagésimo;  
80.<sup>o</sup> - octogésimo;  
90.<sup>o</sup> - nonagésimo;  
100.<sup>o</sup> - centésimo;

200.<sup>o</sup> - ducentésimo;  
300.<sup>o</sup> - trecentésimo ou tricentésimo;  
400.<sup>o</sup> - quadringentésimo;  
500.<sup>o</sup> - quingentésimo;  
600.<sup>o</sup> - sexcentésimo ou seiscentésimo;  
700.<sup>o</sup> - septingentésimo ou setingentésimo;  
800.<sup>o</sup> - octingentésimo;  
900.<sup>o</sup> - noningentésimo ou nongentésimo;  
1.000.<sup>o</sup> - milésimo;  
10.000.<sup>o</sup> - décimo milésimo;  
100.000.<sup>o</sup> - centésimo milésimo;  
1.000.000.<sup>o</sup> - milionésimo;  
1.000.000.000.<sup>o</sup> - bilionésimo;  
1.000.000.000.000.<sup>o</sup> - trilionésimo.

Obs.: Na escrita dos números ordinais compostos não se usa o hífen. Veja: “trigésimo quinto”, “septuagésimo nono”, “sexcentésimo vigésimo terceiro”.

## CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS - $\mathbb{Z}$

Os números inteiros são os números positivos, negativos e o zero, sem a parte decimal. Estes números formam o conjunto dos números inteiros, indicado por  $\mathbb{Z}$ ;

Não pertencem aos números inteiros: as frações, números decimais,



os números irracionais e os complexos. Os inteiros são representados da seguinte forma:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Os inteiros negativos são sempre acompanhados pelo sinal (-), enquanto os inteiros positivos podem vir ou não acompanhados do sinal (+).

O zero é um número neutro, ou seja, nem é positivo e nem é negativo.

Os números naturais ( $\mathbb{N}$ ) estão inclusos dentro dos números inteiros ( $\mathbb{Z}$ ).

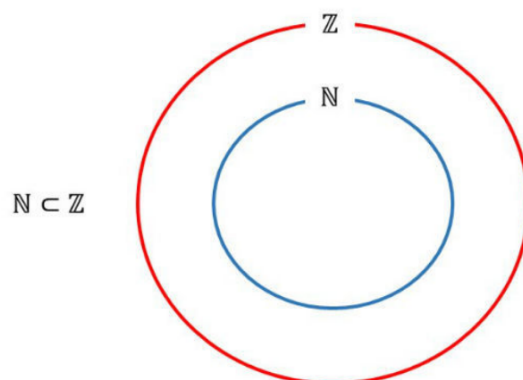
Todo número inteiro possui um antecessor e um sucessor. Por exemplo, o antecessor de -3 é -4, já o seu sucessor é o -2.

Por exemplo, o -4 é o simétrico de 4, pois estão a uma mesma distância do zero, conforme assinalado na figura abaixo:



## Subconjuntos de $\mathbb{Z}$

O conjunto dos números naturais ( $\mathbb{N}$ ) é um subconjunto de  $\mathbb{Z}$ , pois está contido no conjunto dos números inteiros. Assim:



Destaquemos agora alguns subconjuntos dos Inteiros  $\mathbb{Z}$ :

1.  $\mathbb{Z}$ : É o subconjunto dos números inteiros, com exceção do zero.

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

2.  $\mathbb{Z}_*$ : São os números inteiros não-negativos, ou seja

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

3.  $\mathbb{Z}_-$ : É o subconjunto dos números inteiros não-positivos, ou seja

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

4.  $\mathbb{Z}_+^*$ : É o subconjunto dos números inteiros, com exceção dos negativos e do zero.

$$[\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

5.  $\mathbb{Z}_-^*$ : São os números inteiros, com exceção dos positivos e do zero, ou seja

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$$

## CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS - $\mathbb{Q}$

O conjunto  $\mathbb{Q}$  dos números racionais é formado por todos aqueles números que podem ser expressos na forma de fração  $\frac{a}{b}$ , em que "a" e "b" são números inteiros e "b" é diferente de 0.

**Nota:** Em uma fração o **numerador** é o número acima e o **denominador** é o número abaixo da mesma.

$\frac{A}{B}$  onde

A é o **Numerador** e  
B é o **Denominador**

Conhecido também como o conjunto das frações equivalentes à fração irredutível, ex:  $\frac{3}{4}$ .

Um conjunto de frações equivalentes representa um único número racional.

Cada fração do conjunto é um representante do número racional, e a fração irredutível com denominador positivo é o representante canônico.

Assim, o número racional  $\frac{2}{3}$  é formado pela fração  $\frac{2}{3}$ . Fração e todas as suas equivalentes:

Ao calcular a expressão decimal de um número racional, dividindo o numerador pelo denominador, obtêm-se números inteiros ou decimais.

Os números decimais podem ter:

Um número finito de algarismos, número decimal exato, se os únicos divisores do denominador forem 2 ou 5.

Um número infinito de algarismos, que se repetem de forma periódica a partir da vírgula, decimal periódico simples, se 2 ou 5 forem divisores do denominador;

A partir do algarismo dos décimos, centésimos..., decimal periódico composto, se entre os divisores do denominador estiver o 2 ou o 5 e houver, além desses, outros divisores.

Reciprocamente, qualquer número decimal exato ou periódico pode ser expresso na forma de fração.

**Números Racionais Exemplo:**  
Expressar na forma de fração os seguintes números decimais:

$$1. 1,92 = \frac{192}{100}$$

$$2. 1,\overline{73} = \frac{1,73 - 1}{99} = \frac{172}{99}$$

$$3. 1, \overline{73} = \frac{173 - 17}{90} = \frac{156}{90} = \frac{26}{15}$$

$$4. 1, 0\overline{73} = \frac{1073 - 107}{900} = \frac{966}{900} = \frac{161}{150}$$

Representação canônica de um número racional.

Dada uma fração, existem infinitas frações equivalentes a ela.

Ex:

$$\left\{ \dots \frac{-8}{-9}, \frac{-4}{-6}, \frac{-2}{-3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{8}{9} \dots \right\}$$

É o conjunto das frações equivalentes à fração irredutível.

Um conjunto de frações equivalentes representa um único número racional, conforme os exemplos acima.

Cada fração do conjunto é um representante do número racional, e a fração irredutível com denominador positivo é o representante canônico.

Assim, o número racional Fração é formado pela Fração e todas as suas equivalentes:

Todas elas são representantes do número racional  $\frac{2}{3}$ .

Portanto,  $\frac{2}{3}$  é o representante canônico.

## CONJUNTO DOS NÚMEROS IRRACIONAIS - $\mathbb{I}$

O conjunto  $\mathbb{I}$  dos números irracionais é formado pelos números que não podem ser expressos em forma de fração. São números cuja expressão decimal tem um número infinito de algarismos que não se repetem de forma periódica.

Existem infinitos números irracionais, e geralmente as raízes não exatas são também números irracionais, conforme abaixo:

$$\text{Exs: } \sqrt{3}, \sqrt{7}, \sqrt{13}, \sqrt{2,737}, \sqrt{2}, \Pi$$

Estes números podem ser resultados de equações, cálculos de área, etc.

## CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS - $\mathbb{R}$

Os Números Reais  $\mathbb{R}$ , é o conjunto que contém todo o conjuntos dos números Naturais  $\mathbb{N}$ , números Inteiros  $\mathbb{I}$ , dos números Racionais  $\mathbb{Q}$  e dos números Irracionais  $\mathbb{I}$ , conforme figura abaixo:

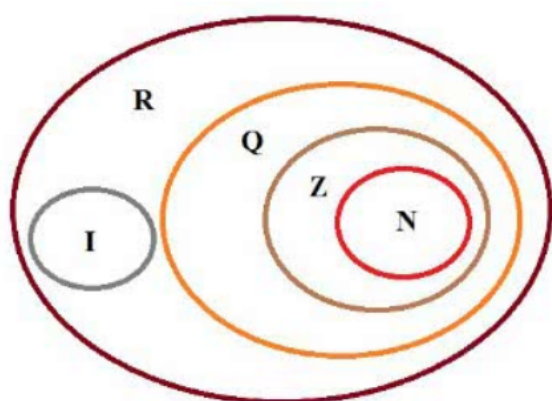


Diagrama dos conjuntos numéricos










Fonte: Internet

Pela figura acima, podemos fazer a seguinte observação:

⇒ O conjunto dos números Naturais  $\mathbb{N}$  está contido no conjunto dos números inteiros  $\mathbb{Z}$ , que está contido no conjunto dos números Racionais  $\mathbb{Q}$ , que também está contido no conjunto dos Números Reais  $\mathbb{R}$ , que por sua vez contém o conjunto dos números Irracionais  $\mathbb{I}$ , todavia, este último, não contém nenhum dos demais conjuntos, por esta razão, fica separado dos demais, mas dentro do conjunto dos números Reais  $\mathbb{R}$ .

Todo número real tem um único ponto correspondente na reta e qualquer ponto da reta tem um único número real correspondente.

Dizemos de forma intuitiva que o conjunto dos números Reais  $\mathbb{R}$  é formado por todos os números que podem ser representados na reta numérica. Para representar subconjuntos ou intervalos da reta real usamos a representação geométrica ou uma notação própria utilizada no estudo dos conjuntos, conforme alguns exemplos na figura abaixo:

Notação	Descrição do conjunto	Ilustração
$(a, b)$	$\{x \mid a < x < b\}$	
$[a, b]$	$\{x \mid a \leq x \leq b\}$	
$[a, b)$	$\{x \mid a \leq x < b\}$	
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \leq b\}$	
$(a, \infty)$	$\{x \mid x > a\}$	
$[a, \infty)$	$\{x \mid x \geq a\}$	
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \leq b\}$	
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais)	

Fonte: <https://www.infoescola.com/matematica/numeros-reais/>

## CONJUNTO DOS NÚMEROS COMPLEXOS - $\mathbb{C}$

O conjunto dos números Complexos compreendem os números compostos por uma parte real e outra imaginária.

Representam o conjunto de todos os pares ordenados  $(x, y)$ , cujos elementos pertencem ao conjunto dos números reais  $\mathbb{C}$ .

É indicado por  $\mathbb{C}$  e definido pelas operações seguintes:

**Igualdade:**  $(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ e } b = d$

**Adição:**  $(a, b) + (c, d) = (a + b + c + d)$

**Multiplicação:**  $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$

A unidade imaginária é indicada pela letra "i" e representa o par ordenado (0,1), assim,

$$i \cdot i = -1 \iff i^2 = -1$$

Dessa forma, i é a raiz quadrada de -1, por isso i é chamado de **unidade imaginária**, pois não existe raiz quadrada de número negativo.

Vejamos as potências de i:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = -i$$

$$i^4 = 1$$

$$i^5 = i$$

$$i^6 = -1$$

$$i^7 = -i$$

$$i^8 = 1 \& \dots$$

Observe que sempre vai repetindo os resultados de 0 a 4. Então, pegamos o expoente e dividimos por 4, e pegamos o resto, assim, fica fácil

de fazer qualquer potenciação de i.

Os números Complexos  $\mathbb{C}$  são representados na forma algébrica da seguinte maneira:

$$z = x + yi$$

Onde x e y são números reais e "i" a parte imaginária.

### Conjugado de um Número Complexo

O conjugado de um número complexo é indicado por  $\bar{z}$ , definido por  $\bar{z} = a - bi$ . Assim, troca-se o sinal de sua parte imaginária.

Então, se  $z = a + bi$ , logo, o seu conjugado é  $\bar{z} = a - bi$ .

Quando multiplicamos um número complexo pelo seu conjugado, o resultado será um número real  $\mathbb{R}$ .

Ex:

$$(5 + 3i) \cdot (5 - 3i)$$

$$5^2 - 3i + 3i - (3i)^2 \quad \text{Obs.}(i^2 = -1)$$

$$25 - [(9) \cdot (-1)]$$

$$25 - (-9)$$

$$25 + 9$$

$$34 \in \mathbb{R}$$

### Adição de Números Complexos:

$$z_1 + z_2 = (a + c, b + d)$$

Ou algebricamente:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$$

Ex:

$$\begin{aligned}(3 + 2i) + (-4 + 5i) \\= (3 - 4) + i(2 + 5) \\= -1 + 7i\end{aligned}$$

### Subtração de Números Complexos

$$z_1 - z_2 = (a - c), b - d)$$

Ou algebricamente:

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + i(b - d)$$

Ex:

$$\begin{aligned}(3 - 2i) - (-4 - 5i) \\= (3 + 4) + i(-2 - 5) \\= 7 - 7i\end{aligned}$$

### Multiplicação de Números Complexos:

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Ou algebricamente:

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci + bdi^2 \\(a + bi) \cdot (c + di) &= ac + adi + bci - bd \\(a + bi) \cdot (c + di) &= (ac - bd) + i(ad + bc)\end{aligned}$$

Ex:

$$\begin{aligned}(4 + 3i) \cdot (2 - 5i) \\= 8 - 20i + 6i - 15i^2 \\= 8 - 14i + 15 \\= 23 - 14i\end{aligned}$$

### Divisão de Números Complexos:

Ao dividirmos dois números complexos devemos escrevê-los em forma de fração e multiplicarmos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador, veja como:

$$z_1 \div z_2 = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$$

Exemplo: Sejam  $z_1 = 1 + i$  e  $z_2 = 1 + 2i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i}{1 + 2i} \cdot \frac{(1 - 2i)}{(1 - 2i)}$$

$$\frac{1 - 2i + i - 2i^2}{1 - 4i^2} = \frac{1 - i + 2}{1 + 4} = \frac{3 - i}{5}$$

Portanto:  $z_1 \div z_2 = \frac{3}{5} - \frac{i}{5}$

De uma forma geral podemos demonstrar a divisão de dois números complexos por:

Dado  $z_1 = a + bi$  e  $z_2 = c + di$  a divisão  $z_1 \div z_2$  será:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} =$$

$$\frac{ac - adi + cbi - bdi^2}{c^2 - d^2i^2} =$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd + cbi - adi}{c^2 + d^2} =$$

$$\frac{ac + bd + (cb - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Portanto:

$$z_1 \div z_2 = \frac{ac + bd + (cb - ad)i}{c^2 + d^2}$$

## Fórmula da divisão de números complexos.

### Propriedades:

$\Rightarrow |z| = |\bar{z}|$  O módulo do conjugado de um número complexo será o mesmo módulo do número;

$\Rightarrow z \cdot \bar{z} = |z|^2$  O produto de um número complexo pelo seu conjugado é o quadrado do módulo desse número, portanto, um número Real  $\mathbb{R}$ .

