

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Métricas de Einstein y Geometría de la Ecuación de Monge-Ampère Compleja

Memoria de Título presentada por:

Gustavo Arcaya Espinosa

como requisito parcial para optar al título de

Ingeniero Civil Matemático

Otorgado por la Universidad Técnica Federico Santa María

Profesor Guía
Dr. Pedro Montero Silva

Marzo 2022.

TÍTULO DE LA MEMORIA:

MÉTRICAS DE EINSTEIN Y GEOMETRÍA DE LA ECUACION MONGE-AMPÈRE COMPLEJA

AUTOR:

GUSTAVO ARCAYA ESPINOSA

TRABAJO DE MEMORIA, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil Matemático de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Salomón Alarcón

Dr. Pedro Montero

Dr. Giancarlo Urzúa

Dr. Alexander Quaas

Valparaíso, Chile, Marzo 2022.

Dedicatoria

Parrafo

Más palabras

Texto

Gustavo

AGRADECIMIENTOS

(Agradecimientos)

ABSTRACT

Einstein Metrics and Geometry of Complex Monge-Ampère equation

The field equations of general relativity are a topic of interest for understanding gravitational interactions as a geometrical phenomenon of space-time. A particular case, known as field equations on the void give place to a proportionality condition between curvature and metric over a manifold, called the Einstein condition. This thesis addresses the topic of existence of Kähler metrics which satisfy the Einstein condition and some of its consequences.

The proportionality condition consists of a cohomology equality, which can be used to deduce a non-linear partial differential equation of the Monge-Ampère type.

Several very important results were accomplished during the second half of last century, specially by Yau and Aubin for negative and vanishing curvature. Also Yau, conjectured that there was an obstacle concerning stability when curvature defines a positive cohomology 2-form, known as first Chern class. This was specified recently by Tian, who proved, in parallel to Chen, Donaldson and Sun the existence of Kähler Einstein metrics when this stability condition is met.

On the next 3 chapters the discussion is focused first in Elementary theory of Complex and Riemannian Geometry, which are most important for understanding Kähler Geometry. Later, the topics Hölder Spaces and Schauder theory are addressed with the objective of providing a priori estimates for differential equation's solutions. Finally, a simplified proof of Yau's theorem (for negative and vanishing first Chern class) is given by means of the continuity method together with a proper Implicit Function Theorem formulation, and a priori Schauder estimates. The conclusion of this thesis consists of the presentation of the obstacles that make the technique described previously to prove the existence of Kähler-Einstein metrics on Kähler manifolds with positive first Chern class.

Finally, the last chapter of this thesis is devoted to some classical and important application of the previous results. More precisely, we present a detailed account on the proof of Bombieri-Miyaoka-Yau inequality for Kähler-Einstein manifolds, which gives strong constraints on the Chern classes (and hence, on the topology) of these manifolds. We then address the Beauville-Bogomolov decomposition theorem for flat manifolds, which tell us (roughly speaking) that the building blocks

of such manifolds are complex tori, Calabi-Yau manifolds and HyperKähler manifolds. Finally, we show that Yau theorem together with classical results from Riemannian geometry implies that all Fano manifolds are simply connected.

RESUMEN

Métricas de Einstein y Geometría de la Ecuación de Monge-Ampère Compleja.

Las ecuaciones de campo en relatividad general y sus soluciones son de interés para estudiar y entender las interacciones gravitacionales como un fenómeno geométrico del espacio-tiempo. Un caso particular, denominado como ecuaciones de campo del vacío dan lugar a una condición de proporcionalidad entre la curvatura de Ricci de una métrica y su forma fundamental sobre una variedad, esta condición se denomina de Einstein. Esta memoria tratará los tópicos de existencia de métricas de Kähler que satisfacen la condición de Einstein.

La condición de proporcionalidad consiste en una igualdad en Cohomología, esta igualdad puede utilizarse para deducir una ecuación en derivadas parciales no lineal del tipo Monge-Ampère.

Durante la segunda mitad del siglo pasado, se lograron variados y significativos avances en el problema de existencia de métricas de Kähler-Einstein, especialmente por Yau y Aubin en los casos de curvatura negativa y nula. Además, Yau conjeturó que existía un obstáculo dado por algún criterio de estabilidad cuando la curvatura define una clase de cohomología positiva, conocida como primera clase de Chern. Este criterio de estabilidad fue establecido recientemente por Tian, que probó, de forma paralela a Chen, Donaldson y Sun que cuando se verifica esta condición de estabilidad, se satisface la existencia de métricas de Kähler-Einstein.

En los siguientes 3 capítulos la discusión se enfoca en primer lugar en elementos básicos de teoría de Geometría compleja y Riemanniana, que son de gran importancia para la definición y presentación posterior de las Variedades de Kähler. Luego, se presentan y desarrollan las temáticas de espacios de Hölder y teoría de Schauder que se utilizarán para introducir los conceptos de estimaciones a priori para soluciones de ecuaciones diferenciales. Finalmente, se presenta una prueba simplificada del Teorema de Yau (para los casos de curvatura negativa y nula) utilizando el método de continuidad, así como una aplicación adecuada del teorema de la función implícita mediante el uso de las estimaciones a priori. La conclusión de esta memoria consiste en la presentación de los obstáculos algebro-geométricos para la existencia de métricas de Kähler-Einstein cuando se tiene una primera clase de Chern positiva. En el capítulo final de esta memoria nos dedicamos a presentar consecuencias del teorema de Yau, o bien, de resultados clásicos de variedades de Kähler-Einstein. De

forma precisa, se presentarán de forma detallada: La desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau que entrega restricciones de gran utilidad para las clases de Chern (y por lo tanto, sobre la topología) de estas variedades. Luego, el teorema de Descomposición de Beauville-Bogomolov para variedades de Kähler Ricci planas, que nos dice (a groso modo) que los bloques fundamentales de este tipo de variedades son los toros complejos, las variedades de Calabi-Yau y las variedades Hiperkähler. Finalmente, mostraremos que el teorema de Yau, junto con la aplicación de resultados clásicos de geometría Riemanniana y compleja implican que toda variedad de Fano es simplemente conexa.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	I
ABSTRACT	II
RESUMEN	IV
1. VARIEDADES DE KÄHLER Y MÉTRICAS DE EINSTEIN	1
1.1. Variedades Complejas	1
1.2. Estructuras casi complejas	6
1.3. Métricas Kählerianas y Hermitianas	11
1.4. Derivadas Covariantes y Curvatura	19
1.5. Fibrados Vectoriales	28
1.6. Blow-up de variedades complejas	32
1.7. Conexiones y curvatura de fibrados en recta	35
1.8. Fibrados en recta e incrustaciones proyectivas	39
1.9. Métricas de Einstein	43
2. ESPACIOS DE HÖLDER Y TEORÍA DE SCHAUDER	47
2.1. Teoría de corrientes y Residuos	48
2.2. Suavización de Corrientes y regularidad	57
2.3. Operadores Diferenciales Elípticos	64
2.4. Estimaciones de Schauder	70
2.5. El operador Laplaciano en variedades de Kähler	87
3. SOLUCIONES DE YAU Y AUBIN A LA CONJETURA DE CALABI	101
3.1. Teorema de Yau, existencia de Métricas de Kähler Einstein para $c_1(X) < 0$.	102
3.2. Métricas Kähler-Einstein en variedades de Calabi-Yau, el caso $c_1(X) = 0$	119
3.3. Métricas Kähler-Einstein en variedades de Fano, el caso $c_1(X) > 0$	123
4. CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE YAU	127

4.1. La desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau.	127
4.2. El Teorema de Descomposición de Beauville-Bogomolov.	134
4.3. Conexidad Simple de Variedades de las variedades de Fano.	146
BIBLIOGRAFÍA	149

VARIEDADES DE KÄHLER Y MÉTRICAS DE EINSTEIN

La geometría diferencial de curvas, superficies y en dimensiones superiores define y utiliza conceptos como parametrizaciones, curvatura, espacio tangente a una variedad diferencial. Dadas las propiedades del espacio euclidiano \mathbb{R}^n como \mathbb{R} -espacio vectorial y la existencia de las denominadas métricas de Riemann, surge naturalmente la cuestión de si la identificación $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ induce estos conceptos de geometría a las Variedades Holomorfas, o Variedades complejas, en general, la respuesta será afirmativa, y mas aún, en este capítulo introduciremos conceptos generales de geometría compleja, y estableceremos la relación de Variedad Riemanniana (como variedad real) y las variedades de Kähler, como su análogo complejo.

En este primer capítulo, introduciremos conceptos esenciales de variedades complejas, que nos permitirán definir las variedades Kählerianas, y discutir propiedades importantes en el caso de variedades de Kähler compactas. A lo largo de este capítulo utilizaremos la indexación de las coordenadas mediante superíndices. Esto nos permitirá utilizar la convención de Einstein para la suma, sin embargo, escribiremos las sumas hasta el momento de ser necesario utilizarla, el cual se señalará para facilitar la lectura y comprensión de esta notación.

1.1. Variedades Complejas

Teniendo en mente la noción de variedad diferenciable, podemos pensar que una variedad compleja X es precisamente una variedad diferenciable sobre la cual tenemos una definición adecuada de holomorfía de funciones. Precisamos esto a continuación, para $n > 0$ e \mathcal{J} un conjunto de índices, X tiene

un recubrimiento por abiertos $\{U_i, i \in \mathcal{I}\}$, junto con homeomorfismos (usualmente denominados cartas)

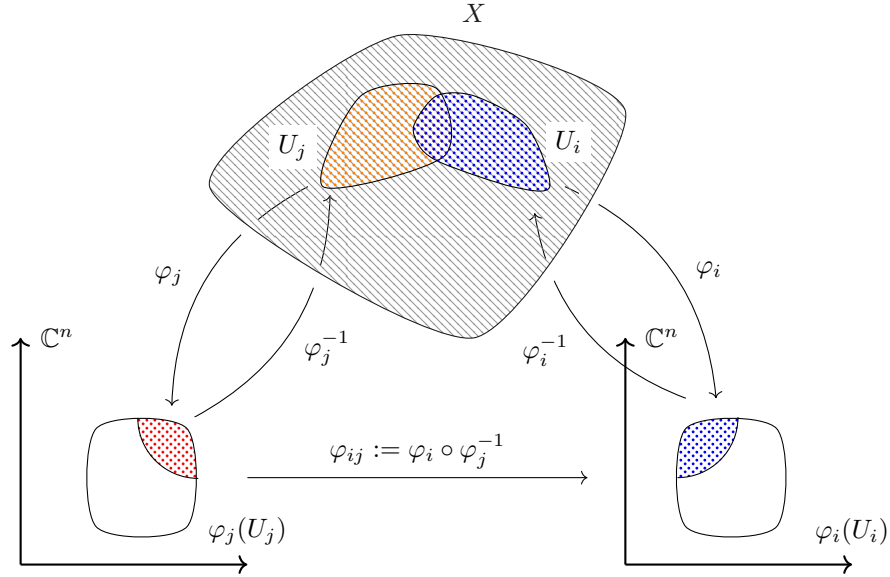
$$\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} W_\alpha \subset \mathbb{C}^n \quad (1.1.1)$$

tales que las funciones (denominadas como mapeos de transición)

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(V_i \cap V_j) \rightarrow \varphi_i(V_i \cap V_j) \quad (1.1.2)$$

son holomorfas, ahora si, en el sentido de holomorfía usual de \mathbb{C}^n . En el caso anterior, decimos que n es la dimensión (compleja) de la variedad.

El siguiente diagrama explica como se relacionan los abiertos de una variedad X con sus cartas holomorfas se acuerdo a la definición anterior.



Observación 1.1.1. En general denotaremos por X a una variedad compleja y $n = \dim_{\mathbb{C}}(X)$ mientras que M denotara la variedad diferenciable subyacente y cuya dimension llamamos $m = \dim_{\mathbb{R}}(X) = 2n$.

En adelante, el concepto de dimensión hace referencia a la dimension compleja. De ser necesario se explicitará si hablamos de dimensión real o compleja.

Observación 1.1.2. Al conjunto de pares $\{(\varphi_i, U_i) \mid \varphi_i \text{ satisface 1.1.1 y 1.1.2}\}$ se denomina **Atlas holomorfo** o **estructura holomorfa** sobre X . En general, trabajaremos asumiendo que la estructura seleccionada es maximal. La existencia de esta estructura maximal se obtiene mediante una aplicación típica del Lema de Zorn, para mas detalles ver [Lee13, Prop.1.17]

Ahora podemos presentar nuestra definición de holomorfía para funciones entre variedades complejas.

Definición (Función Holomorfa).

Dadas dos variedades complejas X e Y con atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$ y $\{(V_i, \psi_i)\}_{i \in \mathcal{I}}$, respectivamente, con $\dim(X) = k$ y $\dim(Y) = n$. Una función $f : X \rightarrow Y$ es llamada holomorfa si la composición

$$\psi_i \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1} : W_\alpha \subset \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^n$$

es holomorfa sobre $\varphi_\alpha(U_\alpha) =: W_\alpha$, para cada $\alpha \in \Lambda$ donde esta composición tenga sentido.

Esta noción de funciones holomorfas nos permite definir mediante las cartas un sistema de **coordenadas locales holomorfas** entorno a un punto $p \in X$ como la imagen mediante φ_β de una vecindad abierta U_β , tal que $p \in U_\beta$. Pensando las cartas como una concatenación de funciones coordenada $z^i := \varphi_\beta^i$ para $1 \leq i \leq k$ y trasladando de forma conveniente, hacemos $z^i(p) = 0$ para cada i .

Observación 1.1.3. Para cualesquiera otras coordenadas holomorfas de $p \in U_\alpha \cap U_\beta \subset M$, digamos, $w^i := \varphi_\alpha^i$. Se tiene que cada w^i es una función holomorfa en las variables z^i, \dots, z^k

Ejemplo 1.1.1 (Esfera de Riemann). Consideremos $M = \mathbb{S}^2$, como la esfera unitaria en el espacio real \mathbb{R}^3 . Identificamos el plano xy en \mathbb{R}^3 con \mathbb{C} y definimos dos cartas de M mediante los complementos de los polos norte y sur, es decir, hacemos $U_1 = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ y $U_2 = \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, -1)\}$.

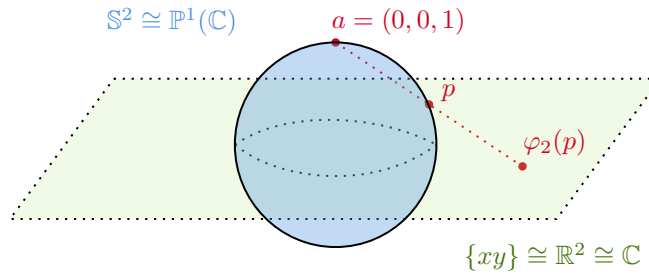
Definimos entonces

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

como la proyección estereográfica desde el polo norte de \mathbb{S}^2 sobre el plano xy . Luego

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$$

se define como la composición de la proyección estereográfica desde el polo sur, con la conjugación compleja.



Las proyecciones φ_1 y φ_2 obtienen mediante la inversión la una de la otra. Esto es la transformación $z \mapsto \bar{z}^{-1}$. Luego, al conjugar obtenemos el mapeo de transición

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(z) = \frac{1}{\bar{z}}, \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

el cual es holomorfo (en el sentido usual de \mathbb{C}), dando como resultado la estructura de variedad compleja a \mathbb{S}^2 .

Ejemplo 1.1.2 (Espacio proyectivo complejo). *El espacio proyectivo complejo, que denotamos por \mathbb{P}^n (o bien $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^n$ cuando sea necesario explicitar que nos encontramos en el caso complejo) corresponde a uno de los ejemplos mas importantes de variedad compleja. Definimos el espacio proyectivo complejo \mathbb{P}^n como el conjunto de rectas vectoriales en \mathbb{C}^{n+1} , o equivalentemente,*

$$\mathbb{P}^n := (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^*$$

con \mathbb{C}^* actuando por multiplicación sobre \mathbb{C}^{n+1} .

Los puntos (que realmente son clases de equivalencia) en \mathbb{P}^n se escriben $[z^0 : z^1 : \dots : z^n]$, esta notación nos sirve para recordar que puntos de forma (z^0, z^1, \dots, z^n) y $(\lambda z^0, \lambda z^1, \dots, \lambda z^n)$ definen en realidad el mismo elemento en \mathbb{P}^n , es por esto que en general las llamamos **coordenadas homogéneas**.

El cubrimiento abierto estándar de \mathbb{P}^n es dado por los abiertos

$$U_i := \{[z^0 : \dots : z^n] \mid z^i \neq 0\} \subset \mathbb{P}^n$$

Los cuales, si dotamos \mathbb{P}^n con la topología cociente mediante la proyección

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow (\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}) / \mathbb{C}^* = \mathbb{P}^n$$

son, en efecto, abiertos. Para concluir, propondremos las siguientes biyecciones como cartas

$$\begin{aligned} \varphi_i : U_i &\xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^n \\ [z^0 : \dots : z^n] &\longmapsto \left(\frac{z^0}{z^i}, \dots, \frac{z^{i-1}}{z^i}, \frac{z^{i+1}}{z^i}, \dots, \frac{z^n}{z^i} \right) \end{aligned}$$

de modo que los mapeos de transición $\varphi_{ij} := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$ son de la forma

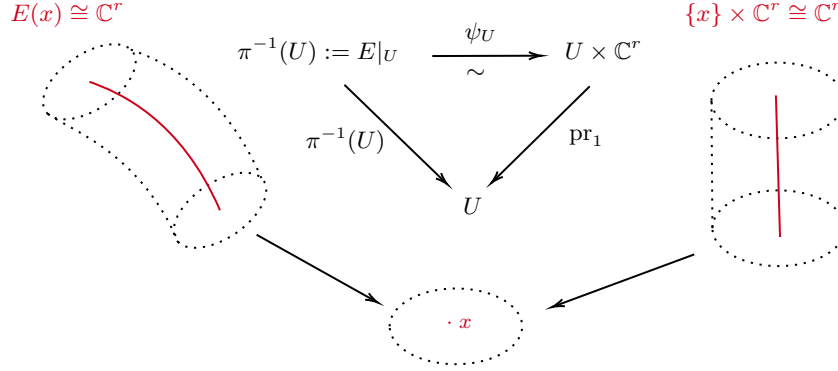
$$\varphi_{ij}(w^1, \dots, w^n) = \left(\frac{w^1}{w^i}, \dots, \frac{w^{i-1}}{w^i}, \frac{w^{i+1}}{w^i}, \dots, \frac{w^{j-1}}{w^i}, \frac{1}{w^i}, \frac{w^j}{w^i}, \dots, \frac{w^n}{w^i} \right)$$

claramente holomorfas en su dominio y con inversa dada por φ_{ji} de lo que se tiene la biyectividad y en consecuencia, el hecho de que el espacio proyectivo complejo es una variedad compleja.

Definición (Fibrado Vectorial Holomorfo).

Sea X una variedad compleja. Un **fibrado vectorial holomorfo** de rango r sobre X es una variedad compleja E junto a una aplicación holomorfa $\pi : E \rightarrow X$, donde cada **fibra** $E(x) := \pi^{-1}(x)$ tiene la estructura de \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión r para cada $x \in X$, y que verifican la siguiente propiedad: Existe un cubrimiento abierto $X = \bigcup U_i$ y mapeos biholomorfos $\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}^r$

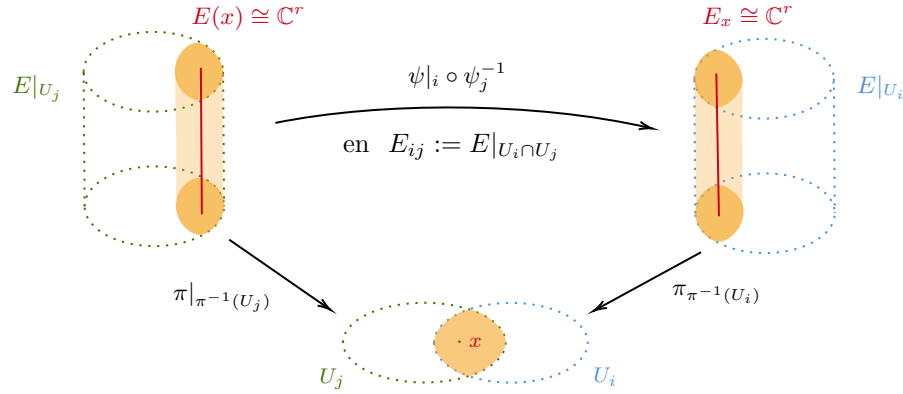
que conmutan con las proyecciones sobre cada U_i tal que el isomorfismo $\pi^{-1}(x) \cong \mathbb{C}^r$ es \mathbb{C} -lineal.



Observación 1.1.4. Utilizando la definición anterior las aplicaciones de transición

$$\psi_{ij}(x) := (\psi_i \circ \psi_j^{-1})(x, \cdot) : \mathbb{C}^r \longrightarrow \mathbb{C}^r$$

son \mathbb{C} -lineales, para todo $x \in U_i \cap U_j$.



Además, estas aplicaciones de transición verifican que $\psi_{ii} = \text{Id}$ para todo $x \in U_i$ y en las intersecciones de la forma $U_i \cap U_j \cap U_k$ se satisface la condición de cociclo

$$g_{ij}g_{jk} = g_{ik} \quad \text{en } U_i \cap U_j \cap U_k$$

Ejemplo 1.1.3 (Hipersuperficies proyectivas). Sea $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ una función holomorfa tal que $0 \in \mathbb{C}$ es un valor regular (es decir, $\text{grad}(f)(0) \neq 0$). Definimos el conjunto de ceros de f como

$$X = Z(f) := f^{-1}(0) \subset \mathbb{C}^n$$

Por el teorema de la función implícita, existe un cubrimiento abierto $X = \cup_i U_i$, abiertos $V_i \subset \mathbb{C}^{n-1}$

y mapeos holomorfos $g_i : V_i \rightarrow \mathbb{C}^n$ que inducen aplicaciones biyectivas

$$g_i : V_i \xrightarrow{\sim} U_i$$

En este caso, tenemos mapeos de transición de la forma

$$\varphi_{ij} := g_i^{-1} \circ g_j : g_j^{-1}(U_i) \rightarrow g_i^{-1}(U_j).$$

Se puede ver que estos son holomorfos, dotando a X con la estructura de variedad compleja que en general se denomina **hipersuperficie afín**.

Consideremos ahora f como un polinomio homogéneo en $n+1$ variables z^0, \dots, z^n talque $0 \in \mathbb{C}$ es un valor regular de la aplicación inducida

$$f : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Ya sabemos que el conjunto $Z(f)$ corresponde a una variedad compleja. Veamos que el conjunto

$$X' = V(f) := f^{-1}(0)/\mathbb{C}^* \subset \mathbb{P}^n$$

que corresponde al conjunto de puntos $[z^0 : \dots : z^n] \in \mathbb{P}^n$ tales que $f(z^0, \dots, z^n) = 0$. Notemos que el valor de $f(z^0 : \dots : z^n)$ depende en general del representante escogido de $[z^0 : \dots : z^n]$, pero el conjunto $V(f)$ está bien definido, dado que asumimos que f es homogénea.

Ahora veremos que esta es una variedad compleja de dimensión $n-1$. De hecho, podemos cubrir X mediante los abiertos estándar de \mathbb{P}^n utilizando los abiertos $X \cap U_i$, donde U_i son los abiertos estándar del espacio proyectivo. Usando los isomorfismos $U_i \cong \mathbb{C}^n$ del primer ejemplo, el conjunto $X \cap U_i$ se identifica con la fibra sobre $0 \in \mathbb{C}$ del mapeo

$$f_i : (w^1, \dots, w^n) \mapsto f(w^1, \dots, w^{i-1}, 1, w^i, \dots, w^n)$$

Verificando que esta función tiene a $0 \in \mathbb{C}$ como valor regular, concluimos que X' es una variedad compleja de forma análoga a como lo hicimos para las superficies afines.

Es importante notar también que las hipersuperficies proyectivas, así como el espacio proyectivo son, más aún, variedades complejas compactas.

1.2. Estructuras casi complejas

Para estudiar las propiedades de una variedad compleja, será útil estudiar si es posible ver a esta como una variedad diferencial dotada de una serie de propiedades que la caractericen como variedad compleja. Para empezar este propósito, consideremos M una variedad diferenciable m -dimensional,

definimos el conjunto

$$TM := \{(p, v) : p \in M, v \in T_p M\}.$$

donde $T_p M$ es el espacio tangente a la variedad M en el punto $p \in M$.

Para satisfacer la definición de fibrado de la sección anterior, dotaremos al conjunto TM de una estructura diferencial $2n$ -dimensional, con esta definición TM es llamado **fibrado tangente de M** . Detallamos esta estructura diferencial y su extensión a nuestro contexto de holomorfía en los puntos siguientes, para esto, es esencial la siguiente definición.

Definición (Estructura casi compleja).

Sea M una variedad diferenciable, un endomorfismo del fibrado tangente $J : TM \rightarrow TM$ es llamado **estructura casi compleja** si $J^2 := J \circ J = -\text{Id}$. Donde Id es la identidad en el fibrado tangente.

Observación 1.2.1. Si J es una estructura casi compleja sobre un espacio vectorial real V , entonces, V admite de forma natural la estructura de un espacio vectorial complejo. Ver [Huy05, Lema 1.2.2] para mayor detalle.

Teniendo en consideración esta observación decimos que una estructura casi compleja equipa al espacio tangente en cada punto con una transformación lineal que se comporta como la multiplicación por la unidad imaginaria. Así, la dimensión real del espacio tangente en cada punto debe ser par, pues cada endomorfismo de dimension impar debe tener un autovalor real, cuyo cuadrado no puede ser -1 .

Ejemplo 1.2.1 (Cartas holomorfas). Para una variedad compleja X , las cartas holomorfas identifican en cada punto el espacio tangente $T_p X$ con \mathbb{C}^n , de modo que podemos definir sobre el espacio tangente la estructura casi compleja dada por $J(v) := \mathbf{i} \cdot \mathbf{v}$.

Aquí, la condición de holomorfía sobre las aplicaciones de transición corresponde a la compatibilidad de la multiplicación por \mathbf{i} bajo las diferentes identificaciones entre $T_p X$ y \mathbb{C}^n , las que se obtienen al usar cartas diferentes.

Observación 1.2.2. Consideremos las coordenadas locales holomorfas z^1, \dots, z^n de la forma $z^i = x^i + \mathbf{i}y^i$ para x^i e y^i funciones reales, entonces, mediante la estructura casi compleja J podemos escribir

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial}{\partial y^i}, \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Definición (Estructura integrable).

Denominamos a una estructura casi compleja como **estructura casi compleja integrable** si proviene de cartas diferenciales, como en la observación anterior.

Para una definición equivalente, que puede ser de utilidad ver [Huy05, Sección 2.6]

Gracias al siguiente teorema, de Newlander y Nirenberg [NN57], en adelante utilizaremos el concepto de estructura compleja en vez de estructura casi compleja integrable.

Teorema 1.2.1 (Newlander-Nirenberg).

Toda estructura casi compleja integrable es inducida por una estructura compleja.

A partir de ahora, consideramos X como una variable compleja, si denotamos por M a la variedad diferencial subyacente, utilizaremos la complejificación del fibrado tangente real para estudiar el fibrado tangente holomorfo

$$T^{\mathbb{C}}M := TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}.$$

La fibra en cada punto $p \in M$ es un espacio vectorial complejo, cuya base escribiremos como sigue

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z^i}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^n}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^n} \right\}.$$

Esta base, en términos de las funciones reales x^i e y^i se escriben mediante las derivadas de Wirtinger

$$\frac{\partial}{\partial z^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y^i} \right) \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} + \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y^i} \right)$$

Así la estructura casi compleja J se extiende a un endomorfismo \mathbb{C} -lineal de $T^{\mathbb{C}}M$ e induce puntualmente una descomposición en los autoespacios asociados a \mathbf{i} y $-\mathbf{i}$. Esto es,

$$T^{\mathbb{C}}M = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$$

Donde, los espacios $T^{1,0}M$ y $T^{0,1}M$ corresponden a los espacios generados por los elementos basales $\frac{\partial}{\partial z^i}$ y $\frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$ y se denominan **fibrado tangente holomorfo** y **fibrado tangente antiholomorfo**, respectivamente.

De forma similar, la complejificación del fibrado dual al tangente nos entrega el fibrado cotangente $\Omega_{\mathbb{C}}^1 M$, el cual se descompone según los autovalores del operador dual a la estructura casi compleja J (la cual denotaremos también como J). La descomposición a la que nos referimos es dada por

$$\Omega_{\mathbb{C}}^1 M = \Omega^{1,0}M \oplus \Omega^{0,1}M$$

Escribiendo la base dual de TM tenemos que $\Omega^{1,0}$ corresponde al espacio generado dz^1, \dots, dz^n mientras que $\Omega^{0,1}$ es generado por $d\bar{z}^1, \dots, d\bar{z}^n$, donde

$$dz^i = dx^i + \mathbf{i}dy^i \quad \text{y} \quad d\bar{z}^i = dx^i - \mathbf{i}dy^i$$

Esta descomposición se extiende a formas diferenciales de orden r

$$\Omega_{\mathbb{C}}^r M = \bigoplus_{p+q=r} \Omega^{p,q}M$$

donde $\Omega^{p,q}M$ es generado localmente por el producto tensorial alternante, o producto “cuña” si-

guiente

$$dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}.$$

donde, por definición $dz \wedge dw = -dw \wedge dz$ para toda z, w forma diferencial.

Sobre una variedad compleja, la descomposición de r -formas da lugar a la descomposición de la derivada exterior como $d = \partial + \bar{\partial}$ donde los operadores

$$\partial : \Omega^{p,q}M \rightarrow \Omega^{p+1,q}M$$

$$\bar{\partial} : \Omega^{p,q}M \rightarrow \Omega^{p,q+1}M$$

son proyecciones de d . Esto nos da la descomposición de r -formas en formas de tipo (p, q) o (p, q) -formas, donde $p + q = r$. Explícitamente, una (p, q) -forma se expresa en término de las coordenadas locales y multi-índices I, J como

$$\omega = \sum_{\substack{|I|=p \\ |J|=q}} \alpha_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J := \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq p \\ 1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq q}} \alpha_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q} \quad (1.2.1)$$

donde cada término de α_{IJ} es una función analítica en M .

Observación 1.2.3. Para cualquier forma $\alpha \in \Omega_{\mathbb{C}}^r M$, $\bar{\partial}\alpha = \overline{\partial\alpha}$.

Observación 1.2.4. En la notación que estamos utilizando, el diferencial de una función $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ se escribe como

$$df = (\partial + \bar{\partial})f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial z^i} dz^i + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} d\bar{z}^i.$$

Así, f es holomorfa si y solo si $\bar{\partial}f = 0$, pues

$$\bar{\partial}f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} d\bar{z}^i$$

y cada $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^i} = 0$ es una ecuación de Cauchy-Riemann.

Ejemplo 1.2.2. Para una función $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, la forma $\mathbf{i}\partial\bar{\partial}f$ es una $(1,1)$ -forma real, que se comporta como una segunda derivada compleja de f (un Hessiano complejo, si se prefiere). En particular, si consideramos $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ y calculamos la $(1,1)$ -forma, obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\partial\bar{\partial}f &= \mathbf{i} \left(\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{\mathbf{i}}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial y} \right) (dx + \mathbf{i}dy) \wedge (dx - \mathbf{i}dy) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy \end{aligned}$$

Es necesario notar que la ultima igualdad se debe a que siempre $d^2f = 0$ para cualquier f .

Dada la observación anterior, podemos notar que los operadores d y $\bar{\partial}$ tendrán una relevancia importante en las propiedades asociadas a diferenciabilidad y holomorfía de funciones en variedades diferenciales que posean estructura compleja. Definiremos para concluir esta sección los complejos de cohomología asociados a estos dos operadores

Definición (Cohomología de Dolbeault).

Sea X una variedad diferencial dotada de una estructura compleja. Entonces, definimos la (p, q) -cohomología de Dolbeault como el espacio vectorial

$$H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X) := H^q(\mathcal{A}^{p,\bullet}(X), \bar{\partial}) = \frac{\ker(\bar{\partial} : \mathcal{A}^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}(X))}{\text{im}(\bar{\partial} : \mathcal{A}^{p,q-1}(X) \rightarrow \mathcal{A}^{p,q}(X))}$$

Donde $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ corresponde al espacio de (p, q) -formas diferenciales sobre X alternantes. Es decir, el complejo de Dolbeault es el complejo de cocadenas de formas diferenciales sobre la variedad X con la derivada exterior antiholomorfa como el diferencial, esto es un complejo¹ de la forma

$$\mathcal{A}^{p,\bullet}(X) : 0 \rightarrow \mathcal{A}^{p,0}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,1}(X) \xrightarrow{\bar{\partial}} \dots \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{A}^{p,n}(X) \rightarrow 0$$

donde $n = \dim_{\mathbb{C}}(X)$.

Observación 1.2.5. Podemos definir un complejo de cocadenas y una cohomología mediante el uso de la derivada holomorfa. Pero dado que la condición de holomorfía viene dada (entre otras formulaciones equivalentes) por la anulación de la derivación antiholomorfa, se hace principalmente relevante la cohomología de Dolbeault por sobre su análoga $H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$.

Definición (Cohomología de de Rham).

Definimos el complejo de De Rham como el complejo de formas diferenciales sobre una variedad diferencial M con la derivada exterior como diferencial

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \Omega^3(M) \rightarrow \dots$$

Así, definimos el k -ésimo grupo de cohomología como el cociente

$$H_{\text{dR}}^k(M) := \frac{\{\alpha \in \Omega^k M \mid d\alpha = 0\}}{\{d\beta \mid \beta \in \Omega^{k-1} M\}}.$$

Para concluir esta sección definiremos una aplicación de gran utilidad en cálculos y demostraciones que aparecerán mas adelante

¹En nuestro contexto entenderemos como complejo a una colección de espacios vectoriales V_i encadenados como

$$\dots \rightarrow V_i \xrightarrow{f^i} V_{i+1} \xrightarrow{f^{i+1}} V_{i+2} \rightarrow \dots$$

tal que $\text{Im}(f^i) \subseteq \ker(f^{i+1})$, i.e., $f^i \circ f^{i+1} = 0$.

Definición (Pullback).

Sea una transformación lineal $L : V \rightarrow W$ entre los espacios vectoriales V, W y sea $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ definimos el **pullback de f mediante L** denotado por $L^*(f)$ como

$$\begin{aligned} L^*f &:= f \circ L : V \longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto f(L(v)) \end{aligned}$$

De forma análoga, si $f : W \times W \times \cdots \times W \rightarrow \mathbb{R}$ es una aplicación r -multilineal definimos el **pullback de f mediante L** como

$$(L^*f)(w_1, \dots, w_r) := f(L(w_1), \dots, L(w_r)).$$

Observación 1.2.6. Para M, N dos variedades diferenciales, sean $p \in M$, y $L : M \rightarrow N$ es una inmersión (es decir, una aplicación diferenciable cuyo diferencial es inyectivo en todo punto). Si consideramos una aplicación bilineal $f : T_{f(p)}N \times T_{f(p)}N \rightarrow \mathbb{R}$ esta induce una aplicación bilineal L^*f sobre T_pM dada por

$$\begin{aligned} L^*f : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1, v_2) &\longmapsto (L^*f)(v_1, v_2) = f(dL(v_1), dL(v_2)) \end{aligned}$$

1.3. Métricas Kählerianas y Hermitianas

Sea X una variedad compleja dotada de una estructura compleja J . Nos interesa estudiar las métricas Riemannianas sobre X que son compatibles con la estructura compleja de una manera deseable. Empezamos esta sección recordando la definición de métrica Riemanniana sobre X .