$\Rightarrow z + \bar{z} = 2x \in \mathbb{R}$  A soma de um número complexo ao seu conjugado resulta no dobro da parte real do número;

$\Rightarrow z - \bar{z} = 2yi \in \mathbb{C}$  A subtração de um número complexo com seu conjugado resulta no dobro da parte imaginária desse número.

## EXERCÍCIOS DE NÚMEROS COMPLEXOS

1. (ENEM) Sabendo que  $i = \sqrt{-1}$ , calcule  $i^{7531}$

$$a) ib) - 1c) 1d) - ie) 0$$

2. (ENEM) Para que  $z = (5 + i)/(a - 2i)$  seja um imaginário puro, o valor de a deve ser:

$$a) -2/5.b) 0c) 2/5d) 10e) -10$$

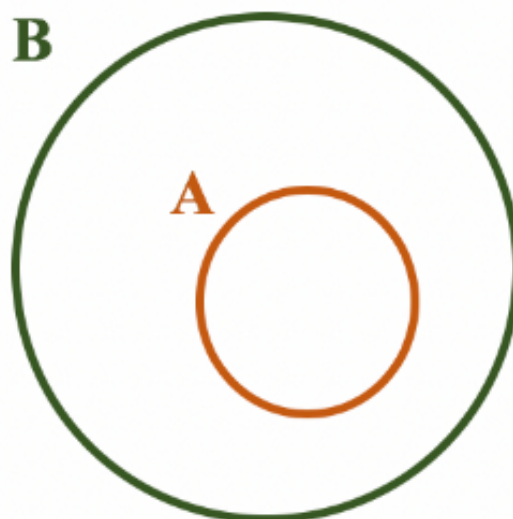
3. (EEAR 2019) A parte real das raízes complexas da equação  $x^2 - 4x + 13 = 0$ , é igual a

$$a) 1b) 2c) 3d) 4$$

## OPERAÇÕES DE CONJUNTOS

Os conjuntos são representados por letras maiúsculas, A, B, C, D...

Caso todos os elementos de A também pertençam ao conjunto B, fica evidente que A é subconjunto do conjunto B, ou que A está contido em B, ou ainda que A é parte de B. A representação em forma de diagrama de um caso como esse é apresentada na imagem abaixo:

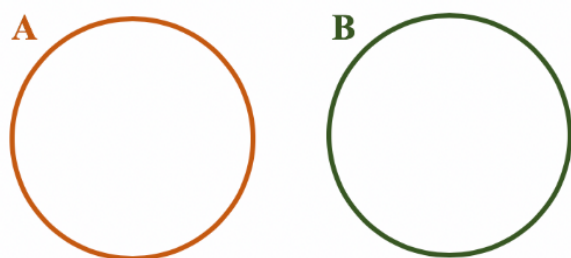


Fonte: Autor

Caso nenhum elemento de A também pertença ao conjunto B, e claro, nenhum elemento de B tam-

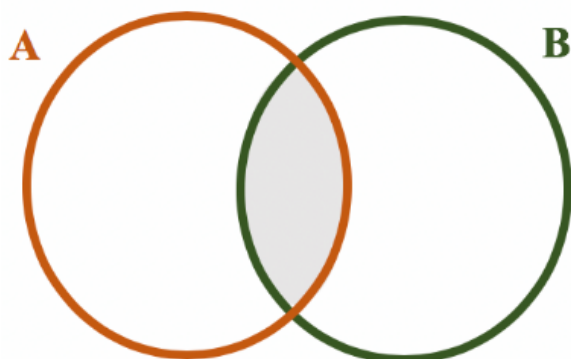


bém pertença ao conjunto A, pode se dizer que A e B são conjuntos disjuntos. Nesse caso, o diagrama de cada um dos conjuntos é representado da seguinte forma:



Fonte: Autor

Se apenas alguns elementos do conjunto A também pertençam ao conjunto B e vice-versa. Nesse caso, é comum entrelaçar os diagramas, para que os elementos comuns a ambos os conjuntos se localizem na região comum aos dois diagramas, como mostra a imagem:



Fonte: Autor

## UNIÃO ENTRE CONJUNTOS

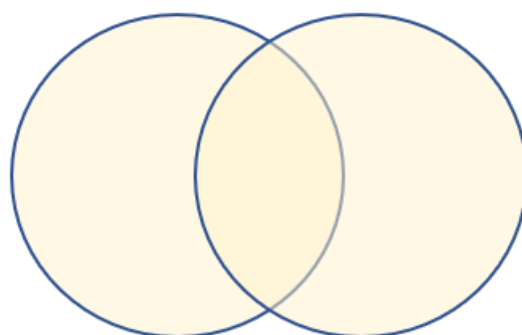
União entre dois ou mais conjuntos será determinado por um novo conjunto que se constituirá de elementos de pelo menos 1 dos conjuntos, ou seja, somar os elementos de todos os conjuntos em um único conjunto, sem repetir, caso algum dos conjuntos tenha o mesmo item ou número.

Para representar a união usamos o símbolo:  $\cup$ .

Definição:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

União entre conjuntos



Fonte: Autor

Sejam os conjuntos  $A = \{h, a, s, e, t\}$  e  $B = \{a, e, i, o, u\}$ , represente o conjunto união ( $A \cup B$ ).

Para encontrar o conjunto união basta juntar os elementos dos dois conjuntos dados.

Os elementos que se repetem



nos dois conjuntos inclui uma única vez cada um.

Assim, o conjunto união será:

$$A \cup B = \{h, a, s, e, t, i, o, u\}$$

## INTERSEÇÃO ENTRE CONJUNTOS

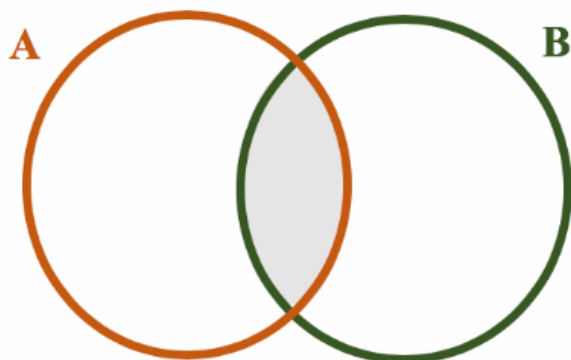
A interseção de um conjunto A com um conjunto B, pode ser dita como o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

Para representar a interseção usamos o símbolo:  $\cap$ .

Definição:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

Interseção entre conjuntos



Fonte: Autor

Observação: Quando os conjuntos não apresentam elementos comuns entre si, dizemos que a interseção é um conjunto vazio ( $\emptyset$ ).

Nesse caso, esses conjuntos são chamados de disjuntos:

$$A \cap B = \emptyset$$

## DIFERENÇA ENTRE CONJUNTOS

Seja o Conjunto  $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  e  $B = \{4, 5, 6\}$ , a diferença entre esses dois conjuntos ( $A - B$ ), é um outro conjunto ao qual chamamos de Conjunto Diferença.

Neste caso a operação se dá da seguinte forma: Os elementos do Conjunto (A) Menos os Elementos do Conjunto (B):

$$\text{Conj. Diferença (C)} = \{0, 1, 2, 3\}$$

Quando fazemos a diferença entre conjuntos, eliminamos os elementos que são comuns entre eles e mantemos os outros elementos do conjunto que inicia a operação, no caso, o conjunto A, pois temos ( $A - B$ ).

Se tivéssemos ( $B - A$ ), o conjunto resultante que chamamos de conjunto diferença, ficaria assim:

$$B = \{5, 6\}$$

## CONJUNTO COMPLEMENTAR

O conjunto complementar está relacionado com a diferença entre

dois ou mais conjuntos, todavia, é necessário que o conjunto B tenha todos os seus elementos representados no conjunto A para que se verifique o complementar de A em relação a B.

Seja  $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  e  $B = \{2, 4, 6, 8\}$

O Complementar do conjunto A em relação ao conjunto B é:

$$C_A^B = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$$

Lê-se da seguinte maneira: complementar de (B) em relação a (A).

**Importante:** Os elementos do conjunto (B) devem estar contidos no conjunto (A).

Se desejássemos saber o complementar de um conjunto (E) em relação ao conjunto (A), este conjunto (E), obrigatoriamente, deve estar contido no conjunto (A).

Caso o conjunto (E) fosse:  $E = \{9, 4, 1\}$ , o complementar de (E) em relação a (A), seria:

$$C_A^E = \{0, 2, 3, 5, 6, 7, 8\}$$

Caso o conjunto (E) não estivesse contido no conjunto (A), não seria possível determinar o complementar do conjunto (E) em relação ao conjunto (A).

## SÍMBOLOS USADOS COM CONJUNTOS

Os símbolos geralmente usados com conjuntos são os seguintes:

- $\cup$  **União**
- $\cap$  **Interseção**
- $\supset$  **Contém**
- $\not\supset$  **Não Contém**
- $\subset$  **Está Contido**
- $\not\subset$  **Não está Contido**
- $\in$  **Pertence**
- $\notin$  **Não Pertence**
- $\ni$  **Existe**
- $\not\ni$  **Não Existe**
- $\ni!$  **Existe um Único.**
- $\forall$  **Para Todo.**

Existem muitos outros símbolos, porém estes são os mais comuns e os que precisaremos.

## EXERCÍCIOS SOBRE CONJUNTOS

1. (Uece – 2016) Dados os números racionais  $\frac{3}{7}, \frac{5}{6}, \frac{4}{9}, \frac{3}{5}$ , a divisão do menor deles pelo maior é igual a:

- a)  $\frac{27}{28}$  b)  $\frac{18}{25}$  c)  $\frac{18}{35}$  d)  $\frac{20}{27}$

2. (Ueg – 2015) Se colocarmos os números reais  $-\sqrt{5}, 1, -\frac{3}{5}$  e  $\frac{3}{8}$  em ordem decrescente, teremos a sequência:

- (a)  $\frac{3}{8}, 1, -\frac{3}{5}, -\sqrt{5}$

(b)  $\frac{3}{8}, 1, -\sqrt{5}, -\frac{3}{5}$

(c)  $1, \frac{3}{8}, -\frac{3}{5}, -\sqrt{5},$

(d)  $1, \frac{3}{8}, 1, -\sqrt{5}, -\frac{3}{5}$

(c)  $\mathbb{Z} \cup \mathbb{Q}$

(d)  $\mathbb{Z} \cup \mathbb{I}$

(e)  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

3. (Upf – 2015) Dividindo 2 por 7, o 100º algarismo da expansão decimal que aparece após a vírgula é:

a) 1 b) 2 c) 5 d) 7 e) 8

4. (Uece – 2015) Se a soma e o produto de dois números são, respectivamente, dois e cinco, podemos afirmar corretamente que:

1. os dois números são racionais.
2. os dois números são irracionais
3. um dos números é racional e o outro é irracional.
4. os dois números são complexos não reais.