Definición (Métrica Riemanniana).

Una métrica Riemanniana en una variedad diferenciable M es una correspondencia que asigna cada punto $p \in M$ un producto interno

$$g(\cdot, \cdot)_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

en el espacio tangente T_pM , que varía diferencialmente respecto a p .

Notemos que esta definición nos dice que en cada punto $p \in M$, la métrica Riemanniana corresponde a una forma bilineal simétrica y definida positiva en el espacio tangente T_pM .

Para más detalles en esta definición y la noción de diferenciabilidad respecto a $p \in M$ de esta, revisar [dC15, p.41].

Proposición 1.3.1 (Existencia de métrica Riemanniana).

Toda variedad diferencial M admite una métrica Riemanniana

Demostración. Considerar la estructura diferencial sobre M dada por el atlas $\mathcal{A}_M = \{(\varphi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ y la partición de la unidad $\{\rho_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ subordinada al cubrimiento abierto $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

La variedad M es localmente homeomorfa a algún \mathbb{R}^n , es decir,

$$\forall p \in M, \exists \lambda \in \Lambda, \text{ tal que } p \in U_\lambda \text{ y } \varphi_\lambda(U_\lambda) \cong W \subset \mathbb{R}^n$$

Luego, como en el espacio Euclideo \mathbb{R}^n tenemos el producto interno usual, que denotaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$, por lo desarrollado en la observación 1.2.6 tenemos localmente la métrica inducida sobre $U_\lambda \subset M$ dada por el pullback de $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$ restringido a U_λ mediante φ_λ , esto es

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda := \varphi_\lambda^* \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n} \big|_{U_\lambda} : T_p U_\lambda \times T_p U_\lambda \longrightarrow \mathbb{R}$$

Esto nos entrega una métrica Riemanniana sobre cada abierto del atlas maximal \mathcal{A}_M . Luego, podemos definir

$$g(\cdot, \cdot)_p := \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda(p) \langle \cdot, \cdot \rangle_\lambda$$

Que hereda desde el producto interno el ser simétrico, y además debe ser definido positivo, pues los ρ_λ no se anulan todos al mismo tiempo, de lo que concluimos el resultado. \square

Teniendo en consideración una serie de propiedades adicionales de interés es que introduciremos las siguientes definiciones.

Definición (Métrica Hermitiana).

Una métrica Riemanniana g sobre M se llama *Hermitiana* si $g(Jx, Jy)_p = g(x, y)_p$ para cualquiera vectores $x, y \in T_p M$. Es decir, si la estructura compleja J es una isometría en cada espacio tangente $T_p M$. Definimos además, la forma ω asociada a la métrica Hermitiana $\omega(x, y)_p = g(Jx, y)_p$ para cada $x, y \in T_p M$.

De esta forma, se tiene que ω es antisimétrica y se tiene que ω es una 2-forma real de tipo $(1, 1)$.

Definición (Métrica Kähleriana).

Una métrica Hermitiana g se llama *Kähleriana* si la 2-forma ω es cerrada, esto es, $d\omega = 0$. En este caso, llamamos a ω **forma de Kähler**.

En coordenadas locales de la variedad z^1, \dots, z^n , una métrica Hermitiana tiene componentes $g_{j\bar{k}}$ dadas por

$$g_{j\bar{k}} = g \left(\frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \right)$$

Si extendemos g al espacio tangente complejo usando la \mathbb{C} -linealidad de g en ambas entradas, pode-

mos ver que la condición de ser Hermitiana implica que

$$g\left(\frac{\partial}{\partial z^j}, \frac{\partial}{\partial z^k}\right) = g\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}\right) = 0$$

de esta manera, la métrica puede escribirse en término de sus componentes y las coordenadas locales como

$$g = \sum_{j,k} g_{j\bar{k}} (dz^j \otimes d\bar{z}^k + d\bar{z}^k \otimes dz^j) \quad (1.3.1)$$

Observación 1.3.1. *Veamos las consecuencias de la simetría de la métrica g . En primer lugar $\overline{g_{j\bar{k}}} = g_{k\bar{j}}$, además que g sea positiva nos dice que $g_{j\bar{k}}$ es una matriz Hermitiana definida positiva en cada punto $p \in M$. Podremos escribir la 2-forma ω como*

$$\omega = \mathbf{i} \sum_{j,k} g_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k.$$

De esto, concluimos que g es de Kähler si para todos i, j, k se tiene la igualdad

$$\frac{\partial}{\partial z^i} g_{j\bar{k}} = \frac{\partial}{\partial z^j} g_{i\bar{k}}$$

al aplicar las derivadas con índice correspondiente en la igualdad 1.3.1 y usando que $d\omega = 0$ si ω es la forma de Kähler.

Ahora, presentaremos un ejemplo de métrica que será relevante a lo largo de esta memoria pues es una métrica de Kähler en el espacio proyectivo complejo.

Ejemplo 1.3.1 (Métrica de Fubini-Study). *El espacio proyectivo complejo \mathbb{P}^n tiene una métrica natural ω_{FS} denominada **métrica de Fubini-Study**. Realicemos la construcción de esta métrica a continuación, para esto debemos tener en mente la aplicación de proyección*

$$\pi : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^n$$

Una sección s sobre un abierto $U \subset \mathbb{P}^n$ es una aplicación holomorfa

$$s : U \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$$

tal que $\pi \circ s$ es la identidad, y dada esta sección, definimos

$$\omega_{\text{FS}} = \mathbf{i} \partial \bar{\partial} \log \|s\|^2$$

Para ver que esta bien definida, notemos que si s' es otra sección sobre un abierto V , entonces sobre

la intersección $U \cap V$ tenemos que $s' = fs$, para una función holomorfa $f : U \cap V \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ y además

$$\begin{aligned} \mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \|fs\|^2 &= \mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \|s\|^2 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log(f\bar{f}) \\ &= \mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \|s\|^2 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log(f) + \mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log(\bar{f}) \\ &= \mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \|s\|^2. \end{aligned}$$

Dado que las secciones existen sobre abiertos U , obtenemos una $(1,1)$ -forma cerrada, que es bien definida \mathbb{P}^n .

Como ω_{FS} es definida localmente en términos de la norma usual en \mathbb{C}^n , tenemos que es invariante bajo las acciones del grupo unitario $U(n+1)$, y $U(n+1)$ actúa transitivamente sobre \mathbb{P}^n . Será suficiente verificar que la matriz Hermitiana correspondiente es definida positiva en un único punto, digamos $[1 : 0 : \dots : 0]$ pues esta invarianza extiende el resultado a todo punto. Usamos las coordenadas locales

$$w^i = \frac{z^i}{z^0}, \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

definida para la carta (U_0, φ_0) . Una sección es dada por

$$s(z^1, \dots, z^n) = (1, z^1, \dots, z^n).$$

Finalmente, tenemos que la métrica es dada por

$$g_{\text{FS}} = \mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log(1 + |z^1|^2 + \dots + |z^n|^2)$$

En el origen esto corresponde a $\mathbf{i} \sum_i dz^i \wedge d\bar{z}^i$, cuya matriz Hermitiana asociada es la identidad, la cual, en efecto, es definida positiva.

Observación 1.3.2. Consideremos una $(1,0)$ -forma α sobre una variedad de Kähler compacta, veremos más adelante (ver 2.5.2) que α satisface que

$$\partial\alpha = \partial^*\alpha = 0$$

entonces $\bar{\partial} = 0$. Donde ∂^* corresponde al operador adjunto formal de $\partial : \mathcal{A}^{p,q} \rightarrow \mathcal{A}^{p+1,q}$, este se describirá en mayor detalle en el siguiente capítulo, que concierne principalmente a elementos de análisis y operadores elípticos sobre variedades.

Ahora, presentaremos el lema- $\partial\bar{\partial}$ que muestra que sobre una variedad compacta, las métricas de Kähler en una clase de cohomología fija se pueden parametrizar por funciones a valores reales.

Lema 1.3.1 (Lema- $\partial\bar{\partial}$).

Sea X una variedad Kähleriana compacta. Si ω y η son dos $(1,1)$ -formas reales en la misma clase

de cohomología de de Rham, entonces existe una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\eta = \omega + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}f$$

Este resultado se puede probar utilizando Teoría de Hodge, una demostración para una versión general de este resultado se presentará en la sección 1.9.

El siguiente resultado muestra que si tenemos una métrica de Kähler, entonces es posible elegir coordenadas holomorfas locales suficientemente buenas (en un sentido por mencionar) en torno a cualquier punto.

Proposición 1.3.2 (Coordenadas normales).

Si g es una métrica de Kähler, entonces en todo punto $p \in X$ podemos elegir coordenadas holomorfas locales z^1, \dots, z^n tal que las componentes de g en cada punto p satisfacen

$$g_{j\bar{k}}(p) = \delta_{jk} \quad \text{y} \quad \frac{\partial}{\partial z^i} g_{j\bar{k}}(p) = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i} g_{j\bar{k}} = 0, \quad (1.3.2)$$

donde δ_{ij} corresponde a la función Delta de Kronecker.

Demostración. Probaremos una condición equivalente a 1.3.2, la cual consiste en que la forma de Kähler ω satisfaga

$$\omega = \mathbf{i} \sum_{j,k} (\delta_{jk} + O(|z|^2)) dz^j \wedge d\bar{z}^k \quad (1.3.3)$$

donde $O(|z|^2)$ denota aquellos términos de orden al menos cuadrático en z^j y \bar{z}^k .

Comenzamos seleccionando coordenadas locales w^i tales que

$$\omega = \mathbf{i} \sum_{j,k} \left(\delta_{jk} + \sum_{\ell} (a_{j\bar{k}\ell} w^{\ell} + a_{j\bar{k}\ell} \bar{w}^{\ell}) + O(|w|^2) \right) dw^j \wedge d\bar{w}^k \quad (1.3.4)$$

En este momento, bueno recordar que detrás de la elección de coordenadas se encuentra de forma implícita la elección de una vecindad del origen, consideremos una vecindad mas pequeña del origen en que se satisface

$$w^i = z^i - \frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{ijk} z^j z^k$$

donde b_{ijk} son coeficientes tales que $b_{ijk} = b_{ikj}$. Entonces, de esta relación obtenemos

$$\begin{aligned} dw^i &= dz^i - \frac{1}{2} \sum_{j,k} b_{ijk} d(z^j z^k) \\ &= dz^i - \sum_{j,k} b_{ijk} z^j dz^k. \end{aligned}$$

De esta manera, a partir de 1.3.4, la forma de Kähler queda como

$$\omega = \mathbf{i} \sum_{j,k} \left(\delta_{jk} + \sum_{\ell} \left(a_{j\bar{k}\ell} z^{\ell} + a_{j\bar{k}\ell} z^{\ell} - b_{k\ell j} z^{\ell} - \overline{b_{j\ell k}} \bar{z}^{\ell} + O(|z|^2) \right) \right) dz^j \wedge d\bar{z}^k$$

Luego, si ω es Kähleriana, por la igualdad 1.3.4 sabemos que $a_{j\bar{k}\ell} = a_{\ell\bar{k}j}$, de modo que si escogemos los coeficientes $b_{k\ell j} := a_{j\bar{k}\ell}$, los cuales satisfacen la condición $b_{ijk} = b_{ikj}$, entonces

$$a_{j\bar{k}\ell} = \overline{a_{k\bar{j}\ell}} = \overline{b_{j\ell k}}$$

y en consecuencia, los términos lineales de ω se cancelan. \square

Terminaremos esta sección con el siguiente ejemplo, que ilustra como se relaciona el volumen (que se puede entender como análogo a la medida de una variedad) con la métrica con la que dotamos a una variedad.

Ejemplo 1.3.2 (Forma de volumen). *En una variedad de Kähler (X, ω) de dimension compleja n , la forma de volumen Riemanniana es dada por $\frac{\omega^n}{n!}$ donde $\omega^n = \omega \wedge \dots \wedge \omega$. Para ver esto, escribimos localmente ω respecto a coordenadas holomorfas normales $\{z^1, \dots, z^n\}$ como sigue*

$$\omega = \mathbf{i} \sum_{j,k} \delta_{jk}^j dz^j \wedge d\bar{z}^k$$

De esta forma si consideramos $z^i = x^i + \mathbf{i}y^i$ entonces $\{x^1, y^1, \dots, x^n, y^n\}$ son un marco ortogonal para la variedad Riemanniana subyacente $(X_{\mathbb{R}}, g)$ (donde g es la parte real de la métrica de Kähler). Notemos que

$$\begin{aligned} dz^i \wedge d\bar{z}^i &= (dx^i + \mathbf{i}dy^i) \wedge (dx^i - \mathbf{i}dy^i) \\ &= (dx^i)^2 + \mathbf{i}dy^i \wedge dx^i - \mathbf{i}dx^i \wedge (\mathbf{i}dy^i) + (dy^i)^2 \\ &= -2\mathbf{i}dx^i \wedge dy^i \end{aligned}$$

Escribimos ω en el marco definido para la variedad Riemanniana subyacente como sigue

$$\omega = \sum_{j=1}^k dx^i \wedge dy^i.$$

Luego, notemos que para $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 2$

$$\begin{aligned}\omega^2 &= (dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2) \wedge (dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2) \\ &= (dx^1 \wedge dy^1)^2 + dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2 + dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^1 \wedge dy^1 + (dx^2 \wedge dy^2)^2 \\ &= 2dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2 \\ &= 2 \text{ vol}\end{aligned}$$

Asímismo, para $\dim_{\mathbb{C}}(X) = 3$ podemos reiterar el calculo anterior para ver que

$$\omega^3 = (dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2 + dx^3 \wedge dy^3)^3$$

se conforma de términos de la forma

$$dx^i \wedge dy^i \wedge dx^j \wedge dy^j \wedge dx^k \wedge dy^k$$

que son todos nulos, excepto cuando $i \neq j \neq k$, en cuyo caso podemos concluir que

$$\begin{aligned}\omega^3 &= 6dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2 \wedge dx^3 \wedge dy^3 \\ &= 6 \text{ vol}\end{aligned}$$

De forma más general, si $\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$ podemos utilizar el teorema multinomial para encontrar que

$$\begin{aligned}\omega^n &= (dx^1 \wedge dy^1 + dx^2 \wedge dy^2 + \dots dx^n \wedge dy^n)^n \\ &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \left(\bigwedge_{t=1}^n (dx^t \wedge dy^t)^{k_t} \right).\end{aligned}$$

Donde todos los términos son nulos, salvo que $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 1$ y por lo tanto

$$\begin{aligned}\omega^n &= \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \left(\bigwedge_{t=1}^n (dx^t \wedge dy^t)^{k_t} \right) \\ &= n! \bigwedge_{t=1}^n (dx^t \wedge dy^t) \\ &= n! (dx^1 \wedge dy^1 \wedge dx^2 \wedge dy^2 \wedge \dots \wedge dx^n \wedge dy^n) \\ &= n! \text{ vol}\end{aligned}$$

de lo que concluimos que

$$\text{vol} = \frac{\omega^n}{n!}$$

En geometría Riemanniana siempre es posible escoger coordenadas normales en las cuales las pri-

meras derivadas de la métrica se anulan en un punto dado, lo cual se extiende a cualquier métrica Hermitiana. Es importante notar que el resultado anterior nos dice que en caso de que la métrica sea Kähleriana, entonces se puede encontrar coordenadas holomorfas en las que las primeras derivadas se anulan en un punto.

Observación 1.3.3. *El recíproco del resultado anterior es cierto y se obtiene al considerar en 1.3.2 que las coordenadas normales holomorfas existen, entonces ω es una forma cerrada, es decir, es Kähleriana.*

Terminamos esta sección presentando un Lema que será de utilidad en el capítulo 3, en la prueba del Teorema de Yau.

Lema 1.3.2.

Sean α y β dos $(1,1)$ -formas, dadas en coordenadas locales por $\alpha = \mathbf{i}\alpha_{j\bar{k}}dz^j \wedge d\bar{z}^k$ y $\beta = \mathbf{i}\beta_{j\bar{k}}dz^j \wedge d\bar{z}^k$ tales que $\alpha_{j\bar{k}}$ y $\beta_{j\bar{k}}$ corresponden a matrices Hermitianas. Si ω es una métrica de Kähler con componentes $g_{j\bar{k}}$, entonces

$$\begin{aligned} n\alpha \wedge \omega^{n-1} &= (\mathrm{tr}_\omega \alpha) \omega^n, \\ n(n-1)\alpha \wedge \beta \wedge \omega^{n-2} &= [(\mathrm{tr}_\omega \alpha)(\mathrm{tr}_\omega \beta) - \langle \alpha, \beta \rangle_\omega] \omega^n, \end{aligned}$$

Donde $\mathrm{tr}_\omega \alpha = g^{j\bar{k}} \alpha_{j\bar{k}}$ y $\langle \alpha, \beta \rangle_\omega = g^{j\bar{k}} g^{p\bar{q}} \alpha_{j\bar{q}} \beta_{p\bar{k}}$

Demostración. Notemos que la primera igualdad se obtiene al tomar $\beta = \omega$ por lo que bastará probar la segunda igualdad. Para esto, escribiremos en coordenadas locales para un punto $p \in X$ para las cuales g es la identidad y que α es diagonal, entonces

$$\omega = \mathbf{i} \sum_{i=1}^n g_{i\bar{i}} dz^i \wedge d\bar{z}^i,$$

luego

$$\begin{aligned} \omega^{n-2} &= \mathbf{i}^{n-1} (n-2)! \sum_{i < j} dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge dz^{i-1} \wedge d\bar{z}^{i-1} \wedge dz^{i+1} \wedge d\bar{z}^{i+1} \\ &\quad \wedge \dots \wedge dz^{j-1} \wedge d\bar{z}^{j-1} \wedge dz^{j+1} \wedge d\bar{z}^{j+1} \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^n. \end{aligned}$$

Además,

$$\alpha \wedge \beta = \mathbf{i}^2 \sum_{i \neq j} \alpha_{i\bar{i}} \beta_{j\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^i \wedge dz^j \wedge d\bar{z}^j + F(\beta_{j\bar{k}})$$

donde $F(\beta_{j\bar{k}})$ corresponde a términos donde $j \neq k$, pues hemos supuesto que α . Luego, se tiene que

$$\begin{aligned} n(n-1)\alpha \wedge \beta \wedge \omega^{n-2} &= \mathbf{i}^n n! \sum_{i \neq j} \alpha_{i\bar{i}} \beta_{j\bar{j}} dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \dots \wedge dz^n \wedge d\bar{z}^n \\ &= \left(\sum_{i \neq j} \alpha_{i\bar{i}} \beta_{j\bar{j}} \right) \omega^n \\ &= ((\text{tr}_\omega \alpha)(\text{tr}_\omega \beta) - \langle \alpha, \beta \rangle_\omega) \omega^n \end{aligned}$$

□

1.4. Derivadas Covariantes y Curvatura

Ya hemos presentado los fibrados tangente y cotangente sobre una variedad y, en particular, hemos revisado y discutido sobre como es posible dotar al fibrado cotangente de una forma de diferenciar que extiende las nociones usuales de las derivadas que conocemos. Es por esto, que nos interesa saber si es posible extender aun mas estas nociones a otros fibrados que se puedan definir sobre una variedad diferenciable a la que se dota de estructura compleja. Antes de empezar debemos presentar la definición de **haces de espacios vectoriales**.

Definición (Haz de espacios vectoriales).

Sea X un espacio topológico, llamamos **haz** a una asignación \mathcal{F} tal que

1. Para todo abierto $U \subset X$, $\mathcal{F}(U)$ es un espacio vectorial.
2. Para cada inclusión de abiertos de X , $U \hookrightarrow V$, se tiene una aplicación de restricción

$$\begin{aligned} r_{U,V} : \mathcal{F}(V) &\longrightarrow \mathcal{F}(U) \\ s &\longmapsto r_{V,U}(s) = s|_U \end{aligned}$$

tal que

- a) Si $U \hookrightarrow V \hookrightarrow W$ son inclusiones de abiertos en X , las restricciones conmutan, es decir

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(W) & \xrightarrow{r_{W,V}} & \mathcal{F}(V) \\ & \searrow r_{W,U} & \downarrow r_{V,U} \\ & & \mathcal{F}(U) \end{array}$$

- b) $r_{U,U} = \text{Id}_U$ para todo abierto $U \subseteq X$.

Los elementos $s \in \mathcal{F}(U)$ son llamados **secciones** de \mathcal{F} sobre U . Además, estos se denotan por

$$\mathcal{F}(U) = \Gamma(U, \mathcal{F}).$$

Si \mathcal{F} es un prehaz de espacios vectoriales sobre X decimos que \mathcal{F} es un **haz de espacios vectoriales** si se cumplen las siguientes condiciones para todo abierto $U \subseteq X$:

1. Si $U = \cup_i V_i$ es un cubrimiento abierto, y $s_i \in \mathcal{F}(V_i)$ son secciones tales que

$$s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j} \quad \forall i, j$$

Entonces, existe $s \in \mathcal{F}(U)$ una sección tal que

$$s|_{V_i} = s_i \quad \forall i$$

2. Si $U = \cup_i V_i$ es un cubrimiento abierto y $s \in \mathcal{F}$ es una sección, entonces: Si $s|_{V_i} = 0$ para todo i entonces, s es idénticamente cero en U , correspondiendo a la denominada **sección nula**.

Definición (Morfismo de Haces).

Sean \mathcal{F} y \mathcal{G} dos haces de espacios vectoriales sobre un espacio topológico X . Denominamos **morfismo de haces** a una aplicación $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ que satisface

1. Para todo abierto $U \subseteq X$, se tiene un morfismo

$$\varphi_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U).$$

2. Para cada inclusión $U \hookrightarrow V$ de abiertos de X , el diagrama siguiente

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(V) \\ r_{V,U} \downarrow & & \downarrow r_{V,U} \\ \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \end{array}$$

es conmutativo.

Un ejemplo de gran utilidad es el haz de funciones continuas sobre los abiertos de un espacio topológico. Esencialmente, los haces de funciones suaves (resp. holomorfas) que utilizaremos a lo largo de esta memoria dotan a las variedades diferenciales (resp. complejas) de su estructura diferencial (resp. holomorfa).

Consideremos M una variedad diferencial real equipada con una estructura compleja J , y sea $\pi: E \rightarrow M$ un fibrado vectorial complejo sobre M . Denotaremos como antes por $\mathcal{A}^i(E)$ al haz de i -formas con valores en E . En particular $\mathcal{A}^0(E)$ es el haz de secciones de E . Pero, a diferencia del fibrado tangente, estas secciones no tienen canónicamente una forma de diferenciarse, es decir,

el diferencial exterior, en general, no está bien definido para secciones de E . Se hace necesaria una manera de diferenciar que sustituya al diferencial exterior. Esta será dada por una **conexión** sobre E que no es canónica, pero siempre existe.

Presentamos la definición de conexión sobre un fibrado, sobre la cual se discutirá en mayor profundidad en secciones posteriores

Definición (Conexión).

Una **conexión** sobre un fibrado vectorial E es un homomorfismo de haces \mathbb{C} -lineal

$$\nabla : \mathcal{A}^0(E) \rightarrow \mathcal{A}^1(E)$$

que satisface la **regla de Leibniz**

$$\nabla(f \cdot s) = d(f) \otimes s + f \cdot \nabla(s)$$

para toda función f , localmente sobre M y cualquier sección localmente sobre E .

Dada esta definición, será importante definir una forma de interpretar geoméricamente algunos resultados al operar con conexiones.

Definición (Sección paralela).

Una sección s de un fibrado vectorial E se denominará **paralela** respecto a la conexión ∇ sobre E , si $\nabla(s) = 0$.

Una vez presentadas las definiciones anteriores, podemos situarnos el caso en que la variedad (X, ω) es Kähleriana. En este caso, utilizamos la conexión ∇ de **Levi-Civita** para diferenciar campos tensoriales, esta es, aquella conexión para la cual la métrica satisface que $\nabla g = 0$, y para la cual se tiene la propiedad de simetría o de ser libre de torsión, esto es, para cualesquiera X, Y campos vectoriales y para $[\cdot, \cdot]$ es el corchete de Lie

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

En coordenadas normales holomorfas la estructura compleja J es constante, y en consecuencia $\nabla J = 0$. Esto junto a que $\omega(X, Y) = g(JX, Y)$, implica que $\nabla \omega = 0$. Este tipo de resultados serán de gran importancia en el capítulo 4.

En términos de coordenadas locales holomorfas z^1, \dots, z^n , utilizamos la siguiente notación para las coordenadas de la conexión y las derivadas parciales respectivas a cada variable

$$\nabla_i = \nabla_{\partial/\partial z^i}, \quad \nabla_{\bar{i}} = \nabla_{\partial/\partial \bar{z}^i}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial z^i}, \quad \partial_{\bar{i}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}.$$

Notemos que

$$J \left(\nabla_j \frac{\partial}{\partial z^k} \right) = \nabla_j J \left(\frac{\partial}{\partial z^k} \right) = \mathbf{i} \nabla_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}.$$

Así, el campo vectorial $\nabla_j \frac{\partial}{\partial z^k}$ es de tipo $(1, 0)$, es decir, $\nabla_j \frac{\partial}{\partial z^k} \in T^{1,0}M$ y en consecuencia definimos los **símbolos de Christoffel** Γ_{jk}^i mediante la igualdad

$$\nabla_j \frac{\partial}{\partial z^k} = \sum_i \Gamma_{jk}^i \frac{\partial}{\partial z^i}$$

De la misma manera $\nabla_{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$ es de tipo $(1, 0)$, mientras que $\nabla_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k}$ es de tipo $(0, 1)$, es decir, $\nabla_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} \in T^{0,1}M$. Sin embargo, se puede probar que la conexión es libre de torsión² entonces

$$\nabla_{\bar{i}} \frac{\partial}{\partial z^k} = \nabla_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}^i}$$

de modo que ambos campos vectoriales deben anularse, pues los espacios $T_p^{1,0}M$ y $T_p^{0,1}M$ están en suma directa. Además, $\nabla_{\bar{i}} T = \overline{\nabla_i T}$ para cualquier tensor T , de lo que concluimos que la conexión queda completamente determinada por los coeficientes Γ_{jk}^i . Note que

$$\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{kj}^i \quad \text{y} \quad \Gamma_{\bar{j}\bar{k}}^{\bar{i}} = \overline{\Gamma_{jk}^i}.$$

Las derivadas covariantes de un campo tensorial pueden calcularse usando la regla del producto para derivadas, recordando que las funciones de derivadas covariantes coinciden con las derivadas parciales usuales.

Ejemplo 1.4.1. Para encontrar las derivadas covariantes de dz^k , diferenciamos la relación

$$dz^k \left(\frac{\partial}{\partial z^j} \right) = \delta_j^k,$$

donde δ_j^k corresponde a la delta de Kronecker. Obtenemos entonces,

$$(\nabla_i dz^k) \frac{\partial}{\partial z^j} + dz^k \left(\nabla_i \frac{\partial}{\partial z^j} \right) = 0$$

De lo que concluimos las igualdades

$$(\nabla_i dz^k) \frac{\partial}{\partial z^j} = -\Gamma_{ij}^k \quad \text{y} \quad (\nabla_i dz^k) \frac{\partial}{\partial \bar{z}^j} = 0$$

²La torsión corresponde al termino que impide la igualdad

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y].$$

Es decir, podemos definir el tensor de torsión entre dos campos vectoriales X e Y como $T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$

De lo que sigue que las derivadas covariantes de dz^k son de la forma

$$\nabla_i dz^k = - \sum_j \Gamma_{ij}^k dz^j.$$

Notación 1.4.1. En adelante usaremos la convención para la suma en que sumamos los índices repetidos. Esto es, si escribimos $a_{i\bar{j}} dz^i \otimes dz^j$ estamos sumando sobre los índices i y j , y en general abreviamos esto como $a_{i\bar{j}}$.

Ejemplo 1.4.2 (Reescritura de una (p, q) -formas según la convención de Einstein).

En el ejemplo 1.2.1 escribimos una (p, q) -forma en términos de la coordenadas locales z_i y \bar{z}_i , mediante el uso de la convención de Einstein,

$$\omega = \alpha_{IJ} dz^I \wedge d\bar{z}^J := \alpha_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q} dz^{i_1} \wedge \dots \wedge dz^{i_p} \wedge d\bar{z}^{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}^{j_q}$$

Podemos ver que obtenemos una escritura más compacta que nos resultara útil al tratar con expresiones tensoriales mas largas. Además, es una convención cuyo uso es altamente difundido en la física y matemática en el contexto que estamos desarrollando, de modo que nos servirá para hacer más compatibles aquella literatura y esta memoria.

Ejemplo 1.4.3. Calculemos las derivadas covariantes de un tensor $a_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j$ utilizando la regla del producto, esto es

$$\begin{aligned} \nabla_{\bar{p}}(a_{i\bar{j}} dz^i \otimes d\bar{z}^j) &= (\partial_{\bar{p}} a_{i\bar{j}}) dz^i \otimes d\bar{z}^j + a_{i\bar{j}} (\nabla_{\bar{p}} dz^i) \otimes d\bar{z}^j + a_{i\bar{j}} dz^i \otimes (\nabla_{\bar{p}} d\bar{z}^j) \\ &= \left(\partial_{\bar{p}} a_{i\bar{j}} \right) dz^i \otimes d\bar{z}^j - a_{i\bar{j}} dz^i \otimes \left(\Gamma_{\bar{p}\bar{\ell}}^{\bar{j}} d\bar{z}^{\bar{\ell}} \right) \\ &= \left(\partial_{\bar{p}} a_{i\bar{j}} - \Gamma_{\bar{p}\bar{j}}^{\bar{\ell}} a_{i\bar{\ell}} \right) dz^i \otimes d\bar{z}^j. \end{aligned}$$

Podemos escribir estas igualdades de forma mas resumida como sigue

$$\nabla_{\bar{p}} a_{i\bar{j}} = \partial_{\bar{p}} a_{i\bar{j}} - \Gamma_{\bar{p}\bar{j}}^{\bar{\ell}} a_{i\bar{\ell}}$$

De donde podemos obtener formulaciones de tensores mas generales.

Cálculos de la forma del ejemplo anterior serán de gran utilidad en el capítulo 3, y se utilizarán para estudiar la existencia de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales en variedades de Kähler.

Lema 1.4.1.

En términos de la métrica $g_{j\bar{k}}$ los símbolos de Christoffel son dados por

$$\Gamma_{jk}^i = g^{i\bar{\ell}} \partial_j g_{k\bar{\ell}}$$

donde, $g^{i\bar{\ell}}$ corresponde a la matriz inversa de $g_{i\bar{\ell}}$.

Demostración. La conexión de Levi-Civita satisface por definición que $\nabla g = 0$, esto es, en términos de las coordenadas

$$0 = \nabla_j g_{k\bar{\ell}} = \partial_j g_{k\bar{\ell}} - \Gamma_{jk}^p g_{p\bar{\ell}},$$

luego

$$g^{i\bar{\ell}} \partial_j g_{k\bar{\ell}} = \Gamma_{jk}^p g_{p\bar{\ell}} g^{i\bar{\ell}} = \Gamma_{jk}^p \delta_p^i = \Gamma_{jk}^i$$

□

En general, las derivadas covariantes no son conmutativas, la diferencia respecto a conmutar es medida por la curvatura. En este caso, la curvatura corresponde a un 4-tensor $R_{ik\bar{\ell}}^j$, cuyos índices se comportan como sigue al operar con la métrica

$$R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = g_{p\bar{j}} R_{ik\bar{\ell}}^p \quad (1.4.1)$$

Donde debemos notar que la posición de los índices es relevante en el resultado de la izquierda. Así, definimos la curvatura como sigue

$$(\nabla_k \nabla_{\bar{\ell}} - \nabla_{\bar{\ell}} \nabla_k) \frac{\partial}{\partial z^i} = R_{ik\bar{\ell}}^j \frac{\partial}{\partial z^j},$$

mientras que ∇_k y $\nabla_{\bar{\ell}}$ si conmutan, al igual que $\nabla_{\bar{k}}$ y $\nabla_{\bar{\ell}}$.

Observación 1.4.1. *Se pueden concluir las relaciones de conmutación para un campo vectorial $v^{\bar{p}}$ de tipo $(0,1)$ y una $(0,1)$ -forma $\alpha_{\bar{p}}$*

$$\begin{aligned} (\nabla_k \nabla_{\bar{\ell}} - \nabla_{\bar{\ell}} \nabla_k) v^{\bar{p}} &= -R_{\bar{q}k\bar{\ell}}^{\bar{p}} v^{\bar{q}}, \\ (\nabla_k \nabla_{\bar{\ell}} - \nabla_{\bar{\ell}} \nabla_k) \alpha_{\bar{p}} &= -R_{\bar{p}k\bar{\ell}}^{\bar{q}} \alpha_{\bar{q}} \end{aligned}$$

En términos de los símbolos de Christoffel, tenemos

$$R_{ik\bar{\ell}}^j = -\partial_{\bar{\ell}} \Gamma_{ki}^j,$$

de donde encontramos una formulación en base a la métrica dada por

$$R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = -\partial_k \partial_{\bar{\ell}} g_{i\bar{j}} + g^{p\bar{q}} (\partial_k g_{i\bar{q}}) (\partial_{\bar{\ell}} g_{p\bar{j}}).$$

Observación 1.4.2. *En términos de coordenadas normales en torno a un punto p tenemos que $R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = -\partial_k \partial_{\bar{\ell}} g_{i\bar{j}}$ en este punto. Es decir, el tensor de curvatura de una métrica Kähleriana es el impedimento para encontrar coordenadas locales holomorfas para las cuales la métrica coincide con la métrica euclidiana hasta los términos de segundo orden. Resulta que si escribimos la expansión en serie de Taylor de la métrica en coordenadas normales, entonces cada coeficiente dependerá solo de las derivadas covariantes de la curvatura. En particular, si la curvatura se anula entorno a un*

punto, entonces en coordenadas normales la métrica coincide localmente con la métrica euclidiana (ver [Dem97, p.270]).

Observación 1.4.3. Notemos que en base a la igualdad 1.4.1 podemos obtener ahora las siguientes identidades para la curvatura de una métrica g

$$R_{i\bar{j}k\bar{\ell}} = R_{i\bar{\ell}k\bar{j}} = R_{k\bar{j}i\bar{\ell}} = R_{k\bar{\ell}i\bar{j}}$$

Definición (Curvatura de Ricci y Curvatura escalar).

Definimos la **curvatura de Ricci** como la contracción

$$R_{i\bar{j}} := g^{k\bar{\ell}} R_{i\bar{j}k\bar{\ell}}.$$

Definimos la **curvatura escalar** como

$$R := g^{i\bar{j}} R_{i\bar{j}}.$$

Utilizamos la definición de curvatura de Ricci y las identidades de los ejemplos 1.4.1 y 1.4.3 para enunciar el siguiente resultado

Proposición 1.4.1.

En coordenadas locales

$$R_{i\bar{j}} = -\partial_i \partial_{\bar{j}} \log \det(g_{p\bar{q}})$$

En consecuencia con las definiciones y la proposición anterior, definimos la forma de Ricci como

$$\text{Ric}(\omega) = \mathbf{i} R_{i\bar{j}} dz^i \wedge d\bar{z}^j = -\mathbf{i} \partial \bar{\partial} \log \det(g)$$

que en coordenadas locales corresponde a una $(1, 1)$ -formal real cerrada. Mas aun, si h es otra métrica Kähleriana, entonces el cociente de sus determinantes

$$\frac{\det(h)}{\det(g)}$$

es una función globalmente definida, de forma que la diferencia entre las formas de Ricci se calcula mediante la igualdad

$$\text{Ric}(h) - \text{Ric}(g) = -\mathbf{i} \partial \bar{\partial} \log \frac{\det(h)}{\det(g)}$$

y corresponde a una forma exacta. La clase de cohomología $[\text{Ric}(g)]$ es independiente de la elección de métrica Kähleriana g , en este caso, denotamos $\text{Ric}(g)$ o $\text{Ric}(\omega)$ indistintamente.