5. (Pucrs – 2015) Em nossos trabalhos com matemática, mantemos um contato permanente com o conjunto  $\mathbb{R}$  dos números reais, que possui, como subconjuntos, o conjunto  $\mathbb{N}$  dos números naturais, o conjunto  $\mathbb{Z}$  dos números inteiros, o  $\mathbb{Q}$  dos números racionais e o dos números irracionais  $\mathbb{I}$ . O conjunto dos números reais também pode ser identificado por:

(a)  $\mathbb{R} \cup \mathbb{Z}$

(b)  $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$

6. (ENEM – 2015) Deseja-se comprar lentes para óculos. As lentes devem ter espessuras mais próximas possíveis da medida 3 mm. No estoque de uma loja, há lentes de espessuras: 3,10 mm; 3,021 mm; 2,96 mm; 2,099 mm e 3,07 mm. Se as lentes forem adquiridas nessa loja, a espessura escolhida será, em milímetros, de:

(a) 2,099

(b) 2,96

(c) 3,021

(d) 3,07

(e) 3,10

7. (ENEM PPL – 2014) Um clube de futebol, abriu inscrições para novos jogadores. Inscreveram-se 48 candidatos. Para realizar uma boa seleção, deverão ser escolhidos os que cumpram algumas exigências: os jogadores deverão ter mais de 14 anos, estatura igual ou superior à mínima exigida e bom preparo físico. Entre os candidatos,  $\frac{7}{8}$  têm mais de 14 anos e foram pré-selecionados. Dos pré-selecionados  $\frac{1}{2}$  têm estatura igual ou superior à mínima exigida e, destes,  $\frac{2}{3}$  têm bom preparo físico. A quantidade de candidatos selecionados pelo clube de futebol foi de:

a) 12 b) 14 c) 16 d) 32 e) 42

8. (IFCE - 2014) Considere os seguintes números reais  $\frac{23}{24}$ ,  $\frac{7}{8}$ ,  $\frac{47}{48}$ ,  $1$ ,  $\frac{11}{12}$ ,  $\frac{4}{3}$ ,  $\frac{11}{8}$ . Colocando-se esses números em ordem crescente, o menor e o maior deles são, respectivamente:

(a)  $\frac{23}{24} ? 1$

(b)  $\frac{11}{12} ? \frac{4}{3}$

(c)  $\frac{7}{8} ? \frac{4}{3}$

(d)  $\frac{7}{8} ? \frac{11}{8}$

(e)  $\frac{47}{48} ? \frac{4}{3}$

9. (UEG - 2016) Dados os conjuntos  $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x \leq 4\}$  e  $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ , a intersecção entre eles é dada pelo conjunto:

1.  $x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 4$

2.  $x \in \mathbb{R} \mid x > 0$

3.  $x \in \mathbb{R} \mid x > -2$

4.  $x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4$

10. (IFPE - 2016) Em uma cooperativa de agricultores do município de Vitória de Santo Antão, foi realizada uma consulta em relação ao cultivo de cana-de-açúcar e do algodão. Constatou-se que 125 associados cultivavam a cana-de-açúcar, 85 cultivavam o algodão e 45 cultivavam ambos. Sabendo que todos os cooperativados cultivavam pelo menos uma

dessas duas culturas. Qual é o número de agricultores da cooperativa?

a) 210 b) 255 c) 165 d) 125 e) 45

11. (UEPA - 2015) De acordo com a reportagem da Revista Veja (edição 2341), é possível fazer gratuitamente curso de graduação pela Internet. Dentre os ofertados temos os cursos de Administração (bacharelado), Sistemas de Computação (Tecnólogo) e Pedagogia (licenciatura). Uma pesquisa realizada com 1.800 jovens brasileiros sobre quais dos cursos ofertados gostariam de fazer, constatou-se que 800 optaram pelo curso de Administração; 600 optaram pelo curso de Sistemas de Computação; 500 optaram pelo curso de Pedagogia; 300 afirmaram que fariam Administração e Sistemas de Computação; 250 fariam Administração e Pedagogia; 150 fariam Sistemas de Computação e Pedagogia e 100 dos jovens entrevistados afirmaram que fariam os três cursos. Considerando os resultados dessa pesquisa, o número de jovens que não fariam nenhum dos cursos elencados é:

a) 150 b) 250 c) 350 d) 400 e) 500

12. (Fuvest) No alto de uma torre de uma emissora de televisão duas luzes "pisçam" com frequências diferentes. A primeira "pisca" 15 vezes por minuto e a segunda "pisca" 10 vezes por minuto. Se num certo instante as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a pis-

car simultaneamente?

- a) 12 b) 10 c) 20 d) 15 e) 30

# MATEMÁTICA

**Juros, contagem e  
sequências lógicas**



## PORCENTAGEM E JUROS SIMPLES

Para trabalharmos com porcentagem e juros simples, que é o foco deste capítulo, precisamos relembrar como funciona a Regra de Três Simples, pois este conhecimento, muito nos auxiliará neste tópico.

### REGRA DE TRÊS SIMPLES

A regra de três é um método que utilizamos para encontrar valores desconhecidos quando estamos trabalhando com grandezas direta ou inversamente proporcionais.

Regra de três simples é um processo prático para resolver problemas que envolvam quatro valores dos quais conhecemos três deles. Devemos, portanto, determinar um valor a partir dos três já conhecidos.

Esse método de resolução tem bastante aplicação não só na matemática, como na física, química e em situações constantes do dia a dia. O trabalho com grandezas é fundamental em várias áreas do conhecimento, e, na regra de três, é importante conseguir-se identificar grandezas que se relacionam de forma direta e grandezas que se relacionam de forma inversa.

A comparação entre duas grandezas é bastante comum e necessária no cotidiano, e quando compa-

ramos e verificamos sua proporção, podemos separá-las em dois casos importantes: grandezas diretamente proporcionais ou grandezas inversamente proporcionais.

#### **Diretamente proporcionais:**

à medida que uma dessas grandezas aumenta, a outra também aumenta e na mesma proporção. Um exemplo de grandeza diretamente proporcional seria caminhar em relação ao tempo, quanto mais se caminha, mais tempo gasta, quanto menos se caminha, menos tempo se gasta, isso para uma velocidade constante de caminhar.

**Inversamente proporcionais:** à medida que uma dessas grandezas aumenta, a outra grandeza diminui na mesma proporção. Um exemplo de grandeza inversamente proporcional seria velocidade em relação ao tempo, quanto maior a velocidade, menos o tempo para percorrer a mesma distância.

Passos utilizados numa regra de três simples:

**1º)** Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência.

**2º)** Identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.

**3º)** Montar a proporção e resolver a equação.

**Exemplo:** Uma fábrica com 7 máquinas, produz 1253 peças de um determinado produto. Quantas peças produzirá se utilizar 9 máquinas?

Se o número de máquinas aumenta, a produção aumenta, logo, são grandezas diretamente proporcionais.

7 máquinas produz 1253 peças, quantas peças produzirão 9 máquinas?

$$7 — 1253$$

$$9 — X$$

Basta então multiplicarmos de forma cruzada, da seguinte forma:

$$7X = 9 \cdot 1253$$

$$X = \frac{11277}{7}$$

$X = 1.611 \implies$  Serão produzidas 1611 peças.

**Exemplo 2:** Para deslocar-se de uma cidade para a outra, a uma velocidade média de 80 km/h, leva-se exatamente 2 horas e 55 minutos. Qual seria o tempo gasto se a velocidade fosse de 100 km/h:

Grandeza inversamente pro-

porcional. Velocidade aumenta, tempo diminui.

80 — 175 minutos (aqui você precisa transformar o tempo em minutos) 100 — X

$$\text{Logo: } 100X = 80 \cdot 175 \implies X = \frac{14000}{100} \implies X = 140$$

140 minutos equivalem a duas horas e 20 minutos.

## EXERCÍCIOS DE REGRA DE TRÊS SIMPLES

1. (ENEM) Uma televisão pode ser posicionada de modo que se consiga enxergar os detalhes de uma imagem em alta definição. Considere que a distância ideal, com conforto visual, para se assistir à televisão de 32 polegadas é de 1,8 metro. Suponha que haja uma relação de proporcionalidade direta entre o tamanho da tela (medido em polegada) e a distância ideal. Considere que um espectador dispõe de uma televisão de 60 polegadas e que ele deseja se posicionar em frente a ela, com conforto visual.

A distância da televisão, em metro, em que o espectador deve se posicionar para que tenha conforto visual é mais próxima de

a) 0,33 b) 0,96 c) 157 d) 3,37 e) 3,60

2. (ENEM) Nos shopping centers cos-



tumam existir parques com vários brinquedos e jogos. Os usuários colocam créditos em um cartão, que são descontados por cada período de tempo de uso dos jogos. Dependendo da pontuação da criança no jogo, ela recebe um certo número de tíquetes para trocar por produtos nas lojas dos parques.

Suponha que o período de uso de um brinquedo em certo shopping custa R\$3,00 e que uma bicicleta custa 9200 tíquetes.

Para uma criança que recebe 20 tíquetes por período de tempo que joga, o valor, em reais, gasto com créditos para obter a quantidade de tíquetes para trocar pela bicicleta é

a) 153 b) 460 c) 1218 d) 1380 e) 3066

3. (ENEM) Um confeitiro deseja fazer um bolo cuja receita indica a utilização de açúcar e farinha de trigo em quantidades fornecidas em gramas. Ele sabe que uma determinada xícara utilizada para medir os ingredientes comporta 120 gramas de farinha de trigo e que três dessas xícaras de açúcar correspondem, em gramas, a quatro de farinha de trigo.

Quantos gramas de açúcar cabem em uma dessas xícaras?

a) 30 b) 40 c) 90 d) 160 e) 360

4. Durante o ano de 2020, devido à

pandemia de COVID-19, o mundo viu-se dependente da criação de uma vacina para imunizar a população. No Brasil não foi diferente, e a corrida por uma vacina eficaz só terminou no ano de 2021. A primeira delas foi a Coronavac, produzida pelo Instituto Butantan, que anunciou que a vacina possui 78% de eficácia em casos leves. Isso significa que, se 100 pessoas forem vacinadas, 78 pessoas não terão sintoma algum e 22 pessoas terão sintomas leves.

A partir desse anúncio, iniciou-se a campanha de imunização. Supondo-se que a cidade de Abadia de Goiás (próxima da capital Goiânia) tenha conseguido vacinar toda a sua população, que é de 8.950 habitantes, e considerando-se que toda ela tenha contato com o vírus e que essa proporção seja mantida, a quantidade de pessoas que terão sintomas leves nessa população será de:

a) 6979 b) 6780 c) 2170 d) 1969 e) 1852

5. A água é um dos recursos mais importantes para a manutenção da vida. Infelizmente, ela nem sempre é bem cuidada, o que tem gerado grandes contaminações de água potável em nossa sociedade. Um dos meios de contaminação é o descarte incorreto de óleo de cozinha, em que 1 litro de óleo contamina 25 mil litros de água que poderia ser potável. Preocupado com essa situação, o síndico de um condomínio resolveu colocar

na área comum um tanque para descartar correto desse óleo. Ao final do mês, ele coletou um total de 135,6 litros. Caso esse volume de óleo fosse jogado fora de maneira incorreta, o volume de água contaminada seria de:

- (a) 3 milhões de litros
- (b) 3,2 milhões de litros
- (c) 3,4 milhões de litros
- (d) 3,5 milhões de litros
- (e) 4 milhões de litros

## PORCENTAGEM

A porcentagem nada mais é do que uma multiplicação por uma fração de denominador cem, como veremos nos exemplos a seguir:

$$07\% = \frac{7}{100} = 0,07$$

$$23\% = \frac{23}{100} = 0,23$$

$$45\% = \frac{45}{100} = 0,45$$

**Exemplo 1:** O salário de uma pessoa é de R\$ 1600,00 qual a quantia que ele receberá se o salário aumentar 15% na sua promoção?

$$15\% \text{ de } 1600 = \frac{15}{100} * 1600 = 240$$

Logo o salário será de  $(1600 + 240) = R\$1.840,00$

**Exemplo 2:** Em uma promoção relâmpago, sua compra de R\$ 120,00 ganhou um desconto de 20%. Qual o valor que deverá pagar pela compra?

$$20\% \text{ de } 120 = \frac{20}{100} * 120 = 24$$

Logo, o valor a pagar é de:  $(120 - 24) = R\$ 96,00$

## JUROS SIMPLES

### Terminologia básica:

**Capital (C):** É o valor monetário inicial;

**Juros (J):** É o valor que incide sobre o capital ao longo do tempo, esse tempo no Brasil geralmente é expresso em meses.

**Taxa de Juros (i):** É o valor do juros numa determinada unidade de tempo (que pode ser mês, bimestre, trimestre, semestre, ano, etc.). Exemplo: Para  $i = 5\%$  ao mês: significa que a cada mês, você recebe 5 de juro para cada 100 de capital aplicado.

**Taxas de juros proporcionais** – duas taxas  $i_1$  e  $i_2$ , relativas respectivamente aos períodos de tempos  $n_1$  e  $n_2$ , são proporcionais se, supondo  $n_1$  e  $n_2$  expressos na mesma unidade, então, a taxa semestral de 12% é proporcional à taxa mensal de 2%, pois são proporcionais.

### Taxas de juros equivalen-

**tes** - duas taxas são equivalentes se, a despeito de estarem referidas a períodos de tempos diferentes, produzem montantes iguais, quando aplicadas ao mesmo capital e pelo mesmo prazo.

**Montante** ( $M$ ): É a soma do capital com os juros auferidos:

$$M = C + J$$

O juros é igual ao capital vezes a taxa vezes o período (tempo) em que o dinheiro foi aplicado.