Definición (Primera clase de Chern).

La primera clase de Chern de X se define como la clase de cohomología

$$c_1(X) = \frac{1}{2\pi} [\text{Ric}(\omega)] \in H_{\text{dR}}^2(X, \mathbb{R}).$$

Observación 1.4.4. Se puede definir $c_i(E)$ para $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibrado vectorial, y se tiene que $c_i(X) := c_i(TM) \in H_{\text{dR}}^{2i}(X, \mathbb{R})$. Esto se detalla en el capítulo cuatro, en que se trata el **Teorema de descomposición de Beauville-Bogomolov**.

Ejemplo 1.4.4. Veamos que la métrica Fubini-Study ω_{FS} define la forma de Ricci, la cual satisface

$$\text{Ric}(\omega_{\text{FS}}) = (n+1)\omega_{\text{FS}}$$

Comencemos escribiendo en coordenadas locales la métrica en cuestión

$$\begin{aligned} g_{j\bar{k}} &= \mathbf{i} \partial_j \partial_{\bar{k}} \log \left(1 + \sum_{i=1}^n |z^i|^2 \right) \\ &= \frac{1}{\left(1 + \sum_{i=1}^n |z^i|^2 \right)^2} \left[\partial_j \partial_{\bar{k}} \left(1 + \sum_{i=1}^n |z^i|^2 \right) \left(1 + \sum_{i=1}^n |z^i|^2 \right) - \partial_{\bar{k}} \left(1 + \sum_{i=1}^n |z^i|^2 \right) \partial_j \left(1 + \sum_{i=1}^n |z^i|^2 \right) \right] \\ &= \frac{\delta_k^j \left(1 + \sum_{i=1}^n |z^i|^2 \right) - z^k \bar{z}^j}{\left(1 + \sum_{i=1}^n |z^i|^2 \right)^2} \end{aligned}$$

Esto es, la métrica de Fubini-Study corresponde localmente a

$$g_{j\bar{k}} = \frac{\delta_k^j (1 + z\bar{z}) - z^k \bar{z}^j}{(1 + z\bar{z})^2}$$

Para calcular la forma de Ricci para la métrica Fubini-Study notemos que podemos escribir matricialmente esta como

$$G_{jk} := (1 + z\bar{z})^2 g_{j\bar{k}} = A_{jk} - B_{jk}$$

para

$$A_{jk} = \delta_k^j (1 + z^j \bar{z}^k) \quad y \quad B_{jk} = z^k \bar{z}^j$$

Donde, A corresponde a $(1 + z\bar{z}) \text{Id}$ y B es una matriz simétrica de rango 1, y por lo tanto existe

una matriz P invertible para la cual podemos escribir

$$PGP^{-1} = PAP^{-1} - PBP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + |z|^2 & & & \\ & 1 + |z|^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 + |z|^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} |z|^2 & & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

De esta manera, el determinante de G corresponde al producto de su diagonal, es decir, calculamos el determinante de $g_{j\bar{k}}$ como

$$\det(g) = (1 + z\bar{z})^{-2} \det(G)$$

Es decir,

$$\det(g_{j\bar{k}}) = \frac{1}{(1 + |z|^2)^{n+1}}.$$

Con esto calculamos la forma de Ricci como sigue

$$\text{Ric}(\omega) = \mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \det(g)$$

que en coordenadas locales corresponde a

$$R_{j\bar{k}} = -\partial_j \partial_{\bar{k}} \log \left((1 + z\bar{z})^{-(n+1)} \right)$$

y por lo tanto,

$$R_{j\bar{k}} = (n + 1) \partial_j \partial_{\bar{k}} \log (1 + z\bar{z})$$

con lo que concluimos la proporción del inicio del ejemplo.

Para concluir esta sección, presentamos el resultado fundamental respecto a la curvatura de Ricci de una variedad Kähleriana. Esta es la solución de Yau [Yau78] a la conjetura de Calabi [Cal57]

Teorema 1.4.1 (Teorema de Calabi-Yau).

Sea (X, ω) una variedad Kähleriana compacta y sea α una $(1, 1)$ -forma real que representa la primera clase de Chern, $c_1(M)$. Entonces existe una única métrica Kähleriana η sobre M con $[\eta] = [\omega]$ tal que $\text{Ric}(\eta) = 2\pi\alpha$.

En particular si $c_1(X) = 0$, entonces cada clase de Kähler contiene una única métrica de Ricci plana. Esto nos da un primer ejemplo de métrica Kähleriana canónica. Este resultado está dedicado al estudio de variedades con $c_1(X) = 0$, presentaremos una demostración simplificada utilizando estimaciones de Schauder.

1.5. Fibrados Vectoriales

Como introdujimos en la sección 1.1 un fibrado vectorial holomorfo E sobre una variedad compleja X es una familia holomorfa de espacios vectoriales complejos parametrizados por X . E es por si mismo una variedad compleja, junto con una proyección holomorfa

$$\pi : E \rightarrow X$$

y la familia es localmente trivial de modo que $X = \cup_i U_i$ es un cubrimiento por abiertos tal que se tienen los biholomorfismos (usualmente denominados **trivializaciones**)

$$\psi_i : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{C}^r, \quad (1.5.1)$$

para algún entero $r > 0$, que se denomina **rango** de E . Bajo la trivializacion ψ_i , π corresponde a la proyección sobre U_i . Las trivializaciones se relacionan por aplicaciones de transición holomorfas de la forma

$$\begin{aligned} \psi_j \circ \psi_i^{-1} : (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r &\rightarrow (U_i \cap U_j) \times \mathbb{C}^r \\ (p, v) &\mapsto (p, \psi_{ji}(p)v) \end{aligned}$$

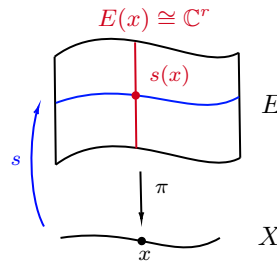
las cuales, en cada punto $p \in U_i \cap U_j$ nos entregan un isomorfismo lineal $\psi_{ji}(p)$ entre \mathbb{C}^r y \mathbb{C}^r . Estos isomorfismos con valores a matrices satisfacen la condición de compatibilidad (denominada **condición de cociclo**)

$$\psi_{kj}\psi_{ji} = \psi_{ki}. \quad (1.5.2)$$

Recíprocamente, cualquier conjunto de funciones holomorfas con valores matriciales ψ_{ji} que satisface la condición de cociclo define un fibrado vectorial. Es decir, podemos referirnos al fibrado vectorial generado o asociado a un conjunto de trivializaciones y sus respectivas transiciones satisfaciendo la condición de cociclo.

Definición (Sección Holomorfa).

Una sección holomorfa de un fibrado vectorial E es una aplicación holomorfa $s : X \rightarrow E$



tal que la composición $\pi \circ s$ corresponde a la identidad.

Una trivialización local ψ_i como en 1.5.1 da origen a secciones holomorfas locales que corresponden a funciones constantes sobre el abierto U_i . En particular, una base de \mathbb{C}^r da lugar a secciones holomorfas locales s_1, \dots, s_r que llamamos **marco holomorfo local**. El espacio generado por estas secciones locales corresponde a la fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ en cada punto $p \in U_i$. Así, cada sección holomorfa se puede escribir localmente como una combinación lineal de la forma

$$f = \sum_{i=1}^r f^i s_i,$$

donde cada f_i es una función holomorfa sobre el abierto U_i . Escribimos el espacio de formas holomorfas globales como $H^0(X, E)$.

Observación 1.5.1. *Una propiedad importante es que el espacio de secciones globales $H^0(X, E)$ es de dimension finita si X es compacta. Discutiremos esta propiedad con mayor profundidad mas adelante, aunque puede ser útil revisar [CS53].*

Ejemplo 1.5.1. *La parte de tipo $(1, 0)$ del fibrado cotangente $\Omega^{1,0}X$ es un fibrado vectorial holomorfo de rango n sobre X , donde n corresponde a la dimension de X . En una carta local, con coordenadas z^1, \dots, z^n una trivializacion es dada por el marco holomorfo dz^1, \dots, dz^n . Las aplicaciones de transición a una carta diferente son determinadas por la matriz Jacobiana de la transformación de coordenadas. Este fibrado se denomina **fibrado cotangente holomorfo**.*

Las operaciones naturales sobre espacios vectoriales, tales como tomar productos tensoriales, sumas directas, duales y otras operaciones se pueden extender a fibrados vectoriales.

Ejemplo 1.5.2. *Sobre una variedad compleja de dimension n podemos construir la n -ésima potencia exterior del fibrado cotangente holomorfo. Este corresponde a un fibrado en recta (un fibrado vectorial de rango 1) denotado por K_X y es denominado **fibrado canónico de X***

$$K_X = \bigwedge^n \Omega^{1,0}X = \Omega^{n,0}X$$

el cual en coordenadas locales holomorfas tiene un marco holomorfo generado por $dz^1 \wedge \dots \wedge dz^n$, y las aplicaciones de transición son dados por los determinantes del Jacobiano de cada aplicación de cambio de coordenadas.

Es importante notar que las definiciones de los fibrados tangente, cotangente y canónico, ya sean holomorfos o antiholomorfos dependen de la elección de los cociclos ψ_{ij} . Para distintas elecciones se obtienen fibrados canónicamente isomorfos, de modo que T_X, Ω_X y K_X son invariantes de la variedad compleja X .

Definición (Sucesión Exponencial).

La **sucesión exponencial** sobre una variedad compleja X es la sucesión exacta corta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^* \longrightarrow 0$$

Donde \mathbb{Z} corresponde al **haz de funciones localmente constantes** y $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathcal{O}_X$ es la inclusión natural de las funciones localmente constantes como funciones holomorfas y la sobreyección $\mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^*$ es dada por la exponencial

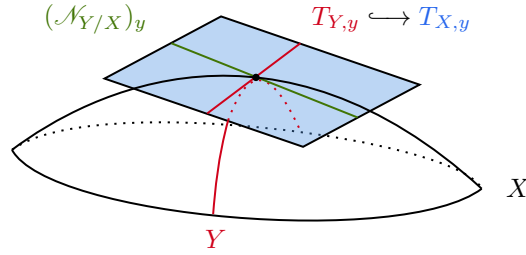
$$f \mapsto \exp(2\pi i f)$$

Definición (Fibrado Normal).

Sea $Y \subset X$ una subvariedad compleja, el **fibrado normal de Y en X** es el fibrado vectorial holomorfo

$$\mathcal{N}_{Y/X} \text{ sobre } X$$

que corresponde al cokernel de la inyección $T_Y \hookrightarrow T_{X/Y}$.



Existe una sucesión exacta corta de fibrados vectoriales holomorfos denominada **sucesión de fibrados normales**

$$0 \rightarrow T_Y \rightarrow T_X|_Y \rightarrow \mathcal{N}_{Y/X} \rightarrow 0.$$

Estos fibrados se relacionan mediante la siguiente relación, denominada fórmula de adjunción (ver [Huy05, Prop.2.2.17], o [GH78, p.146-147]).

Teorema 1.5.1 (Fórmula de Adjunción).

Sea Y una subvariedad de una variedad compleja X . Entonces el fibrado canónico K_Y de Y es naturalmente isomorfo al fibrado en recta dado por

$$K_X|_Y \otimes \det(\mathcal{N}_{Y/X}).$$

Ejemplo 1.5.3 (Fibrados en recta sobre \mathbb{P}^n). Teniendo en cuenta que \mathbb{P}^n es el espacio de rectas en \mathbb{C}^{n+1} , podemos construir un fibrado en recta denotado por $\mathcal{O}(-1)$ sobre \mathbb{P}^n asignando a cada punto con la recta que parametriza (como vector director). Una forma de pensar el fibrado $\mathcal{O}(-1)$ es como un subfibrado del caso trivial $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$. Si consideramos las cartas estándar U_i , se puede encontrar que bajo trivializaciones adecuadas las funciones de transición correspondientes a dichas cartas en

términos de coordenadas locales, quedan como

$$\varphi_{kj}([z^0 : \dots : z^n]) = \frac{z^k}{z^j}, \quad (1.5.3)$$

Notemos que al tratarse de clases de equivalencia, los términos z^k y z^j dependen del representante escogido en $U_j \cap U_i$, pero el cociente si lo está.

Como $\mathcal{O}(-1)$ es un subfibrado del fibrado trivial, cualquier sección holomorfa global da lugar a una función holomorfa $s : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$. Las componentes de s son funciones holomorfas sobre una variedad compleja compacta, de modo que deben ser constantes y concluimos que s es una función constante. Se puede probar que funciones constantes no nulas no dan lugar a secciones de $\mathcal{O}(-1)$, de modo que

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(-1)) = \{0\}.$$

Denotamos al dual de $\mathcal{O}(-1)$ por $\mathcal{O}(1)$, y podemos obtener los fibrados en recta $\mathcal{O}(\ell)$ para cada entero ℓ , tomando potencias tensoriales. Las funciones de transición $\varphi_{kj}^{(\ell)}$ de $\mathcal{O}(\ell)$ se obtienen de forma similar a 1.5.3, en este caso tienen la forma

$$\varphi_{kj}^{(\ell)}([z^0 : \dots : z^n]) = \left(\frac{z^j}{z^k} \right)^\ell$$

y por tanto, podemos pensar en secciones globales (ℓ) para $\ell \geq 0$ como polinomios homogéneos de grado ℓ en las variables z^0, \dots, z^n . En términos de trivializaciones locales, si f es un polinomio homogéneo de grado ℓ , entonces sobre las cartas U_j tenemos una función holomorfa $(z^j)^{-1}(f)$. Sobre diferentes cartas estas funciones se pegan utilizando las funciones de transición de 1.5.3, de modo que dan lugar a secciones globales de $\mathcal{O}(\ell)$. De hecho, en \mathbb{P}^n todo fibrado en recta es dado por $\mathcal{O}(\ell)$ para algún $\ell \in \mathbb{Z}$

Como en la sección 1.2 con la métrica, podemos definir mediante el pullback por aplicaciones holomorfas nuevos fibrados vectoriales que son inducidos por estas aplicaciones.

Definición (Pullback de fibrados vectoriales).

Sea $E \xrightarrow{\pi} X$ un fibrado vectorial sobre la variedad compleja X y sea $f : X' \rightarrow X$ un homeomorfismo. Definimos el **fibrado pullback de E mediante f** como

$$f^*E := \{(x', v) \in X' \times E \mid f(x') = \pi(v)\} \subset X' \times E$$

el cual equipamos con la topología de subespacio y de la proyección sobre la primera coordenada

$$\begin{aligned} \pi_1 : f^*E &\longrightarrow X' \\ (x', v) &\longmapsto x'. \end{aligned}$$

Es decir, este fibrado sobre X' se escribe como $f^*E \xrightarrow{\pi_1} X'$

Observación 1.5.2.

1. El fibrado $f^*E \xrightarrow{\pi_1} X'$ es un fibrado vectorial.
2. La proyección π_2 sobre la segunda coordenada del producto $X' \times E$ hace que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \longrightarrow & E \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

sea conmutativo.

3. Toda sección s de E sobre X induce una sección de f^*E dada por

$$f^*s := s \circ f$$

que se denomina como sección pullback.

1.6. Blow-up de variedades complejas

Hasta ahora hemos presentado algunos ejemplos de variedades complejas, privado de alguna propuesta de esquema de clasificarlas. De hecho, la clasificación de todas las variedades complejas es un problema altamente no trivial (por no decir casi imposible), pues es relativamente simple producir nuevas variedades desde una ya existente.

Una forma de producir nuevas variedades complejas a partir de una inicial es un **blow-up** sobre una variedad compleja X en una subvariedad $Y \subset X$. Así, en el contexto de variedades complejas compactas, el problema de clasificación usualmente significa estudiar su minimalidad, es decir, estudiar si provienen del blow-up de alguna otra variedad. Además del problema de clasificación, los blow-up son de utilidad en otros contextos, de hecho, algunos aparecerán más adelante.

Consideremos X una variedad compleja y sea $Y \subset X$ una subvariedad cerrada. Construiremos el **blow-up de X sobre Y** que es una variedad compleja denotada por $\text{Bly}(X)$ junto con una aplicación holomorfa propia $\hat{\sigma} : \hat{X} \rightarrow X$.

Ejemplo 1.6.1. Consideremos $X = \mathbb{C}^2$ con coordenadas (z^1, z^2) , y notemos que podemos ver las coordenadas como funciones holomorfas en X es decir $f_1 = z^1, f_2 = z^2 \in O(\mathbb{C}^2)$. Veamos que forma tiene el blow-up $\bar{X} = \text{Bl}_{(z^1, z^2)(X)} \mathbb{C}^2$ como subvariedad de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$. Notemos que la aplicación proyección usual

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\} &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ (z^1, z^2) &\longmapsto [z^1, z^2] \end{aligned}$$

está bien definida y podemos ver que para $U := \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ su gráfica es el conjunto

$$\{((x, y), [u, v]) \in U \times \mathbb{P}^1 \quad \text{tal que } xv - yu = 0\}$$

De esta forma

$$\overline{X} = \{((x, y), [u, v]) \in U \times \mathbb{P}^1 \quad \text{tal que } xv - yu = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$$

es el blow-up $\text{Bl}_{(z^1, z^2)}(X)$, así $\hat{\sigma}$ es dado por

$$\hat{\sigma}((x, y), [u, v]) = (x, y)$$

Gráficamente esto corresponde a

Observación 1.6.1. El fibrado normal de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$, es un espacio vectorial naturalmente isomorfo a \mathbb{C}^{n+1} .

Ejemplo 1.6.2 (Blow-up sobre subespacios lineales). Sea $\mathbb{C}^m \subset \mathbb{C}^n$ un subespacio lineal que satisface

$$z_{m+1} = \dots = z_n = 0.$$

Denotaremos por $[x_{m+1} : \dots : x_n]$ a las coordenadas homogéneas de \mathbb{P}^{n-m-1} . Definamos el blow-up deseado como

$$\text{Bl}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^n) := \{(x, z) \mid z^i \cdot x^j = z^j \cdot x^i, \quad \text{para } i, j \in \{m+1, \dots, n\}\} \subset \mathbb{P}^{n-m-1} \times \mathbb{C}^n$$

En otras palabras, $\text{Bl}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^n)$ es la variedad incidencia $\{(\ell, z) \mid z \in \langle \mathbb{C}^m, \ell \rangle\}$ donde $\ell \in \mathbb{P}^{n-m-1}$ corresponde al complemento lineal \mathbb{C}^{n-m} de $\mathbb{C}^m \subset \mathbb{C}^n$.

Utilizando la proyección $\pi : \text{Bl}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{P}^{n-m-1}$ podemos ver a $\text{Bl}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^n)$ como un \mathbb{C}^{n+1} -fibrado sobre \mathbb{P}^{n-m-1} . La fibra sobre $\ell \in \mathbb{P}^{n-m-1}$ es exactamente $\pi^{-1}(\ell) = \langle \mathbb{C}^m, \ell \rangle$, de manera que $\text{Bl}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^n)$ efectivamente es una variedad compleja. Más aún, la $\sigma : \text{Bl}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un isomorfismo sobre $\mathbb{C}^n \setminus \mathbb{C}^m$.

Con los ejemplos anteriores como referencia construiremos el **blow-up** de una variedad compleja X arbitraria de dimensión n sobre una subvariedad cualquiera $Y \subset X$ de dimensión m .

Escogemos un atlas $X = \bigcup U_i$ con cartas $\varphi_i : U_i \xrightarrow{\sim} \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^n$ tales que

$$\varphi_i(U_i \cap Y) = \varphi(U_i) \cap \mathbb{C}^m$$

Sea $\sigma : \text{Bl}_{\mathbb{C}^m}(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$ el blow-up de \mathbb{C}^n sobre \mathbb{C}^m como en el ejemplo anterior y denotaremos las

restricción al abierto $\varphi_i(U_i)$ como

$$\sigma_i : z_i := \sigma^{-1}(\varphi_i(U_i)) \longrightarrow \varphi_i(U_i)$$

Veamos que todos los blow-up en las cartas $\varphi_i(U_i)$ se pegan naturalmente.

Consideremos abiertos $U, V \subset \mathbb{C}^n$ y mapeos biholomorfos $\phi : U \cong V$ tales que $\phi(U \cap \mathbb{C}^m = V \cap \mathbb{C}^n$. Escribimos $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^n)$, entonces, para $k > m$ se tiene que

$$\phi^k = \sum_{j=m+1}^n z_j \phi_{k,j}.$$

Definimos la aplicación biholomorfa $\hat{\phi} : \sigma^{-1}(U) \cong \sigma^{-1}(V)$ como

$$\hat{\phi}(x, z) := ((\phi_{k,j}(z))_{k,j=m+1,\dots,n} \cdot x, \phi(z))$$

Que está contenida en la variedad incidencia. Para obtener el blow-up global

$$\sigma : \text{Bl}_{\mathbb{C}^m}(X) \longrightarrow X$$

debemos asegurar que estos pegamientos son compatibles.

La compatibilidad es directa sobre $X \setminus Y$. Por otro lado, sobre Y , obtenemos matrices $\phi_{i,j}|_{\mathbb{C}^m}$ que deben corresponder a los cociclos del fibrado normal $\mathcal{N}_{Y/X}$. Luego, satisfacen la condición de cociclo, de lo que además podemos concluir que

$$\sigma^{-1}(Y) \cong \mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y/X})$$

Definición (Divisor Excepcional).

La hipersuperficie $\sigma^{-1}(Y) = \mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y/X}) \subset \text{Bl}_Y(X)$ es llamado **divisor excepcional** del blow-up

$$\sigma : \text{Bl}_Y(X) \longrightarrow X$$

Como nos dice la siguiente proposición, el divisor excepcional proveniente del fibrado normal juega un rol importante en la estructura del fibrado canonico de un blow-up (esto se detalla en [GH78, p.182-188]).

Proposición 1.6.1. *El fibrado canónico $K_{\hat{X}}$ del blow-up \hat{X} es isomorfo a*

$$K_X \otimes \mathcal{O}_{\hat{X}}((n-1)E)$$

Donde, E es el divisor excepcional $\sigma^{-1}(x)$ para $x \in X$.

Concluiremos esta sección dando una descripción en términos de geometría diferencial del blow-up en

un punto. Para esto, utilizaremos una operación estándar de pegado conocida como **suma conexa** de dos variedades diferenciales.

Si M y M' son dos variedades diferenciales de dimensión m , y $B := B_1(0)$ es la bola unitaria en \mathbb{R}^m , podemos escoger $U \subset M$ y $U' \subset M'$ abiertos y dos difeomorfismos

$$\eta : B \cong U \quad \text{y} \quad \eta' : B \cong U'$$

Más aún, podemos considerar el difeomorfismo

$$\begin{aligned} \xi : D \setminus \left(\frac{1}{2}\overline{B}\right) &\longrightarrow D \setminus \left(\frac{1}{2}\overline{B}\right) \\ x &\longmapsto \frac{x}{2\|x\|^2} \end{aligned}$$

La suma conexa definida como

$$M \# M' := \left(M \setminus \eta \left(\frac{1}{2}\overline{B} \right) \right) \bigcup_{\xi} \left(M' \setminus \eta' \left(\frac{1}{2}\overline{B} \right) \right)$$

se obtiene pegando $M \setminus \eta \left(\frac{1}{2}\overline{B} \right)$ y $M' \setminus \eta' \left(\frac{1}{2}\overline{B} \right)$ sobre los conjuntos abiertos $U \setminus \eta \left(\frac{1}{2}\overline{B} \right)$ y $U' \setminus \eta' \left(\frac{1}{2}\overline{B} \right)$ mediante la aplicación de ξ , o de forma mas explícita de $\eta' \circ \xi \circ \eta^{-1}$.

1.7. Conexiones y curvatura de fibrados en recta

La conexión de Levi-Civita que introdujimos en la sección anterior es una conexión natural sobre el fibrado tangente de una variedad Riemanniana. Análogamente, existe una conexión sobre todo fibrado vectorial equipado con una métrica Hermitiana, esta se denomina **conexión de Chern**.

Una métrica Hermitiana h sobre un fibrado vectorial es una familia suave de productos internos Hermitianos sobre cada fibra. Es decir, para todo par de secciones locales (no necesariamente holomorfas) s_1, s_2 , obtenemos una función $h(s_1, s_2)$ que satisface $h(s_1, s_2) = \overline{h(s_2, s_1)}$. Podemos pensar en este producto interno como una sección de $E^* \otimes \overline{E^*}$. La conexión de Chern sobre un fibrado vectorial holomorfo es entonces, la única conexión sobre E tal que la derivada del producto interno dado por la métrica se anula y que cumple $\nabla_i s = 0$ para cada sección local holomorfa de E .

Observación 1.7.1. *Notemos que la derivada del producto interno h se anula si y solo si*

$$\partial_k h(s_1, s_2) = h(\nabla_k s_1, s_2) + h(s_1, \nabla_{\bar{k}} s_2).$$

El resultado análogo, para la derivada antiholomorfa se obtiene de la misma forma.

Observación 1.7.2. *Como antes, en general, las derivadas covariantes no conmutan, y la curvatura*

$F_{k\bar{\ell}}$ se define como

$$F_{k\bar{\ell}} = \nabla_k \nabla_{\bar{\ell}} - \nabla_{\bar{\ell}} \nabla_k$$

Los términos $F_{k\bar{\ell}}$ son las componentes de una $(1,1)$ -forma con valores en endomorfismos. En otras palabras $F \in H^{1,1}(\mathbb{C}, \text{End}(E))$

Ejemplo 1.7.1. Si (E, h_E) y (F, h_F) son fibrados vectoriales holomorfos cuyas formas de curvatura son R_E y R_F , respectivamente, entonces la curvatura del fibrado dado por el producto tensorial $(E \otimes F, h_E \otimes h_F)$ es la suma

$$R_E \otimes \text{Id}_F + \text{Id}_E \otimes R_F$$

Donde Id_E e Id_F son los endomorfismos identidad en E y F , respectivamente.

Notemos que sobre una variedad compleja X con una métrica Hermitiana, el fibrado tangente holomorfo $T^{1,0}X$ posee dos conexiones naturales. Si identificamos $T^{1,0}X$ con el fibrado tangente real TX , tenemos de forma natural la conexión de Levi-Civita que hemos comentado en la sección anterior, así como la conexión de Chern.

Una forma de verificar que una métrica Hermitiana sea de hecho cerrada, es decir, que sea una métrica de Kähler, es dada por el siguiente resultado (Ver [Bal06, Teo. 4.17])

Proposición 1.7.1.

Sobre una variedad Hermitiana (X, h) , la métrica Hermitiana h es de Kähler, si y solo si las conexiones de Levi-Civita y de Chern coinciden sobre el fibrado tangente holomorfo $T^{1,0}X$

Nos concentraremos ahora en el caso de los fibrados en recta. Sobre un fibrado en recta una métrica Hermitiana en todo punto $p \in X$ es determinada por la norma de cada sección no nula en p . Sea s una sección local holomorfa que no se anula en p de un fibrado en recta L , y escribimos

$$h(s) := h(s, s).$$

Entonces, localmente cualquier otra sección de L puede ser escrita como el producto fs para alguna función f , y la norma de este producto es

$$|fs|_h^2 = |f|^2 h(s)$$

En particular, tenemos funciones análogas a los símbolos de Christoffel que denotaremos por A_k , que definimos mediante la igualdad

$$\nabla_k s = A_k s.$$

Recordando que s es una sección local holomorfa, la curvatura es determinada por

$$F_{k\bar{\ell}} s = -\nabla_{\bar{\ell}} \nabla_k s = -\nabla_{\bar{\ell}} (A_k s) = -(\partial_{\bar{\ell}} A_k) s$$

y por lo tanto, las componentes de la curvatura satisfacen $F_{k\bar{\ell}} = -\partial_{\bar{\ell}} A_k$. Para determinar los términos

A_k usamos las propiedades que definen la conexión de Chern para obtener

$$\partial_k h(s) = h(\nabla_k s, s) = A_k h(s),$$

Como h es definida positiva, multiplicamos por su inverso despejando A_k y obtenemos

$$A_k = h^{-1}(s) \partial_k h(s).$$

Sigue para la curvatura, que sus términos son de la forma

$$F_{k\bar{\ell}} = -\partial_{\bar{\ell}} (h(s)^{-1} \partial_k h(s)) = -\partial_{\bar{\ell}} \partial_k \log h(s).$$

Los cálculos anteriores nos permiten formular la siguiente proposición. Le entregamos esta relevancia al resultado debido a que nos permite computar los términos de la curvatura

Proposición 1.7.2.

La curvatura de la conexión de Chern de un fibrado en recta holomorfo equipado con una métrica Hermitiana es dada por

$$F_{k\bar{\ell}} = -\partial_{\bar{\ell}} \partial_k \log h(s),$$

donde $h(s) = h(s, s)$ para una sección holomorfa local s .

Notemos la similaridad con el lema 1.4 referente a la curvatura de Ricci. La relación entre estos resultados proviene del hecho que probamos en la proposición 1.7.1, el que nos dice que las conexiones de Levi-Civita y de Chern de la métrica de Kähler coinciden sobre el fibrado tangente holomorfo.

Observación 1.7.3. *El determinante de la métrica define una métrica Hermitiana sobre la potencia exterior $\wedge T^{1,0}X$, y la curvatura de Ricci es la curvatura de la conexión inducida en este fibrado en recta.*

Como en el caso de la curvatura de Ricci, la proposición 1.7.2 implica que la forma localmente definida como

$$F(h) = \mathbf{i} F_{k\bar{\ell}} dz^k \wedge d\bar{z}^{\ell} = -\mathbf{i} \partial \bar{\partial} \log h(s)$$

es una $(1, 1)$ -forma real cerrada. Cualquier otra métrica Hermitiana puede ser escrita como $e^{-f} h$ para una función globalmente definida f , y podemos ver que

$$\begin{aligned} F(e^{-f} h) - F(h) &= -\mathbf{i} \partial \bar{\partial} \log (e^{-f} h)(s) + \mathbf{i} \partial \bar{\partial} \log h(s) \\ &= -\mathbf{i} \partial \bar{\partial} [\log (e^{-f} h)(s) - \log h(s)] \end{aligned} \tag{1.7.1}$$

$$= -\mathbf{i} \partial \bar{\partial} \log e^{-f} \tag{1.7.2}$$

$$= -\mathbf{i} \partial \bar{\partial} f$$

Así, si escogemos una métrica Hermitiana diferente sobre el fibrado en recta L , entonces $F(h)$ varia

según una forma exacta. Esto permite definir la **primera clase de Chern de un fibrado en recta** L como

$$c_1(L) = \frac{1}{2\pi} [F(h)] \in H_{\text{dR}}^2(X, \mathbb{R})$$

El lema- $\partial\bar{\partial}$ junto con 1.7.1 nos dicen que toda $(1, 1)$ -forma en $c_1(L)$ es la curvatura de alguna métrica Hermitiana sobre L .

Observación 1.7.4. *El factor de normalización que multiplica la clase $[F(h)]$ se escoge pues así se hace a $c_1(L)$ una clase de cohomología entera, es decir $c_1(L) \in H^2(X, \mathbb{Z})$. Para esto se utiliza la sucesión exponencial 1.5, ver además [GH78, p. 139].*

Definición.

Llamamos a una $(1, 1)$ -forma **positiva real** si la forma bilineal simétrica $(v, w) \mapsto \alpha(v, Jw)$ definida para cualesquiera vectores tangentes v y w es definida positiva.

Por otro lado, decimos que una clase de cohomología en $H_{\text{dR}}^2(X, \mathbb{R})$ es **positiva** si puede representarse mediante una $(1, 1)$ -forma positiva.

Finalmente, denominamos a un fibrado en recta L como **positivo** si su primera clase de Chern $c_1(L)$ es positiva.

Observación 1.7.5. *Un ejemplo de lo anterior es que la forma de Kähler de una métrica Kähleriana es positiva. Por otro lado, equivalentemente a la última definición decimos que un fibrado en recta es positivo si para alguna métrica Hermitiana adecuada h la forma de curvatura $F(h)$ es una forma de Kähler.*

Concluimos esta sección discutiendo un ejemplo de métrica sobre el fibrado en recta $\mathcal{O}(-1)$ sobre el espacio proyectivo \mathbb{P}^n .

Ejemplo 1.7.2. *El fibrado en recta $\mathcal{O}(-1)$ sobre \mathbb{P}^n posee una métrica Hermitiana natural h dado que es un subfibrado del fibrado trivial $\mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^{n+1}$ sobre el cual utilizamos la métrica usual del espacio \mathbb{C}^{n+1} . Sobre el abierto estándar U_0 y utilizando coordenadas $z^i = \frac{Z_i}{Z_0}$ para $i = 1, \dots, n$ obtenemos que una sección holomorfa de $\mathcal{O}(-1)$ sobre U_0 es de la forma*

$$s : (z^1, \dots, z^n) \mapsto (1, z^1, \dots, z^n) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

dado que $(z^1, \dots, z^n) \in U_0$ está en correspondencia con el punto $[1 : z^1 : \dots : z^n]$ de coordenadas homogéneas. De la proposición 1.7.2 podemos obtener la forma de curvatura de h , que es

$$F(h) = -i\partial\bar{\partial} \log h(s) = -i\partial\bar{\partial} \log (1 + |z^1|^2 + \dots + |z^n|^2),$$

Esto es, ni más ni menos que $F(h) = -\omega_{\text{FS}}$.

Observación 1.7.6. *La métrica h induce una métrica sobre el fibrado dual $\mathcal{O}(1)$, la forma de curvatura de esta nueva métrica será ω_{FS} . Dado que esta es una forma de Kähler, $\mathcal{O}(1)$ debe ser un fibrado en recta positivo.*

En adelante nos interesaran particularmente las variedades complejas compactas, que pueden ser vistas como subvariedades del espacio proyectivo \mathbb{P}^n . Además de aquello, tendremos principal interés en las métricas Kählerianas cuyas clases de Kähler correspondan a la primera clase de Chern $c_1(L)$ de un fibrado en recta L .

1.8. Fibrados en recta e incrustaciones proyectivas

Sea $L \rightarrow X$ un fibrado en recta holomorfo sobre una variedad compleja X . Si s_0, \dots, s_k son secciones de L , y $U \subset X$ un subconjunto tal que alguna de las secciones s_i es no nula, obtenemos entonces el mapeo holomorfo

$$\varphi_L : U \longrightarrow \mathbb{P}^k \quad (1.8.1)$$

$$p \longmapsto [s_0(p) : \dots : s_k(p)] \quad (1.8.2)$$

Definición.

Un fibrado en recta L sobre X es llamado **muy amplio** si para secciones adecuadas s_0, \dots, s_k de L el mapeo de 1.8.1 define una incrustación (o embedimiento) de X en \mathbb{P}^k . Un fibrado en recta es **amplio** si para algún entero adecuado $r > 0$ la potencia tensorial $L^{\otimes r}$ es muy amplia.

En particular, si un fibrado en recta L es muy amplio, X se identifica con una subvariedad cerrada del espacio proyectivo.

Ejemplo 1.8.1. El fibrado $\mathcal{O}(1)$ sobre \mathbb{P}^n es muy amplio, y las secciones Z_0, \dots, Z_n del ejemplo 1.5.3 definen la aplicación identidad de \mathbb{P}^n en si mismo. De forma mas general, para cualquier variedad proyectiva $V \subset \mathbb{P}^n$, la restricción de $\mathcal{O}(1)$ a V es un fibrado en recta muy amplio. Recíprocamente si L es un fibrado en recta muy amplio sobre V , entonces L debe ser isomorfo a la restricción del fibrado $\mathcal{O}(1)$ sobre una incrustación proyectiva que se obtiene desde secciones de L .

A continuación presentamos los teoremas anticipados en la motivación de la sección

Teorema 1.8.1 (Teorema de Incrustación de Kodaira).

Sea L un fibrado en recta sobre una variedad compleja compacta X . Entonces L es amplio si y solo si la primera clase de Chern de L , $c_1(L)$ es positiva. En este caso, X es una variedad proyectiva.

Teorema 1.8.2 (Teorema de Anulación de Kodaira).

Sea X una variedad de Kähler de dimensión n , y sea L un fibrado amplio en recta holomorfo sobre X , entonces

$$H^q(X, K_X \otimes L) = 0, \forall q > 0$$

donde K_X es el fibrado en recta canónico.

Un teorema fundamental de Jean-Pierre Serre es la dualidad siguiente

Teorema 1.8.3 (Dualidad de Serre).

Sea X una variedad compleja compacta. Para cada fibrado vectorial holomorfo E sobre X , el mapeo de emparejamiento

$$H^{p,q}(X, E) \times H^{n-p, n-q}(X, E^*) \longrightarrow \mathbb{C}$$

es no degenerado.

No probaremos aun este resultado, pues más adelante, veremos que en nuestro contexto es una consecuencia de la aplicación de la Teoría de Hodge.

Serán particularmente útiles algunos isomorfismos que se tienen producto de la dualidad de Serre, los cuales presentamos a continuación.

Corolario 1.8.1.

Para cualquier fibrado vectorial holomorfo E sobre una variedad compleja compacta X se tienen los isomorfismos \mathbb{C} -lineales naturales desde la dualidad de Serre

$$H^{p,q}(X, E) \cong H^{n-p, n-q}(X, E^*)^*, \quad (1.8.3)$$

$$H^q(X, \Omega^p \otimes E) \cong H^{n-q}(X, \Omega^{n-p} \otimes E^*)^*, \quad (1.8.4)$$

$$H^q(X, E) \cong H^{n-q}(X, K_X \otimes E^*)^*. \quad (1.8.5)$$

Observación 1.8.1. *Mediante la dualidad de Serre 1.8.3 y el corolario 1.8.1, obtenemos la anulación en cohomología*

$$0 = H^q(X, K_X \otimes L^*) \quad \text{para } q < n.$$

En la demostración del teorema la implicancia de mayor dificultad es que un fibrado en recta con primera clase de Chern positiva es amplio. La demostración requiere que una potencia suficientemente alta del fibrado en recta admite suficientes secciones holomorfas para dar lugar a una inscrustación proyectiva de la variedad, pero debemos notar que no es trivial la existencia de alguna sección no-nula. Una forma clásica de proceder en esta demostración es mediante el uso del teorema de anulación de Kodaira en cohomología 1.8.2. Otra aproximación posible es mediante el estudio del núcleo de Bergman para potencias altas del fibrado en recta L , este se discute en [Szé14, Cap. 7].

Ejemplo 1.8.2. *Sea L el fibrado en recta trivial sobre \mathbb{C}^n , de modo que las secciones holomorfas de L corresponden a funciones holomorfas sobre \mathbb{C}^n . En el caso de la sección dada por la función constante 1, para $k > 0$ definimos la métrica hermitiana h de forma que $h(1) = e^{-k|z|^2}$. Así, usamos*

la proposición 1.7.2 para obtener que

$$\begin{aligned}
 F(h) &= \mathbf{i} F_{i\bar{i}} dz^i \wedge d\bar{z}^i \\
 &= -\mathbf{i} \partial_{\bar{i}} \partial_i \log \left(e^{-k|z|^2} \right) dz^i \wedge d\bar{z}^i \\
 &= -\mathbf{i} \partial_{\bar{i}} \partial_i (-k z \bar{z}) dz^i \wedge d\bar{z}^i \\
 &= \mathbf{i} k \sum_{i=1}^n dz^i \wedge d\bar{z}^i
 \end{aligned}$$

Es relevante mencionar que hemos utilizado la convención de Einstein para la suma sobre el índice i pues este se repite como sub y super índice en el desarrollo anterior.

En el ejemplo anterior, cuando k es suficientemente grande, podemos decir que la sección constante 1 decae rápidamente (de hecho, de forma exponencial), mientras que la curvatura crece linealmente respecto a k .

Una idea desarrollada por Tian [Tia90] es que si la curvatura de un fibrado en recta L en un punto p es grande, entonces usando una función cutoff adecuada podemos pegar la sección holomorfa 1 que decae rápidamente en una vecindad lo suficientemente pequeña de p (explicaremos esto en el siguiente capítulo, en la sección 2.2 sobre suavización de corrientes). Por el uso de la función cutoff este pegado ya no es holomorfo, pero podemos controlar el error de modo que es posible aproximarnos mediante una sección de L que tiene un extremo en p . Si la curvatura del fibrado en recta es grande en todas partes, entonces esta construcción da lugar a suficientes secciones holomorfas como para incrustar la variedad en el espacio proyectivo.

Observación 1.8.2. *Un resultado de menor dificultad es que si un fibrado en recta L sobre una variedad de Kähler compacta es negativo, es decir $c_1(L)$ es una clase negativa, entonces no existen secciones holomorfas nulas. Para ver esto, escogemos una métrica Hermitiana sobre L cuya forma de curvatura sea definida negativa. Por la definición de curvatura, la conexión de Chern debe satisfacer*

$$\nabla_k \nabla_{\bar{\ell}} = \nabla_{\bar{\ell}} \nabla_k + F_{k\bar{\ell}}.$$

Si s es una sección holomorfa global de L sobre X , entonces tenemos

$$0 = h \left(g^{k\bar{\ell}} \nabla_k \nabla_{\bar{\ell}} s, s \right) + g^{k\bar{\ell}} F_{k\bar{\ell}} |s|_h^2 \leq h \left(g^{k\bar{\ell}} \nabla_k \nabla_{\bar{\ell}} s, s \right) - c |s|_h^2$$

para $c > 0$ una constante dada por el hecho de que $F_{k\bar{\ell}}$ es definida negativa. Si integramos esto sobre X , y en particular, integrando por partes

$$0 \leq - \int_X |\nabla s|_{g \otimes h}^2 dV - c \int_X |s|_h^2 dV \quad (1.8.6)$$

Donde dV es la forma de volumen de la métrica g y donde hemos escrito por $g \otimes h$ a la métrica

Hermitiana natural sobre $T^{1,0} \otimes L$, la cual escribimos en coordenadas locales como

$$|\nabla s|_{g \otimes h}^2 = g^{k\bar{\ell}} h \nabla_k s \overline{\nabla_{\bar{\ell}} s}.$$

De la desigualdad 1.8.6 concluimos que $s = 0$.

Concluimos la sección detallando mediante la siguiente observación la obtención de una formulación de la integración por partes que utilizamos en para obtener 1.8.6.

Observación 1.8.3. Notemos en primer lugar que usando la conexión de Levi-Civita junto con la conexión de Chern de L , obtenemos conexiones naturales sobre cualquier fibrado vectorial relacionado con el tangente holomorfo $T^{1,0}X$ y L , así como para sus productos y potencias tensoriales, sumas directas y otras operatorias. Definimos en primer lugar el siguiente campo vectorial

$$v^{\bar{\ell}} = g^{k\bar{\ell}} h (\nabla_k s) \bar{s}.$$

Notar que $g^{j\bar{k}}$ es una sección de $T^{1,0}X \otimes T^{0,1}X$, h es una sección de $L^* \otimes \overline{L^*}$, $\nabla_k s$ es una sección de $\Omega^{1,0}X \otimes L$, y \bar{s} es una sección de \overline{L} . La sección $v^{\bar{\ell}}$ de $T^{1,0}X$ se obtiene tomando productos tensoriales entre las cuatro secciones anteriores y contrayendo índices utilizando la dualidad de sus espacios de definición. La función $\nabla_{\bar{\ell}} v^{\bar{\ell}}$ es la divergencia de un campo vectorial, de modo que al integrar se anula. Luego, usando la regla del producto se obtiene que

$$\nabla_{\bar{\ell}} v^{\bar{\ell}} = \left(\nabla_{\bar{\ell}} g^{k\bar{\ell}} \right) h (\nabla_k s) \bar{s} + g^{k\bar{\ell}} (\nabla_{\bar{\ell}} h) (\nabla_k s) \bar{s} + g^{k\bar{\ell}} h (\nabla_{\bar{\ell}} \nabla_k s) \bar{s} + g^{k\bar{\ell}} h (\nabla_k s) (\nabla_{\bar{\ell}} \bar{s}),$$

donde estamos aplicando la derivada covariante de cada fibrado vectorial.

Por las propiedades que definen las conexiones de Levi-Civita y de Chern, tenemos que $\nabla g = 0$ y $\nabla h = 0$, obtenemos que

$$\nabla_{\bar{\ell}} v^{\bar{\ell}} = g^{k\bar{\ell}} h (\nabla_{\bar{\ell}} \nabla_k s) \bar{s} + g^{k\bar{\ell}} h (\nabla_k s) (\nabla_{\bar{\ell}} \bar{s})$$

De esta última igualdad, al integrar obtenemos una formulación de la integración por partes que utilizamos previamente, esto es

$$\int_X g^{k\bar{\ell}} h (\nabla_{\bar{\ell}} \nabla_k s) \bar{s} dV = - \int_X g^{k\bar{\ell}} h (\nabla_k s) (\nabla_{\bar{\ell}} \bar{s}) dV$$

1.9. Métricas de Einstein

En 1915, se publican en forma de ecuaciones tensoriales las ecuaciones de campo de Einstein, que relacionan la geometría del espacio-tiempo con la distribución de la masa dentro de este. En particular, se obtiene una ecuación de la forma

$$G_{ij} + \Lambda g_{ij} = \kappa T_{ij} \quad (1.9.1)$$

Donde G es el tensor de Einstein, g es el tensor de métrica, T es el tensor de energía-momentum, Λ es la constante cosmológica de Einstein y el tensor de Einstein se define como

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij}$$

donde R_{ij} es el tensor de curvatura de Ricci y R es la curvatura escalar.

Esta ecuación permite la construcción de un modelo de universo estacionario gracias a la incorporación (que años después) hizo Einstein de la constante cosmológica Λ , la cual consideró un error en su momento, pero que actualmente se utiliza para parametrizar la aceleración de la expansión del universo.

La primera solución exacta a las ecuaciones de campo de Einstein fue encontrada en 1916 por Karl Schwarzschild, cuya solución, denominada **métrica de Schwarzschild** describe la geometría del espacio tiempo producida por una masa puntual. Esta descripción logra encontrar un análogo al potencial de Coulomb en electrostática y al potencial gravitacional de Newton, además, permite la aparición de singularidades en el espacio tiempo que determinan fenómenos gravitacionales denominados como agujeros negros.

Para el desarrollo de esta sección es útil ver el caso denominado **ecuaciones de campo del vacío** en que $T_{ij} = 0$ de forma que la ecuación 1.9.1 nos da que la curvatura de Ricci es proporcional a la métrica g .

Notación 1.9.1. *En general, en la literatura que aborda el tópico de la relatividad general, así como la física en general, la indexación en tres dimensiones espaciales y una temporal se hace mediante índices griegos μ, η, α , etc. La hemos escrito con índices latinos para compatibilizar la escritura de 1.9.1 con la notación utilizada hasta ahora.*

Volvamos ahora a la terminología y notación que hemos desarrollado durante el capítulo.

Consideremos (X, g) es una variedad Hermitiana con forma fundamental $\omega := g(J(\cdot), (\cdot))$. La métrica Hermitiana sobre X puede verse como una métrica Hermitiana sobre su fibrado tangente holomorfo $T^{1,0}X$, como hemos visto en secciones anteriores, se vuelve interesante buscar métricas sobre fibrados vectoriales holomorfos arbitrarios E sobre X . En este caso, presentaremos un caso especial de métricas Hermitianas sobre E , denominadas métricas de Hermite-Einstein, que se obtienen comparando la forma de curvatura de la conexión de Chern sobre E con la forma fundamental ω .

Definición (Métricas de Hermite-Einstein).

Una métrica Hermitiana h sobre un fibrado vectorial holomorfo se denomina de **Hermite-Einstein** si su tensor de Ricci es proporcional a la métrica, es decir

$$\text{Ric}(\omega) = \lambda \omega \quad (1.9.2)$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si (X, g) es una variedad Kähleriana, es decir, g es una métrica de Kähler. Si además, la estructura Hermitiana inducida naturalmente sobre el fibrado tangente holomorfo $T^{0,1}X$ es Hermite-Einstein, entonces llamamos a g **métrica de Kähler-Einstein**, y ya conocemos un ejemplo de este tipo especial de métrica, pues en el ejemplo 1.4.4 podemos notar que se satisface la proporcionalidad requerida.

Notemos que la proporcionalidad que establece la definición 1.9.2 nos permite asumir que nos encontramos en uno de los siguientes casos

$$\text{Ric}(\omega) = -\omega, \quad \text{Ric}(\omega) = 0, \quad \text{ó} \quad \text{Ric}(\omega) = \omega$$

Pero ya hemos visto que la forma de Ricci define una clase de cohomología de X , que denominamos primera clase de Chern

$$c_1(X) = \frac{1}{2\pi} [\text{Ric}(\omega)] \in H_{\text{dR}}^2(X, \mathbb{R})$$

que es independiente de la métrica de Kähler sobre X . De la tricotomía para la forma de Ricci, sigue que la primera clase de Chern de X debe ser negativa, nula o positiva, y por lo tanto, podemos esperar solo que existan métricas de Kähler-Einstein proporcionales a $c_1(X)$.

Veamos un poco más en detalle los tres casos posibles dados por el signo de la primera clase de Chern presentando algunos resultados respecto a la existencia de métricas de Kahler-Einstein en los tres casos que hemos mencionado.

1. El caso $c_1(X) < 0$.

En este caso, presentamos el siguiente resultado de Aubin [Aub78] respecto a la existencia de métricas de Kahler-Einstein.

Teorema 1.9.1 (Existencia de Métricas de Kahler-Einstein).

Sea (X, g) una variedad de Kähler compacta tal que $c_1(X) < 0$, entonces existe una única métrica de Kähler $g \in -2\pi c_1(X)$ tal que $\text{Ric}(g) = -g$.

2. El caso $c_1(X) = 0$.

Las variedades Ricci-planas se denominan de **Calabi-Yau** y tienen gran relevancia en la física. Para este caso, en que el fibrado canónico K_X es trivial, y consecuentemente $c_1(X) = 0$ presentamos el siguiente resultado de Yau [Yau78] respecto a la existencia de métricas de Kahler-Einstein (que le valió una medalla Fields).

Teorema 1.9.2 (Existencia de Métricas de Kahler-Einstein en variedades de Calabi-Yau).

Una variedad de Kahler compacta (X, g) tal que $c_1(X) = 0$, siempre admite una métrica de Kahler-Einstein.

3. El caso $c_1(X) > 0$.

Las variedades de este tipo, en que el fibrado canónico K_X es amplio, o equivalentemente $c_1(X) > 0$ se denominan de **Fano**. En este caso, Yau conjeturo en 1993 que la existencia de métricas de Kahler-Einstein debe estar condicionada por alguna forma de estabilidad. Esta fue definida en 1997 por Tian mediante la K -estabilidad. Para este caso, en que el fibrado anticanónico $-K_X$ es amplio, y consecuentemente $c_1(X) > 0$ presentamos el siguiente resultado de Chen, Donaldson y Sun [CDS15] respecto a la existencia de métricas de Kahler-Einstein, así como demuestra Tian en [Tia97].

Teorema 1.9.3 (Existencia de Métricas de Kahler-Einstein en variedades de Fano).

Una variedad de Kahler compacta (X, g) tal que $c_1(X) > 0$, admite una métrica de Kahler-Einstein si y solo si $(X, -K_X)$ es K -poliestable.

La definición de este criterio de estabilidad denominado **poliestabilidad** será presentada en detalle mas adelante.

ESPACIOS DE HÖLDER Y TEORÍA DE SCHAUDER

En este capítulo desarrollaremos una teoría enfocada en el estudio de los espacios de Hölder, y de la aproximación de Schauder al estudio de la regularidad de ecuaciones diferenciales parciales dadas por operadores elípticos, técnica que se denomina como **estimaciones de Schauder**. Para llevar a cabo este trabajo, realizaremos su desarrollo en las siguientes partes, en la primera sección, “*Teoría de corrientes y residuos*” introducimos los conceptos de distribuciones y corrientes que permitirán extender conceptos elementales de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, en la segunda sección, “*Suavización de corrientes y regularidad*” estudiaremos resultados de regularidad que permiten establecer propiedades de regularidad para soluciones de la ecuación de Laplace y de Poisson. Luego, dado que en geometría Riemanniana muchas de las ecuaciones diferenciales que resultan interesantes son de tipo elípticas, en la tercera sección, “*Operadores diferenciales elípticos*” abordaremos la definición y resultados iniciales de operadores elípticos. Todo anterior se utilizará para en la cuarta sección “*Estimaciones de Schauder*” la presentación de resultados respecto a la regularidad de las soluciones de ecuaciones dadas por operadores elípticos generales, la presentación del método de continuidad como principio para establecer la existencia de soluciones de ecuaciones elípticas y el uso de este para establecer un primer resultado de existencia de soluciones. Finalmente, en la sección 5, “*El operador Laplaciano en Variedades de Kähler*”, se introducirán definiciones desde la Teoría de Hodge para los operadores diferenciales y Laplaciano, así como su aplicación en el contexto de variedades Kählerianas.

2.1. Teoría de corrientes y Residuos

Empezamos este capítulo introduciendo la teoría de corrientes, que corresponden a formas diferenciales cuyos coeficientes tienen permitido ser distribuciones. Esta teoría fue introducida por de Rham para incorporar en un marco de estudio las formas suaves, es decir, de clase \mathcal{C}^∞ junto a p -ciclos, es decir p -formas elementos de $H_{\text{dR}}^p(M, \mathbb{Z})$.

Consideremos M una variedad diferencial, orientada y con $\dim_{\mathbb{R}}(M) = m$. La dualidad de Poincaré [GH78, Ver Cap.0 Sección 4] y el teorema de de Rham [DR31] nos dicen que para Γ un p -ciclo sobre M (es decir $\Gamma \in H_p(M, \mathbb{R})$), existe una $(m - p)$ -forma suave ω que es dual a Γ en el siguiente sentido

$$\int_{\Gamma} \varphi = \int_M \omega \wedge \varphi, \forall \varphi \text{ } p\text{-forma cerrada}$$

Además, por el teorema de Stokes sabemos que ω es única salvo por sumar una forma exacta, es decir, si ω y ω' son duales de Poincaré a Γ entonces existe $\eta \in$ tal que $\omega - \omega' = d\eta$.

Observación 2.1.1. *Un caso particular que resulta bastante explícito es cuando consideramos X una variedad compleja en vez de M y que Γ es el ciclo que aparece definido por una subvariedad analítica V de codimensión 1.*

Comenzamos introduciendo sobre \mathbb{R}^n la siguiente topología,

Definición (Topología de Whitney).

Sea $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ el espacio vectorial real de funciones suaves con soporte compacto sobre \mathbb{R}^n . Sean $x = (x_1, \dots, x_n)$ son coordenadas sobre \mathbb{R}^n , y $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ y $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$ para el multi-índice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$. Definimos la **\mathcal{C}^p -topología** o **p -topología de Whitney** sobre $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ diciendo que una sucesión $\varphi_n \xrightarrow{C^p} 0$ si existe un compacto K tal que $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo α satisfaciendo $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq p$

$$\partial^\alpha \varphi_n(x) \rightarrow 0$$

uniformemente sobre K .

Definimos la ∞ -topología diciendo que $\varphi \rightarrow 0$ si existe un compacto K para el cual $\text{supp}(\varphi_n) \subset K$ para cada φ_n y para el cual $\varphi_n \xrightarrow{C^p} 0$ para todo p .

Definición (Distribución).

Una **distribución** sobre \mathbb{R}^n es una transformación lineal $T : \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ que es continua en la \mathcal{C}^∞ -topología. Denotamos por $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ al espacio vectorial formado por las distribuciones sobre \mathbb{R}^n . Decimos que una **distribución es de orden p** si es continua en la \mathcal{C}^p -topología.

Presentaremos algunos ejemplos que también serán útiles para ilustrar algunos cálculos de interés y que aparecerán también mas adelante

Ejemplo 2.1.1.

1. Sea $\psi(x) \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, podemos definir una distribución T_ψ de orden cero como

$$T_\psi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)dx$$

donde $dx = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$, y donde asumimos que \mathbb{R}^n tiene orientación dada por esta forma.

2. Sea δ la función delta de Dirac, que se define como

$$\delta(\varphi) = \varphi(0)$$

Extenderemos los operadores D_i al espacio de distribuciones haciendo

$$(D_i T)(\varphi) = -T(D_i \varphi).$$

Esta se denomina usualmente como **derivada distribucional**. Si $T = T_\psi$ es la distribución asociada a una función ψ de clase \mathcal{C}^1 , entonces para $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} (D_i T_\psi)(\varphi) &:= -T_\psi(D_i \varphi) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

Por el teorema de Stokes. Concluimos que

$$(D_i T_\psi)(\varphi) = (T_{D_i \psi})(\varphi).$$

De esta manera obtenemos una noción de derivación para distribuciones que tiene sentido.

3. Considerar la función de escalón de Heaviside:

$$\begin{cases} \psi(x) = 0, & x < 0, \\ \psi(x) = 1, & x \geq 0. \end{cases} \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}).$$

Ignorando la singularidad en $x = 0$, $\psi'(x) = 0$. Así la derivada distribucional es dada por

$$\begin{aligned} (DT_\psi)(\varphi) &= - \int_{-\infty}^{\infty} \varphi'(x)\psi(x)dx \\ &= - \int_0^{\infty} \varphi'(x)dx \\ &= \varphi(0) \end{aligned}$$

Es decir, la derivada distribucional satisface $(DT_\psi) = \delta_{\{0\}}$.

A partir de este último ejemplo, diremos que la diferencia $DT_\psi - T_{D\psi}$ es denominado **residuo**, donde $D\psi$ es la derivada usual de ψ , desarrollaremos esto en el resto de esta sección.

Sea $\mathcal{A}_c^p(\mathbb{R}^n)$ el espacio de q -formas con coeficientes \mathcal{C}^∞ sobre \mathbb{R}^n con soporte compacto, de esta manera, la topología usual sobre $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ puede usarse componente a componente para hacer de $\mathcal{A}_c^p(\mathbb{R}^n)$ un espacio vectorial topológico completo.

Definición.

El dual topológico de $\mathcal{A}_c^{n-q}(\mathbb{R}^n)$ es el **espacio de corrientes** de grado q y se denota por $\mathfrak{D}^q(\mathbb{R}^n)$.

Es decir

$$\mathfrak{D}^q(\mathbb{R}^n) = \{T : \mathcal{A}_c^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}, \text{ lineal continua.}\}$$

Ejemplo 2.1.2. En los siguientes ejemplos denotaremos por $L^q(\mathbb{R}^n, \text{loc})$ a las q -formas $\psi = \sum \psi_I dx^I$ cuyos coeficientes son funciones L^1 localmente ¹ sobre \mathbb{R}^n , es decir,

$$L^q(\mathbb{R}^n, \text{loc}) = \left\{ \psi = \sum_I \psi_I(x) dx^I, q\text{-forma tal que } \psi_I \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

1. A ψ se le asocia una corriente $T_\psi \in \mathfrak{D}^q(\mathbb{R}^n)$ definida por:

$$T_\psi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi \wedge \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{A}_c^{n-q}(\mathbb{R}^n).$$

Donde, por los grados de ψ y φ tenemos que el producto $\psi \wedge \varphi$ es una n -forma, es decir, un múltiplo (por un coeficiente de clase $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$) de la forma de volumen.

2. Si Γ es una $(n - q)$ -cadena suave y orientada en \mathbb{R}^n , entonces Γ define una corriente $T_\Gamma \in \mathfrak{D}^q(\mathbb{R}^n)$ como

$$T_\Gamma(\varphi) = \int_\Gamma \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{A}_c^{n-q}(\mathbb{R}^n).$$

Observación 2.1.2. Si T es una corriente, llamamos **soporte de** T al conjunto cerrado S mas pequeño tal que $T(\varphi) = 0$ para todo $\varphi \in \mathcal{A}_c^{n-q}(\mathbb{R}^n \setminus S)$, así, podemos ver que $\text{supp}(T_\Gamma) = \Gamma$.

La derivada exterior para formas suaves induce un operador

$$\begin{aligned} d : \mathfrak{D}^q(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathfrak{D}^{q+1}(\mathbb{R}^n) \\ T &\longmapsto (dT)(\varphi) := (-1)^{q+1} T(d\varphi) \end{aligned}$$

De esta forma, tenemos que $d^2 = 0$ sobre $\mathfrak{D}^q(\mathbb{R}^n)$. Si consideramos $\psi \in \mathcal{A}^q(\mathbb{R}^n)$ definiendo la distribución

$$T_\psi(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi \wedge \varphi,$$

¹No confundir con $L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n)$, es decir, el espacio de funciones localmente $L^q(\mathbb{R}^n)$

utilizamos el teorema de Stokes para obtener que

$$\begin{aligned}
 dT_\psi(\varphi) &:= (-1)^{q+1} \int_{\mathbb{R}^n} \psi \wedge d\varphi \\
 &= - \int_{\mathbb{R}^n} d(\psi \wedge \varphi) + \int_{\mathbb{R}^n} d\psi \wedge \varphi \\
 &= T_{d\psi}(\varphi)
 \end{aligned}$$

De forma análoga, veamos que ocurre para la distribución T_Γ definida por una subvariedad Γ como antes,

$$\begin{aligned}
 dT_\Gamma(\varphi) &:= (-1)^{q+1} \int_\Gamma d\varphi \\
 &= (-1)^{q+1} \int_{\partial\Gamma} \varphi \\
 &= (-1)^{q+1} T_{\partial\Gamma}(\varphi).
 \end{aligned}$$

Así, operar por d sobre el espacio de corrientes induce sobre las formas suaves una noción usual de derivada exterior sobre formas suaves, y para las subvariedades suaves (al menos por partes) los denominados **operadores borde** $\pm\partial$.

A continuación, veamos que los dos resultados anteriores se pueden estudiar en conjunto, para esto supongamos que $\psi \in L^q(\mathbb{R}^n, \text{loc})$ es de clase \mathcal{C}^∞ fuera de un conjunto cerrado $S \subset \mathbb{R}^n$, más aún, asumamos que $d\psi$ sobre $\mathbb{R}^n \setminus S$ se extiende localmente a una forma L^1 sobre \mathbb{R}^n , es decir,

$$\exists \eta \in L^{q+1}(\mathbb{R}^n, \text{loc}) \text{ tal que } \eta|_{\mathbb{R}^n \setminus S} = d\psi.$$

Definimos el **residuo** $R(\psi)$ mediante la siguiente igualdad de corrientes

$$dT_\psi = T_{d\psi} + R(\psi).$$

Notemos que $\text{supp}(R(\psi)) \subset S$.

Ejemplo 2.1.3. Como definimos en el ejemplo 2.1.2 denotaremos el subconjunto de las (p, q) -formas holomorfas localmente L^1 como

$$L^{p,q}(\mathbb{C}^n, \text{loc}) = \left\{ \psi = \sum_I \psi_I(x) dx_I, (p, q)\text{-forma tal que } \psi_I \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{C}^n) \right\}$$

Para $z \in \mathbb{C}$, considerar el Kernel de Cauchy

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z}.$$

notemos que $\kappa \in L^{1,0}(\mathbb{C}, \text{loc})$ y además es de clase \mathcal{C}^∞ sobre $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, más aún, $d\kappa = \bar{\partial}\kappa = 0$, en primer lugar por ser una $(1,0)$ -forma, el diferencial se anula al contener un d^2z , y en segundo lugar $\bar{\partial}z = 0$ pues κ es holomorfa.

Luego por la fórmula integral de Cauchy-Pompeiu, obtenemos que

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{C}} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \frac{1}{z} dz \wedge d\bar{z}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$$

De esta manera, para un $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$ arbitrario la última igualdad puede verse como,

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \int_{\mathbb{C}} \kappa \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} \\ &= \bar{\partial} T_\kappa(\varphi), \end{aligned}$$

de lo que podemos concluir que

$$\bar{\partial}(T_\kappa) = \delta_{\{0\}},$$

y por lo tanto, obtenemos el residuo para el Kernel de Cauchy κ

$$R\left(\frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z}\right) = \delta_{\{0\}}$$

la distribución delta de Dirac en 0.

Podemos extender el ejemplo anterior, en primer lugar a \mathbb{R}^n y luego a \mathbb{C}^n (esta última extensión viene de forma natural dado que $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$). En adelante, consideraremos una notación radial, de la forma

$$\begin{aligned} r^2 &= \sum_i (x^i)^2 = \|x\|^2, \\ r dr &= \sum_i x^i dx^i \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}^n), \\ \Phi(x) &= dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n, \\ \Phi^i(x) &= (-1)^{i-1} x^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n. \end{aligned}$$

Podemos escribir estos elementos mediante el uso del operador \star de Hodge, sobre el cual discutiremos más adelante.

En primer lugar, notemos que la función r^{-s} es localmente integrable para $s < n$ pero no lo es si

$s = n$. Definimos

$$\sigma = C_n \frac{\sum_i \Phi^i(x)}{\|x\|^n} \in \mathcal{A}^{n-1}(\mathbb{R}^n) \quad (2.1.1)$$

$$= C_n \frac{\star r dr}{r^n}. \quad (2.1.2)$$

Donde $C_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2+1)}$ es una constante dada por el volumen de la esfera $B(0;1) \subset \mathbb{R}^n$, que depende solo de n . Por otro lado, se tiene que $\sigma \in L^{n-1}(\mathbb{R}^n, \text{loc})$, y como esta se define radialmente, concluimos que es invariante bajo acción del grupo ortogonal y es de clase \mathcal{C}^∞ sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Notemos que

$$\begin{aligned} d\Phi^i(x) &= (-1)^{i-1} d(x^i dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= (-1)^{i-1} (dx^i \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= (-1)^{i-1} (-1)^{i-1} (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^i \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^n) \\ &= \Phi(x) \end{aligned}$$

donde utilizamos que $\Phi^i(x)$ es una forma alternante y que $d^2 = 0$. Dado que el radio r se comporta como

$$r^{2n} = ((x^1)^2 + \dots + (x^n)^2)^n$$

obtenemos para $d\sigma$ que

$$\begin{aligned} d\sigma &= C_n d\left(\frac{\sum_i \Phi^i(x)}{\|x\|^n}\right) \\ &= C_n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\sum_{j=1}^n \Phi^j(x)}{\|x\|^n} \right) dx^i - \sum_{j=1}^n \Phi^j(x) \cdot \frac{nx^i}{\|x\|^{n+2}} dx^i \right) \\ &= C_n \left(\frac{\sum_{j=1}^n d\Phi^j(x)}{\|x\|^n} - n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\Phi^j(x) x^i}{\|x\|^{n+2}} dx^i \right) \\ &= C_n \left(\frac{\sum_{j=1}^n d\Phi^j(x)}{\|x\|^n} - n \sum_{j=1}^n \frac{\Phi^j(x) x^j}{\|x\|^{n+2}} dx^j \right) \\ &= C_n \left(\frac{n\Phi(x)}{r^n} - n \frac{r dr \wedge \star(r dr)}{r^{n+2}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Luego, por teorema de Stokes la integral

$$\int_{\|x\|=\varepsilon} \sigma$$

es independiente del radio $\varepsilon > 0$. De esta manera, utilizando adecuadamente la constante $C_n(\varepsilon)$ se obtiene que σ es la única forma sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que es invariante bajo rotaciones ortogonales al radio dr de la esfera y que integra 1 sobre toda esfera de radio arbitrario ε .

En \mathbb{R}^2 con coordenadas polares $(x, y) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta))$, tendremos que

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta, \quad y \quad dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta$$

y por lo tanto, podemos escribir σ como

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2\pi} d\theta$$

Si denotamos por $\omega \in \mathbb{S}^{n-1}$ al sistema de coordenadas polares en \mathbb{R}^n para el radio $r = \|x\|$, escribimos $x = r\omega$ y

$$\sigma = C_n d\omega.$$

Para $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, por el teorema de Stokes y luego por el teorema del valor medio, obtenemos,

$$\begin{aligned} dT_\sigma(\varphi) &:= - \int_{\mathbb{R}^n} d\varphi \wedge \sigma := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(- \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{\|x\| \leq \varepsilon\}} d\varphi \wedge \sigma \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\|x\|=\varepsilon} \varphi \sigma \\ &= \varphi(0). \end{aligned}$$

Como antes, concluimos la igualdad de corrientes

$$dT_\sigma = \delta_{\{0\}}.$$

Sobre $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ la forma σ se descompone en componentes holomorfas y antiholomorfas, cada cual es invariante bajo el grupo unitario. Salvo multiplicación por alguna constante (en la que profundizaremos mas adelante), la componente de tipo $(n, n-1)$ de σ es de la forma

$$\begin{aligned} \beta &= C_n \frac{\sum \overline{\Phi^i(z)} \wedge \Phi(z)}{\|z\|^{2n}} \\ &= C_n \frac{\star(r\bar{\partial}r)}{r^{2n}} \end{aligned}$$

Observación 2.1.3.