Fórmula do Juros Simples ( $J$ ):

$$J = C \cdot i \cdot n$$

Logo a fórmula do montante substituindo o o juros pela fórmula do juros, fica:

$M = C + C \cdot i \cdot n$ , colocando o 'C' em evidência, temos:

$$M = C(1 + i \cdot n)$$

## EXEMPLOS

1. O capital de R\$ 1.060,00 foi aplicado à taxa de juros simples de 3% ao mês. Qual será o valor do montante, após 5 meses? Montante = ? ; Capital = 1.060,00 ; Taxa = 3% ao mês ; Período = 5 meses.

$$\text{Juros} = C \cdot i \cdot n \rightarrow J = 1060 \cdot 3\% \cdot 5$$

$$\text{Juros} = \text{R\$ } 159,00$$

$$\text{Montante} = C + J \rightarrow M = 1060 + 159 \rightarrow M = \text{R\$ } 1.219,00$$

2. Um capital de R\$ 600,00 aplicado à taxa de juros simples de 20% ao ano, gerou um montante de R\$ 1.080,00 após um certo tempo. Qual foi esse tempo?  $M = 1.080,00$  ;  $C = 600$  ;  $i = 20\% \text{ aa}$  ;  $n = ?$

$$M = C + J \rightarrow 1080 = 600 + J \rightarrow J = 1080 - 600 \rightarrow M = 480$$

$$J = C \cdot i \cdot n \rightarrow \frac{480}{480} = 600 \cdot 20\% \cdot n \rightarrow 480 = 120 \cdot n \rightarrow n = \frac{480}{120} \rightarrow n = 4 \text{ Logo o período é de 4 anos, pois a taxa foi dada em anos.}$$

3. A que taxa devemos aplicar o capital de R\$ 10.000,00, no regime de capitalização simples, para que após 7 meses, o montante seja de R\$ 12.100,00?  $C = 10.000,00$  ;  $n = 7 \text{ meses}$  ;  $M = 12.100,00$  ;  $i = ?$

$$M = C + J \rightarrow 12100 = 10000 + J \rightarrow J = 12100 - 10000 \rightarrow J = 2100$$

$$J = C \cdot i \cdot n \rightarrow 2100 = 10000 \cdot 7 \cdot i \rightarrow i = \frac{2100}{70000} \rightarrow i = 0,03 \rightarrow i = 3\%. \text{ A taxa é de 3\% ao mês.}$$

4. Quanto renderá de juros a quantia de R\$ 1.000,00, aplicada no regime de capitalização simples, com taxa de 0,6% ao mês, ao final de 4 anos e 6 meses?  $C = 1000$  ;  $i = 0,6\% \text{ am}$  ;  $n = 54 \text{ meses } (4 \times 12 + 6 = 54)$  ;  $J = ?$

$$J = C \cdot i \cdot n.$$

$$J = 1000 \cdot 0,6\% \cdot 54.$$

$$J = \text{R\$ } 324,00.$$

O valor renderá R\$ 324,00.

## EXERCÍCIOS PORCENTAGEM E JUROS SIMPLES

1. (ENEM) Uma ponte precisa ser dimensionada de forma que possa ter três pontos de sustentação. Sabe-se que a carga máxima suportada pela ponte será de 12 t. O ponto de sustentação central receberá 60% da carga será distribuído igualmente entre os outros dois pontos de sustentação. No caso de carga máxima, as cargas recebidas pelos três pontos de sustentação serão, respectivamente,

- (a) 1,8 t; 8,4 t; 1,8 t.
- (b) 3,0 t; 6,0 t; 3,0 t.
- (c) 2,4 t; 7,2 t; 2,4 t.
- (d) 3,6 t; 4,8 t; 3,6 t.
- (e) 4,2 t; 3,6 t; 4,2 t.

2. (UERJ) O cálculo errado da gorjeta levou os dois amigos a pagarem uma conta de R\$ 58,00, quando o valor correto a ser pago deveria ser R\$ 18,00 + 10% de R\$ 18,00. Se soubessem um pouquinho de aritmética, esses clientes poderiam ter economizado, em reais, a quantia de:

- a) 36,20 b) 38,20 c) 39,00 d) 48,20

3. (ENEM) Um laboratório realiza exames em que é possível observar a taxa de glicose de uma pessoa. Os resultados são analisados de acordo com o quadro a seguir:

Hipoglicemia	taxa de glicose menor ou igual a 70 mg/dL
Normal	taxa de glicose maior que 70 mg/dL e menor ou igual a 100 mg/dL
Pré-diabetes	taxa de glicose maior que 100 mg/dL e menor ou igual a 125 mg/dL
Diabetes Melito	taxa de glicose maior que 125 mg/dL e menor ou igual a 250 mg/dL
Hiperglicemia	taxa de glicose maior que 250 mg/dL

Um paciente fez um exame de glicose nesse laboratório e comprovou que estava com hiperglicemia. Sua taxa de glicose era de 300mg/dL. Seu médico prescreveu um tratamento em duas etapas. Na primeira etapa ele conseguiu reduzir sua taxa em 30% e na segunda etapa em 10%

Ao calcular sua taxa de glicose após as duas reduções, o paciente verificou que estava na categoria de:

- (a) hipoglicemia.
- (b) normal.
- (c) pré-diabetes.
- (d) diabetes melito.
- (e) hiperglicemia.

4. (ENEM) O Brasil é um país com uma vantagem econômica clara no terreno dos recursos naturais, dispondo de uma das maiores áreas com vocação agrícola do mundo. Especialistas calculam que, dos 853 milhões de hectares do país, as cidades, as reservas indígenas e as áreas de preservação, incluindo florestas e mananciais, cubram por volta de 470 milhões

de hectares. Aproximadamente 280 milhões se destinam à agropecuária, 200 milhões para pastagens e 80 milhões para a agricultura, somadas as lavouras anuais e as perenes, como o café e a fruticultura.

FORTES, G. Recuperação de pastagens é alternativa para ampliar cultivos. Folha de S. Paulo, 30 out. 2011.

De acordo com os dados apresentados, o percentual correspondente à área utilizada para agricultura em relação à área do território brasileiro é mais próximo de a.32,8%.

a) 28,6% b) 10,7% c) 9,4% d) 8,0%

5. (ENEM2AP) Uma fábrica de papel higiênico produz embalagens com quatro rolos de 30 m cada, cujo preço para o consumidor é R\$ 3,60. Uma nova embalagem com dez rolos de 50 m cada, de mesma largura, será lançada no mercado. O preço do produto na nova embalagem deve ser equivalente ao já produzido, mas, para incentivar as vendas, inicialmente o preço de venda terá um desconto de 10%.

Para que isso aconteça, o preço de venda da nova embalagem, em real, deve ser:

a) 8,10 b) 9,00 c) 9,90 d) 13,50 e)

15

6. (ENEM) Em uma empresa de

móveis, um cliente encomenda um guarda-roupas nas dimensões 220 cm de altura, 120 cm de largura e 50 cm de profundidade. Alguns dias depois, o projetista, com o desenho elaborado na escala 1:8, entra em contato com o cliente para fazer sua apresentação. No momento da impressão, o profissional percebe que o desenho não caberia na folha de papel que costumava usar. Para resolver o problema, configurou a impressora para que a figura fosse reduzida em 20%.

A altura, a largura e a profundidade do desenho impresso para a apresentação serão, respectivamente:

(a) 22,00 cm, 12,00 cm e 5,00 cm

(b) 27,50 cm, 15,00 cm e 6,25 cm

(c) 34,37 cm, 18,75 cm e 7,81 cm

(d) 35,20 cm, 19,20 cm e 8,00 cm

(e) 44,00 cm, 24,00 cm e 10,00 cm

7. (ENEM) O LIRAa, Levantamento Rápido de Índice de Infestação por Aedes aegypti, consiste num mapeamento da infestação do mosquito Aedes aegypti. O LIRAa é dado pelo percentual do número de imóveis com focos do mosquito, entre os escolhidos de uma região em avaliação. O serviço de vigilância sanitária de um município no mês de outubro do ano corrente, analisou o LIRAa de cinco

bairros que apresentaram o maior índice de infestação no ano anterior. Os dados obtidos para cada bairro foram:

- I. 14 imóveis com focos de mosquito em 400 imóveis no bairro;
- II. 6 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro;
- III. 13 imóveis com focos de mosquito em 520 imóveis no bairro;
- IV. 9 imóveis com focos de mosquito em 360 imóveis no bairro;
- V. 15 imóveis com focos de mosquito em 500 imóveis no bairro;

O setor de dedetização do município definiu que o direcionamento das ações de controle iniciarão pelo bairro que apresentou o maior índice do LIRAa.

As ações de controle iniciarão pelo bairro:

- a) I b) II c) III d) IV e) V

8. (ENEM) Uma organização não governamental divulgou um levantamento de dados realizado em algumas cidades brasileiras sobre saneamento básico. Os resultados indicam que somente 36% do esgoto gerado nessas cidades é tratado, o que mostra que 8 bilhões de litros de esgoto sem nenhum tratamento são lançados todos os dias nas águas. Uma campanha para melhorar o saneamento básico nessas cidades tem

como meta a redução da quantidade de esgoto lançado nas águas diariamente, sem tratamento, para 4 bilhões de litros nos próximos meses.

Se o volume de esgoto gerado permanecer o mesmo e a meta dessa campanha se concretizar, o percentual de esgoto tratado passará a ser:

- a) 72% b) 68% c) 64% d) 54% e) 18%

9. (ENEM2aAP) Em certa loja de roupas, o lucro na venda de uma camiseta é de 25% do preço de custo da camiseta pago pela loja, Já o lucro na venda de uma bermuda é de 30% do preço de custo da bermuda, e na venda de uma calça o lucro é de 20% sobre o preço de custo da calça. Um cliente comprou nessa loja duas camisetas, cujo preço de custo foi R\$ 40,00 cada uma, uma bermuda que teve preço de custo de R\$ 60,00 e duas calças, ambas com mesmo preço de custo. Sabe-se que, com essa compra, o cliente proporcionou um lucro de R\$ 78,00 para a loja.

Considerando essas informações, qual foi o preço de custo, em real, pago por uma calça?

- a) 90 b) 100 c) 125 d) 195 e) 200

## PRINCÍPIO DE CONTAGEM

**Princípio Fundamental da Contagem:** é o conceito principal



ensinado na análise combinatória. A partir dele que se desenvolveram os demais conceitos dessa área e as fórmulas de fatorial, combinação, arranjo, permutação. Entender esse princípio é essencial para compreender situações que envolvem contagem.

Esse princípio diz que, se eu preciso tomar mais de uma decisão e cada uma delas pode ser tomada de  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (diversas) maneiras, para sabermos a quantidade de formas que essas decisões podem ser tomadas simultaneamente, basta calcular o produto dessas possibilidades.

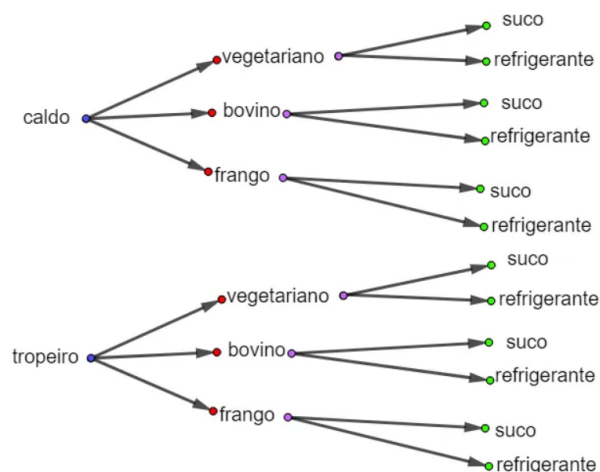
O que é o princípio fundamental da contagem?

O princípio fundamental da contagem é **uma técnica para calcularmos de quantas maneiras decisões podem combinar-se**. Se uma decisão pode ser tomada de " $n$ " maneiras e outra decisão pode ser tomada de " $m$ " maneiras, o número de maneiras que essas decisões podem ser tomadas simultaneamente é calculado pelo produto de " $n \cdot m$ ".

Analisar todas as combinações possíveis sem utilizar o princípio fundamental da contagem pode ser bastante trabalhoso, o que faz com que a fórmula seja muito eficiente.

**Ex.:** Em um restaurante, é oferecido o famoso prato feito. Todos os pratos possuem arroz, e o cliente

pode escolher uma combinação entre 3 possibilidades de carne (bovina, de frango e vegetariana), 2 tipos de feijão (caldo ou tropeiro) e 2 tipos de bebida (suco ou refrigerante). De quantas maneiras distintas um cliente pode fazer o pedido?



Fonte: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/fatorial-principio-fundamental-da-contagem.htm>

Observe que há 12 possibilidades para escolher, mas seria possível chegar a esse número realizando a multiplicação das possibilidades por meio do princípio fundamental da contagem, logo o número de combinações de pratos possíveis poderia ser calculado por:

$$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$$

Perceba que, quando meu interesse é saber somente o total de possibilidades, realizar a multiplicação é muito mais rápido do que construir qualquer esquema para analisar,

o que pode ser bastante trabalhoso, caso haja mais e mais possibilidades.

Um exemplo de aplicação deste princípio são as senhas utilizadas em sistemas de informática:

Um caracter alfanumérico pode ter 10 números, 26 letras e 30 caracteres especiais mais o espaço. Logo para um caracter, temos 67 combinações possíveis, para uma senha de 4 caracteres, temos  $67 \cdot 67 \cdot 67 \cdot 67$  combinações que totalizam  $20 \cdot 151 \cdot 121$  combinações possíveis.

Outra aplicação é no estudo das probabilidades. Para calculá-las, precisamos saber a quantidade de casos possíveis e a quantidade de casos favoráveis. A contagem dessa quantidade de casos possíveis e favoráveis pode ser feita por meio do princípio fundamental da contagem. Esse princípio gera também as fórmulas de permutação, combinação e arranjo.

Exemplo: Carlos lançou dois dados e duas moedas e deseja saber quantas são as possibilidades totais de combinações possíveis: Como ele fez? Ao lançarmos duas moedas e dois dados temos as seguintes possibilidades:

**Moeda:** cara ou coroa (2 possibilidades)  $2 \cdot 2 = 4$  possibilidades.

**Dado:** 1, 2, 3, 4, 5, 6 (6 possibilidades)  $6 \cdot 6 = 36$  possibilidades.

Então, são 4 possibilidades com as moedas e 36 possibilidades com os dados, neste caso é só fazer ( $4 \times 36 = 144$ ), logo são 144 possibilidades no total.