1. Bajo nuestra notación, tendremos que

$$\Phi \in \mathcal{A}^{n,0}(\mathbb{C}^n), \quad \Phi^i \in \mathcal{A}^{n-1,0}(\mathbb{C}^n), \quad y \quad \overline{\Phi^i} \in \mathcal{A}^{0,n-1}(\mathbb{C}^n)$$

2. Tendremos que $\beta \in L^{n,n-1}(\mathbb{C}^n, \text{loc})$ y como $\overline{\partial\Phi^i(z)} = \overline{\Phi^i(z)}$ de forma análoga al calculo realizado para σ ²

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\beta &= \bar{\partial} \left(C_n \frac{\sum_i \overline{\Phi^i(z)} \wedge \Phi(z)}{\|z\|^{2n}} \right) \\ &= C_n \left[\bar{\partial} \left(\sum_i \overline{\Phi^i(z)} \wedge \Phi(z) \right) \frac{1}{\|z\|^{2n}} + \left(\sum_i \overline{\Phi^i(z)} \wedge \Phi(z) \right) \bar{\partial} \left(\frac{1}{\|z\|^{2n}} \right) \right] \\ &= C_n \left[\sum_i \left(\overline{\partial\Phi^i(z)} \wedge \Phi(z) + \overline{\Phi^i(z)} \wedge \bar{\partial}\Phi(z) \right) \frac{1}{\|z\|^{2n}} + \left(\sum_i \overline{\Phi^i(z)} \wedge \Phi(z) \right) \bar{\partial} \left(\frac{1}{\|z\|^{2n}} \right) \right] \\ &= C_n \left[\frac{n\overline{\Phi(z)} \wedge \Phi(z)}{\|z\|^{2n}} + z \left(\sum_i \overline{\Phi^i(z)} \wedge \Phi(z) \right) \frac{1}{\|z\|^{2n+2}} \right]\end{aligned}$$

De lo que podemos concluir que $\bar{\partial}\beta = 0$ en $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$. Luego, dado que para formas de tipo (n, q) los operadores d y $\bar{\partial}$ coinciden, mediante un uso adecuado de la constante C_n obtenemos que

$$\bar{\partial}T_\beta = \delta_{\{0\}}$$

y en consecuencia el residuo $R(\beta) = \delta_{\{0\}}$. De forma explícita, si consideramos $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ arbitrario, entonces

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{C}^n} \bar{\partial}\varphi \wedge \beta,$$

Como en el caso de una variable, esta igualdad puede extenderse a formas que no necesariamente han de tener soporte compacto, de lo que obtenemos

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{B}(r)} \bar{\partial}\varphi \wedge \beta + \int_{\partial\mathbb{B}(r)} \varphi\beta,$$

donde $\mathbb{B}(r) = \{z \in \mathbb{C}^n \text{ tal que } |z| < r\}$, es decir, bola compleja n -dimensional de radio r . En caso que $\varphi \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ es holomorfa, esto se reduce a la formula de Bochner-Martinelli [Dem97, Ver pag.27],

$$\varphi(0) = \int_{\|z\|=r} \varphi(z)\beta(z, \bar{z}).$$

Es posible probar los resultados de la observación anterior reduciéndonos al caso de una variable, de forma tal que permita obtener información respecto a la expresión que define β . Empezamos

²Aquí debemos considerar

$$z = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)$$

con norma de la forma

$$\|z\|^2 = z_1\bar{z}_1 + \dots + z_n\bar{z}_n = x_1^2 + y_1^2 + \dots + x_n^2 + y_n^2$$

verificando que

$$\beta = C_n (\partial (\log \|z\|^2)) \wedge (\partial \bar{\partial} (\log \|z\|^2))^{n-1}.$$

Donde,

$$\begin{aligned} \partial (\log \|z\|^2) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z^i} (\log \|z\|^2) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\bar{z}^i}{\|z\|^2} dz^i \end{aligned}$$

Análogamente, la derivada antiholomorfa es

$$\bar{\partial} (\log \|z\|^2) = \sum_{i=1}^n \frac{z^i}{\|z\|^2} d\bar{z}^i.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \partial \bar{\partial} (\log \|z\|^2) &= \partial \left(\sum_{i=1}^n \frac{z^i}{\|z\|^2} d\bar{z}^i \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial z^j} \left(\frac{z^i d\bar{z}^i}{\|z\|^2} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{\|z\|^2} \frac{\partial}{\partial z^j} (z^i) + z^i \frac{\partial}{\partial z^j} \left(\frac{1}{\|z\|^2} \right) \right] d\bar{z}^i \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{dz^j \wedge d\bar{z}^i}{\|z\|^2} + \frac{z^i \bar{z}^j}{\|z\|^4} dz^j \wedge d\bar{z}^i \end{aligned}$$

Si consideramos la proyección natural de \mathbb{C}^n en el espacio proyectivo

$$\mathbb{C}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

dada por asignar cada vector complejo v a la recta que genera $[v] = \ell_v$. Tenemos que el pullback de la forma de Kähler asociada a la métrica Fubini-Study tiene la forma

$$\Omega = \frac{i}{4\pi} \partial \bar{\partial} (\log \|z\|^2).$$

Si $\tilde{\mathbb{C}}^n$ es el blow-up de \mathbb{C}^n sobre el origen y

$$\pi : \tilde{\mathbb{C}}^n \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

es la extensión sobre $\tilde{\mathbb{C}}^n$ de la proyección natural. $\tilde{\mathbb{C}}^n$ es entonces, el espacio total del fibrado en

recta universal sobre el espacio proyectivo $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(-1)$, y el pullback $\pi^*\Omega$ es suave sobre $\tilde{\mathbb{C}}^n$. Luego, para $\theta = \partial \log \|z\|^2$, sobre $\tilde{\mathbb{C}}^n$ tenemos que

$$\pi^*\beta = C_n \theta \wedge (\pi^*\Omega)^{n-1},$$

Donde θ es una $(1,0)$ -forma que sobre cada fibra $\{\lambda z\}_{\lambda \in \mathbb{C}}$ de $\tilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ se reduce a $\frac{d\lambda}{\lambda}$. Es decir, $\pi^*\beta$ sobre $\tilde{\mathbb{C}}^n$ corresponde al pullback de la forma de volumen asociada a la metrica Fubini-Study sobre \mathbb{P}^{n-1} multiplicada por una $(1,0)$ -forma que se reduce al Kernel de Cauchy en cada fibra de $\pi : \tilde{\mathbb{C}}^n \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$. De esta manera, la formula de Bochner-Martinelli para n -variables puede reducirse al uso de la formula integral de Cauchy, haciendo adecuadamente el pullback de formas a $\tilde{\mathbb{C}}^n$.

2.2. Suavización de Corrientes y regularidad

Una distribución $T \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ se llama **suave** en caso que $T = T_\psi$ para alguna función $\psi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos $H(x) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ una función no negativa con soporte en una vecindad del origen, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} H(x) dx = 1.$$

Dado H como en el punto anterior, definimos

$$H_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} H\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

De esta manera, si $\text{supp}(H) = K$, entonces $\text{supp}(H_\varepsilon) = \varepsilon K$, y, como antes

$$\int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(x) dx = 1.$$

Sea $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\min_{x \in \varepsilon K} \varphi(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(x) \varphi(x) dx \leq \max_{x \in \varepsilon K} \varphi(x)$$

Donde los extremos de la desigualdad tienden a $\varphi(0)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, de esta manera vemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(x) \varphi(x) dx = \varphi(0),$$

es decir, $T_{H_\varepsilon} \rightarrow \delta_{\{0\}}$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Esto nos ha permitido “suavizar” la función δ de Dirac, así, para una distribución cualquiera $T \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ consideraremos la función

$$T_\varepsilon(x) = T_y(H_\varepsilon(x - y)),$$

Donde el subíndice y indicará que consideramos $H_\varepsilon(x - y)$ como una función de y y que se aplica T de acuerdo a esto. De esta manera, $T_\varepsilon(x)$ es una función de clase \mathcal{C}^∞ , sus derivadas son de la forma

$$D^\alpha T_\varepsilon(x) = \pm T_y(D_x^\alpha H_\varepsilon(x - y)).$$

En adelante, denotaremos por T_ε a la distribución sobre \mathbb{R}^n definida por la función $T_\varepsilon(x)$, teniendo presente esta notación presentamos las siguientes propiedades.

Proposición 2.2.1.

Para las distribuciones T_ε se tiene que

1. $(T_\varphi)_\varepsilon = T_{\varphi_\varepsilon}$ para todo $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.
2. $T_\varepsilon(\psi) = T(\psi_\varepsilon)$ para todo $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.
3. $(DT)_\varepsilon = D(T_\varepsilon)$ para $D = \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$.

Demostración.

1. Sea $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, de esta forma

$$\begin{aligned} (T_\varphi)_\varepsilon(\psi) &:= \int_{\mathbb{R}^n} T_{\varphi_y}(H_\varepsilon(x - y)\psi(x))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)H_\varepsilon(x - y)\psi(x)dx dy \\ &= T_{\varphi_\varepsilon}(\psi). \end{aligned}$$

2. Utilizando el hecho de que T es lineal obtenemos qque

$$\begin{aligned} T(\psi_\varepsilon) &= T_y\left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)H_\varepsilon(x - y)dx\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)T_y(H_\varepsilon(x - y))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)T_\varepsilon(x)dx \\ &=: T_\varepsilon(\psi). \end{aligned}$$

3. Supondremos que D corresponde a una primera derivada parcial $\frac{\partial}{\partial x^i}$, en caso de no ser así, el resultado se obtiene al derivar reiteradas veces respecto a las variables deseadas, por lo que la validez del resultado bajo este supuesto es suficiente.

Para $T = T_\psi$ con $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, entonces, por la definición para DT_ε y

considerando el cambio de variable $u = x - y$ tenemos que

$$\begin{aligned} DT_\varepsilon(\varphi) &= T_\varepsilon(-D\varphi) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) H_\varepsilon(x-y) \psi(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(u) \left(\int_{\mathbb{R}^n} -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) \psi(x-u) dx \right) du. \end{aligned}$$

Integrando por partes y recordando que $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) \psi(x-u) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x-u) dx,$$

de esta manera

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(u) \left(\int_{\mathbb{R}^n} -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) \psi(x-u) dx \right) du &= \int_{\mathbb{R}^n} H_\varepsilon(u) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x-u) dx \right) du \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \psi}{\partial y^i}(y) \varphi(x) H_\varepsilon(x-y) dx dy \\ &= (DT)_\varepsilon(\varphi). \end{aligned}$$

En términos de nuestra notación, para $T \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ y $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ siguiendo los pasos anteriores obtenemos que

$$\begin{aligned} (DT)_\varepsilon(\varphi) &= (DT)(\varphi_\varepsilon) = T(-D\varphi_\varepsilon) \\ &= T(-D\varphi)_\varepsilon \\ &= T_\varepsilon(-D\varphi) \\ &= DT_\varepsilon(\varphi) \end{aligned}$$

□

Particularmente, concluimos que para cada $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene la convergencia uniforme ³ de

$$D\psi_\varepsilon \longrightarrow D\psi,$$

y en consecuencia cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ se tendrá que

$$T_\varepsilon(\psi) \rightarrow T(\psi).$$

Observación 2.2.1. Una corriente $T \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ puede considerarse como una forma diferencial dada

³La discusión de la topología en que se tiene esta convergencia no es trivial, para profundizar al respecto, ver [GH78][pag. 375]

de la forma

$$T = \sum_{\ell=q} T_{\ell} dx^{\ell}$$

Donde los coeficientes T_{ℓ} corresponden a distribuciones definidas como

$$T_{\ell}(\varphi) = \pm T(\varphi) dx^{\ell_0}, \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$$

para aquellos coeficientes ℓ_0 que se definen mediante la igualdad por el operador \star de Hodge

$$\star dx^{\ell} = \pm dx^{\ell_0}.$$

Luego, la suavización $T_{\varepsilon} = \sum_{\ell} (T_{\ell})_{\varepsilon} dx^{\ell}$ satisface que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

$$T_{\varepsilon}(\varphi) \rightarrow T(\varphi), \quad \forall \varphi \in \mathcal{A}_c^{n-q}(\mathbb{R}^n),$$

y además, $(dT)_{\varepsilon} = d(T_{\varepsilon})$

A continuación usaremos las ideas de suavización que hemos desarrollado en esta sección y la anterior para probar resultados de regularidad que serán de importancia y que dicen relación con ecuaciones que involucran el operador de Laplace (o Laplace-Beltrami) sobre distribuciones, esto es

$$\Delta T = S,$$

Donde, el operador Laplaciano Δ se define como:

$$\Delta := - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial (x^i)^2}.$$

Lema 2.2.1 (Ecuación de Laplace en distribuciones).

Si $T \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ satisface $\Delta T = 0$, entonces la distribución T es de la forma $T = T_{\varphi}$, para algún $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ que satisface $\Delta \varphi = 0$.

Demostración. Como probaremos en la próxima sección, las funciones φ al menos dos veces diferenciables tal que $\Delta \varphi = 0$, es decir, funciones armónicas deben satisfacer la propiedad del valor medio

$$\varphi(y) = \int_{\|x-y\|=\varepsilon} \varphi(y) \sigma_y(x) dx$$

donde σ corresponde a la forma definida en 2.1.1 de la forma

$$\sigma = C_n \frac{\star(rdr)}{r^n} = C_n \frac{\sum_{i=1}^n \Phi^i(x)}{\|x\|^n} \in \mathcal{A}^{n-1}(\mathbb{R}^n).$$

Así, $\sigma_y(x) = \sigma(x-y)$ corresponde a la forma de volumen sobre $\mathbb{B}(x, \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^n : \|x-y\| < \varepsilon\}$,

es decir, la bola de radio ε centrada en $x \in \mathbb{R}^n$ de tal manera que sea de superficie unitaria. Dado que el operador Laplaciano es invariante bajo traslaciones y rotaciones propias, basta considerar la propiedad del valor medio en $y = 0$. Sea $H(x)$, como al comienzo de esta sección y radialmente simétrica, de esta manera, φ armónica satisface

$$\begin{aligned}\varphi_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\varepsilon^n} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \\ &= \varphi(x), \quad \forall \varepsilon > 0\end{aligned}$$

Luego, por la proposición 2.2.1, en particular la tercera propiedad tenemos que

$$\Delta T_\varepsilon = (\Delta T)_\varepsilon = 0.$$

De esta forma, $T_\varepsilon = T_{\psi_\varepsilon}$ para ψ_ε una función armónica, entonces:

$$(T_\varepsilon)_\delta = T_{(\psi_\varepsilon)_\delta} = T_{\varphi_\varepsilon} = T_\varepsilon,$$

y para $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sigue que

$$\begin{aligned}T(\varphi) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon(\varphi) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (T_\varepsilon)_\delta(\varphi) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_\varepsilon(\varphi_\delta) \\ &= T(\varphi_\delta) \\ &= T_\delta(\varphi)\end{aligned}$$

□

Observación 2.2.2. *Este resultado también puede enunciarse de forma local. Dado un conjunto abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ y $T \in \mathfrak{D}(U)$ tal que $\Delta T = 0$, entonces T es de la forma $T = T_\psi$ para ψ una función armónica en U .*

Para ver esto, sea $V \subset U$ un abierto relativamente compacto, entonces para $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ y $\varepsilon > 0$ podemos hacer $\text{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset V$. Luego, definimos

$$T_\varepsilon(\varphi) = T(\varphi_\varepsilon),$$

y repetir el argumento del lema 2.2.1 para concluir que $T_\varepsilon = T_{\psi_V}$ para algún ψ que es armónico en

V . Como ψ_V es el mismo para todo $\varepsilon > 0$, si $V \subset W \subset U$ tendremos que

$$\psi_W|_V = \psi_V,$$

y por lo tanto, como antes, debe haber una función ψ armónica en U tal que $T = T_\psi$.

Como es usual, nos gustaría establecer un resultado similar al lema anterior para una version no homogénea de la ecuación de Laplace, para esto, presentamos el siguiente resultado.

Lema 2.2.2 (Ecuación de Poisson en distribuciones).

Si $T \in \mathfrak{D}(\mathbb{R}^n)$ satisface la igualdad

$$\Delta T = \eta, \quad \eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n),$$

Entonces la distribución T es de la forma $T = T_\psi$ para algún $\psi \in \mathcal{C}^\infty$ que satisface $\Delta\psi = \eta$.

Demostración. Comenzaremos escribiendo una solución explícita $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ de la ecuación de Poisson

$$\Delta\rho = \eta.$$

Para encontrar esta solución, comenzamos considerando la función de Green

$$G(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\|x - y\|^{n-2}}, & \text{si } n \geq 3, \\ \log \|x - y\|, & \text{si } n = 2. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Utilizaremos el lema 2.2.1 sobre

$$\Delta(T - T_\rho) = 0.$$

Para esto, comenzamos definiendo

$$\rho(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta(y)}{\|x - y\|^{n-2}} dy$$

donde, si utilizamos el cambio de variable $u := x - y$ obtenemos

$$\rho(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta(x - u)}{\|u\|^{n-2}} du$$

De lo que concluimos que $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ y que

$$\Delta\rho(x) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta\eta(x - u)}{\|u\|^{n-2}} du$$

Probaremos que esta ultima integral es, en efecto, $\eta(x)$.

Si trasladamos x al origen, lo que debemos verificar es la **fórmula de Poisson**

$$\eta(0) = C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta\eta(x)}{\|x\|^{n-2}} dx.$$

En coordenadas polares $x = r\omega$, es decir, $r = \|x\|$ y $\omega \in \mathbb{S}^1$, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\eta(x)}{\|x\|^{n-2}} dx &= \frac{d \star d\eta}{\|x\|^{n-1}} \\ &= d \left(\frac{\star d\eta}{r^{n-2}} \right) \pm \left(\frac{1}{n-2} \right) \frac{dr \wedge \star d\eta}{r^{n-1}} \\ &= d \left(\frac{\star d\eta}{r^{n-2}} \right) \pm \left(\frac{1}{n-2} \right) \frac{dr \wedge \star(rdr)}{r^n} \\ &= d \left(\frac{\star d\eta}{r^{n-2}} \right) \pm \left(\frac{1}{n-2} \right) d(\eta\sigma). \end{aligned}$$

Consideremos lo siguiente

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta\eta(x)}{\|x\|^{n-2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{\|x\| < \varepsilon\}} \frac{\Delta\eta(x)}{\|x\|^{n-2}} dx = A_\varepsilon + B_\varepsilon.$$

Evaluaremos las integrales anteriores por separado, es decir,

$$A_\varepsilon = \pm \int_{\|x\|=\varepsilon} \frac{\star d\eta}{\varepsilon^{n-2}} = \int_{\{\|x\|=\varepsilon\}} \frac{\star d\eta}{\varepsilon^{n-2}} = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} \int_{\|x\|\leq\varepsilon} \Delta\eta dx.$$

Por otro lado, como $\Delta\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\|x\|\leq\varepsilon} \Delta\eta = O(\varepsilon^n)$$

tendremos que

$$A_\varepsilon \rightarrow 0, \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Por otra parte, considerar

$$B_\varepsilon = B \cdot \int_{\|x\|=\varepsilon} \eta\sigma$$

para lo que tenemos que

$$B_\varepsilon \rightarrow \eta(0), \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Concluimos de esta última parte que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\Delta\eta(x)}{\|x\|^{n-2}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \{\|x\| < \varepsilon\}} \frac{\Delta\eta(x)}{\|x\|^{n-2}} dx = \eta(0),$$

lo que demuestra la igualdad de distribuciones dada por la ecuación de Poisson y en consecuencia nuestro resultado para distribuciones. \square

Para concluir esta sección, probaremos que si φ es una función en el espacio de Sobolev $W_{p,q}^{2,s}(M)$ y $\psi \in W_{p,q,0}^{2,s}(M)$ ⁴ es una solución débil de la ecuación

$$\Delta\psi = \varphi,$$

entonces, $\psi \in \mathcal{H}_{s+2}^{p,q}(M)$. Más adelante, análisis como este nos permitirán establecer la regularidad de las soluciones de problemas elípticos generales dadas la regularidad de los terminos del operador elíptico. En particular, podemos escribir $P = \partial + \bar{\partial}^*$, y en consecuencia P^2 corresponde al operador Laplaciano, de esta manera al encontrar una solución débil del problema

$$P\Theta = \eta$$

Podremos probar que si $\eta \in W_{p,q}^{2,s}$, y el problema tiene solución, entonces $\Theta \in W_{p,q}^{2,s+1}$

2.3. Operadores Diferenciales Elípticos

Consideremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, definimos L como el operador diferencial dado por

$$L(f) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{\ell=1}^n b_{\ell} \frac{\partial f}{\partial x^{\ell}} + cf \quad (2.3.1)$$

donde $f, a_{jk}, b_{\ell}, c : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones sobre Ω . Consideraremos la matriz asociada a los términos de orden 2 del operador L

$$A(x) = (a_{jk}(x))_{1 \leq j,k \leq n}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Entonces, diremos que L es un **operador elíptico en** x si la matriz $A(x)$ es definida positiva, y de esta manera, si $A(x)$ es definida positiva para cada $x \in \Omega$ diremos que L es un **operador elíptico en** Ω . Podemos definir la elipticidad del operador L en $x \in \Omega$ términos de la existencia de $\lambda(x)$ y $\Lambda(x)$ tales que

$$0 < \lambda(x)|v|^2 \leq \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)v^j v^k \leq \Lambda(x)|v|^2, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

de modo que la elipticidad en Ω se traduce en el cumplimiento de la desigualdad anterior, para cada $x \in \Omega$. Si además consideramos a_{jk}, b_{ℓ}, c suficientemente regulares (en particular, más adelante estas serán funciones suaves), y con $\Omega \subset X$ donde X es una variedad compacta, podemos asumir que L corresponderá a un operador **uniformemente elíptico**, lo que corresponde a la existencia de

⁴En nuestro caso evitaremos denotar los espacios de Sobolev de la forma $W^{2,s}$ como H^s dado el uso de este caracter en espacios de funciones armónicas y para cohomología. Pese a que la notación puede ser sobrecargada $W_{p,q,0}^{2,s}$ denota al espacio de (p,q) formas en H_0^s .

constantes positivas λ y Λ tales que

$$\lambda|v|^2 \leq \sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x)v^jv^k \leq \Lambda|v|^2, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad (2.3.2)$$

En general, utilizamos una aproximación al estudio de existencia de soluciones y la obtención de estas mediante una formulación variacional que nos permita establecer soluciones débiles de ecuaciones lineales. Las soluciones débiles quedaran definidas en términos del operador adjunto formal L^* de L , que calculamos a continuación.

Consideremos L como en 2.3.1, es decir:

$$L(f) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{\ell=1}^n b_{\ell} \frac{\partial f}{\partial x^{\ell}} + cf$$

Si $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ y utilizamos el producto interno usual de $L^2(\Omega)$ tendremos que

$$\begin{aligned} \langle L(f), \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{\ell=1}^n b_{\ell} \frac{\partial f}{\partial x^{\ell}} + cf \right) \varphi dV(x) \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} \varphi + \sum_{\ell=1}^n b_{\ell} \frac{\partial f}{\partial x^{\ell}} \varphi + cf \varphi \right) dV(x) \end{aligned}$$

Donde, para el primer sumando, integrando por partes dos veces y recordando que φ y sus derivadas se anulan sobre $\partial\Omega$ tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} \cdot \varphi \right) dV(x) &= - \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x^k} (a_{jk} \cdot \varphi) \cdot \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) dV(x) + \int_{\partial\Omega} \left(a_{jk} \frac{\partial f}{\partial x^k} \cdot \varphi \right) dS(x) \xrightarrow{0} \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^j} (a_{jk} \cdot \varphi) \cdot f \right) dV(x) - \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial}{\partial x^k} f \cdot \varphi \right) dS(x) \xrightarrow{0} \end{aligned}$$

Luego, podemos ver que

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{\ell=1}^n b_{\ell} \frac{\partial f}{\partial x^{\ell}} \varphi \right) dV(x) = - \int_{\Omega} \left(\sum_{\ell=1}^n \frac{\partial}{\partial x^{\ell}} (b_{\ell} \varphi) \cdot f \right) dV(x) + \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{\ell=1}^n b_{\ell} f \varphi \right) dS(x) \xrightarrow{0}$$

De esta manera, si consideramos L^* el operador adjunto forma a L , se debe verificar que

$$\langle L(f), \varphi \rangle = \langle f, L^*(\varphi) \rangle,$$

es decir, hemos encontrado que L^* es dado por

$$L^*(f) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} (a_{jk} \cdot f) - \sum_{\ell} \frac{\partial}{\partial x^{\ell}} (b_{\ell} f) + cf.$$

Con esto en mente, diremos que una función $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ es una solución débil de la ecuación diferencial parcial $L(f) = g$ si se satisface la igualdad

$$\int_{\Omega} f \cdot L^*(\varphi) dV = \int_{\Omega} g \cdot \varphi dV, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega).$$

Observación 2.3.1. *El operador adjunto es definido de tal manera que si f es solución débil de $L(f) = g$ y obtenemos que f es suave, entonces se tiene la igualdad $L(f) = g$ en el sentido usual. De esto, una propiedad fundamental de los operadores elípticos es que las soluciones débiles en nuestro contexto serán siempre suaves.*

Esta última observación nos permite enunciar el resultado siguiente

Teorema 2.3.1.

Sea f una solución débil de la ecuación $L(f) = g$, donde L es un operador diferencial lineal elíptico con coeficientes suaves y g es una función suave, entonces f también es suave.

En la siguiente sección desarrollaremos resultados mas generales sobre regularidad de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales dadas por operadores elípticos, por otro lado, en lo que resta de esta sección discutiremos algunas propiedades de funciones armónicas que facilitarán el camino en el transcurso de las siguientes secciones.

Definición (Funciones armónicas).

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Una función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ se llama **armónica** si

$$\Delta f := - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^i} = 0, \text{ sobre } U.$$

La propiedad elemental para funciones armónicas es la siguiente,

Teorema 2.3.2 (Teorema del Valor Medio).

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica, para $x \in U$ y la bola de radio r centrada en x , $\mathbb{B}(x, r) \subset U$, entonces

$$f(x) = \frac{1}{\text{Vol}(\partial \mathbb{B}(x, r))} \int_{\partial \mathbb{B}(x, r)} f(y) dy$$

Demostración. Para $\rho \leq r$ definamos

$$F(\rho) = \int_{\partial \mathbb{B}(x, \rho)} f(x + \rho y) dy$$

entonces,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_{\partial \mathbb{B}(x, r_1)} \nabla f(x + \rho y) y dy \\ &= \int_{\mathbb{B}(x, r_1)} \Delta f(x + \rho y) dy \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde las ultimas igualdades se obtienen al utilizar el teorema de Stokes, o bien las identidades de Green.

Lo anterior significa que F es constante, pero al cambiar variables obtenemos que

$$F(r) = \frac{\text{Vol}(\mathbb{B}(x, r_1))}{\text{Vol}(\mathbb{B}(x, r))} \int_{\partial \mathbb{B}(x, r)} f(y) dy,$$

mientras que $\lim_{\rho \rightarrow 0} F(\rho) = \text{Vol}(\partial \mathbb{B}(x, r_1)) f(x)$ □

Promediando la propiedad del valor medio sobre esferas de diferente radio, podemos establecer el siguiente resultado

Corolario 2.3.1.

Sea $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave, radialmente simétrica, con soporte en $\mathbb{B}(x, r_1)$ y que integra 1.

Si $f : \mathbb{B}(x, r_2) \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica, entonces para cada $x \in \mathbb{B}(x, r_1)$ tenemos que

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \eta(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \eta(x - y) dy.$$

Demostración. Considerar $f_1(x) = (f * \eta)(x)$ la convolución entre f y η , es decir

$$f_1(x) = (f * \eta)(x) = (\eta * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \eta(y) dy$$

Luego,

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\eta(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{B}(x, r_1)} f(y)\eta(x-y)dy \\
&= \frac{1}{\text{Vol}(\partial\mathbb{B}(x, r_1))} \int_{\mathbb{B}(x, r_1)} f(y)\eta\left(\frac{|x-y|}{r_1}\right) dy \\
&= \frac{1}{\text{Vol}(\partial\mathbb{B}(x, r_1))} \int_0^{r_1} \eta\left(\frac{R}{r_1}\right) \left[\int_{\partial\mathbb{B}(x, R)} f dS \right] dR \\
&= \left(\frac{1}{\text{Vol}(\partial\mathbb{B}(x, r_1))} \int_{\partial\mathbb{B}(x, r_1)} f dS \right) \cdot \int_0^{r_1} \eta\left(\frac{R}{r_1}\right) dR \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

Considerando la conmutatividad establecida inicialmente, se concluye el resultado. \square

Una consecuencia importante del resultado anterior es que la norma en $L^1(\mathbb{B}(x, r_2))$ de una función armónica controlan todas sus derivadas sobre una bola mas pequeña $\mathbb{B}(x, r_1)$.

Corolario 2.3.2.

Existen constantes C_k tales que, si $f : \mathbb{B}(x, r_2) \rightarrow \mathbb{R}$ es armónica, entonces

$$\sup_{\mathbb{B}(x, r_1)} |\nabla^k f| \leq C_k \int_{\mathbb{B}(x, r_2)} |f(y)| dy$$

En particular, si pedimos a f ser solamente dos veces diferenciable, se tiene que f es suave en $\mathbb{B}(x, r_1)$

Demostración. Para cada $x \in \mathbb{B}(x, r_1)$ podemos usar el corolario anterior y diferenciar para obtener

$$\nabla^k f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \nabla^k \eta(x-y)$$

de esta manera

$$|\nabla^k f(x)| \leq \left(\sup_{\mathbb{B}(x, r_1)} |\nabla^k \eta| \right) \int_{\mathbb{B}(x, r_2)} |f(y)| dy$$

Así concluimos que $C_k = \sup |\nabla^k \eta|$. \square

Con este resultado de regularidad interior en Ω junto con argumentos adecuados de reescalado, nos permite establecer el siguiente resultado

Corolario 2.3.3 (Teorema de Liouville).

Decimos que una función es de crecimiento sublineal si

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^{-1} \sup_{\mathbb{B}(x, R)} |f| = 0.$$

Si f es armónica sobre \mathbb{R}^n y tiene crecimiento sublineal, entonces f es constante.

Demostración. Considerar $f_r(x) = f(rx)$ para $r > 0$, que corresponde también a una función armónica. Utilizamos la propiedad del valor medio para escribir

$$|\nabla f_r(0)| \leq C_1 \int_{\mathbb{B}(x, r_2)} |f_r(x)| dx \leq C' \sup_{\mathbb{B}(x, r_2)} |f_r| = C' \sup_{\mathbb{B}(x, 2r_2)} |f|$$

para alguna constante C' . Considerando que $\nabla f_r(0) = r \nabla f(0)$ obtenemos

$$|\nabla f(0)| \leq \frac{C'}{r} \sup_{\mathbb{B}(x, 2r_2)} |f|, \quad \forall r > 0.$$

Tomando $r \rightarrow \infty$, obtenemos que $\nabla f(0) = 0$, de la misma manera, trasladando f concluimos que para todo x , $\nabla f(x) = 0$ de modo que f debe ser constante. \square

Concluimos esta sección con una aplicación de estos resultados,

Observación 2.3.2. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función armónica tal que existe $C > 0$ una constante, para la cual $|f(x)| \leq C(1+|x|)^k$ para cada x entonces si consideramos el multiíndice $\alpha = (\alpha_i, \dots, \alpha_n)$ tal que $|\alpha| = j > k$ tendremos que

$$\begin{aligned} |D^\alpha f(x_0)| &\leq \frac{C_j}{r^{n+j}} \|f\|_{L^1(B_r(x_0))} \\ &= \frac{C_j}{r^{n+j}} \int_{B_r(x_0)} |f| dx \\ &\leq \frac{C_j}{r^{n+j}} \int_{B_r(x_0)} (1+|x|)^k dx \end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variable $y = \frac{x-x_0}{r}$ de forma que $\frac{\partial x}{\partial y} = r^n$ obtenemos que

$$|D^\alpha f(x_0)| \leq \frac{C_j}{r^{n+j}} \int_{B_r(x_0)} (1+|x|)^k dx \leq \frac{C_j}{r^j} \int_{B_1(0)} (1+|ry+x_0|)^k dy$$

Haciendo $r \rightarrow \infty$ encontramos que $|D^\alpha f(x_0)| \rightarrow 0$.

Por lo que $D^\alpha f \equiv 0$ para todo α tal que $|\alpha| = j > k$, de lo que concluimos que $f(x)$ es un polinomio de grado a lo más $|\alpha| - 1$.

2.4. Estimaciones de Schauder

Como hemos visto, las soluciones de ecuaciones dadas por operadores lineales elípticos tienen propiedades de regularidad muy fuertes. En esta sección presentamos el desarrollo mediante la definición de espacios de Hölder desde la norma de Hölder que nos permite establecer resultados de regularidad mas generales respecto a las soluciones de ecuaciones diferenciales elípticas utilizando las denominadas estimaciones de Schauder.

Empezamos presentando los espacios de Hölder, para esto, en adelante consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado.

Definición (Continuidad de Hölder).

Para $u \in \mathcal{C}^0(\Omega)$ y $\alpha \in [0, 1]$ definimos el α -coeficiente de Hölder de u en x_0 como:

$$[u]_{\alpha, x_0} = \sup_{\substack{x \in \Omega, \\ x \neq x_0}} \frac{|u(x) - u(x_0)|}{|x - x_0|^\alpha}.$$

Decimos que la función u es **Hölder-continua en x_0** si el coeficiente $[u]_{\alpha, x_0}$ es finito.

Podemos definir el coeficiente de Hölder anterior sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y lo escribimos como

$$[u]_{\alpha, \Omega} := \sup_{\substack{x, y \in \Omega, \\ x \neq y}} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Como antes, si $[u]_{C^\alpha(\Omega)} < \infty$ decimos que u es **Hölder-continua en Ω** .

Sea $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n)$ un multiíndice de modo que

$$\partial^\ell = \frac{\partial}{\partial x^{\ell_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x^{\ell_n}}$$

corresponde a la derivada parcial de orden $|\ell| = \sum_{i=1}^n \ell_i$ en las variables ℓ_i .

Definimos la **norma $C^{k, \alpha}$ de Hölder** de u para $k \in \mathbb{N}$ como

$$\|u\|_{C^{k, \alpha}(\Omega)} := \sum_{|\ell| \leq k} \|\partial^\ell u\|_{\mathcal{C}(\Omega)} + \sum_{|\ell|=k} [\partial^\ell u]_{C^\alpha(\Omega)}$$

En efecto, notemos que si $\|u\|_{C^{k, \alpha}} = 0$ entonces

$$\sum_{|\ell| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |\partial^\ell u(x)| = \sum_{|\ell|=k} [\partial^\ell u]_{C^\alpha(\Omega)} = 0$$

De lo que concluimos que $\|u\|_{C^{k, \alpha}} = 0$ si y solo si $u \equiv 0$ sobre Ω . Además por la linealidad de los

operadores de derivadas parcial $\|u\|_{C^{k,\alpha}}$ es positivamente homogénea. Finalmente, sean u, v tales que

$$\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}, \|v\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} < \infty$$

Por la desigualdad triangular usual para el valor absoluto y del $\sup(u+v)$, obtenemos la desigualdad triangular para $\|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$, concluyendo que esta es una norma.

Llamamos (k, α) -**espacio de Hölder** al espacio de funciones de norma de Hölder finita, y lo escribimos como

$$C^{k,\alpha}(\Omega) = \{u \in \mathcal{C}^k(\Omega) : \|u\|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} < \infty\}$$

Notemos que este corresponde a un subespacio del espacio vectorial de funciones continuas, veamos que es un espacio de Banach, para esto consideremos $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C^{k,\alpha}(\Omega)$, luego como $\mathcal{C}^k(\Omega)$ es un espacio de Banach existe $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. Luego, si $v = \partial^k u$ y $v_n := \partial^k u_n$ entonces para $x \neq y$ y $m \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} \frac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|^\alpha} &= \frac{|v(x) - v_m(x) + v_m(x) - v_m(y) + v_m(y) - v(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &\leq \frac{|v(x) - v_m(x)|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|v_m(x) - v_m(y)|}{|x - y|^\alpha} + \frac{|v_m(y) - v(y)|}{|x - y|^\alpha}. \end{aligned}$$

Donde el primer y último término de la expresión anterior pueden hacerse arbitrariamente pequeños para m suficientemente grande. Por la construcción de u obtenemos que $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$ de modo que resta ver la convergencia del α -coeficiente de Hölder para v_n , esto sigue de

$$\begin{aligned} \frac{|(v - v_m)(x) - (v - v_m)(y)|}{|x - y|^\alpha} &= \frac{|v(x) - v_m(x) - v(y) + v_m(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \frac{\left| \left(\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(x) \right) - v_m(x) - \left(\lim_{k \rightarrow \infty} v_k(y) \right) + v_m(y) \right|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|v_k(x) - v_m(x) - v_k(y) + v_m(y)|}{|x - y|^\alpha} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|(v_k - v_m)(x) - (v_k - v_m)(y)|}{|x - y|^\alpha} \end{aligned}$$

Como v_n es de Cauchy, el ultimo término de la igualdad puede hacerse arbitrariamente pequeño, esto nos dice que $v_n \rightarrow v$ para el α -coeficiente de Hölder. Reiterando el argumento para las finitas derivadas posibles de u de orden k obtenemos la convergencia

$$u_n \rightarrow u \quad \text{en } C^{k,\alpha}(\Omega)$$

Concluyendo que $C^{k,\alpha}(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Observación 2.4.1.

- 1) Si $k > 0$ entonces una función en $C^{k,\alpha}$ debe ser k veces continuamente diferenciable.
- 2) Se tiene que $\mathcal{C}^{k,0}(\Omega) = \mathcal{C}^k(\Omega)$ y que $C^{0,1}(\Omega)$ corresponde al espacio de funciones Lipschitz continuas en Ω .

Presentaremos ahora el teorema de Sobolev, este y otros resultados de teoría de regularidad se pueden encontrar en [GT01, Secciones 7.6 y 7.7], el siguiente en particular, será útil en el desarrollo del capítulo 3.

Teorema 2.4.1 (Desigualdad de Sobolev).

Sea Ω un dominio abierto de \mathbb{R}^n , entonces

$$W_0^{1,p}(\Omega) \subset \begin{cases} L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega), & \text{para } p < n, \\ C^0(\Omega), & \text{para } p > n. \end{cases}$$

Más aún, existe una constante C que depende solo de n y p tal que, para todo $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$,

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq C \|Du\|_p, \quad \text{para } p < n, \text{ y } \sup_{\Omega} |u| \leq C |\Omega|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{p}} \cdot \|Du\|_p, \quad \text{para } p > n. \quad (2.4.1)$$

A continuación construiremos las estimaciones de Schauder para un operador elíptico de segundo orden, para esto, estudiaremos en primer lugar las estimaciones para la ecuación de Laplace. Luego extenderemos este resultado para la ecuación de Poisson y finalmente a un operador elíptico de coeficientes constantes. La razón de proceder de esta manera es que en una variedad de Kähler podemos escoger un sistema de coordenadas locales para el cual todo operador elíptico tenga forma diagonal (al menos localmente) de forma que conocer estimaciones para las ecuaciones de Poisson y Laplace nos permite establecer las estimaciones que necesitamos.

En adelante será útil considerar la solución fundamental de la ecuación de Laplace dada por el kernel de Newton:

$$N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \log |x|, & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{(2-n)C_n} |x|^{2-n}, & \text{si } n \geq 3 \end{cases}.$$

Notar que $N(x)$ es radial y singular en $x = 0$, y recordar que C_n es el volumen de la esfera de dimensión n .

Para comenzar la construcción de las estimaciones de Schauder presentamos el siguiente lema

Lema 2.4.1.

Sea $N \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n)$ y sea $\phi \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces

$$u := N * \phi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$$

y

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y) \nabla \phi(y) dy$$

Demostración. Consideremos $C = \text{supp}(\phi)$, de modo que $N|_C \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y así por el corolario 2.3.1 concluimos que

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y) \phi(y) dy \\ &= \int_C N(x-y) \phi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} N(y) \phi(x-y) dy. \end{aligned}$$

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $h \in \mathbb{R}^n$ con $\|h\| = 1$, entonces

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|h\|} \left(u(x+h) - u(x) - h \left(\int_{\mathbb{R}^n} N(x-y) \nabla \phi(y) dy \right) \right) \\ &= \frac{1}{\|h\|} \left(\int_{\mathbb{R}^n} N(y) \phi(x+h-y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} N(y) \phi(x-y) dy - h \int_{\mathbb{R}^n} N(y) \nabla \phi(x-y) dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{\|h\|} (\phi(x+h-y) - \phi(x-y) - h \nabla \phi(x-y)) \right) dy \end{aligned}$$

Notemos que $\nabla \phi(x-y)$ corresponde a la deriva de Fréchet de $\phi(x-y)$ de modo que

$$\frac{1}{\|h\|} (\phi(x+h-y) - \phi(x-y)) - \nabla \phi(x-y) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Por otro lado, por la continuidad de ϕ y $\nabla \phi$ sobre el compacto C tenemos la cota uniforme dada por $\sup_{x \in C} \phi(x)$ y $\sup_{x \in C} \nabla \phi$ que nos permite aplicar el teorema de convergencia dominada de Lebesgue para concluir que

$$Du(x) = \lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} (u(x+h) - u(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} N(y) \nabla \phi(x-y) dy,$$

es decir,

$$\nabla u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(y) \nabla \phi(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y) \nabla \phi(y) dy$$

Lo que permite concluir la continuidad de ∇u desde la continuidad de $\nabla \phi$, terminando así la demostración del lema. \square

Proposición 2.4.1.

Sean $f \in \mathcal{C}_0^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y) f(y) dy \tag{2.4.2}$$

Entonces $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\Delta u = f.$$

Demostración. Aplicando el lema anterior, obtenemos que u es de clase \mathcal{C}^2 y que satisface la igualdad

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y) \Delta f(y) dy$$

Fijando x , podemos notar que la función $N(x-y) \Delta f(y) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ y tiene su soporte en $|x-y| < R$ para algún R fijo suficientemente grande. Escribimos entonces

$$\Delta u(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\{y \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x-y| < R\}} N(x-y) \Delta f(y) dy$$

Denominamos $\Omega_\varepsilon^R = \{y \in \mathbb{R}^n : \varepsilon < |x-y| < R\}$. Como $N(x-y)$ es de clase \mathcal{C}^2 en una vecindad de $\overline{\Omega_\varepsilon^R}$ y escogiendo R de forma adecuada $f(y)$ se anula sobre la frontera exterior de Ω_ε^R por lo que podemos utilizar la segunda identidad de Green para establecer que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\varepsilon^R} N(x-y) \Delta f(y) dy \\ &= \int_{\{|x-y|=\varepsilon\}} N(x-y) \partial_{\hat{n}} f(y) dS(y) - \int_{\{|x-y|=\varepsilon\}} f(y) \partial_{\hat{n}} N(x-y) dS(y) \end{aligned}$$

Donde \hat{n} corresponde al vector normal unitario a Ω_ε^R . Notemos que para $n > 2$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\{|x-y|=\varepsilon\}} N(x-y) \nabla f(y) \cdot \hat{n} dS \right| &\leq \int_{\{|x-y|=\varepsilon\}} |N(x-y)| |\nabla f(y)| dS \\ &\leq \int_{\{|x-y|=\varepsilon\}} \varepsilon^{2-n} \|\nabla f\|_\infty dS \\ &\leq \int_{\{|x-y|=\varepsilon\}} C \varepsilon \|\nabla f\|_\infty dS \end{aligned}$$

Donde C es una constante dependiendo del volumen de la esfera $n-1$ -dimensional de radio ε y donde utilizamos que el volumen de esta esfera es similar a ε^{n-1} . Concluimos que esta integral se anula al hacer $\varepsilon \rightarrow 0$. Para $n = 2$ basta reemplazar en las estimaciones anteriores ε por $\varepsilon \log \varepsilon^{-1}$ para concluir el mismo resultado. Para la segunda integral notemos que al derivar de forma normal a Ω_ε^R tenemos que

$$-\partial_{\hat{n}} N(x-y) = \frac{1}{C_n} |x-y|^{1-n}.$$

Luego, como $|x-y| = \varepsilon$ tenemos para la frontera

$$-\int_{\{|x-y|=\varepsilon\}} f(y) \partial_{\hat{n}} N(x-y) dS = \frac{1}{\varepsilon^{n-1} C_n} \int_{\{|x-y|=\varepsilon\}} f(y) dS$$

Pasando a coordenadas polares centradas en x vemos que

$$-\int_{\{|x-y|=\varepsilon\}} f(y) \partial_{\hat{n}} N(x-y) dS = \frac{1}{C_n} \int_{\{|z|=1\}} f(x+\varepsilon z) dS.$$

Finalmente, por la continuidad de f tenemos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{C_n} \int_{\{|z|=1\}} f(x+\varepsilon z) dS = f(x).$$

Concluyendo que

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y) \Delta f(y) dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} N(x-y) \Delta f(y) dy \\ &= f(x) \end{aligned}$$

□

A continuación calcularemos las segundas derivadas de los potenciales de Newton, desde las que deduciremos las estimaciones de Schauder para la ecuación de Poisson. Consideraremos Ω un abierto acotado en \mathbb{R}^n y una función $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$, con $0 \leq \alpha \leq 1$ que extendemos por cero fuera de Ω . Sea

$$w(x) = \int_{\mathbb{R}^n} N(x-y) f(y) dy = \int_{\Omega} N(x-y) f(y) dy$$

el potencial de Newton de f . Para derivar las estimaciones de Schauder para la ecuación de Poisson presentaremos los siguientes dos resultados

Lema 2.4.2.

Sea f acotada y (localmente) de tipo \mathcal{C}^α en Ω . Entonces $w \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $\Delta w = f$ y para cada $x \in \Omega$

$$\partial_i \partial_j w(x) = \int_{\Omega_1} \partial_i \partial_j N(x-y) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial\Omega_1} \partial_i (N(x-y)) \hat{n}_j dS(y) \quad (2.4.3)$$

Donde Ω_1 es un dominio acotado conteniendo a Ω en el que se tiene el teorema de la divergencia.

Demostración. Consideremos

$$u(x) = \int_{\Omega_1} \partial_i \partial_j N(x-y) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial\Omega_1} \partial_i (N(x-y)) \hat{n}_j dS(y)$$

Notamos que las segundas derivadas del kernel de Newton son tales que

$$|\partial_i \partial_j N(x-y)| \leq C |x-y|^{-n}. \quad (2.4.4)$$

Esto, junto a que $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ nos da la bien definición de u . Por el resultado anterior, sabemos que $w \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Consideremos $v = \partial_i w$ para definir

$$v_\varepsilon(x) = \int_{\Omega} \partial_i N(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) f(y) dy$$

para $\varepsilon > 0$ pequeño y $\eta(r)$ es una función suave que se anula para $0 \leq r \leq 1$ y es idénticamente $\eta(r) = 1$ para $r \leq 2$, lo que nos permitirá aislar de forma suave la región conteniendo la singularidad de N . Utilizando 2.4.4 podemos concluir que v_ε es de clase \mathcal{C}^1 , si derivamos obtenemos que

$$\begin{aligned} \partial_j v_\varepsilon &= \int_{\Omega} \partial_j \left(\partial_i N(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \right) f(y) dy \\ &= \int_{\Omega_1} \partial_j \left(\partial_i N(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \right) f(y) dy \\ &= \int_{\Omega_1} \partial_j \left(\partial_i N(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \right) (f(y) - f(x)) dy + f(x) \int_{\Omega_1} \partial_j \left(\partial_i N(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \right) dy \\ &= \int_{\Omega_1} \partial_j \left(\partial_i N(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \right) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial\Omega_1} \partial_i N(x-y) \hat{n}_j(y) dS(y) \end{aligned}$$

Donde utilizamos el teorema de integración por partes para ver que

$$\int_{\Omega_1} \left(\partial_j \partial_i N(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \right) dy = \int_{\partial\Omega_1} \partial_i N(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \hat{n}_j dS(y) - \int_{\Omega_1} \partial_i N(x-y) \partial_j \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) dy,$$

y simplificamos la tercera igualdad obteniendo el ultimo paso. Utilizando lo anterior obtenemos que

$$\begin{aligned} &|u(x) - \partial_j v_\varepsilon(x)| \\ &= \left| \int_{\Omega_1} \partial_i \partial_j N(x-y) (f(y) - f(x)) dy - \int_{\Omega_1} \partial_j \left(\partial_i N(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \right) (f(y) - f(x)) dy \right| \\ &= \left| \int_{\Omega_1} \left[\partial_i \partial_j N(x-y) - \partial_j \left(\partial_i N(x-y) \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \right) \right] (f(y) - f(x)) dy \right| \\ &= \left| \int_{\Omega_1} \partial_j \left(\left(1 - \eta\left(\frac{|x-t|}{\varepsilon}\right) \right) \partial_i N(x-y) \right) (f(y) - f(x)) dy \right| \\ &\leq \int_{\Omega_1} \left| \partial_j \left(\left(1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \right) \partial_i N(x-y) \right) (f(y) - f(x)) \right| dy \\ &\leq [f]_{\alpha, \Omega_1} \int_{\Omega_1} \left| \partial_j \left(1 - \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \right) \right| |x-y|^\alpha dy \\ &\leq [f]_{\alpha, \Omega_1} \int_{\{|x-y| \leq 2\varepsilon\}} \left(\left| \partial_i \partial_j N(x-y) \right| + \left| \partial_j \eta\left(\frac{|x-y|}{\varepsilon}\right) \partial_i N(x-y) \right| \right) |x-y|^\alpha dy \\ &\leq C\varepsilon^\alpha [f]_{\alpha, \Omega_1} \end{aligned}$$

De esta manera, $\partial_j v_\varepsilon$ converge uniforme (sobre compactos) a u y como v_ε converge $v = \partial_i w$ cuando

$\varepsilon \rightarrow 0$, obtenemos que $w \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ y $u = \partial_i \partial_j w$, lo que concluye la demostración del lema \square

Notemos que haciendo $\Omega_1 = B_R(x)$, para algún R suficientemente grande tendremos que

$$\Delta w(x) = \frac{1}{nC_n R^{n-1}} f(x) \int_{\{|x-y|=R\}} \hat{n}_i(y) \hat{n}_j(y) dS(y) = f(x).$$

Podemos enunciar como consecuencia el siguiente teorema

Teorema 2.4.2.

Sea Ω un dominio acotado con frontera $\partial\Omega$ regular respecto al Laplaciano. Entonces, si f es acotada, localmente Hölder continua en Ω , entonces el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = \varphi, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una única solución para cada φ continua como valores de frontera.

Si suponemos la existencia de soluciones de la ecuación de Poisson, o de un operador diferencial de segundo orden, podemos estudiar condiciones necesarias que estas deben satisfacer, estas se denominan estimaciones a priori. Nuestro objetivo es establecer estimaciones a priori de un operador elíptico con coeficientes Hölder continuos, para esto, en el siguiente lema introducimos **estimaciones para las derivadas de segundo orden**.

Lema 2.4.3.

Sean $B_1 = B_R(x_0)$ y $B_2 = B_{2R}(x_0)$ bolas concéntricas en \mathbb{R}^n . Si $f \in \mathcal{C}^\alpha(\overline{B_2})$, para $0 < \alpha < 1$, y sea w el potencial Newtoniano de f en B_2 . Entonces $w \in \mathcal{C}^{2,\alpha}$ y

$$\|\partial^2 w\|_{\mathcal{C}(B_2)} + R^\alpha [\partial^2 w]_{\alpha, B_1} \leq C (\|f\|_{\mathcal{C}(B_2)} + R^\alpha [f]_{\alpha, B_2})$$

Demostración. Por el lema 2.4.3 sabemos que, para cada $x \in B_1$,

$$\partial_i \partial_j w(x) = \int_{B_2} \partial_i \partial_j N(x-y) (f(y) - f(x)) dy - f(x) \int_{\partial B_2} \partial_i N(x-y) \hat{n}_j(y) dS(y)$$

De esta manera, podemos calcular las siguientes cotas para las derivadas de segundo orden

$$\begin{aligned} |\partial_i \partial_j w(x)| &\leq \frac{|f(x)|}{nC_n} R^{1-n} \int_{\partial B_2} dS(y) + \frac{[f]_{\alpha, x}}{C_n} \int_{B_2} |x-y|^{\alpha-n} dy \\ &\leq 2^{1-n} |f(x)| + \frac{n}{\alpha} (3R)^\alpha [f]_{\alpha, x} \\ &\leq C_1 (|f(x)| + R^\alpha [f]_{\alpha, x}). \end{aligned}$$

Donde $C_1 = C_1(n, \alpha)$ es una constante que depende solamente de la dimension n y la Hölder-continuidad de f .

Por otro lado, si consideramos otro punto $x' \in B_1$, de tal manera que $\delta := |x - x'|$ y $\xi = \frac{1}{2}(x - x')$. Veamos entonces que

$$\partial_i \partial_j w(x) - \partial_i \partial_j w(x') = f(x)I_1 + (f(x) - f(x'))I_2 + I_3 + I_4 + (f(x) - f(x'))I_5 + I_6$$

Donde los términos I_j son términos integrales de la forma

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\partial B_2} (\partial_i N(x - y) - \partial_i N(x' - y)) \partial_i N(x' - y) \hat{n}_j(y) dS(y) \\ I_2 &= \int_{\partial B_2} \partial_i N(x' - y) \hat{n}_j(y) dS(y) \\ I_3 &= \int_{B_{\delta(\xi)}} \partial_i \partial_j N(x - y) (f(x) - f(y)) dy \\ I_4 &= - \int_{B_{\delta(\xi)}} \partial_i \partial_j N(x' - y) (f(x') - f(y)) dy \\ I_5 &= \int_{B_2 \setminus B_{\delta(\xi)}} \partial_i \partial_j N(x - y) dy \\ I_6 &= \int_{B_2 \setminus B_{\delta(\xi)}} (\partial_i \partial_j N(x - y) - \partial_i \partial_j N(x' - y)) (f(x') - f(y)) dy. \end{aligned}$$

A continuación acotaremos los términos integrales ya detallados. Para I_1 si consideramos $\bar{x} \in [x, x']$ (el segmento entre x y x') podemos ver que

$$|I_1| \leq |x - x'| \int_{\partial B_2} |\nabla \partial_i N(\bar{x} - y)| dS(y)$$

Luego, como $\delta = |\bar{x} - y| \geq R$ para $y \in \partial B_2$ y finalmente utilizando que $\delta < 2R$ concluimos que

$$|I_1| \leq \frac{n^2 2^{n-1} |x - x'|}{R} \leq n^2 2^{n-1} \left(\frac{\delta}{R} \right)^\alpha.$$

Para I_2 , basta notar que

$$|I_2| \leq \frac{R^{1-n}}{nC_n} \int_{\partial B_2} dS(y) = 2^{n-1}.$$

Para I_3 procedemos como sigue,

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \int_{B_{\delta(\xi)}} |\partial_i \partial_j N(x - y)| |f(x) - f(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{C_n} R^{1-n} \int_{\partial B_{3\delta/2}(x)} |x - y|^{\alpha-n} dy \\ &= \frac{n}{\alpha} \left(\frac{3\delta}{2} \right)^\alpha [f]_{\alpha, x} \end{aligned}$$

Asimismo, para I_4 concluimos que

$$|I_4| \leq \frac{n}{\alpha} \left(\frac{3\delta}{2} \right)^\alpha [f]_{\alpha, x'}$$

Por otro lado, integrando por partes en el término I_5 obtenemos

$$\begin{aligned} |I_5| &= \left| \int_{\partial(B_2 \setminus B_\delta(\xi))} \partial_i N(x-y) \hat{n}_j(y) dS(y) \right| \\ &\leq \left| \int_{\partial B_2} \partial_i N(x-y) \hat{n}_j(y) dS(y) \right| + \left| \int_{\partial B_\delta(\xi)} \partial_i N(x-y) \hat{n}_j(y) dS(y) \right| \\ &\leq 2^{n-1} + \frac{1}{nC_n} \left(\frac{\delta}{2} \right)^{1-n} \int_{\partial B_\delta(\xi)} dS(y) \\ &= 2^n. \end{aligned}$$

Finalmente, podemos ver que para algún \bar{x} entre x y x' se debe tener que

$$\begin{aligned} |I_6| &\leq |x-x'| \int_{B_2 \setminus B_\delta(x)} |\nabla \partial_i \partial_j N(\bar{x}-y)| |f(x') - f(y)| dy \\ &\leq c\delta \int_{|y-\xi| \geq \delta} \frac{|f(x') - f(y)|}{|\bar{x}-y|^{n+1}} dy \\ &\leq c\delta [f]_{\alpha, x'} \int_{|y-\xi| \geq \delta} \frac{|x'-y|^\alpha}{|\bar{x}-y|^{n+1}} dy \\ &\leq c \left(\frac{3}{2} \right)^\alpha 2^{n+1} \delta [f]_{\alpha, x'} \int_{|y-\xi| \geq \delta} |\xi-y|^{\alpha-n-1} dy. \end{aligned}$$

Donde $c = \frac{n(n+5)}{C_n}$. Finalmente, como $|x'-y| \leq \frac{3}{2}|\xi-y| \leq 3|\bar{x}-y|$, concluimos que

$$|I_6| \leq \frac{n^2(n+5)}{1-\alpha} 2^{n+1} \left(\frac{3}{2} \right)^\alpha \delta^\alpha [f]_{\alpha, x'}$$

Utilizando las estimaciones anteriores, obtenemos

$$\frac{|\partial_i \partial_j w(x') - \partial_i \partial_j w(x)|}{|x-x'|^\alpha} \leq C_2 \left[\left(\frac{1}{R} \right)^\alpha |f(x)| + [f]_{\alpha, x} + [f]_{\alpha, x'} \right] \quad (2.4.5)$$

Donde C_2 es una constante que solo depende de n y α . Para concluir, utilizamos 2.4.3 y tomamos el supremo sobre 2.4.5 obteniendo la desigualdad deseada. \square

De este último resultado deducimos las estimaciones de Schauder para una solución de la ecuación de Poisson.

Teorema 2.4.3 (Estimaciones de Schauder, **Caso Poisson**).

Sea Ω un dominio en \mathbb{R}^n y sea $u \in \mathcal{C}^2\Omega$, $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ que satisfacen la ecuación de Poisson $\Delta u = f$. Entonces $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\Omega)$ y, para cada par de bolas concéntricas B_1 y B_2 como en las hipótesis de 2.4.3 se tiene que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(B_1)} \leq C (\|u\|_{\mathcal{C}^0(B_2)} + \|f\|_{C^{0,\alpha}(B_2)})$$

Observación 2.4.2. Basta asumir que $f \in \mathcal{C}^2(M)$ para obtener que $f \in C^{k+2,\alpha}(M)$ siempre que $L(f)$ y los coeficientes de L estén en $C^{k,\alpha}(M)$.

Este argumento se denomina **Bootstrapping** y veremos un ejemplo de su aplicación en el capítulo 3.

Estimaciones de Schauder para operadores elípticos.

Las estimaciones que introduciremos a continuación se basan en la observación que las ecuaciones con coeficientes Hölder continuos pueden ser tratados como perturbaciones de ecuaciones de coeficientes constantes, esto fue utilizado por Schauder para construir una teoría global de operadores, en esta teoría, encontramos las estimaciones a priori de soluciones de ecuaciones que extiende la teoría de potenciales. Estas estimaciones proveen de resultados de existencia y regularidad, lo que las convierte en valiosas herramientas para el estudio de ecuaciones diferenciales y sus soluciones.

En adelante, denotaremos por $L(u) = f$ a la ecuación 2.3.1

$$L(u) = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{\ell=1}^n b_\ell \frac{\partial u}{\partial x^\ell} + cu = f \quad (2.4.6)$$

Donde los coeficientes a_{ij} y f están definidos en $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y el operador L es uniformemente elíptico (ver 2.3.2). Utilizaremos las normas dadas por [GT01, Sección 4.3, pag.61], estas son dadas como sigue. Dados $x, y \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, escribimos $d_x = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ y $d_{x,y} = \min(d_x, d_y)$. Sea $u \in \mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$, definimos entonces los siguientes coeficientes,

$$[u]_{k,0;\Omega}^* := [u]_{k;\alpha}^* = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |\beta|=k}} d_x^k |\partial^\beta u(x)| \quad (2.4.7)$$

los cuales utilizamos para definir

$$|u|_{k;\Omega}^* = |u|_{k,0;\Omega}^* = \sum_{j=0}^k [u]_{j;\Omega}^* \quad (2.4.8)$$

De forma similar a como hemos hecho anteriormente, para $0 < \alpha \leq 1$ definimos el análogo al α -coeficiente de Hölder de u como

$$[u]_{k,\alpha;\Omega}^* = \sup_{\substack{x,y \in \Omega \\ |\beta|=k}} d_{x,y}^{k+\alpha} \frac{|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)|}{|x-y|^\alpha} \quad (2.4.9)$$

Y finalmente, podemos formular un análogo de la norma de Hölder como

$$\|u\|_{k,\alpha;\Omega}^* = |u|_{k,\alpha;\Omega}^* + [u]_{k,\alpha;\Omega}^* \quad (2.4.10)$$

La cual se denomina como **norma interior**.

Observación 2.4.3.

1. En esta notación,

$$[u]_{0;\Omega}^* = |u|_{0;\Omega}^* = |u|_{0;\Omega}.$$

2. Notemos que $|u|_{k;\Omega}^*$ y $|u|_{k,\alpha;\Omega}^*$ son normas en los subespacios de funciones continuas $\mathcal{C}^k(\Omega)$ y $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ respectivamente. Si Ω es acotado y su diámetro es d , entonces las normas interiores y las de Hölder se relacionan por

$$|u|_{k,\alpha;\Omega}^* \leq \max(1, d^{k+\alpha}) |u|_{k,\alpha;\Omega}$$

Si $\Omega' \subset\subset \Omega$, es decir $\overline{\Omega'}$ es compacto en Ω y $\sigma = \text{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, entonces

$$\min(1, \sigma^{k+\alpha}) |u|_{k,\alpha;\Omega} \leq |u|_{k,\alpha;\Omega}^*$$

Considerando la observación anterior, si introducimos la cantidad

$$|f|_{0,\alpha;\Omega}^{(k)} = \sup_{x \in \Omega} d_x^k |f(x)| + \sup_{x,y \in \Omega} d_{x,y}^{k+\alpha} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \quad (2.4.11)$$

podemos reescribir el teorema 2.4.3 como en [GT01, Pag. 62]

Teorema 2.4.4 (Estimaciones de Schauder, **Caso Poisson**, (ver.2)).

Sea $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, que para $f \in \mathcal{C}^\alpha$ satisface la ecuación de Poisson $\Delta u = f$ sobre un dominio abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Entonces, existe una constante $C > 0$ tal que

$$|u|_{2,\alpha;\Omega}^* \leq C \left(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}^{(2)} \right) \quad (2.4.12)$$

El resultado para el caso de un operador elíptico de coeficientes constantes es una consecuencia directa de las estimaciones que hemos obtenido para el Laplaciano en 2.4.2, utilizado después de un cambio de variables adecuado. Para ilustrar este argumento y presentarlo formalmente enunciamos el siguiente lema

Lema 2.4.4.

En la ecuación de coeficientes constantes sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto

$$L_0(u) = \sum_{j,k=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} = f(x).$$

Donde a_{ij} son los coeficientes constantes de una matriz simétrica A de orden $n \times n$ que satisface la condición de elipticidad

$$\lambda|\xi|^2 \leq \xi^T A \xi \leq \Lambda|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

para algunas λ y Λ constantes positivas. Se tiene que

1. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ satisfacen $L_0 u = f$. Entonces

$$|u|_{2,\alpha,\Omega}^* \leq C \left(|u|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha,\Omega}^{(2)} \right)$$

Donde C es una constante que depende solamente de n , α , λ y Λ .

2. Si $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$ con una parte de su frontera $T \subset \partial\Omega$ sobre $x_n = 0$, y $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega \cup T)$, $f \in \mathcal{C}^\alpha(\Omega \cup T)$ satisfacen la ecuación

$$\begin{cases} L_0 u = f, & \text{en } \Omega \\ u = 0, & \text{sobre } T. \end{cases}$$

Entonces

$$|u|_{2,\alpha,(\Omega \cup T)}^* \leq C \left(|u|_{0,\Omega} + |f|_{0,\alpha,(\Omega \cup T)}^{(2)} \right).$$

Donde C es una constante que depende solamente de n , α , λ y Λ .

Demostración. Consideremos una matriz constante P que define una transformación lineal no singular dada por la aplicación de P a vectores en \mathbb{R}^n , es decir,

$$\begin{aligned} P : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto P(x) = Px =: y \in \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

Haciendo $u(x) \xrightarrow{P} \tilde{u}(y)$ se puede verificar que

$$A_{ij} \partial_i \partial_j u(x) = \tilde{A}_{ij} \partial_i \partial_j \tilde{u}(y)$$

donde $\tilde{A} = P^T A P$. Para alguna matriz ortogonal P adecuada, \tilde{A} es una matriz diagonal, cuyos elementos son los autovalores de A , que denotaremos por $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Más aún, si definimos

$$Q = P D$$

donde D es la matriz diagonal $(\delta_j^i \lambda_i^{-1/2})_{i,j}$, entonces la transformación $x \mapsto Qx = y$ mapea $L_0 u = f(x)$ al problema de Poisson $\Delta \tilde{u}(y) = \tilde{f}(y)$, considerando que

$$u(x) \xrightarrow{Q} \tilde{u}(y) \quad \text{y} \quad f(x) \xrightarrow{Q} \tilde{f}(y)$$

Utilizando una rotación adecuada podemos asumir que Q mapea el semiespacio positivo $x_n > 0$ sobreyectivamente al semiespacio $y_n > 0$. Como P es ortogonal, es en particular una isometría, por lo tanto

$$\Lambda^{-1/2}|x| \leq |Qx| \leq \Lambda^{-1/2}|x|.$$

Sigue que si $\Omega \xrightarrow{Q} \tilde{\Omega}$ entonces las normas 2.4.10 y 2.4.11 definidas sobre Ω y $\tilde{\Omega}$ se relacionan entre si como sigue

$$\begin{aligned} c^{-1}|v|_{k,\alpha;\Omega}^* &\leq |\tilde{v}|_{k,\alpha;\tilde{\Omega}}^* \leq c|v|_{k,\alpha;\Omega}^* \\ c^{-1}|v|_{0,\alpha;\Omega}^{(k)} &\leq |\tilde{v}|_{0,\alpha;\tilde{\Omega}}^{(k)} \leq c|v|_{0,\alpha;\Omega}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.4.3-1)$$

para $k \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, 1]$ y una constante $c = c(k, n, \lambda, \Lambda)$.

De la forma similar si Ω es un subconjunto abierto del semiplano \mathbb{R}_+^n con una porción de su frontera T sobre el plano $x_n = 0$ que se mapea por Q al conjunto $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}_+^n$ con una porción de frontera mapeada como $T \xrightarrow{Q} \tilde{T}$. Las normas de la forma 2.4.8 en Ω y $\tilde{\Omega}$ satisfacen que

$$\begin{aligned} c^{-1}|v|_{k,\alpha;\Omega \cup T}^* &\leq |\tilde{v}|_{k,\alpha;\tilde{\Omega} \cup \tilde{T}}^* \leq c|v|_{k,\alpha;\Omega \cup T}^* \\ c^{-1}|v|_{0,\alpha;\Omega \cup T}^{(k)} &\leq |\tilde{v}|_{0,\alpha;\tilde{\Omega} \cup \tilde{T}}^{(k)} \leq c|v|_{0,\alpha;\Omega \cup T}^{(k)} \end{aligned} \quad (2.4.3-2)$$

Utilizando el teorema 2.4.4 en las desigualdades 2.4.3-1 concluimos que

$$|u|_{2,\alpha;\Omega}^* \leq C|\tilde{u}|_{2,\alpha;\tilde{\Omega}}^* \leq C \left(|\tilde{u}|_{0;\Omega} + |\tilde{f}|_{0,\alpha;\Omega}^{(2)} \right) \leq C \left(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}^{(2)} \right)$$

de forma similar (Ver [GT01, Teoremas 4.11 y 4.12]) y utilizando las desigualdades 2.4.3-2 se concluye la estimación del punto (2) del resultado. \square

Utilizando el método de continuidad, que se presentará a modo de conclusión de esta sección, se puede establecer una forma de estudiar problemas elípticos generales utilizando las propiedades que hasta ahora hemos discutido utilizando problemas de coeficientes (localmente) constantes. Este método nos permite pensar en los problemas elípticos más generales como perturbaciones del problema del Laplaciano, o de la ecuación de Poisson. En particular, es relevante para nuestro trabajo el siguiente resultado.

Teorema 2.4.5 (Estimaciones de Schauder).

Sean $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio de clase $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ y $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$ una solución de $L(u) = f$ en Ω , para $f \in \mathcal{C}^\alpha(\bar{\Omega})$ y para constantes positivas λ y Λ los coeficientes de L satisfacen

$$\sum_{j,k=1}^n a_{jk}(x) \xi_j \xi_k \geq \lambda |\xi|^2, \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

y los coeficientes del operador están controlados como sigue

$$|a_{ij}|_{0,\alpha;\Omega}, |b_j|_{0,\alpha;\Omega}, |c|_{0,\alpha;\Omega} \leq \Lambda.$$

Sea $\varphi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, si $u = \varphi$ sobre $\partial\Omega$, entonces

$$|u|_{2,\alpha;\Omega} \leq C(|u|_{0;\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}). \quad (2.4.13)$$

Donde C es una constante que depende únicamente de $n, \alpha, \lambda, \Lambda$ y Ω .

Para concluir esta sección, introduciremos el **método de continuidad** para presentar una aplicación de los resultados previos en el estudio de la existencia de soluciones en un problema de tipo Dirichlet.

Teorema 2.4.6 (Método de Continuidad).

Sean $(\mathbb{B}, \|\cdot\|_{\mathbb{B}})$ un espacio de Banach y $(\mathbb{V}, \|\cdot\|_{\mathbb{V}})$ un espacio vectorial normado. Sean L_0 y L_1 dos operadores lineales acotados de \mathbb{B} en \mathbb{V} . Para cada $t \in [0, 1]$ definimos el problema L_t como

$$L_t = (1-t)L_0 + tL_1.$$

Si existe una constante positiva C tal que

$$\|x\|_{\mathbb{B}} \leq C\|L_t(x)\|_{\mathbb{V}} \quad (2.4.14)$$

para cada $t \in [0, 1]$. Entonces L_1 mapea \mathbb{B} en \mathbb{V} sobreyectivamente si y solo si L_0 mapea \mathbb{B} en \mathbb{V} sobreyectivamente.

Demostración. Comenzamos suponiendo que L_s es sobreyectiva para algún $s \in [0, 1]$. Desde 2.4.14 concluimos que L_s es inyectiva, y por lo tanto \mathbb{V} es, de hecho, un espacio de Banach isomorfo a \mathbb{B} , y podemos considerar su inversa

$$L_s^{-1} : \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{B}.$$

Por otro lado, para $t \in [0, 1]$ e $y \in \mathbb{V}$, la ecuación $L_t(x) = y$ equivale a

$$\begin{aligned} L_s(x) &= y + (L_s - L_t)x \\ &= y + (t-s)L_0(x) - (t-s)L_1(x). \end{aligned}$$

Podemos escribir entonces

$$x = L_s^{-1}(y) + (t-s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)(x).$$

Consideremos la aplicación

$$T : \mathbb{B} \longrightarrow \mathbb{B}$$

$$x \longmapsto Tx = L_s^{-1}(y) + (t - s)L_s^{-1}(L_0 - L_1)(x)$$

Y notemos que si $|s - t| < \delta := (C(\|L_0\| + \|L_1\|))^{-1}$, T corresponde a una contracción, por lo que por el teorema de punto fijo de Banach podemos concluir que T es sobreyectiva para cada $t \in [0, 1]$, tal que $|s - t| < \delta$. Dividiendo el intervalo $[0, 1]$ en subintervalos de largo menor que δ , vemos que si L_t es sobreyectivo para un $t \in [0, 1]$ dado, entonces debe serlo para cada $t \in [0, 1]$, y particularmente para $t = 0$ y $t = 1$, por lo que concluimos el resultado. \square

Como veremos más adelante, el punto clave del uso de este método es dado por probar que el conjunto

$$\{t \in [0, 1] \text{ tal que, la ecuación } L_t(u) = f \text{ tiene solución}\}$$

es conexo, lo cual usualmente corresponderá a probar que es abierto y cerrado. Gran parte de las veces la condición de ser abierto es menos compleja, pues, en general esta es dada por el hecho de que los conjuntos de aplicaciones invertibles son (en general) abiertos dadas las condiciones necesarias. Por otro lado, para abordar la demostración de que este conjunto es cerrado, es necesario utilizar resultados de compacidad que generalmente revisten una mayor complejidad.

A continuación, aplicaremos el método de continuidad para estudiar la existencia de soluciones para el problema $L(u) = f$ desde la ecuación de Poisson $\Delta u = f$ utilizando soluciones para una familia continua de ecuaciones que se encuentran entre $\Delta u = f$ y $L(u) = f$. Es decir, el resultado anterior, en las circunstancias correctas nos permitirá estudiar una ecuación elíptica y sus soluciones (al menos localmente en el caso de variedades) como la perturbación de una ecuación de Poisson, desde la cual podremos deducir la existencia de soluciones para $L(u) = f$.