## EXERCÍCIOS PRINCÍPIO DE CONTAGEM

1. João está em um hotel e pretende ir visitar o centro histórico da cidade. Partindo do hotel existem 3 linhas de metrô que levam ao shopping e 4 ônibus que se deslocam do shopping para o centro histórico. De quantas maneiras Ele pode chegar ao Centro Histórico?
2. Um restaurante possui em seu cardápio 2 tipos de entradas, 3 tipos de pratos principais e 2 tipos de sobremesas. Quantos menus poderiam ser montados para uma refeição com uma entrada, um prato principal e uma sobremesa?
3. Ana estava se organizando para viajar e colocou na mala 3 calças, 4 blusas e 2 sapatos. Quantas combinações Ana pode formar com uma calça, uma blusa e um sapato?
4. Um professor elaborou uma prova com 5 questões e os alunos deveriam respondê-la assinalando verdadeiro (V) ou falso (F) para cada uma das questões. De quantas maneiras distintas o teste poderia ser respondido?
5. De quantas maneiras um número



com 3 algarismos distintos pode ser formado utilizando 0, 1, 2, 3, 4 e 5?

6. (Unifor – CE) Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar a foto?

a) 24 b) 48 c) 96 d) 120 e) 720

7. (UFJF – MG) Newton possui 9 livros distintos, sendo 4 de Geometria, 2 de Álgebra e 3 de Análise. O número de maneiras pelas quais Newton pode arrumar esses livros em uma estante, de forma que os livros de mesmo assunto permaneçam juntos, é:

a) 288 b) 296 c) 864 d) 1728 e) 2130

8. (ITA – SP) Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes (juntos), mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

a) 144 b) 180 c) 240 d) 288 e) 360

9. (ENEM/2012) O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi es-

condido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há...

(a) 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

(b) 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

(c) 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

(d) 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

(e) 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

10. (UFMS-RS) Num acidente rodoviário, após ouvir várias testemunhas, conclui-se que o motorista culpado pelo acidente dirigia um carro cuja placa era constituída de 2 vogais distintas e quatro algarismos diferentes, sendo que o algarismo das unidades era o 5. Isso não facilitou o trabalho de polícia, pois o número de placas suspeitas é de:

- (a) 10 800
- (b) 10 080
- (c) 8 100
- (d) 1 080
- (e) 524

11. (UEPG-PR) Um trem é constituído de uma locomotiva e cinco vagões distintos, um dos quais é um vagão-restaurante. Sabendo-se que a locomotiva deve ir à frente e que o vagão-restaurante não pode ser colocado imediatamente após a locomotiva, o número de modos diferentes em que a composição pode ser montada é igual a:

- a) 18 b) 96 c) 120 d) 360 e) 600

12. (UTFPR) O número de palavras código de 5 letras que podem ser formadas com as letras a, b, c, d, e, f, g, h, sem que nenhuma letra possa ser repetida, é:

- a) 56 b) 120 c) 720 d) 2401 e) 6720

13. O número de anagramas da palavra CANUDO que começam e terminam por vogal é:

- a) 24 b) 48 c) 96 d) 120 e) 144

14. (ENEM – 2017) Uma empresa construirá sua página na internet e espera atrair um público de aproximadamente um milhão de clientes. Para acessar essa página, será necessária uma senha com formato a

ser definido pela empresa. Existem cinco opções de formato oferecidas pelo programador, descritas no quadro, em que “L” e “D” representam, respectivamente, letra maiúscula e dígito.

I. LDDDDDD

II. DDDDDDD

III. LLDDDD

IV. DDDDD

V. LLLDD

As letras do alfabeto, entre as 26 possíveis, bem como os dígitos, entre os 10 possíveis, podem se repetir em qualquer das opções.

A empresa quer escolher uma opção de formato cujo número de senhas distintas possíveis seja superior ao número esperado de clientes, mas que esse número não seja superior ao dobro do número esperado de clientes. A opção que mais se adequa às condições da empresa é

- a) I b) II c) III d) IV e) V

## FATORIAL

**Fatorial** é uma ferramenta utilizada para simplificar os cálculos. É muito comum vê-la em questões de PFC e da própria Análise Combinatória. O seu símbolo é o sinal de exclamação “!”, e toda vez que aparecer

seguido de um número, significa que faremos o fatorial dele.

O fatorial de um número nada mais é que multiplicar o número com o fatorial, por todos os seus antecessores inteiros, até chegar ao 1.

Por exemplo:

$$1! = 1 \cdot 1 = 1$$

$$2! = 2 \cdot 1 = 2$$

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$$

E por aí vai...

Existem situações nas quais os exercícios sobre fatorial precisam ser simplificados para serem resolvidos. Simplificar um fatorial é tranquilo, basta escolher em qual número você quer parar a sequência.

Exemplo:

$$5!$$

$$5 \cdot 4!$$

$$5 \cdot 4 \cdot 3!$$

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2!$$

As formas acima são diferentes maneiras de se escrever  $5!$ , pois possuem o mesmo resultado, no caso, 120.

Quando você escolher onde parar a sequência, pode fazer como se

vê abaixo:

$$\frac{7!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}} =$$

$$7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

## EQUAÇÕES FATORIAIS

Os principais exercícios sobre fatorial aparecem em forma de equações. Veja o exemplo abaixo:

$$\text{Exemplo: } X + 40 = 5!$$

Primeiro resolvemos o fatorial, para depois resolver o restante da equação ...

$$X + 40 = 120$$

$$X = 120 - 40$$

$$X = 80$$

## OPERAÇÕES COM FATORIAL

### 1. Soma com fatorial:

$$5! + 4!.$$

$$(5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) + (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1).$$

$$120 + 24 = 144.$$

### 2. Subtração com fatorial:

$$7! - 5!.$$

$$(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) - (5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1).$$

$$5040 - 120 = 4920$$

### 3. Multiplicação com Fatorial:

$$3! \cdot 4!.$$

$$(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = 144.$$

#### 4. Divisão com Fatorial:

$$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!}$$

$$\frac{6 \cdot 5 \cdot \cancel{4!}}{\cancel{4!}}$$

$$6 \cdot 5 = 30.$$

#### 5. Incógnita no fatorial:

Pode acontecer do fatorial aparecer com letras, mas o processo de simplificação é o mesmo. Basta escrever reduzindo até o formato em que for possível cortar para simplificar.

**Veja estes casos:**

$$(a) \frac{n!}{(n-2)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)!}$$

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot \cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}}$$

$$n \cdot (n-1) = (n^2 - n)$$

$$(b) \frac{(n+2)!}{(n-1)!}$$

$$\frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot (n) \cdot (n-1)!}{(n-1)!}$$

$$\frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot (n) \cdot \cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}}$$

$$(n+2) \cdot (n+1) \cdot (n)$$

$$(n^2 + n + 2n + 2) \cdot (n)$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n$$

(c) (UNIFOR) - A soma de todos os números primos que são divisores de 30! é :

a) 140 b) 139 c) 132 d) 130 e) 129

**Solução:**

Seja  $S = 30!$ , então

$$S = 30.29.28...3.2.1$$

Sabemos que como  $S$  é obtido pelo produto dos números naturais de 1 a 30, logo todos os números primos que aparecem nesse intervalo são divisores de  $S = 30!$ , portanto a soma é igual a

$$2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13$$

$$+17 + 19 + 23 + 29 = 129$$

opção "e"

(d) se  $(n+1)! = 10n!$ , então  $(n-1)^2$  vale :

a) 100 b) 81 c) 64 d) 36 e) 25

**solução :**

$$(n+1)! = 10n!$$

$$(n+1) \cdot n! = 10n!,$$

dividimos tudo por  $n!$ , então

$$n+1 = 10 \rightarrow n = 10-1 \rightarrow n = 9$$

portanto,

$$(n-1)^2 = (9-1)^2 \rightarrow 8^2 = 64.$$

opção "c"

**Observação:** Um número negativo diminui quando se distancia de zero e aumenta quando se aproxima de zero, por isso -1 é maior que -2. Logo, se temos  $n!$  a forma de fazê-lo é  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$  etc. Você escolhe onde quer parar para simplificar.

## EXERCÍCIOS SOBRE FATORIAL

1. (UFF) O produto  $20 \times 18 \times 16 \times 14 \times \dots \times 6 \times 4 \times 2$  é equivalente a:

- (a)  $20!/2$
- (b)  $2 \cdot 10!$
- (c)  $20!/2 \cdot 10!$
- (d)  $2^{10} \cdot 10!$
- (e)  $20!/10!$

2. (UNIFOR) – A soma de todos os números primos que são divisores de  $30!$  é :

- a) 140 b) 139 c) 132 d) 130 e) 129

3. (Unifor – CE) Um casal e seus quatro filhos vão ser colocados lado a lado para tirar uma foto. Se todos os filhos devem ficar entre os pais, de quantos modos distintos os seis podem posar para tirar a foto?

- a) 24 b) 48 c) 96 d) 120 e) 720

4. (ITA – SP) Quantos números de seis algarismos distintos podemos formar usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5 e 6, nos quais o 1 e o 2 nunca ocupam posições adjacentes (juntos), mas o 3 e o 4 sempre ocupam posições adjacentes?

- a) 144 b) 180 c) 240 d) 288 e) 360

## ANÁLISE COMBINATÓRIA

O que é **Análise Combinatória**? Para começar a fazer um resumo de análise combinatória, precisamos entender primeiro o que ela significa.

A análise combinatória pode ser definida como sendo um conjunto de técnicas e métodos que estudam as combinações e possibilidades das variáveis de um conjunto. Constituído por elementos finitos, a análise combinatória se baseia em parâmetros que possibilitam a contagem.

Entender o que é análise combinatória é fundamental para quem deseja se sair bem na prova do ENEM ou em outro vestibular, pois esse tema é bastante frequente nas provas de Matemática. Além de envolver cálculos matemáticos, a análise combinatória também abrange fatores lógicos.

A análise combinatória se resume em 6 procedimentos principais:

Fatorial; Princípio fundamental da contagem; Arranjos simples; Permutação simples; Combinação; Permutação com elementos repetidos.

## ARRANJO SIMPLES

O arranjo simples é o agrupamento dos elementos de um conjunto que dependem da ordem e da natureza dos mesmos.

Para obter o arranjo simples de

$p$  elementos de um conjunto total  $n$ , onde  $p \leq n$ , utiliza-se a seguinte expressão:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \quad \text{ou} \quad A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

fórmula do arranjo

$A_{n,p}$  = Arranjo de  $p$  elementos de um total  $n$

$n$  = elementos totais do espaço amostral

$p$  = números de elementos no arranjo.

**Exemplo1:** Com os algarismos: 2, 3, 4, 5 e 6, quantos números de três algarismos distintos podemos formar?

**Resolução:** Formar um número de três algarismos distintos pode ser considerado um arranjo simples e a ação constituída de três etapas sucessivas, a saber:

1ª) escolha do algarismo das centenas: temos cinco possibilidades;

2ª) escolha do algarismo das dezenas: como não pode haver repetição de algarismo, devemos ter um algarismo diferente do algarismo escolhido para a centena. Assim, há quatro possibilidades;

3ª) escolha do algarismo das unidades: devemos ter um algarismo

diferente dos dois anteriores (centena e dezena). Assim, há apenas três possibilidades.

Aplicando o princípio fundamental da contagem (PFC), temos:  $5 \times 4 \times 3 = 60$  números. Logo,

$$A_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} =$$

$$\frac{5!}{2!} \rightarrow A_{5,3} = \frac{5!}{(5-3)!}$$

**Exemplo2:** Considere uma votação para escolher um representante e um vice-representante de uma turma, com 20 alunos. O mais votado será o representante e o segundo mais votado o vice-representante. Dessa maneira, de quantas maneiras distintas a escolha poderá ser feita? Nesse caso a ordem é importante, visto que altera o resultado final.

$$A_{20}^2 = \frac{20!}{(20-2)!} = \frac{20!}{18!} =$$

$$\frac{20 \cdot 19 \cdot 18!}{18!} = 380$$

Logo, o arranjo pode ser feito de 380 maneiras diferentes.

## EXERCÍCIOS DE ARRANJO SIMPLES

1. (Sefaz RJ – Coperj 2010). Em uma fila do cinema há 5 cadeiras consecutivas vazias. O número de manei-

ras que três pessoas, A, B e C, podem sentar-se nelas é:

a) 10 b) 15 c) 30 d) 45 e) 60

2. (FUVEST – 2010) Maria deve criar uma senha de 4 dígitos para sua conta bancária. Nessa senha, somente os algarismos 1,2,3,4,5 podem ser usados e um mesmo algarismo pode aparecer mais de uma vez. Contudo, supersticiosa, Maria não quer que sua senha contenha o número 13, isto é, o algarismo 1 seguido imediatamente pelo algarismo 3. De quantas maneiras distintas Maria pode escolher sua senha?

a) 551 b) 552 c) 553 d) 554 e) 555

3. Em uma comissão de 10 professores devem ser escolhidos um coordenador e um subcoordenador. De quantas maneiras eles podem ser escolhidos?

4. De quantas maneiras 4 amigos entre 10 podem se colocar em uma foto?

5. Quantas são as palavras de 5 letras distintas de um alfabeto de 26 letras?

## PERMUTAÇÃO SIMPLES

Permutação simples é um caso particular de arranjo, onde os elementos irão formar agrupamentos que se diferenciam somente pela ordem. As permutações simples dos elementos P, Q e R são: PQR, PRQ, QPR, QRP, RPQ, RQP.