Teorema 2.4.7.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio de clase $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, en el cual el operador L es estrictamente elíptico, con coeficientes de clase $\mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ y con $c \geq 0$. Si el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una solución $u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para cada $f \in \mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ y $\varphi \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, entonces, el problema

$$\begin{cases} L(u) = f & \text{en } \Omega, \\ u = \varphi & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4.15)$$

también posee una solución $v \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ para cada f y φ como en el primer problema.

Demostración. Por las hipótesis, podemos asumir la existencia de constantes positivas λ y Λ tales que

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{j,k=1}^n a_{ij}(x)\xi_j\xi_k \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (2.4.16)$$

y

$$|a_{ij}|_{0,\alpha;\Omega}, |b_j|_{0,\alpha;\Omega}, |c|_{0,\alpha;\Omega} \leq \Lambda. \quad (2.4.17)$$

Por simplicidad, en adelante omitiremos el Ω en las normas provisto que no deja espacio a ambigüedad en su interpretación.

Notemos que es suficiente estudiar el problema para condición de frontera cero, esto pues, considerando $v = u - \varphi$ el problema 2.4.15 es equivalente a

$$\begin{cases} L(v) = f - L(\varphi) & = f', \text{ en } \Omega \\ v & = 0, \text{ sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.4.18)$$

Consideraremos entonces, la familia de ecuaciones

$$L_t(u) := tL(u) + (1-t)\Delta u = f, \quad \text{para } t \in [0, 1] \quad (2.4.19)$$

Notemos que para $t = 0$ obtenemos un problema tipo Dirichlet para la ecuación de Poisson, mientras que para $t = 1$ se obtiene el problema que deseamos estudiar, además, los coeficientes de L_t deben satisfacer 2.4.16 y 2.4.17 con

$$\lambda_t = \min(1, \lambda), \quad \Lambda_t = \max(1, \Lambda).$$

Si consideramos al operador L_t como un operador lineal continuo entre los espacios de Banach $\mathbb{B}_1 = \{u \in \mathcal{C}^{2,\alpha}(\overline{\Omega}), \text{ tal que } u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}$ y $\mathbb{B}_2 = \mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$. La solubilidad del problema de Dirichlet

$$\begin{cases} L_t(u) = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.4.20)$$

para algún $f \in \mathcal{C}^\alpha(\overline{\Omega})$ arbitrario será equivalente a la invertibilidad de la aplicación L_t . Si denotamos por u_t a la solución de este ultimo problema. Podemos encontrar que (ver [GT01][Teorema 3.7])

$$|u_t|_0 \leq C \sup_{x \in \Omega} |f(x)| \leq C|f|_{0,\alpha},$$

donde C es una constante que solo depende de λ , Λ y el diámetro de Ω . Así, desde 2.4.13 obtenemos

$$|u_t|_{2,\alpha} \leq C|f|_{0,\alpha}, \quad (2.4.21)$$

esto es,

$$\|u\|_{\mathbb{B}_1} \leq C \|L_t u\|_{\mathbb{B}_2}$$

Donde la constante C es independiente del t en particular. Dado que, por hipotesis $L_0 = \Delta$ lleva sobreyectivamente \mathbb{B}_1 en \mathbb{B}_2 , podemos aplicar el método de continuidad 2.4.6 obteniendo el resultado deseado. \square

2.5. El operador Laplaciano en variedades de Kähler

La teoría de Hodge, llamada así en honor a su desarrollador W. Hodge es un método de estudio de los grupos de cohomología de una variedad diferencial que utiliza técnicas del cálculo diferencial y de ecuaciones en derivadas parciales. Concluiremos este capítulo presentando la definición dada desde la Teoría de Hodge para operadores diferenciales, y en particular el operador Laplaciano.

En primer lugar, recordemos que si X es una variedad compleja, entonces, una métrica Riemanniana g sobre X es una **estructura hermitiana** sobre X si para todo $x \in X$ el producto interno g_x sobre el espacio tangente $T_x X$ es compatible con la estructura casi compleja I_x . Con lo anterior, la $(1, 1)$ -forma inducida

$$\omega := g(I(\cdot), (\cdot))$$

es llamada **forma fundamental**, que en termino de coordenadas locales $\{z^1, \dots, z^m\}$ se escribe como

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{i,j=1}^m h_{ij} dz^i \wedge dz^j$$

donde $(h_{ij}(x))$ corresponde a una matriz definida positiva para todo $x \in X$. Dado lo anterior (X, g) se denomina variedad hermitiana y sobre sus álgebras exteriores podemos definir los siguientes operadores.

- 1) **El operador de Lefschetz** es el homomorfismo de fibrados vectoriales dado por

$$\begin{aligned} L : \bigwedge^k X &\longrightarrow \bigwedge^{k+2} X, \\ \alpha &\longmapsto \alpha \wedge \omega \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

- 2) **El operador \star de Hodge**, corresponde al emparejamiento definido para $\beta \in \bigwedge^k X$, como $\star\beta \in \bigwedge^{n-k} X$ que debe satisfacer la igualdad

$$\alpha \wedge \star\beta = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \text{vol}, \quad \forall \alpha \in \bigwedge^k X.$$

Es inducido por la métrica y la orientación de X .

- 3) **El operador dual de Lefschetz** corresponde al operador adjunto a L , se define por la condición

$$\langle \Lambda \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, L \beta \rangle, \quad \forall \beta \in \bigwedge^k X.$$

Además Λ es de grado -2 y depende de la forma fundamental ω y la métrica g .

Observación 2.5.1.

1. Para el producto exterior, \star define un emparejamiento no degenerado

$$\bigwedge^k X \times \bigwedge^{n-k} X \longrightarrow \bigwedge^n X = \text{vol} \cdot \mathbb{R}$$

2. Podemos ver que Λ es dado por

$$\begin{aligned} \Lambda : \bigwedge^k X &\longrightarrow \bigwedge^{k-2} X, \\ \alpha &\longmapsto (\star^{-1} \circ L \circ \star)(\alpha) \end{aligned}$$

Para esto, veamos que

$$\begin{aligned} \langle \alpha, L \beta \rangle \cdot \text{vol} &= \langle L \beta, \alpha \rangle \cdot \text{vol} \\ &= L \beta \wedge \star \alpha \\ &= \omega \wedge \beta \wedge \star \alpha \\ &= \beta \wedge (\omega \wedge \star \alpha) \\ &= \langle \beta, \star^{-1}(L(\star \alpha)) \rangle \cdot \text{vol} \\ &= \langle \beta, (\star^{-1} \circ L \circ \star)(\alpha) \rangle \cdot \text{vol} \end{aligned}$$

De lo que concluimos la forma de Λ

Notación 2.5.1. Denotaremos indistintamente Λ, L y \star a las extensiones \mathbb{C} -lineales de los operadores de Lefschetz y Hodge ya definidos.

Como en el primer capítulo, consideramos las (p, q) -formas diferenciales con coeficientes suaves sobre X como se presentan en la definición 1.2.1 cuyo diferencial se obtiene mediante los operadores ∂ y $\bar{\partial}$ como en 1.2.4. De esta manera podemos encontrar el operador adjunto de d , que corresponde a

$$d^* = (-1)^{m(k+1)+1} \star \circ d \circ \star : \mathcal{A}^k(X) \longrightarrow \mathcal{A}^{k-1}(X) \quad (2.5.2)$$

Observación 2.5.2. La definición anterior puede presentarse para una variedad Riemanniana (M, g) . Esto nos permite ver, que si $m = \dim_{\mathbb{R}}(M)$ es par (como cuando es compatible con una estructura compleja), entonces el operador adjunto anterior corresponde exactamente a

$$d^* = - \star \circ d \circ \star.$$

Considerando la definición anterior del operador adjunto d^* proponemos la siguiente definición de operador Laplaciano, que denominamos de Hodge-Laplace-Beltrami debido a su importancia en teoría de Hodge y sus aplicaciones en el estudio de ecuaciones diferenciales en variedades (en nuestro caso, de Kähler).

Definición (Operador de Hodge-Laplace-Beltrami).

El operador de **Hodge-Laplace-Beltrami**, o simplemente **Laplaciano**, se define como

$$\begin{aligned} \Delta : \bigwedge^k X &\longrightarrow \bigwedge^k X, \\ \alpha &\longmapsto \Delta\alpha := (d^*d + dd^*)(\alpha) \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

De la misma forma en que encontramos d^* podemos definir ∂^* y $\bar{\partial}^*$ como sigue.

Definición.

Sea (X, g) una variedad hermitiana, entonces, los operadores adjuntos por $*$ de ∂ y $\bar{\partial}$ se definen como

$$\partial^* := - * \circ \bar{\partial} \circ *, \quad (2.5.4)$$

$$\bar{\partial}^* := - * \circ \partial \circ * \quad (2.5.5)$$

De esta manera, como el operador $*$ de Hodge mapea $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ en $\mathcal{A}^{n-q,n-p}(X)$, podemos ver que

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{p,q}(X) & \xrightarrow{\partial^*} & \mathcal{A}^{p-1,q}(X) \\ \downarrow * & & \uparrow - * \\ \mathcal{A}^{n-q,n-p}(X) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{A}^{n-q,n-p+1}(X) \end{array}$$

es decir, $\partial^*(\mathcal{A}^{p,q}(X)) \subset \mathcal{A}^{p-1,q}(X)$. De igual manera, también viendo el diagrama análogo para $\bar{\partial}^*$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}^{p,q}(X) & \xrightarrow{\bar{\partial}^*} & \mathcal{A}^{p,q-1}(X) \\ \downarrow * & & \uparrow - * \\ \mathcal{A}^{n-q,n-p}(X) & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{A}^{n-q+1,n-p}(X) \end{array}$$

concluimos que $\bar{\partial}^*(\mathcal{A}^{p,q}(X)) \subset \mathcal{A}^{p,q-1}(X)$. Utilizando la definición anterior y nuestras observaciones

posteriores, podemos ver que si (X, g) es una variedad Hermitiana, entonces

$$\begin{aligned} d^* &= - * \circ d \circ * \\ &= - * \circ (\partial + \bar{\partial}) \circ * \\ &= (- * \circ \partial \circ *) + (- * \circ \bar{\partial} \circ *) \\ &= \bar{\partial}^* + \partial^* \end{aligned}$$

De manera que las aplicaciones de \star se comportan de buena manera con los operadores d , ∂ y $\bar{\partial}$. Luego, de igual forma que con el operador d y d^* podemos utilizar $\bar{\partial}$ y ∂ como derivadas para definir operadores Laplacianos respecto a estas derivadas.

Definición.

Sea (X, g) una variedad hermitiana, los operadores **Laplacianos asociados a ∂ y $\bar{\partial}$** , respectivamente, se definen como

$$\Delta_{\partial} := \partial^* \partial + \partial \partial^* \quad (2.5.6)$$

$$\Delta_{\bar{\partial}} := \bar{\partial}^* \bar{\partial} + \bar{\partial} \bar{\partial}^* \quad (2.5.7)$$

Así, para ambos operadores el bigrado es invariante, es decir,

$$\Delta_{\partial}, \Delta_{\bar{\partial}} : \mathcal{A}^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{A}^{p,q}(X).$$

Todos los operadores lineales y diferenciales que hemos introducido en esta sección se enmarcan en el contexto de variedades hermitianas. En el caso de variedades de Kähler, es decir, variedades donde la métrica g define una forma fundamental ω cerrada (Recordar definición en sección 1.3) tendremos que las propiedades de estos operadores son especialmente buenas. Precisaremos esto a continuación de los siguientes comentarios.

Observación 2.5.3.

1. En algunos casos, se dice que una variedad compleja X es de Kähler si existe una estructura o métrica Kähleriana sin necesariamente fijar una. De forma mas precisa, nos referiremos a este caso como **variedades de tipo Kähleriana**.
2. Como en el caso de variedades diferenciales, que siempre admiten métricas de Riemann, toda variedad compleja (de hecho, casi compleja) admite una métrica Hermitiana. Esto pues, si consideramos una métrica Riemanniana g sobre una variedad compleja X podemos construir una nueva métrica h compatible con una estructura (casi) compleja J como

$$h(u, v) = \frac{1}{2} (g(u, v) + g(Ju, Jv)).$$

3. De forma análoga, una métrica Hermitiana h sobre una variedad (casi) compleja define una métrica Riemanniana g en la variedad diferencial subyacente. Esta se define como la parte real de h , es decir

$$g = \frac{1}{2} (h + \bar{h})$$

A diferencia del caso hermitiano, la existencia de una métrica Kähleriana no es trivial, y de hecho, como hemos comentado entrega una serie de propiedades de interés para nuestro estudio. Comenzamos introduciendo las identidades siguientes, denominadas, **identidades de Kähler**. Para esto, recordemos que el **conmutador** $[A, B]$ de dos operadores de bigrado (a', a'') y (b', b'') respectivamente, y grado total $a = a' + a''$ y $b = b' + b''$ se define como

$$[A, B] := AB - (-1)^{ab} BA. \quad (2.5.8)$$

Proposición 2.5.1 (Identidades de Kähler).

Sea (X, g) una variedad de Kähler. Entonces, se tienen las siguientes identidades

$$1) [\bar{\partial}^*, L] = \mathbf{i}\partial, [\partial^*, L] = -\mathbf{i}\bar{\partial}, [\Lambda, \bar{\partial}] = -\mathbf{i}\partial^* \text{ y } [\Lambda, \partial] = \mathbf{i}\bar{\partial}^*.$$

$$2) [\partial, \bar{\partial}^*] = 0 \text{ y } [\bar{\partial}, \partial^*] = 0.$$

$$3) \Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta, \text{ además } \Delta \text{ conmuta con los operadores } *, \partial, \bar{\partial}, \partial^*, \bar{\partial}^*, L \text{ y } \Lambda.$$

Demostración. Notemos que la primera y segunda relación de **(1)** son conjugadas entre si, de igual manera que la tercera y cuarta relación. Además, la primera y tercera son adjuntas la una de la otra. De esta observación concluimos que las cuatro igualdades del punto **(1)** son equivalentes entre si, por lo que basta probar solo una de ellas. Ver procedimiento en detalle en [GH78, Pag. 111-114], este consta de probar el resultado primero para \mathbb{C}^n y luego utilizar coordenadas adecuadas (cuya existencia se asegura en 1.3.2) para demostrar la igualdad en una variedad de Kähler.

Luego, podemos ver que en **(2)** las relaciones son conjugadas la una de la otra, de modo que probar la primera será suficiente para concluir este punto. Tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{i}(\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial) &= \partial(\mathbf{i}\bar{\partial}^*) + (\mathbf{i}\bar{\partial}^*)\partial \\ &= \partial(\Lambda\partial - \partial\Lambda) + (\Lambda\partial - \partial\Lambda)\partial \\ &= \partial\Lambda\partial - \partial^2\Lambda + \Lambda\partial^2 - \partial\Lambda\partial \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lo que nos permite concluir el punto **(2)**.

Probaremos ahora la ultima relación. En primer lugar, tenemos la igualdad

$$\begin{aligned}
 \Delta &= (\partial + \bar{\partial})(\partial^* + \bar{\partial}^*) + (\partial^* + \bar{\partial}^*)(\partial + \bar{\partial}) \\
 &= \partial\partial^* + \partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}\partial^* + \bar{\partial}\bar{\partial}^* + \partial^*\partial + \partial^*\bar{\partial} + \bar{\partial}^*\partial + \bar{\partial}^*\bar{\partial} \\
 &= (\partial\partial^* + \partial^*\partial) + (\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}) + (\partial\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\partial) + (\bar{\partial}\partial^* + \partial^*\bar{\partial}) \\
 &= \Delta_\partial + \Delta_{\bar{\partial}}
 \end{aligned}$$

Para concluir, probamos que $\Delta_\partial = \Delta_{\bar{\partial}}$ utilizando las identidades anteriores como sigue

$$\begin{aligned}
 -i\Delta_\partial &= -i\partial\partial^* - i\partial^*\partial = \partial(-i\partial^*) + (-i\partial^*)\partial \\
 &= \partial(\Lambda\bar{\partial} - \bar{\partial}\Lambda) + (\Lambda\bar{\partial} - \bar{\partial}\Lambda)\partial \\
 &= \partial\Lambda\bar{\partial} - \partial\bar{\partial}\Lambda + \Lambda\bar{\partial}\partial - \bar{\partial}\Lambda\partial \\
 &= \partial\Lambda\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial\Lambda - \Lambda\bar{\partial}\partial - \bar{\partial}\Lambda\partial \\
 &= -[\bar{\partial}(\Lambda\partial - \partial\Lambda) + (\Lambda\partial - \partial\Lambda)\bar{\partial}] \\
 &= -[\bar{\partial}(i\bar{\partial}) + (i\bar{\partial}^*)\bar{\partial}] \\
 &= -i\Delta_{\bar{\partial}}
 \end{aligned}$$

□

Notemos que este resultado se formula en función del conmutador entre operadores diferenciales, esto nos permite establecer que Δ conmuta con los operadores $*$, ∂ , $\bar{\partial}$, ∂^* , $\bar{\partial}^*$, L y Λ . Hasta ahora hemos visto a los operadores ∂ y ∂^* y sus conjugados como definiciones que provienen de la aplicación del operador \star de Hodge, pero estos son, en efecto, adjuntos formales entre si, para esto veamos a continuación una forma de entender ∂^* y $\bar{\partial}^*$ como los operadores adjuntos formales de ∂ y $\bar{\partial}$ respectivamente. Para esto consideremos una variedad Riemanniana compleja (X, g) , si llamamos h a la extensión Hermitiana de g (como en la observación 2.5.3), esta induce naturalmente un producto Hermitiano sobre los fibrados de formas como sigue

Definición.

Sea (X, g) una variedad Hermitiana compacta. Entonces se define un producto Hermitiano sobre $\mathcal{A}_\mathbb{C}^*(X)$ por

$$(\alpha, \beta) := \int_X h(\alpha, \beta) dV = \int_X \alpha \wedge \bar{\star}\beta. \quad (2.5.9)$$

Utilizando este producto interno Hermitiano, podemos encontrar las siguientes descomposiciones ortogonales para los espacios de formas alternantes sobre X .

Proposición 2.5.2.

Sea (X, g) una variedad Hermitiana compacta. Entonces las siguientes descomposiciones son ortogonales respecto al producto $(,)$

1. La descomposición de grado $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^*(X) = \oplus_k \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k(X)$.
2. La descomposición en bigrado $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k(X) = \oplus_{p+q=k} \mathcal{A}^{p,q}(X)$.
3. La descomposición de Lefschetz $\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k(X) = \oplus_{i \geq 0} L^i P^{k-2i}(X)$.

Este resultado nos dice que $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ es un espacio vectorial infinito-dimensional dotado del producto interno (\cdot, \cdot) y su norma inducida $\|\alpha\| = (\alpha, \alpha)$. La completación de $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ espacio con respecto a este producto interno nos entrega el espacio de L^2 -formas de bigrado (p, q) .

Lema 2.5.1.

Sea X una variedad Hermitiana compacta. Entonces con respecto al producto Hermitiano (\cdot, \cdot) los operadores ∂^* y $\bar{\partial}^*$ son los adjuntos formales de ∂ y $\bar{\partial}$, respectivamente.

Demostración. Sean $\alpha \in \mathcal{A}^{p-1,q}(X)$ y $\beta \in \mathcal{A}^{p,q}(X)$, luego por la definición del producto (\cdot, \cdot) se tiene que

$$\begin{aligned} (\partial\alpha, \beta) &= \int_X h(\partial\alpha, \beta) dV \\ &= \int_X \partial\alpha \wedge \star\bar{\beta} \\ &= \int_X \partial(\alpha \wedge \star\bar{\beta}) - (-1)^{p+q-1} \int_X \alpha \wedge \partial(\star\bar{\beta}) \end{aligned}$$

Notemos que por el teorema de Stokes, la primera integral se anula dado que $\alpha \wedge \star\bar{\beta}$ es una forma de bigrado

$$(p-1, q) + (n-p, n-q) = (n-1, n)$$

y por lo tanto $\partial(\alpha \wedge \star\bar{\beta})$ es de grado (n, n) , en consecuencia

$$\partial(\alpha \wedge \star\bar{\beta}) = d(\alpha \wedge \star\bar{\beta}).$$

Para la segunda integral la calculamos utilizando que $\star^2 = (-1)^k$ sobre $\mathcal{A}^k(X)$ como sigue

$$\begin{aligned} \int_X \alpha \wedge \partial(\star\bar{\beta}) &= \varepsilon \int_X h(\alpha, \star(\bar{\partial}(\star\beta))) dV \\ &= \varepsilon \int_X h(\alpha, -\partial^*\beta) dV \\ &= -\varepsilon(\alpha, \partial^*\beta) \end{aligned}$$

donde $\varepsilon = (-1)^{2n-(p+q)+1}$, de modo que $\varepsilon \cdot (-1)^{p+q-1} = 1$, de lo que concluimos el resultado para ∂^* , para su conjugado, el procedimiento es análogo. \square

Llamamos $\mathcal{H}^k(X, g)$ al espacio de k -formas armónicas respecto al diferencial d (definido de forma usual, como en 2.5.3, y luego, podemos definir los espacios de (p, q) -formas armónicas respecto a d .

En general, cuando hemos fijado la métrica g se omitirá su escritura.

Se puede ver que la descomposición en bigrado proporcionada por la proposición 2.5.2 no preserva esta noción de funciones armónicas, en este caso, será mas natural considerar funciones armónicas respecto a ∂ y/o $\bar{\partial}$, estas se definen a continuación

Definición (Espacios de funciones armónicas generales).

Sea (X, g) una variedad compleja Hermitiana. Una forma $\alpha \in \mathcal{A}^k(X)$ es llamada $\bar{\partial}$ -armónica si $\Delta_{\bar{\partial}}(\alpha) = 0$. Más aún, definimos los espacios de funciones $\bar{\partial}$ armónicas como

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^k(X, g) &:= \{ \alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^k(X) \mid \Delta_{\bar{\partial}}(\alpha) = 0 \}, \\ \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g) &:= \{ \alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{p,q}(X) \mid \Delta_{\bar{\partial}}(\alpha) = 0 \}.\end{aligned}$$

De forma análoga, definimos una forma ∂ -armónica y los espacios de formas ∂ -armónicas $\mathcal{H}_{\partial}^k(X, g)$ y $\mathcal{H}_{\partial}^{p,q}(X, g)$.

Lema 2.5.2.

Sea (X, g) una variedad Hermitiana compacta. Una forma α es ∂ -armónica (resp. $\bar{\partial}$ -armónica) si y solo si $\bar{\partial}\alpha = \bar{\partial}^* = 0$ (resp. $\partial\alpha = \partial^*\alpha = 0$).

Demostración. Notemos que para $\alpha \in \mathcal{A}^{p,q}(X)$

$$\begin{aligned}(\Delta_{\bar{\partial}}\alpha, \alpha) &= ((\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial})\alpha, \alpha) \\ &= (\bar{\partial}\bar{\partial}^*\alpha, \alpha) + (\bar{\partial}^*\bar{\partial}\alpha, \alpha) \\ &= (\bar{\partial}^*\alpha, \bar{\partial}^*\alpha) + (\bar{\partial}\alpha, \bar{\partial}\alpha) \\ &= \|\bar{\partial}^*\alpha\|^2 + \|\bar{\partial}\alpha\|^2.\end{aligned}$$

Así podemos ver que $\Delta_{\bar{\partial}}\alpha = 0$ implica que $\|\bar{\partial}^*\alpha\| = \|\bar{\partial}\alpha\| = 0$ o equivalentemente que $\bar{\partial}^*\alpha = \bar{\partial}\alpha = 0$ lo que concluye la demostración, pues el caso ∂ -armónico es totalmente análogo. \square

Proposición 2.5.3.

Sea (X, g) una variedad Hermitiana. Entonces

a) Se tienen las descomposiciones en bigrado para funciones armónicas siguientes

$$\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^k(X, g) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g) \quad \text{y} \quad \mathcal{H}_{\partial}^k(X, g) = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}_{\partial}^{p,q}(X, g)$$

b) Si (X, g) es de Kähler entonces ambas descomposiciones coinciden con

$$\mathcal{H}^k(X, g)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X, g)$$

En particular, se tiene que

$$\mathcal{H}^k(X, g)_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^k(X, g) = \mathcal{H}_{\partial}^k(X, g).$$

Demostración. □

Observación 2.5.4. *Se pueden establecer algunos hechos de gran utilidad sobre los espacios de funciones armónicas que hemos introducido hasta ahora, estos siguen de resultados conocidos sobre funciones armónicas sobre variedades Riemannianas y del álgebra lineal sobre variedades Hermitianas. Detallamos algunas de estas propiedades a continuación*

- a) *Si (X, g) es una variedad Hermitiana. Entonces el operador \star de Hodge induce un isomorfismo \mathbb{C} -lineal*

$$\star : \mathcal{H}^{p,q}(X, g) \cong \mathcal{H}^{n-q, n-p}(X, g).$$

De hecho, \star induce un morfismo

$$\star : \mathcal{A}^{p,q}(X) \longrightarrow \mathcal{A}^{n-q, n-p}(X)$$

sobre cualquier variedad Hermitiana. De forma similar, se tiene el isomorfismo

$$\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g) \cong \mathcal{H}^{n-q, n-p}(X, g).$$

- b) *Si (X, g) es una variedad Hermitiana compacta y conexa. Entonces el emparejamiento*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g) \times \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{n-q, n-p}(X, g) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \int_X \alpha \wedge \beta \end{aligned}$$

De hecho si $0 \neq \alpha \in \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g)$ entonces $\star \bar{\alpha} \in \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{n-p, n-q}(X, g)$ y se tiene que

$$\int_X \alpha \wedge \star \bar{\alpha} = \|\alpha\|^2 > 0.$$

Esto nos dá la dualidad de Serre para formas armónicas

$$\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g) \cong \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{n-p, n-q}(X, g)^*.$$

Aquí, este resultado es una consecuencia de la introducción a teoría de Hodge que hemos realizado en esta sección (el desarrollo original del resultado se puede ver en [Ser55]).

- c) *Si (X, g) es una variedad de Kähler de dimensión n , entonces, para todo $k \leq n$ y $0 \leq p \leq k$ el*

operador de Lefschetz (definido en 2.5.1) define un isomorfismo

$$L^{n-k} : \mathcal{H}^{p,k-p}(X, g) \cong \mathcal{H}^{n+p-k, n-p}(X, g)$$

En general, sería muy conveniente tener resultados de isomorfía y descomposiciones similares para los grupos de cohomología. Para esto, es necesario presentar el teorema de descomposición de Hodge y algunas de sus consecuencias.

Teorema 2.5.1 (Teorema de descomposición de Hodge).

Sea (X, g) una variedad Hermitiana compacta. Entonces existen las dos siguientes descomposiciones ortogonales

$$\mathcal{A}^{p,q}(X) = \partial \mathcal{A}^{p-1,q}(X) \oplus \mathcal{H}_{\partial}^{p,q}(X, g) \oplus \partial^* \mathcal{A}^{p+1,q}(X)$$

y

$$\mathcal{A}^{p,q}(X) = \bar{\partial} \mathcal{A}^{p-1,q}(X) \oplus \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g) \oplus \bar{\partial}^* \mathcal{A}^{p+1,q}(X)$$

Donde $\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g)$ es un espacio vectorial de dimensión finita, y cuando (X, g) es de Kähler, entonces

$$\mathcal{H}_{\partial}^{p,q}(X, g) = \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g).$$

Para este teorema, la demostración de la ortogonalidad viene de la aplicación del producto Hermitiano definido en 2.5.9 y la última afirmación es consecuencia de la tercera identidad de Kähler (Prop. 2.5.1). El punto crítico de la prueba es la existencia de tal descomposición, para ver los detalles de esto ver [Huy05, Pag. 128-130].

Veamos ahora, como esta descomposición nos permite relacionar los espacios de formas armónicas con los grupos de Cohomología (en particular, de Dolbeault).

Corolario 2.5.1 (Isomorfismo de Hodge).

Sea (X, g) una variedad Hermitiana compacta. Entonces, la proyección

$$\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g) \longrightarrow H^{p,q}(X) \tag{2.5.10}$$

$$\alpha \longmapsto [\alpha] \in H^{p,q}(X)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Como toda forma $\alpha \in \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g)$ es $\bar{\partial}$ cerrada, proyectarla a su clase de Cohomología de Dolbeault $[\alpha] \in H^{p,q}(X)$ define canónicamente una aplicación $\mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g) \longrightarrow H^{p,q}(X)$.

Más aún, como $\bar{\partial} \bar{\partial}^* \beta = 0$ si y solo si $\bar{\partial}^* \beta = 0$, podemos ver que

$$\ker(\bar{\partial} : \mathcal{A}^{p,q}(X) \rightarrow \mathcal{A}^{p,q+1}(X)) = \bar{\partial}(\mathcal{A}^{p,q-1}(X) \oplus \mathcal{H}_{\bar{\partial}}^{p,q}(X, g)).$$

De hecho, $\bar{\partial} \bar{\partial}^* \beta = 0$ nos dice que $0 = (\bar{\partial} \bar{\partial}^* \beta, \beta) = \|\bar{\partial} \beta\|^2$. De lo anterior concluimos que 2.5.10 define

un isomorfismo. \square

En consideración del teorema de descomposición de Hodge, podemos ver que el espacio de (p, q) -formas armónicas aparece en ambas descomposiciones. El siguiente resultado ejemplifica algunas consecuencias directas de este hecho.

Corolario 2.5.2 ($\partial\bar{\partial}$ -lema).

Sea (X, g) una variedad de Kähler compacta. Si una (p, q) -forma α es d-cerrada, es decir, $d\alpha = 0$. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes

- (1) $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{p+q}(X)$ es d-exacta, es decir, $\alpha = d\beta$ para algún $\beta \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{p+q-1}(X)$.
- (2) $\alpha \in \mathcal{A}^{p+q}(X)$ es ∂ -exacta, es decir, $\alpha = \partial\beta$ para algún $\beta \in \mathcal{A}^{p-1,q}(X)$
- (3) $\alpha \in \mathcal{A}^{p+q}(X)$ es $\bar{\partial}$ -exacta, es decir, $\alpha = \bar{\partial}\beta$ para algún $\beta \in \mathcal{A}^{p,q-1}(X)$
- (4) $\alpha \in \mathcal{A}^{p+q}(X)$ es $\partial\bar{\partial}$ -exacta, es decir, $\alpha = \partial\bar{\partial}\beta$ para algún $\beta \in \mathcal{A}^{p-1,q-1}(X)$
- (5) $\alpha \in \mathcal{A}^{p+q}(X)$ es ortogonal a $\mathcal{H}^{p,q}(X, g)$ para g una métrica de Kähler cualquiera sobre X .

Demostración. Notemos que en la condición (5) no necesitamos especificar respecto a que operador es armónica la forma α pues estamos en el caso Kähler.

Por otro lado, utilizando la descomposición de Hodge podemos ver que (5) es consecuencia de todas las otras condiciones. Más aún, tenemos que (4) \Rightarrow (1), (2) y (3). De esta manera, será suficiente demostrar (5) \Rightarrow (4).

Si $\alpha \in \mathcal{A}^{p+q}(X)$ es d-cerrada (y por lo tanto ∂ -cerrada) y ortogonal al espacio de formas armónicas $\mathcal{H}^{p,q}(X, g)$, entonces la descomposición de Hodge respecto a ∂ nos dice que existe un $\gamma \in \mathcal{A}^{p-1,q}(X)$ tal que $\alpha = \partial\gamma$. Ahora aplicamos la descomposición de Hodge respecto a $\bar{\partial}$ sobre γ . Esto nos dice que

$$\gamma = \bar{\partial}\beta + \bar{\partial}^*\beta' + \beta''$$

Donde β'' es una forma armónica, $\beta \in \mathcal{A}^{p-1,q}(X)$ y $\beta' \in \mathcal{A}^{p+1,q}(X)$. De esta forma, sigue que

$$\alpha = \partial\bar{\partial}\beta + \bar{\partial}^*\beta'.$$

Utilizando que $\partial\bar{\partial}^* = -\bar{\partial}^*\partial$ y que $\bar{\partial}\alpha = 0$ concluimos que $\bar{\partial}\bar{\partial}^*\partial\beta' = 0$.

Finalmente, como

$$(\bar{\partial}\bar{\partial}^*\partial\beta', \partial\beta') = \|\bar{\partial}^*\partial\beta'\|^2$$

de lo que concluimos que

$$\partial\bar{\partial}^*\beta' = -\bar{\partial}^*\partial\beta' = 0.$$

Por lo tanto, $\alpha = \partial\bar{\partial}\beta$. \square

Se puede establecer una version local del $\partial\bar{\partial}$ -lema (con X un polidisco). En este caso la condición de Kähler no es necesaria. Esto muestra que una importante consecuencia de la condición de Kähler es que esta permite extender resultados de forma global.

Para concluir este capítulo, presentamos una última consecuencia del teorema de descomposición de Hodge, que establece la existencia de una descomposición con independencia de la estructura de Kähler.

Corolario 2.5.3.

Sea (X, g) una variedad de Kähler compacta. Entonces existe una descomposición en bigrado para los grupos de cohomología

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X). \quad (2.5.11)$$

Esta descomposición no depende de la estructura de Kähler escogida.

Más aún, con respecto a la conjugación compleja sobre $H^\bullet(X, \mathbb{C}) = H^\bullet(X, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$, se tiene que

$$\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$$

y por dualidad de Serre obtenemos que

$$H^{p,q}(X) \cong H^{n-p, n-q}(X)^*.$$

Demostración. La descomposición en cuestión es inducida por

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \mathcal{H}^k(X, g)_{\mathbb{C}} = \bigoplus_{p+q=k} \mathcal{H}^{p,q}(X, g) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X),$$

que a priori podría depender de la métrica de Kähler g . Sea g' otra métrica de Kähler. Los espacios $\mathcal{H}^{p,q}(X, g)$ y $\mathcal{H}^{p,q}(X, g')$ se identifican naturalmente por

$$\mathcal{H}^{p,q}(X, g) \cong H^{p,q}(X) \cong \mathcal{H}^{p,q}(X, g').$$

Sea $\alpha \in \mathcal{H}^{p,q}(X, g)$ y denotamos al elemento correspondiente en $\mathcal{H}^{p,q}(X, g')$ por α' . Probaremos que las clases de cohomología asociadas $[\alpha], [\alpha'] \in H^k(X, \mathbb{C})$ coinciden.