Se chamarmos de  $P_n$  a permutação simples de  $n$  elementos distintos, podemos calculá-la através da seguinte fórmula:

$$P_n = n!$$

Onde  $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1$  (fatorial).

## EXERCÍCIOS DE PERMUTAÇÃO SIMPLES

1. Determine o número de anagramas que podem ser formados com as letras do nome ALEMANHA.

2. Utilizando o nome COPACABANA, calcule o número de anagramas formados desconsiderando aqueles em que ocorrem repetições consecutivas de letras.

3. Em uma prova composta de 20 questões envolvendo V ou F, de quantas maneiras distintas teremos doze respostas V e oito respostas F?

4. Determine o número de permutações simples de 5 elementos distintos.

5. Determine o número de anagramas da palavra SAULO que começam por vogal.

## RAZÃO E PROPORÇÃO

**Razão** é uma comparação entre duas grandezas, e também é o coeficiente entre dois números.



**Proporção** é uma igualdade entre duas razões ou quando duas razões possuem o mesmo resultado.

Observe que a razão está relacionada com a divisão.

No dia-a-dia, utilizamos muito a razão e a proporção, um exemplo disso seria as medidas para se preparar uma receita de comida ou as medidas para se fazer determinada massa de cimento para assentar tijolos e outra para rebocar os mesmos.

**Observação:** Quando se calcula uma razão entre duas grandezas, as unidades de medidas SEMPRE terão que ser as mesmas.

1. **Exemplo de razão:**  $\frac{A}{B}$ , com

$$B \neq 0 \text{ ou } A : B, \text{ com } B \neq 0.$$

2. **Exemplo de Proporção:**  $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$   
onde A, B, C e D são  $\neq 0$ .

3. Qual a razão entre 80 e 40?

$$\frac{80}{40} = 2.$$

4. Se o denominador for igual a 100, temos uma razão do tipo porcentagem, também chamada de razão centesimal.

$$40\% = \frac{40}{100} = 0,40.$$

Além disso, nas razões, o coeficiente que está localizado acima é chamado de antecedente (A), enquanto o de baixo é chamado de consequente (B).

$$\text{Ex: } \frac{A = \text{Antecedente}}{B = \text{Consequente}}.$$

5. Qual o valor de x na proporção seguinte:

$$\frac{1}{4} = \frac{13}{x}.$$

Para determinarmos o valor da variável x, temos que fazer a Regra de 3 Simples, ou seja, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos:

$$1 \cdot x = 4 \cdot 13 \rightarrow x = 4 \cdot 13.$$

$$x = 52.$$

6. **Densidade.** A densidade de um corpo é a razão entre a sua massa e o seu volume. A densidade também será sempre acompanhada de uma unidade, que depende das unidades escolhidas para medir a massa e o volume. Alguns exemplos de unidades para a densidades são g/cm<sup>3</sup>, kg/m<sup>3</sup> etc.

$$\text{Densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} =$$

$$\frac{m \rightarrow \text{massa}}{v \rightarrow \text{volume}} = \frac{m}{v}.$$

**Exemplo:** Uma quantidade de óleo de cozinha ocupava completamente uma jarra com 1 litro de volume. Sabe-se que a densidade do óleo é de, aproximadamente, 0,86 g/cm<sup>3</sup>. Determine a massa do óleo, em gramas.

**Solução:**

Como a densidade é dada em g/cm<sup>3</sup>, isso significa que o volume



deve ser dado em  $\text{cm}^3$ . Assim, fazendo a conversão,  $1\text{l} = 1\text{dm}^3 = 1000\text{cm}^3$ .

$$\text{Daí, } \text{densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}} \rightarrow 0,86 = \frac{m}{1000}$$

$$m = 0,86 \cdot 1000 = 860 \text{ g.}$$

Portanto, a massa de óleo contida na jarra é de 860 g.

## EXERCÍCIOS DE RAZÃO E PROPORÇÃO

1. Calcule a razão entre os números:

- (a) 120:20
- (b) 345:15
- (c) 121:11
- (d) 2040:40

2. Qual das proporções abaixo são iguais à razão entre 4 e 6?

- (a) 2 e 3
- (b) 2 e 4
- (c) 4 e 12
- (d) 4 e 8

3. (ENEM 2013) Uma indústria tem um reservatório de água com capacidade para 900  $\text{m}^3$ . Quando há necessidade de limpeza do reservatório, toda a água precisa ser escoada. O escoamento da água é feito por seis ralos, e dura 6 horas quando o reservatório está cheio. Esta indústria construirá um novo reservatório, com capacidade de 500  $\text{m}^3$ , cujo escoamento da água deverá ser realizado

em 4 horas, quando o reservatório estiver cheio. Os ralos utilizados no novo reservatório deverão ser idênticos aos do já existente.

A quantidade de ralos do novo reservatório deverá ser igual a:

- a) 2 b) 4 c) 5 d) 8 e) 9

4. (ENEM 2013) Para se construir um contrapiso, é comum, na constituição do concreto, se utilizar cimento, areia e brita, na seguinte proporção: 1 parte de cimento, 4 partes de areia e 2 partes de brita. Para construir o contrapiso de uma garagem, uma construtora encomendou um caminhão betoneira com 14 $\text{m}^3$  de concreto.

Qual é o volume de cimento, em  $\text{m}^3$ , na carga de concreto trazido pela betoneira?

- a) 1,75 b) 2,00 c) 2,33 d) 4 e) 8

5. (ENEM 2013) O contribuinte que vende mais de R\$ 20 mil de ações em Bolsa de Valores em um mês deverá pagar Imposto de Renda. O pagamento para a Receita Federal consistirá em 15% do lucro obtido com a venda das ações.

Disponível em: [www1.folha.uol.com.br](http://www1.folha.uol.com.br). Acesso em: 26 abr. 2010 (adaptado).

Um contribuinte que vende por R\$ 34 mil um lote de ações que custou R\$ 26 mil terá de pagar de Imposto de Renda à Receita Federal o valor de:

- (a) R\$ 900,00.
- (b) R\$ 1200,00.

(c) R\$ 2100,00.

(d) R\$ 3900,00.

(e) R\$ 5100,00.

6. Um concurso para preencher 200 vagas recebeu 1600 inscrições. Quantos candidatos há para cada vaga?

a) 4   b) 6   c) 8   d) 12

7. Gustavo estava treinando pênaltis caso precisasse na final dos jogos de futebol escolares. Sabendo que de 14 chutes ao gol ele acertou 6, qual a razão do número de acertos para o total de chutes?

a)  $\frac{3}{5}$    b)  $\frac{3}{7}$    c)  $\frac{7}{3}$    d)  $\frac{5}{3}$

8. Determine o valor de x nas proporções a seguir.

(a)  $2/6 = 9/x$

(b)  $1/3 = y/12$

(c)  $z/10 = 6/5$

(d)  $8/t = 2/15$

9. A distância entre as cidades do Rio de Janeiro e São Paulo é de, aproximadamente, 400 km. Um carro levou 5 horas para percorrer esse trajeto. Determine sua a velocidade média.

10. UFOP MG 2008 - Duas torneiras são utilizadas para encher um tanque vazio. Sabendo que sozinhas elas levam 10 horas e 15 horas, respectivamente, para enchê-lo. Quanto tempo as duas torneiras juntas levam para encher o tanque?

(a) 6 horas.

(b) 12 horas e 30 minutos.

(c) 25 horas.

(d) 8 horas e 15 minutos.

## RELAÇÃO DEP. ENTRE GRANDEZAS

As relações de dependência entre grandezas podem ser facilmente observadas no nosso dia a dia. Uma grandeza é tudo o que é suscetível de ser acrescentado ou diminuído. Sendo assim, se uma grandeza pode ser acrescida ou diminuída e ao mesmo tempo se relacionar com outra grandeza, significa que dependendo da relação estabelecida entre as duas, essa segunda grandeza também vai ser acrescida ou diminuída de algum valor.

Vamos aprender as diferenças entre grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais para que você fique afiado para o ENEM!

Comprimento, massa, velocidade, tempo, volume, capacidade e temperatura são alguns exemplos de grandezas que constantemente aparecem no nosso dia a dia. As grandezas podem se relacionar entre si, como por exemplo, ao calcularmos a velocidade, relacionamos o espaço percorrido com o tempo. Ou seja, uma medida de comprimento com uma medida de tempo.

As grandezas relacionadas são classificadas de duas formas diferentes: grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais. Vejamos cada uma delas...

### **Grandezas Diretamente Proporcionais:**

São grandezas que, quando uma grandeza aumenta ou diminui, a outra aumenta ou diminui na mesma proporção.

Observe o exemplo abaixo e entenda:

**Exemplo 1:** Quando uma pessoa fala que seu veículo faz 13 Km por 1L, ela está querendo dizer que este veículo percorre 13 km com 1 litro de combustível. Em uma viagem de 1600 km, quantos litros de combustível serão gastos?

Resposta: Perceba que as grandezas que estão sendo relacionadas são diferentes entre si. Estamos relacionando uma medida de comprimento, que é o quilômetro, e uma medida de capacidade, que é o litro.

Geralmente, para solucionar questões como essa, utilizamos a famosa regra de três, montando o esquema

13 km equivale 1 L 1600 km equivale x L

Resultando em:

$$13x = 1600 \rightarrow x = \frac{1600}{13} \approx$$

$\approx 123,07$ .

Serão gastos 123,07 litros de combustível para efetuar a viagem.

Atente que ao aumentarmos o percurso, a quantidade de combustível também aumenta. Esse aumento ocorreu de uma forma diretamente proporcional a distância percorrida. A recíproca também é verdadeira: se diminuirmos o percurso, o consumo de combustível também será menor.

### **Grandezas Inversamente Proporcionais:**

O nome sugere, inversamente, ou seja, quando uma grandeza aumenta, a outra grandeza diminui na mesma proporção, ou seja, se relacionam entre si de forma inversa. Sendo assim, se triplicarmos uma grandeza, a outra é dividida por 3; se elevarmos uma grandeza ao quadrado, na outra é aplicada a raiz quadrada.

A grosso modo, pode-se dizer que grandezas são inversamente proporcionais quando uma aumenta e a outra diminui, e vice-versa.

Um exemplo clássico de grandezas inversamente proporcionais são o tempo e a velocidade. Quando a velocidade aumenta, o tempo de deslocamento de um ponto até outro

diminui.

Veja em um exemplo como isso funciona:

**Exemplo 2:** Qual é a velocidade de um trem que gasta 2 horas em um percurso, sabendo que gastaria 6 horas nesse mesmo percurso se estivesse a 30 km/h?

**Resposta:** Para solucionar esse exemplo você precisa lembrar das regrinhas utilizadas na regra de três.

Então, construímos uma proporção entre a velocidade do trem e o tempo gasto no percurso. essa proporção é a seguinte:

$$\frac{x}{30} = \frac{2}{6}$$

Mas por ser INVERSAMENTE proporcional, invertemos uma das frações, no caso a segunda:

$$\frac{x}{30} = \frac{6}{2} \rightarrow 2x = 30 \cdot 6 \rightarrow$$

$$x = \frac{180}{2} \rightarrow x = 90 \text{ Km/h.}$$

## REGRA DE TRÊS COMPOSTA

Quando trabalhamos com três ou mais grandezas, direta ou inversamente proporcionais e, num determinado problema, existem seis valores, dos quais cinco são conhecidos

e apenas um desconhecido, pode-se encontrar o valor da incógnita através da regra de três composta.

**Exemplo:** Se 8 homens levam 12 dias montando 16 máquinas, então, nas mesmas condições, 15 homens levarão quantos dias para montar 50 máquinas?

Vamos chamar o valor desconhecido de x e montar uma tabela contendo os valores:

Grandezas inversamente proporcionais		Grandezas diretamente proporcionais
QUANTIDADE DE HOMENS	TEMPO DE MONTAGEM (DIAS)	NÚMERO DE MÁQUINAS
8	12	16
15	x	50

Analisemos as grandezas a fim de saber se são direta ou inversamente proporcionais entre si.

Fixando a grandeza quantidade de homens, vamos relacionar as grandezas tempo de montagem com número de máquinas. Se dobrarmos o tempo de montagem, dobraremos o número de máquinas. Logo, essas duas grandezas são diretamente proporcionais.

Fixando a grandeza número de máquinas, vamos relacionar as grandezas quantidade de homens com tempo de montagem. Se dobrarmos o número de homens, teremos reduzido à metade o tempo de montagem. Logo, essas duas grandezas são in-

versamente proporcionais.

Sabendo dessas informações, basta escrevermos a proporção de acordo com a tabela acima;

Como temos grandezas inversamente proporcionais, devemos inverter uma das frações;

$$\frac{12}{x} = \frac{8}{15} \cdot \frac{16}{50} \rightarrow \frac{12}{x} = \frac{15}{8} \cdot \frac{16}{50}$$

$$\frac{12}{x} = \frac{240}{400}$$

$$240x = 12 \cdot 400 \rightarrow x = \frac{4800}{240}$$

$\rightarrow x = 20$  dias. Com 15 homens, construirão 50 máquinas em 20 dias.

## EXERCÍCIOS DE GRANDEZAS

1. (UNCISAL – 2019) As equipes M e N classificaram-se para disputar o título anual de um campeonato de voleibol. A equipe campeã, aquela que conseguir 7 vitórias sobre a outra, ganhará R\$ 360.000,00 como prêmio. Devido a problemas estruturais no ginásio em que as partidas aconteciam, a disputa foi encerrada quando a equipe M possuía 6 vitórias e a equipe N, 4 vitórias. Considerando esse placar, as equipes decidiram que a forma mais justa de dividir o prêmio, seria fazê-la de forma proporcional às probabilidades de uma ou outra ser campeã, se as partidas restantes viessem a ser disputadas no “cara ou coroa”.

Nas condições acordadas entre as equipes, as quantias que M e N, respectivamente, deverão receber são:

- (a) R270000,00 e R 90 000,00.
- (b) R324000,00 e R 36 000,00.
- (c) R216000,00 e R 144 000,00.
- (d) R315000,00 e R 45 000,00.
- (e) R240000,00 e R 120 000,00.

2. (ESPM – SP) Em 10 minutos, 27 secretárias com a mesma habilidade digitaram o equivalente a 324 páginas.

Nas mesmas condições, se o número de secretárias fosse 50, em quantos minutos teoricamente elas digitariam 600 páginas?

- (a) 10min
- (b) 45min
- (c) 5min
- (d) 5min e 24seg
- (e) 34min e 29seg

3. (ENEM) Uma escola lançou uma campanha para seus alunos arrecadarem, durante 30 dias, alimentos não perecíveis para doar a uma comunidade carente da região. Vinte alunos aceitaram a tarefa e nos primeiros 10 dias trabalharam 3 horas diárias, arrecadando 12 kg de alimentos por dia. Animados com os resultados, 30 novos alunos somaram-se ao grupo, e passaram a trabalhar 4 horas por dia nos dias seguintes até o término da campanha. Admitindo-se

que o ritmo de coleta tenha se mantido constante, a quantidade de alimentos arrecadados ao final do prazo estipulado seria de:

- a) 920kg b) 800kg c) 720kg  
d) 600kg e) 570kg

4. (UFG) Para encher um recipiente de 5 litros, uma torneira gasta 12 segundos. Uma segunda torneira gasta 18 segundos para encher o mesmo recipiente. Nestas condições, para encher um tanque de 1000 litros, usando as duas torneiras ao mesmo tempo, serão necessários, em minutos:

- a) 20 b) 24 c) 33 d) 50 e) 83

5. (Vunesp) Para uma prova, 150 candidatos deveriam ser acomodados nas salas A, B, C e D de um colégio, com capacidade para receber 60, 50, 40 e 30 candidatos, respectivamente. A organização decidiu preencher inicialmente todos os lugares da sala menor, e os candidatos restantes foram repartidos entre as demais salas de forma diretamente proporcional à capacidade de cada uma. O número de lugares não ocupados na sala de maior capacidade foi igual a:

- a) 8 b) 10 c) 12 d) 14 e) 16

6. (ENEM) Fontes alternativas. Há um novo impulso para produzir combustível a partir de gordura animal. Em abril, a High Plains Bioenergy inaugurou uma biorrefinaria próxima a uma fábrica de processamento de carne suína em Guymon, Oklahoma. A refinaria converte a gordura do porco,

juntamente com o óleo vegetal, em biodiesel. A expectativa da fábrica é transformar 14 milhões de quilogramas de banha em 112 milhões de litros de biodiesel.

Revista Scientific American. Brasil, ago. 2009 (adaptado).

Considere que haja uma proporção direta entre a massa de banha transformada e o volume de biodiesel produzido.

Para produzir 48 milhões de litros de biodiesel, a massa de banha necessária, em quilogramas, será de, aproximadamente,

- (a) 6 milhões.  
(b) 33 milhões.  
(c) 78 milhões.  
(d) 146 milhões.  
(e) 384 milhões.

7. Os ângulos de um triângulo são diretamente proporcionais aos números 3, 7 e 15, então, podemos afirmar que o menor ângulo mede:

- a)  $108^\circ$  b)  $50,4^\circ$  c)  $21,6^\circ$  d)  $42^\circ$   
e)  $50,4^\circ$

8. Os lados de um retângulo são proporcionais a 2 e 3. Sabendo que a sua área é de  $216 \text{ m}^2$ , as dimensões dos retângulos são, respectivamente:

- A) 12 e 18 B) 4 e 54 C) 8 e 27  
D) 10 e 26 E) 13,5 e 16

9. Uma herança de R\$ 1.500.000 foi dividida entre os filhos de forma diretamente proporcional à idade de cada um deles. Sabendo que há três filhos,



com 14, 16 e 20 anos de idade, podemos afirmar que o filho do meio receberá:

- (a) R\$ 600.000
- (b) R\$ 420.000
- (c) R\$ 480.000
- (d) R\$ 500.000
- (e) R\$ 450.000

10. Os ângulos de um quadrilátero são proporcionais a 3, 6, 12, 15. Assim, podemos afirmar que o valor do maior ângulo é:

- .a)  $150^\circ$  .b)  $120^\circ$  .c)  $60^\circ$  .d)  $30^\circ$   
.e)  $135^\circ$

11. A idade de três irmãos é diretamente proporcional a 4, 6 e 10 anos. Sabendo que a soma da idade dos três é igual a 70, podemos afirmar que o mais novo possui:

- (a) 10 anos
- (b) 12 anos
- (c) 14 anos
- (d) 16 anos
- (e) 18 anos

12. Um automóvel faz 35 km com 5 litros de etanol. Realizando uma viagem de uma cidade para outra, com base nesse consumo, qual deve ser a quantidade de etanol necessária para percorrer 170 km?

- (a) 28 litros
- (b) 25 litros
- (c) 20 litros

- (d) 30 litros
- (e) 18 litros

13. Das relações entre as grandezas a seguir, identifique aquela que não é diretamente proporcional.

A) Quantidade de funcionários e produtividade

B) Distância percorrida e consumo do veículo

C) Velocidade do automóvel e tempo para completar o percurso

D) Valor pago pela verdura e peso

14. Um triângulo retângulo possui os lados diretamente proporcionais a 3, 4 e 5. Sabendo que sua hipotenusa é igual a 31 cm, o valor do perímetro desse triângulo é:

- (a) 28,4 cm
- (b) 42,6 cm
- (c) 65 cm
- (d) 74,4 cm
- (e) 82,8 cm

## **P.A. E P.G.**

### **PROGRESSÃO ARITMÉTICA P.A.**

A Progressão Aritmética (P.A.) é uma sequência de números onde a diferença entre dois termos consecutivos é sempre a mesma. Essa diferença constante é chamada de razão da P.A..

Sendo assim, a partir do segundo elemento da sequência, os números que surgem são resultantes da soma da constante com o valor do elemento anterior.

Isso é o que a diferença da progressão geométrica (P.G.), pois nesta, os números são multiplicados pela razão, enquanto na progressão aritmética, eles são somados.

As progressões aritméticas podem apresentar um número determinado de termos (P.A. finita) ou um número infinito de termos (P.A. infinita).

Para indicar que uma sequência continua indefinidamente utilizamos reticências, por exemplo:

A sequência (4, 7, 10, 13, 16, ...) é uma P.A. infinita.

A sequência (50, 40, 30, 20, 10) é uma P.A. finita.

Cada termo de uma P.A. é identificado pela posição que ocupa na sequência e para representar cada termo utilizamos uma letra (normalmente a letra "a") seguida de um número que indica sua posição na sequência.

Por exemplo, o termo  $a_4$  na P.A. (2, 4, 6, 8, 10) é o número 8, pois é o número que ocupa a 4ª posição na sequência.

### Classificação de uma P.A.

De acordo com o valor da razão, as progressões aritméticas são classificadas em:

**Constante:** quando a razão for igual a zero. Por exemplo: (4, 4, 4, 4, 4...), sendo  $r = 0$ .

**Crescente:** quando a razão for maior que zero. Por exemplo: (2, 4, 6, 8, 10...), sendo  $r = 2$ .

**Decrescente:** quando a razão for menor que zero (15, 10, 5, 0, -5,...), sendo  $r = -5$ .

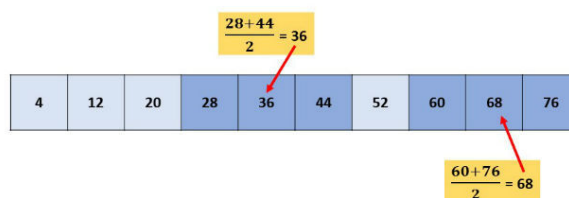
### Propriedades da P.A.

#### 1ª Propriedade:

Em uma P.A. finita, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

#### 2ª Propriedade

Considerando três termos consecutivos de uma P.A., o termo do meio será igual a média aritmética dos outros dois termos.

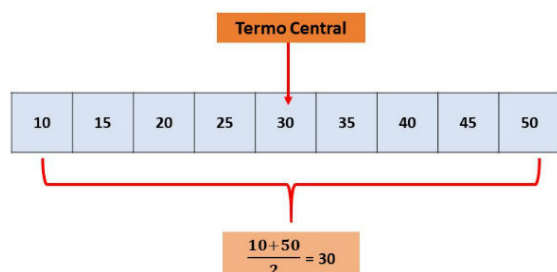


#### 3ª Propriedade

Em uma P.A. finita com número



de termos ímpar, o termo central será igual a média aritmética entre termos equidistantes deste. Esta propriedade deriva da primeira.



### Fórmula do Termo Geral de uma P.A.

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r$$

Onde,

**a<sub>n</sub>**: termo que queremos calcular

**a<sub>1</sub>**: primeiro termo da P.A.

**n**: posição do termo que queremos descobrir

**r**: razão

### Explicação da fórmula:

Como a razão de uma P.A. é constante, podemos calcular seu valor a partir de quaisquer termos consecutivos, ou seja:

$$r = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 =$$

$$a_5 - a_4 = a_6 - a_5 \cdots a_n - a_{n-1}$$

Sendo assim, podemos encon-

trar o valor do segundo termo da P.A. fazendo:

$$a_2 - a_1 = r \rightarrow a_2 = a_1 + r$$

Para encontrar o terceiro termo utilizaremos o mesmo cálculo:

$$a_3 - a_2 = r \rightarrow a_3 = a_2 + r$$

Substituindo o valor de  $a_2$ , que encontramos anteriormente, temos:

$$a_3 = (a_1 + r) + r \rightarrow a_3 = a_1 + 2r$$

Se seguirmos o mesmo raciocínio, podemos encontrar:

$$a_4 - a_3 = r \rightarrow a_4 = a_3 + r \rightarrow$$

$$a_4 = a_1 + 3r$$

Observando os resultados encontrados, notamos que cada termo será igual a soma do primeiro termo com a razão multiplicada pela posição anterior.

Esse cálculo é expresso através da fórmula do termo geral da P.A., que nos permite conhecer qualquer elemento de uma progressão aritmética.

### Exemplo:

Calcule o 13º termo da P.A.: (26, 31, 36, 41, 46, 51...). Temos:

$$a_1 = 26 \rightarrow r = 31 - 26 = 5 \rightarrow n = 13(13^{\text{o}} \text{ termo}).$$

Substituindo os valores na fór-

mula, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r.$$

$$a_{13} = 26 + (13 - 1) \cdot 5$$

$$a_{13} = 26 + 12 \cdot 5$$

$$a_{10} = 86$$

### **Fórmula do termo geral para um k qualquer.**

Para definir um termo aleatório qualquer, que chamamos de  $a_n$ , não temos o primeiro termo  $a_1$ , mas conhecemos outro qualquer, que chamamos de  $a_k$ .

Podemos usar a fórmula do termo geral a partir de um termo  $k$  qualquer:

$$a_n = a_k + (n - k) \cdot r$$

Repare que a única diferença, foi a mudança do índice 1 na primeira fórmula, pelo  $k$ , na segunda. Sendo:

$a_n$ : o  $n$ -ésimo termo da P.A. (um termo numa posição  $n$  qualquer)  $a_k$ : o  $k$ -ésimo termo de uma P.A. (um termo numa posição  $k$  qualquer)  $r$ : a razão

### **Soma dos termos de uma P.A.**

Para somar os termos de uma P.A. finita, devemos usar a seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}, \text{ onde:}$$

**$S_n$** : soma dos  $n$  primeiros termos da P.A.  **$a_1$** : primeiro termo da P.A.  **$a_n$** : ocupa a  $n$ -ésima posição na sequência (um termo na posição  $n$ )  **$n$** : posição do termo.

### **EXERCÍCIOS DE P.A.**

1. PUC/RJ - 2018 Sabendo que os números da sequência ( $y$ , 7,  $z$ , 15) estão em progressão aritmética, quanto vale a soma  $y + z$ ?  
a) 20 b) 14 c) 7 d) 3,5 e) 2
2. O preço de uma máquina nova é R\$ 150 000,00. Com o uso, seu valor sofre uma redução de R\$ 2 500,00 por ano. Sendo assim, por qual valor o proprietário da máquina poderá vendê-la daqui a 10 anos?
3. Um ciclista percorre 15 km na primeira hora de uma corrida. Na segunda hora de corrida, seu rendimento cai e ele só consegue percorrer 13 km, e na hora seguinte 11 km. Continuando nesta sequência, quantos quilômetros ele conseguirá percorrer nas 6 horas de prova?
4. Unicamp - 2015  
Se  $(a_1, a_2, \dots, a_{13})$  é uma progressão aritmética (PA) cuja soma dos termos é igual a 78, então  $a_7$  é igual a  
a) 6 b) 7 c) 8 d) 9
5. Fuvest - 2012 Considere uma progressão aritmética cujos três primeiros termos são dados por

$a_1 = 1 + x, a_2 = 6x, a_3 = 2x^2 + 4$ , em que  $x$  é um número real.

a) Determine os possíveis valores de  $x$ . b) Calcule a soma dos 100 primeiros termos da progressão aritmética correspondente ao menor valor de  $x$  encontrado no item a)

6. AFA - Em um pentágono, os ângulos internos estão em Progressão Aritmética. Qual o terceiro termo, em graus, dessa progressão?

a) 54 b) 108 c) 162 d) 216

## PROGRESSÃO GEOMÉTRICA P.G.

**P.G. ou Progressão Geométrica** é uma sequência numérica onde os termos a partir do segundo termo são obtidos multiplicados por uma constante "**q**" a qual chamamos razão.

Para encontrarmos a razão de uma P.G., basta dividirmos um número pelo seu antecessor.

### Tipos de Progressão Geométrica

**Crescente:** Onde cada termo da P.G. é maior que o seu antecessor.

$-4, -2, -1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}$  com  $q = 2$ ;

$\{2, 4, 8, 16, 32\}$  P.G. crescente de razão  $q = 2$ .

**Decrescente:** Onde cada termo da P.G. é menor que o seu antecessor.

$4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$  com  $q = \frac{1}{2}$ ;

$\{270, 90, 30, 10, \frac{10}{3}\}$  P.G. decrescente de razão  $q = 3$ .

**Constante:** Onde cada termo da P.G. é sempre igual. Isso acontece quando a razão  $q = 1$ .

$\{5, 5, 5, 5, 5\}$

$\{7, 7, 7, 7, 7\}$

**Oscilante:** É quando os valores se alternam entre positivo e negativo. Isso acontece quando o valor da razão é um número negativo,  $q = -2$  por exemplo.

$\{3, -9, 27, -81, 243\}$  Oscilante com razão  $q = -3$ ;

$\{5, -25, 125, -625\}$  Oscilante com razão  $q = -5$ .

### Fórmula do Termo Geral de uma P.G.

Para encontrar qualquer elemento da P.G., utiliza-se a expressão:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Onde:

$a_n$ : número que queremos obter;

$a_1$ : o primeiro número da

seqüência;

$q^{n-1}$ : razão elevada ao número que queremos obter, menos 1.

Assim, para identificar o termo 20 de uma P.G. de razão  $q = 2$  e número inicial 2, calcula-se:

PG: (2,4,8,16, 32, 64, 128,...)

$$a_{20} = 2 \cdot 2^{20-1};$$

$$a_{20} = 2 \cdot 2^{19};$$

$$a_{20} = 1.048.576.$$

### Soma dos Termos da P.G.

Para calcular a soma dos números presentes numa P.G., utiliza-se a seguinte fórmula:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^{n-1})}{q - 1}, \text{ onde:}$$

**$S_n$** : Soma dos números da P.G.;

**$a_1$** : primeiro termo da seqüência;

**$q$** : razão;

**$n$** : quantidade de elementos da P.G..

Dessa forma, para calcular a soma dos 10 primeiros termos da seguinte P.G. (1,2,4,8,16, 32,...):

$$S_n = \frac{a_1 \cdot (q^{n-1})}{q - 1}$$

$$S_{10} = \frac{1 \cdot (2^{10-1})}{2 - 1}$$

$$S_{10} = \frac{1024 - 1}{1} \rightarrow = 1023$$

**Observação:** Na P.A. nós somamos a razão ao termo seguinte, e na P.G. nós multiplicamos pela razão o termo seguinte.

### EXERCÍCIOS DE P.G.

1. (FUVEST) – Numa progressão geométrica de quatro termos positivos, a soma dos dois primeiros vale 1 e a soma dos dois últimos vale 9. calcule a razão da progressão.

a) 3 b) 5 c) 7 d) 9 e) 11

2. (UE – PA) – Um carro, cujo preço à vista é R\$ 24 000,00, pode ser adquirido dando-se uma entrada e o restante em 5 parcelas que se encontram em progressão geométrica. Um cliente que optou por esse plano, ao pagar a entrada, foi informado que a segunda parcela seria de R\$ 4 000,00 e a quarta parcela de R\$ 1 000,00. Quanto esse cliente pagou de entrada na aquisição desse carro?

(a) R\$ 7 500,00

(b) R\$ 8 500,00

(c) R\$ 8 550,00

(d) R\$ 7 550,00

(e) R\$ 5 800,00

3. (PUC-RIO 2008) – Na seqüência (1, 3, 7,...), cada termo é duas vezes o

anterior mais um. Assim, por exemplo, o quarto termo é igual a 15. Então o décimo termo é:

- a) 1000 b) 1002 c) 1015  
d) 1023 e) 1024

4. (UDESC 2010) – Os termos (a, b, c) formam, nesta ordem, uma progressão aritmética crescente, cuja soma é igual a 21.

Então os termos formam, nesta ordem, uma progressão geométrica de razão igual a:

- a)  $-2$  b)  $2$  c)  $16$  d)  $4$  e)  $-4$

5. (FIA) – Numa progressão geométrica, tem-se  $a_3 = 40$  e  $a_6 = -320$ . A soma dos oito primeiros termos é:

- a)  $-1700$  b)  $-850$  c)  $850$   
d)  $1700$  e)  $750$

6. CESGRANRIO, 1991) Um artigo custa hoje R\$ 100,00 e seu preço é aumentado, mensalmente, em 12% sobre o preço anterior. Se fizermos uma tabela do preço desse artigo mês a mês, obteremos uma Progressão

- (a) Aritmética de razão 12.  
(b) Aritmética de razão 0,12.  
(c) Geométrica de razão 12.  
(d) Geométrica de razão 1,12.  
(e) Geométrica de razão 0,12.

7. (UDESC, 2011) Em uma escola com 512 alunos, um aluno apareceu com o vírus do sarampo. Se esse aluno permanecesse na escola, o vírus se propagaria da seguinte forma:

no primeiro dia, um aluno estaria contaminado; no segundo, dois estariam contaminados; no terceiro, quatro, e assim sucessivamente. A diretora dispensou o aluno contaminado imediatamente, pois concluiu que todos os 512 alunos teriam sarampo no:

- a)  $9^0$  b)  $10^0$  c)  $8^0$   
d)  $5^0$  e)  $6^0$

8. (UFSM, 2008) Uma fábrica vendia 12 camisetas por mês para certa rede de academias desde janeiro de um determinado ano. Devido ao verão, essa venda foi triplicada a cada mês, de setembro a dezembro. O total de camisetas vendidas nesse quadri-mestre e a média de vendas, por mês, durante o ano, foram, respectivamente,

- (a) 1.536 e 128  
(b) 1.440 e 128  
(c) 1.440 e 84  
(d) 480 e 84  
(e) 480 e 48

# MATEMÁTICA

## Probabilidade e Estatística



## PROBABILIDADE

**Probabilidade** é o estudo das chances de obtenção de cada resultado de um experimento aleatório. A essas chances são atribuídos os números reais do intervalo entre 0 e 1. Resultados mais próximos de 1 têm mais chances de ocorrer. Além disso, a probabilidade também pode ser apresentada na forma percentual. É por meio de uma probabilidade, por exemplo, que podemos saber desde a chance de obter cara ou coroa no lançamento de uma moeda até a chance de erro em pesquisas.

Exs: Jogar um dado, cara ou coroa, ser canhoto, vai chover? etc.

**Espaço Amostral:** O conjunto de todos os possíveis resultados de um experimento aleatório é chamado de Espaço Amostral

**Ponto Amostral:** É cada um dos possíveis resultados de um experimento aleatório. A letra grega  $\Omega$  (lê-se Ômega) representa o conjunto de todos os possíveis pontos amostrais do experimento em questão.

**Evento:** Um evento é qualquer subconjunto de um espaço amostral. Ele pode conter nenhum elemento (conjunto vazio) ou todos os elementos de um espaço amostral. O número de elementos do evento é representado da seguinte maneira:  $n(E)$ , sendo  $E$  o evento em questão. São exemplos de eventos:

a) Sair cara em um lançamento de uma moeda O evento é sair cara e possui um único elemento. A representação dos eventos também é feita com notações de conjuntos:

$$E = \text{cara}$$

O seu número de elementos é  $n(E) = 1$ .

b) Sair um número par no lançamento de um dado. O evento é sair um número par:

$$E = 2, 4, 6$$

O seu número de elementos é  $n(E) = 3$ .

Os eventos que possuem apenas um elemento (ponto amostral) são chamados de simples. Quando o evento é igual ao espaço amostral, ele é chamado de evento certo e sua probabilidade de ocorrência é de 100%. Quando um evento é igual ao conjunto vazio, ele é chamado de evento impossível e possui 0% de chances de ocorrência.

### Cálculo da Probabilidade:

Seja  $E$  um evento qualquer no espaço amostral  $\Omega$ ). A probabilidade do evento  $A$  ocorrer é a razão entre o número de resultados favoráveis e o número de resultados possíveis. Em outras palavras, é o número de elementos do evento dividido pelo número de elementos do espaço amostral a

que ele pertence.

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

**Observações:** O número de elementos do evento sempre é menor ou igual ao número de elementos do espaço amostral e maior ou igual a zero. Por isso, o resultado dessa divisão sempre está no intervalo  $0 \leq P(A) \leq 1$ ; Quando é necessário usar porcentagem, devemos multiplicar o resultado dessa divisão por 100 ou usar regra de três; A probabilidade de um evento não acontecer é determinada por:

$$P(A - 1) = 1 - P(A)$$

## ESTATÍSTICA

### REPRESENTAÇÃO E ANÁLISE DE DADOS

**Estatística é uma Ciência** que se aplica em todos os campos do conhecimento. Costuma-se dizer que é a ciência que trata dos dados. Os dados têm sido, desde há muitos séculos, instrumentos essenciais à compreensão do mundo que nos rodeia. Neste capítulo procedemos à classificação dos dados, processo este que condiciona, de um modo geral, a ferramenta estatística a utilizar na sua organização e no seu tratamento.

A Estatística é bastante utilizada em diversos ramos da sociedade, no intuito de realizar pesqui-

sas, colher dados e processá-los, analisar informações, apresentar situações através de gráficos de fácil compreensão. Os meios de comunicação, ao utilizarem gráficos, deixam a leitura mais agradável. O IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) é considerado um órgão importante e conceituado na área. No intuito de conhecer e aprofundar nos estudos estatísticos precisamos conhecer alguns conceitos e fundamentos primordiais para o desenvolvimento de uma pesquisa.

### CONCEITOS E FUNDAMENTOS DE ESTATÍSTICA

**População:** conjunto de elementos, número de pessoas de uma localidade, quantidade em um grupo que se deseja estudar.

**Amostra:** parte representativa de um grupo ou população que se deseja estudar.

**Variável:** Pode assumir qualquer valor, numérico ou não, dependendo da abordagem da pesquisa, da pergunta que será feita. Exemplo: Qual sua marca de carro favorita? Ford, Volks, Fiat, Peugeot, Nissan são alguns exemplos de resposta.

**Frequência absoluta:** valor exato, número de vezes que o valor da variável é citado.



**Frequência relativa:** valor representado através de porcentagem, divisão entre a frequência absoluta de cada variável e o somatório das frequências absolutas.

### **Medidas de tendência central**

**Média aritmética:** medida de tendência central. Somatório dos valores dos elementos, dividido pelo número de elementos.

**Média aritmética ponderada:** Somatório dos valores dos elementos multiplicado pelos seus respectivos pesos, dividido pela soma dos pesos atribuídos.

**Moda:** valor de maior frequência em uma série de dados, o que mais se repete.

**Mediana:** medida central em uma determinada sequência de dados numéricos.

### **Medidas de dispersão**

**Amplitude:** subtração entre o maior valor e o menor valor dos elementos do conjunto.

**Variância:** dispersão dos dados variáveis em relação à média.

**Desvio Padrão:** raiz quadrada da variância. Indica a distância média entre a variável e a média aritmética da amostra.

## REFERÊNCIAS

RIO DE JANEIRO. Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (org.). Portal da OBMEP. 2021. Disponível em: <https://portaldaobmep.impa.br/>. Acesso em: 11 ago. 2021.

STEWART, James. Cálculo, vol. 1. Pioneira Thomson Learning, p. 47, 2001.

LIMA, Elon Lages et al. A matemática do ensino médio. SBM, 1997.

PROJETO Medicina. 2021. Disponível em: <https://projetomedicina.com.br/>. Acesso em: 11 ago. 2021.

E. E. Moise & F. L. Downs Jr., Geometria Moderna - Parte I, São Paulo: Edgard Blücher, 1971.

E. Q. F. Rezende & M. L. B. Queiroz, Geometria Euclidiana Plana e construções geométricas. Campinas, SP: Editora da Unicamp; São Paulo: Imprensa Oficial, 2000.

H. Eves, Introdução à História da Matemática. 3 ed. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2002.

### Sites de apoio:

Resolução comentada de vestibulares - [https://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao\\_comentada.aspx](https://www.curso-objetivo.br/vestibular/resolucao_comentada.aspx)

Brasil Escola - <https://brasilescola.uol.com.br/matematica>

OBMEP - <http://www.obmep.org.br/apostilas.htm>