Dado que α y α' inducen el mismo elemento en $H^{p,q}(X)$, estos deben diferir por algún elemento $\bar{\partial}\gamma$, es decir,

$$\alpha' = \alpha + \bar{\partial}\gamma.$$

Pero $d\bar{\partial}\gamma = d(\alpha' - \alpha) = 0$. Más aún, $\bar{\partial}\gamma$ es ortogonal a $\mathcal{H}^k(X, g)_{\mathbb{C}}$. Por la descomposición de Hodge con respecto al diferencial exterior d esto nos da que

$$\bar{\partial}\gamma \in d(\mathcal{A}_{\mathbb{C}}^{k-1}(X))$$

y por lo tanto, $[\alpha] = [\alpha'] \in H^k(X, \mathbb{C})$. Los puntos **(a)** y **(c)** de la observación 2.5.4 nos dan la última afirmación respecto a la conjugación en cohomología y la dualidad de Serre. \square

Como ya hemos mencionado, la descomposición en bigrado

$$H^k(X, \mathbb{C}) = \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(X)$$

y de la misma forma, la conjugación compleja

$$\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$$

son aspectos topológicos y/o diferenciales de X , de hecho, estos no dependen de la elección de la estructura de Kähler. Se puede detallar que los operadores $*$ de Hodge y los adjuntos que define por el operador de Lefschetz L y Λ dependen únicamente de la clase de Kähler $[\omega] \in H^{1,1}(X)$, esto se detalla en [Huy05, §3.3] y [dC07, Cap.7]

SOLUCIONES DE YAU Y AUBIN A LA CONJETURA DE CALABI

Si bien algunos de los puntos tratados en los primeros dos capítulos de esta memoria podrían parecer desconexos, el estudio de ecuaciones en derivadas parciales en variedades que da lugar a los formalismos de la teoría de Hodge que presentamos en la sección 2.5 es precisamente la herramienta que se ha utilizado primordialmente para estudiar la existencia de métricas de Kähler-Einstein. Recordemos que una métrica Riemanniana es también de Einstein si su tensor de Ricci es proporcional a la métrica en cuestión, y que si en adición, la métrica es de Kähler, está se denominará de Kähler-Einstein, en otras palabras, buscamos métricas de Kähler $\omega \in H^{1,1}(X)$ satisfaciendo la ecuación

$$\text{Ric}(\omega) = \lambda\omega \tag{KE}$$

para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. En la sección 1.9 discutimos que reescalando podemos asumir que $\lambda \in \{-1, 0, 1\}$ de modo que podemos reducirnos a estudiar soluciones para las igualdades de $(1, 1)$ -formas

$$\text{Ric}(\omega) = \omega, \text{Ric}(\omega) = 0 \quad \text{o} \quad \text{Ric}(\omega) = -\omega.$$

Como sabemos mediante la curvatura de Ricci, podemos definir la primera clase de Chern

$$c_1(X) = \frac{1}{2\pi}[\text{Ric}(\omega)] \in H^2(X, \mathbb{Z})$$

que es independiente de la métrica ω . De esta manera, para estudiar la existencia de métricas de Kähler-Einstein sobre X , la clase $c_1(X)$ debe ser positiva, nula o negativa como clase de cohomología. En este capítulo tenemos como objetivo estudiar el caso de una variedad de Kähler compacta X

con $c_1(X) < 0$. Para este caso, recordemos el teorema de Aubin [Aub78] y [Yau78] que asegura la existencia de soluciones.

Teorema 3.0.1 (Aubin-Calabi-Yau).

Sea X una variedad de Kähler compacta con $c_1(X) < 0$. Entonces existe una única métrica de Kähler $\omega \in -2\pi c_1(X)$ tal que

$$\text{Ric}(\omega) = \omega.$$

Luego de establecer este resultado utilizando las estimaciones de Schauder introducidas en la sección 2.4 y el método de continuidad nos enfocaremos en estudiar el caso $c_1(X) = 0$, para el cual el teorema de Yau [Yau78] implica que cada clase de Kähler contiene una métrica de Kähler-Einstein, que debe ser Ricci plana. Finalmente, y para concluir este capítulo se discutirá la existencia de soluciones para el caso $c_1(X) > 0$, para el cual se evidenciarán las obstrucciones algebro-geométricas para la aplicación del método que proponemos así como para la misma existencia de soluciones.

3.1. Teorema de Yau, existencia de Métricas de Kähler Einstein para $c_1(X) < 0$.

Como mencionamos anteriormente en esta primera sección trataremos el problema de existencia de métricas de Kähler-Einstein en variedades de Kähler de curvatura negativa. Para esto, dividiremos el trabajo en las siguientes etapas, en primer lugar deduciremos la ecuación de tipo Monge-Ampere cuya solubilidad nos permitirá establecer la existencia de métricas y posteriormente, aplicaremos el método de continuidad utilizando estimaciones a priori dadas por las aproximaciones de Schauder y una aplicación adecuada del teorema de la función implícita concluiremos la existencia de una métrica Kählerianas que satisface la condición de Einstein.

Deducción de la ecuación Monge-Ampere para métricas de Kähler-Einstein

Comenzamos reescribiendo la ecuación KE en términos de potenciales de Kähler. Consideremos ω_0 una métrica de Kähler cualquiera en la clase $-2\pi c_1(X)$, es decir, $[\omega_0] = -2\pi c_1(X) \in H^2(X, \mathbb{R})$. Aplicando el $\partial\bar{\partial}$ -lema obtenemos que existe una función suave F sobre X tal que

$$\text{Ric}(\omega_0) = -\omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}F \quad (3.1.1)$$

Así, si tomamos $\omega = \omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi$ como otra métrica de Kähler en la clase $[\omega_0]$. Entonces,

$$\text{Ric}(\omega) - \text{Ric}(\omega_0) = -\mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \frac{\omega^n}{\omega_0^n}. \quad (3.1.2)$$

De esta forma, para asegurar que $\text{Ric}(\omega) = -\omega$ podemos obtener una condición suficiente como sigue

$$\begin{aligned}\text{Ric}(\omega) - \text{Ric}(\omega_0) &= -\mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \frac{\omega^n}{\omega_0^n} \\ \Leftrightarrow -\omega + \omega_0 - \mathbf{i}\partial\bar{\partial}F &= -\mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \frac{\omega^n}{\omega_0^n}. \\ \Leftrightarrow -\mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi &= \mathbf{i}\partial\bar{\partial}F - \mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \frac{\omega^n}{\omega_0^n}.\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

Notemos que este es el caso si podemos encontrar soluciones para la ecuación de tipo Monge-Ampere compleja

$$\det(\omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi) = e^{F+\varphi} \omega_0^n \tag{MA}$$

Esto pues, podemos derivar 3.1.3 desde MA como sigue

$$\begin{aligned}(\omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n &= e^{F+\varphi} \omega_0^n \Rightarrow \omega^n = e^{F+\varphi} \omega_0^n \\ &\Rightarrow e^{F+\varphi} = \frac{\omega^n}{\omega_0^n} \\ &\Rightarrow F + \varphi = \log \frac{\omega^n}{\omega_0^n} \\ &\Rightarrow -\mathbf{i}\partial\bar{\partial}(F + \varphi) = \mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \frac{\omega^n}{\omega_0^n}\end{aligned}$$

Con esta formulación ya podemos probar la unicidad de soluciones afirmada por el teorema 3.0.1, esto mediante el siguiente lema.

Lema 3.1.1 (Calabi).

Sobre una variedad de Kähler compacta X existe a lo mas una métrica $\omega \in -2\pi c_1(X)$ tal que $\text{Ric}(\omega) = -\omega$.

Demostración. Supongamos que $\text{Ric}(\omega_0) = -\omega_0$, de forma que en 3.1.1 podemos tomar $F = 0$. Si $\omega = \omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi$ también satisface que $\text{Ric}(\omega) = -\omega$, entonces por MA obtenemos que

$$(\omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^\varphi \omega_0^n.$$

Como φ es continua sobre la variedad compacta X tenemos que alcanza su mínimo, digamos en $p \in X$. Escogemos las coordenadas locales z_1, \dots, z_n en torno a p , de esta forma

$$\det \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi \right) = e^\varphi \det \left(g_{j\bar{k}} \right),$$

pero en p la matriz Hessiana $\partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi$ es semidefinida positiva (condición necesaria de segundo orden

para un extremo local), por lo tanto, para $x \in \mathbb{C}^n$ tenemos que

$$\begin{aligned} x^\top \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi \right) x &\geq x^\top g_{j\bar{k}} x \\ -x^\top \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi \right) x &\leq -x^\top g_{j\bar{k}} x \end{aligned}$$

Utilizando la monotonía de la función exponencial y de la integración se tiene que

$$\begin{aligned} \exp \left(-x^\top \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi \right) x \right) &\leq \exp \left(-x^\top g_{j\bar{k}} x \right) \\ \int_X \exp \left(-x^\top \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi \right) x \right) dx &\leq \int_X \exp \left(-x^\top g_{j\bar{k}} x \right) dx \end{aligned}$$

Finalmente, notando que esta corresponde a una integral Gaussiana podemos encontrar que

$$\frac{1}{\sqrt{\det \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi \right)}} \leq \frac{1}{\sqrt{\det(g_{j\bar{k}})}}$$

De lo que concluimos que

$$\det \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi \right) (p) \geq \det(g_{j\bar{k}})(p)$$

y en consecuencia $\varphi(p) \geq 0$, pero como asumimos que $\varphi(p)$ es mínimo, se tiene que $\varphi(x) \geq 0$ para todo x . De la misma forma, podemos ver que si φ alcanza su máximo en tal punto $p \in X$ entonces

$$\det \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi \right) (p) \leq \det(g_{j\bar{k}})(p)$$

de lo que podemos concluir que tal máximo $\varphi(p)$ es no positivo, es decir, $\varphi(p) \leq 0$, pero como antes, como este es un máximo en realidad se tiene que $\varphi(x) \leq 0$ para todo x . De esta forma vemos que $\varphi = 0$ y por lo tanto $\omega = \omega_0$. \square

Para resolver la ecuación de Monge-Ampere utilizaremos el método de continuidad introducido en 2.4.6. Para esto introducimos una familia de ecuaciones dependiendo de un parámetro $t \in [0, 1]$, que para $t = 1$ es la ecuación MA y para $t = 0$ corresponde a una ecuación mas simple. Utilizaremos la familia dada por

$$\begin{cases} (\omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n &= e^{tF + \varphi} \omega_0^n \\ \omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi &\text{es una forma de Kähler} \end{cases} \quad (\text{MA}_t)$$

para $t \in [0, 1]$. Así, para probar el teorema 3.0.1 debemos verificar las siguientes 3 condiciones respecto al conjunto

$$S = \{s \in [0, 1] \mid \text{La ecuacion } \text{MA}_t \text{ tiene solucion en } t = s\}$$

- (1) $S \neq \emptyset$, que en nuestro caso se tiene pues podemos resolver MA_t para $t = 0$.
- (2) Si MA_t tiene solución para algún $t < 1$, entonces, para un $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño también podemos resolver la ecuación para $t + \varepsilon$. En espacios de Banach utilizando el teorema de la función implícita (cuya formulación adecuada presentaremos mas adelante), esta condición se traduce en que S sea un conjunto abierto.
- (3) Si para algún $s \in (0, 1]$ podemos resolver MA_t para todo $t < s$, entonces también podemos resolver la ecuación para $t = s$.

Este último punto resulta ser el corazón del problema, pues se traduce en que S es un conjunto cerrado, que pasará por resultados de compacidad y/o convergencia de las estimaciones de Hölder de las soluciones, como adelantábamos en los comentarios hechos sobre el método de continuidad.

Probaremos que se tiene el punto (2), para lo cual recordaremos el enunciado del teorema de la función implícita en espacios de Banach.

Teorema 3.1.1 (Teorema de la función implícita).

Sean X un espacio vectorial normado e Y, Z dos espacios de Banach. Sea Ω un conjunto abierto en $X \times Y$ y sean $(x, y) \in \Omega$ y la aplicación $F : \Omega \rightarrow Z$ tal que

- 1) $F \in (\Omega, X)$.
- 2) Existe la derivada $\partial_y F$ sobre Ω , y se tiene que $\partial_y F \in \mathcal{C}(\Omega, Z)$.
- 3) $F(x_0, y_0) = 0 \in Z$ y $\partial_y F(x_0, y_0)$ es un operador lineal invertible.

Entonces existe $U(x_0)$ vecindad abierta de x_0 y $V(y_0)$ vecindad abierta de y_0 , tales que $U(x_0) \times V(y_0) \subset \Omega$ y existe una única función continua $\varphi : U(x_0) \rightarrow V(y_0)$ tal que

- 1) $\varphi(x_0) = y_0$.
- 2) $\forall x \in U(x_0), \quad y = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad \forall (x, y) \in U(x_0) \times V(y_0), \quad F(x, y) = 0$

Proposición 3.1.1. Supongamos que la ecuación MA_t tiene una solución suave para algún $t < 1$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño también podemos encontrar una solución de la ecuación para $t + \varepsilon$

Demostración. Definamos el operador

$$F : \mathcal{C}^{3,\alpha}(X) \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}^{1,\alpha}(X)$$

$$(\varphi, t) \mapsto \log \frac{(\omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n}{\omega_0^n} - \varphi - tF$$

Por hipótesis tenemos una solución suave φ_t tal que $F(\varphi_t, t) = 0$ y $\omega_t = \omega_0 + i\partial\bar{\partial}\varphi_t$ es una forma de Kähler. Para aplicar el teorema de la función implícita, calcularemos la derivada de F en la dirección ψ , en el punto (φ_t, t)

$$dF((\varphi_t, t))[(\psi, 0)] = \frac{n i \partial \bar{\partial} \psi \wedge \omega_t^{n-1}}{\omega_t^n} - \psi = \Delta_t \psi - \psi,$$

donde Δ_t es el operador Laplaciano respecto a ω_t . Si escribimos

$$L(\psi) = \Delta_t \psi - \psi.$$

Notemos que si $\Delta_t \psi - \psi = 0$ entonces calculamos en función de ω_t lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_M |\psi|^2 &= \int_M \psi \Delta_t \psi \\ &= - \int_M |\nabla \psi|_t^2 \leq 0 \end{aligned}$$

De lo que concluimos que $\Delta_t \psi - \psi = 0$ implica que $\int_M |\psi|^2 dV_t = 0$ y por lo tanto $\psi = 0$, es decir $\ker(L) = \{0\}$. Si consideramos $u \in L_{\text{loc}}^1(M)$, utilizamos las identidades de Green para ver que

$$\begin{aligned} \int_M (\Delta_t \psi - \psi) u &= \int_M (u \Delta_t \psi - u \psi) \\ &= \int_M (\nabla_t u \nabla_t \psi - \psi u) \\ &= \int_M ((\Delta_t u) \psi - \psi u) \end{aligned}$$

De lo que concluimos que $L^* = L$ y por lo tanto $\ker(L^*) = \{0\}$. Se puede probar (ver [Szé14, Teo. 2.13]) para $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha \in (0, 1)$ el isomorfismo

$$L : (\ker L)^\perp \cap \mathcal{C}^{k+2, \alpha}(X) \rightarrow (\ker(L^*))^\perp \cap \mathcal{C}^{k, \alpha}(X)$$

Así, $\ker(L^*) = \{0\}$ implica que

$$L : \mathcal{C}^{3, \alpha}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{1, \alpha}(X).$$

El teorema de la función implícita para espacios de Banach implica que para s suficientemente cercano a t existen funciones $\varphi_s \in \mathcal{C}^{3, \alpha}(X)$ tal que $F(\varphi_s, s) = 0$. De igual manera, para s suficientemente cercano a t las funciones $\varphi_s, \varphi_t \in \mathcal{C}^{3, \alpha}(X)$ también se encuentran cerca de tal manera que $\omega_0 + i\partial\bar{\partial}\varphi_s$ es una forma positiva.

Antes de entrar de lleno en la regularidad de φ_s consideremos lo siguiente,

Observación 3.1.1. *Escribimos la igualdad $F(\varphi_s, s) = 0$ en coordenadas locales como sigue*

$$\log \det \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s \right) - \log \det \left(g_{j\bar{k}} \right) - \varphi_s - sF = 0$$

si ahora derivamos esta igualdad respecto a una variable z^ℓ obtenemos que

$$\partial_\ell \left(\log \det \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s \right) \right) - \partial_\ell \left(\log \det \left(g_{j\bar{k}} \right) \right) - \partial_\ell \varphi_s - s \partial_\ell F = 0$$

es decir

$$\det \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s \right)^{-1} \cdot \partial_\ell \left(\det \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s \right) \right) - \partial_\ell \left(\log \det \left(g_{j\bar{k}} \right) \right) - \partial_\ell \varphi_s - s \partial_\ell F = 0.$$

Si $(g_s)^{j\bar{k}}$ corresponde a la métrica inversa a $(g_s)_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s$, podemos utilizar la igualdad de Jacobi¹ para ver que la igualdad anterior se reduce a

$$\begin{aligned} \det \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s \right)^{-1} \left[\det \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s \right) \cdot (g_s)^{j\bar{k}} \partial_\ell \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s \right) \right. \\ \left. - \partial_\ell \left(\log \det \left(g_{j\bar{k}} \right) \right) - \partial_\ell \varphi_s - s \partial_\ell F \right] = 0. \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$(g_s)^{j\bar{k}} \left(\partial_\ell g_{j\bar{k}} + \partial_\ell \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s \right) - \partial_\ell \log \det(g_{j\bar{k}}) - \partial_\ell \varphi_s - s \partial_\ell F = 0$$

Veamos ahora que φ_s es de hecho suave. Por la aplicación anterior del teorema de la función implícita, sabemos que

$$\log \frac{(\omega_0 + \mathbf{i} \partial \bar{\partial} \varphi_s)^n}{\omega_0^n} - \varphi_s - sF = 0.$$

En coordenadas locales, es decir con componentes de ω_0 de la forma $g_{j\bar{k}}$ podemos escribir la ecuación anterior como

$$\log \det \left(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s \right) - \log \det \left(g_{j\bar{k}} \right) - \varphi_s - sF = 0$$

Como $\varphi_s \in \mathcal{C}^{3,\alpha}(X)$, podemos diferenciar esta igualdad respecto a $\partial_\ell := \frac{\partial}{\partial z^\ell}$, además si consideramos la métrica (asociada a ω_t) $(g_s)_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_s$ y su inversa $(g_s)^{j\bar{k}}$ obtenemos por la observación anterior que

$$(g_s)^{j\bar{k}} \partial_j \partial_{\bar{k}} (\partial_\ell \varphi_s) - \partial_\ell = s \partial_\ell F + \partial_\ell \log \det(g_{j\bar{k}}) - (g_s)^{j\bar{k}} \partial_\ell g_{j\bar{k}}.$$

¹Esta fórmula se utiliza para expresar derivadas del determinante de una matriz A en función de su adjunta y las derivadas de A , esto es

$$\begin{aligned} \partial_j \det(A(z)) &= \text{tr}(\text{adj}(A(z)) \cdot \partial_j A(z)) \\ &= \det(A(z)) \cdot \text{tr}(A(z)^{-1} \cdot \partial_j A(z)) \end{aligned}$$

Si consideramos el operador lineal elíptico definido por la igualdad anterior, es decir, un operador $E(\partial_{\bar{\ell}}\varphi_s) = h$ que tiene por argumento $\psi = \partial_{\bar{\ell}}\varphi_s$, se tiene que

$$E := (g_s)^{j\bar{k}}\partial_j\partial_{\bar{k}} - \text{Id}.$$

Como $\varphi_s \in \mathcal{C}^{3,\alpha}(X)$, los coeficientes de E son elementos de $\mathcal{C}^{1,\alpha}$. Luego $\partial_{\bar{\ell}} \in \mathcal{C}^{3,\alpha}$, y por lo tanto, $\varphi_s \in \mathcal{C}^{4,\alpha}$. Si repetimos este proceso podemos concluir que $\varphi_s \in \mathcal{C}^{5,\alpha}$, e inductivamente encontramos que en realidad φ_s es suave, por lo que concluimos el resultado del Lema. \square

La última parte de la demostración anterior consiste en un proceso denominado “*Bootstrapping*”. Para poder realizar el paso al límite que necesitamos para ver que se verifica el punto **(3)** del método de continuidad, y que nos permite asegurar que la condición de Kähler se mantiene para ω_t , esto corresponde a la siguiente proposición, y que lograremos probar a través de los resultados de las siguientes dos secciones.

Teorema 3.1.2.

Existe una constante $C > 0$ que depende solamente de X, ω_0 y F tal que φ_t satisface [MA_t](#) para algún $t \in [0, 1]$, tal que

$$(g_{j\bar{k}} + \partial_j\partial_{\bar{k}}\varphi_t) > C^{-1}(g_{j\bar{k}}) > 0$$

Donde los términos $g_{j\bar{k}}$ corresponden a las componentes de ω_0 en coordenadas locales y la desigualdad de matrices anterior significa que la diferencia es definida positiva. Además, se verifica que

$$\|\varphi_t\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}(X)} \leq C,$$

para la norma de Hölder respecto a la métrica ω_0 .

Antes de empezar con la prueba de este resultado, veamos que, en efecto este implica la condición **(3)** del método de continuidad.

Proposición 3.1.2.

Asumiendo que se tienen las condiciones del teorema [3.1.2](#). Sea $s \in (0, 1]$, si se puede resolver [MA_t](#) para todo $t < s$, entonces, también se puede resolver para $t = s$.

Demostración. Sea una sucesión de números $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tal que $t_i < s$ y tal que $\lim t_i = s$. Esto da lugar a una sucesión de funciones φ_i que satisfacen

$$(\omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi_i)^n = e^{t_i F + \varphi_i} \omega_0^n. \quad (3.1.4)$$

El teorema [3.1.2](#) nos dice que todas las métricas de la forma

$$\omega_{t_i} = \omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi_i$$

son acotadas inferiormente por una métrica definida positiva, de modo que el límite de la métrica ω_{t_i} , es decir $\omega_0 + i\partial\bar{\partial}\varphi$ es también definida positiva. Notemos que a priori, $\varphi \in \mathcal{C}^{3,\alpha}$, de manera que aplicando *bootstrapping* como en el 3.1.1 para concluir que φ es en realidad suave. \square

Como ya comentamos, en las siguientes secciones desarrollaremos estimaciones de operadores diferenciales de distinto orden utilizando las estimaciones de Schauder.

Estimaciones continuas y de segundo orden.

Necesitamos probar el teorema 3.1.2. Para esto, simplificaremos la notación de la ecuación en cuestión escribiendo

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{F+\varphi}\omega^n \quad (3.1.5)$$

y escribimos $g_{j\bar{k}}$ para las componentes de la métrica ω en coordenadas locales. Así, más adelante aplicaremos los resultados siguientes para tF en vez de F .

Comenzaremos presentando estimaciones de tipo \mathcal{C}^0 mediante el siguiente lema.

Proposición 3.1.3 (Estimaciones \mathcal{C}^0).

Si φ satisface la ecuación 3.1.5, entonces

$$\sup_X |\varphi| \leq \sup_X |F|.$$

Demostración. Supongamos que φ alcanza su máximo en $p \in X$. Entonces, en coordenadas locales, la matriz $\partial_j\bar{\partial}_{\bar{k}}\varphi$ es semidefinida negativa en p , entonces

$$\det(g_{j\bar{k}} + \partial_j\bar{\partial}_{\bar{k}}\varphi)(p) \leq \det(g_{j\bar{k}})(p)$$

Utilizando la ecuación 3.1.5 obtenemos que

$$\frac{\det(g_{j\bar{k}} + \partial_j\bar{\partial}_{\bar{k}}\varphi)(p)}{\det(g_{j\bar{k}})(p)} = e^{F(p)+\varphi(p)} \leq 1$$

Y por lo tanto, obtenemos que $F(p) + \varphi(p) \leq 0$, o equivalentemente, $\varphi(p) \leq -F(p)$. Como φ alcanza su máximo en p , esto nos dice que

$$\varphi(p) = \sup_{x \in X} \varphi(x) \leq -F(p) \leq \sup_{x \in X} F(x).$$

De forma análoga, si suponemos que $\varphi(p)$ es minimal, tenemos que $\partial_j\bar{\partial}_{\bar{k}}\varphi(p)$ es semidefinida negativa, entonces

$$\det(g_{j\bar{k}} + \partial_j\bar{\partial}_{\bar{k}}\varphi)(p) \geq \det(g_{j\bar{k}})(p),$$

y por lo tanto como en el caso anterior, concluimos que

$$e^{F(p)+\varphi(p)} \geq 1$$

y consecuentemente, $\varphi(p) \geq -F(p)$. Podemos entonces escribir

$$\varphi(p) = \inf_{x \in X} \varphi(x) \geq -F(p) \geq \inf_{x \in X} \{-F(x)\}$$

Hemos obtenido que para todo $x' \in X$

$$-\sup_{x \in X} F(x) \leq \inf_{x \in X} \varphi(x) \leq \varphi(x') \leq \sup_{x \in X} \varphi(x) \leq \sup_{x \in X} F(x)$$

de lo que concluimos el resultado. \square

Para obtener estimaciones de las segundas derivadas de φ , como en la sección 2.4, bastará con encontrar estimaciones del Laplaciano $\Delta\varphi$ para establecer estimaciones de los términos fuera de la diagonal de la matriz Hessiana de φ . Si escribimos en coordenadas locales

$$g'_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi$$

y utilizamos la convención de Einstein para la suma, podemos escribir para $g^{j\bar{k}} := g_{j\bar{k}}^{-1}$

$$\begin{aligned} g^{j\bar{k}} g'_{j\bar{k}} &= g^{j\bar{k}} g_{j\bar{k}} + g^{j\bar{k}} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi \\ &= \text{tr}(\text{Id}_n) + \text{tr}(\text{Hess}(\varphi)) \\ &= n + \Delta\varphi \end{aligned}$$

Notación 3.1.1. En adelante, escribiremos según las siguientes definiciones

$$\text{tr}_g g' := g^{j\bar{k}} g'_{j\bar{k}}, \quad (3.1.6)$$

$$\text{tr}_{g'} g := g'^{j\bar{k}} g_{j\bar{k}}. \quad (3.1.7)$$

Escribimos además, Δ' para el Laplaciano respecto a la métrica g' .

Con esta notación en mente, el paso clave para establecer estimaciones de segundo orden es el siguiente resultado.

Proposición 3.1.4.

Existe una constante B que solo depende de M y g tal que

$$\Delta' \log \text{tr}_g g' \geq -B \text{tr}_{g'} g - \frac{g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}}}{\text{tr}_g g'}$$

donde $R'_{j\bar{k}}$ es la curvatura de Ricci asociada a la métrica g' .

Demostración. Calcularemos en coordenadas normales para la métrica g en torno a un punto $p \in X$. además podemos asumir que g' es diagonal en p dado que toda matriz Hermitiana puede ser diagonalizada por una transformación unitaria. En particular, en p tendremos que

$$\mathrm{tr}_g g' = \sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}}, \quad \mathrm{tr}_{g'} g = \sum_{j=1}^n g'^{j\bar{j}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{g'_{j\bar{j}}}$$

De esta forma, en el punto p podemos calcular

$$\begin{aligned} \Delta' \mathrm{tr}_g g' &= g'^{p\bar{q}} \partial_p \partial_{\bar{q}} \left(g^{j\bar{k}} g'_{j\bar{k}} \right) \\ &= g'^{p\bar{q}} \left(\partial_p \partial_{\bar{q}} g^{j\bar{k}} \right) g'_{j\bar{k}} + g'^{p\bar{q}} g^{j\bar{k}} \left(\partial_p \partial_{\bar{q}} g'_{j\bar{k}} \right) \\ &= g'^{p\bar{q}} \left(\partial_p \partial_{\bar{q}} g^{j\bar{k}} \right) g'_{j\bar{k}} - g'^{p\bar{q}} g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}p\bar{q}} + g'^{p\bar{q}} g^{j\bar{k}} g'^{a\bar{b}} \left(\partial_j g'_{p\bar{b}} \right) \left(\partial_{\bar{k}} g'_{a\bar{q}} \right). \end{aligned}$$

Usando que g es diagonal podemos ver que

$$\begin{aligned} g'^{p\bar{q}} \left(\partial_p \partial_{\bar{q}} \right) g'_{j\bar{k}} &= \sum_{p,j=1}^n g'^{p\bar{p}} g'_{j\bar{j}} \partial_p \partial_{\bar{p}} g^{j\bar{j}} \\ &\geq -B \sum_{p,j=1}^n g'^{p\bar{p}} g'_{j\bar{j}} \\ &= -B(\mathrm{tr}_{g'} g)(\mathrm{tr}_g g') \end{aligned}$$

donde B es el mayor término de la forma $-\partial_p \partial_{\bar{p}} g^{j\bar{j}}$. Y por otro lado, se verifica que

$$g'^{p\bar{q}} R'_{j\bar{k}p\bar{q}} = R'_{j\bar{k}}$$

Entonces,

$$\Delta' \mathrm{tr}_g g' \geq -B(\mathrm{tr}_{g'} g)(\mathrm{tr}_g g') - g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}} + \sum_{p,j,a=1}^n g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} \left| \partial_j g'_{p\bar{a}} \right|^2. \quad (3.1.8)$$

Notemos que

$$\log(\mathrm{tr}_g g') = \log \left(\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \right)$$

Luego, calculamos los términos del Laplaciano como

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{j}} \log (\log (\operatorname{tr}_g g')) &= \partial_{\bar{j}} \left(\log \left(\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \right) \right) \\
&= \frac{\partial_{\bar{j}} \left(\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \right)}{\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}}} \\
\partial_j \partial_{\bar{j}} \log (\log (\operatorname{tr}_g g')) &= \partial_j \left(\frac{\partial_{\bar{j}} \left(\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \right)}{\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}}} \right) \\
&= \frac{\partial_j \partial_{\bar{j}} \left(\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \right) \left(\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \right) - \left(\partial_j \left(\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \right) \right) \left(\partial_{\bar{j}} \left(\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \right) \right)}{\left(\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \right)^2} \\
&= \frac{\partial_j \partial_{\bar{j}} \left(\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \right)}{\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}}} - \frac{\left(\partial_j \left(\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \right) \right) \left(\partial_{\bar{j}} \left(\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \right) \right)}{\left(\sum_{i=1}^n g'_{i\bar{i}} \right)^2}
\end{aligned}$$

Sumando sobre el índice j obtenemos que

$$\begin{aligned}
\Delta' \log \operatorname{tr}_g g' &= \frac{\Delta' \operatorname{tr}_g g'}{\operatorname{tr}_g g'} - \frac{\sum_{j=1}^n \left[(\partial_j \operatorname{tr}_g g') (\partial_{\bar{j}} \operatorname{tr}_g g') \right]}{(\operatorname{tr}_g g')^2} \\
&= \frac{\Delta' \operatorname{tr}_g g'}{\operatorname{tr}_g g'} - \frac{g'^{p\bar{q}} (\partial_p \operatorname{tr}_g g') (\partial_{\bar{q}} \operatorname{tr}_g g')}{(\operatorname{tr}_g g')^2}
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

De esta manera, concluimos que

$$\Delta' \log \operatorname{tr}_g g' \geq -B \operatorname{tr}_{g'} g - \frac{g^{j\bar{k}} R'_{j\bar{k}}}{\operatorname{tr}_g g'} + \frac{1}{\operatorname{tr}_g g'} \sum_{p,j,a=1}^n g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_j g'_{p\bar{a}}|^2 - \frac{1}{(\operatorname{tr}_g g')^2} \sum_{p,a,b=1}^n g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}}) (\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}).$$

Notando que los dos primeros términos del lado derecho de la última desigualdad corresponden al resultado que buscamos es que notamos que basta probar que el resto de términos sea positivo. En

efecto, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned}
\sum_{p,a,b=1}^n g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}}) (\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}) &= \sum_{a,b=1}^n \sum_{p=1}^n \sqrt{g'^{p\bar{p}}} (\partial_p g'_{a\bar{a}}) \sqrt{g'^{p\bar{p}}} (\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}) \\
&\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \sum_{a,b=1}^n \left(\sum_{p=1}^n g'^{p\bar{p}} |\partial_p g'_{a\bar{a}}|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{q=1}^n g'^{q\bar{q}} |\partial_q g'_{b\bar{b}}|^2 \right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{a=1}^n \left(\sum_{p=1}^n g'^{p\bar{p}} |\partial_p g'_{a\bar{a}}|^2 \right)^{1/2} \right)^2 \\
&= \left(\sum_{a=1}^n \sqrt{g'_{a\bar{a}}} \left(\sum_{p=1}^n g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_p g'_{a\bar{a}}|^2 \right)^{1/2} \right)^2 \\
&\stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \left(\sum_{a=1}^n g'_{a\bar{a}} \right) \left(\sum_{b,p=1}^n g'^{p\bar{p}} g'^{b\bar{b}} |\partial_p g'_{b\bar{b}}|^2 \right) \\
&= \text{tr}_g g' \left(\sum_{b,p=1}^n g'^{p\bar{p}} g'^{b\bar{b}} |\partial_p g'_{b\bar{b}}|^2 \right)
\end{aligned}$$

Dividiendo por $(\text{tr}_g g')^2$ obtenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(\text{tr}_g g')^2} \sum_{p,a,b=1}^n g'^{p\bar{p}} (\partial_p g'_{a\bar{a}}) (\partial_{\bar{p}} g'_{b\bar{b}}) &\leq \frac{1}{\text{tr}_g g'} \sum_{a,p=1}^n g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_p g'_{a\bar{a}}|^2 \\
&\leq \frac{1}{\text{tr}_g g'} \sum_{a,j,p=1}^n g'^{p\bar{p}} g'^{a\bar{a}} |\partial_p g'_{j\bar{a}}|^2
\end{aligned}$$

Notemos que los términos de esta última suma son positivos. Además, usando la condición de Kähler, es decir $\partial_p g'_{j\bar{a}} = \partial_j g'_{p\bar{a}}$, obtenemos la cota deseada. \square

Utilizaremos ahora el resultado anterior para establecer estimaciones para todas las derivadas de segundo orden

Proposición 3.1.5.

Existe una constante C que depende solamente de X , ω , $\sup_X |F|$, y una cota inferior para ΔF tal que la solución φ de 3.1.5 satisface

$$C^{-1} (g_{j\bar{k}}) < (g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi) < C (g_{j\bar{k}})$$

Demostración. Escribiendo $g'_{j\bar{k}} = g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi$ como antes, la ecuación 3.1.5 implica

$$-R'_{j\bar{k}} = \partial_j \partial_{\bar{k}} F + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi - R_{j\bar{k}} = \partial_j \partial_{\bar{k}} F + g'_{j\bar{k}} - g_{j\bar{k}} - R_{j\bar{k}} \quad (3.1.10)$$

Usando la proposición anterior, obtenemos la cota siguiente

$$\Delta' \log \operatorname{tr}_g g' \geq -B \operatorname{tr}_{g'} g + \frac{\Delta F + \operatorname{tr}_g g' - n - R}{\operatorname{tr}_g g'},$$

donde R corresponde a la curvatura escalar de g . Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz se tiene que

$$(\operatorname{tr}_g g')(\operatorname{tr}_{g'} g) = \left(\sum_{i=1}^n g'^{i\bar{i}} \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{g^{j\bar{j}}} \right) \geq \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n 1 \right) = n^2$$

y como estamos asumiendo una cota inferior para ΔF , tenemos una constante tal que

$$\Delta' \log \operatorname{tr}_g g' \geq -B \operatorname{tr}_{g'} g - C \operatorname{tr}_{g'} g.$$

Notemos que

$$\Delta' \varphi = g'^{j\bar{k}} \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi = g'^{j\bar{k}} (g'_{j\bar{k}} + g_{j\bar{k}}) = n - \operatorname{tr}_{g'} g.$$

y por lo tanto, si consideramos $A := B + C + 1$ encontramos que

$$\begin{aligned} \Delta' (\log \operatorname{tr}_g g' - A\varphi) &= \Delta' (\log \operatorname{tr}_g g') - A\Delta' \varphi \\ &= \Delta' (\log \operatorname{tr}_g g') - A(n - \operatorname{tr}_{g'} g) \\ &= \Delta' (\log \operatorname{tr}_g g') - An + A \operatorname{tr}_{g'} g \\ &\geq -B \operatorname{tr}_{g'} g - C \operatorname{tr}_{g'} g - An + A \operatorname{tr}_{g'} g \\ &= \operatorname{tr}_{g'} g - An \end{aligned}$$

Ahora, si suponemos que $\log_g g' - A\varphi$ alcanza un máximo en $p \in X$. Entonces

$$0 \geq \Delta' (\log \operatorname{tr}_g g' - A\varphi)(p) \geq \operatorname{tr}_{g'} g(p) - An$$

por lo tanto

$$\operatorname{tr}_{g'} g(p) \leq An. \quad (3.1.11)$$

Escogiendo coordenadas normales para g en $p \in X$ tal que g' es diagonal sobre p . Entonces 3.1.11 implica que para p tenemos

$$\frac{1}{g'^{i\bar{i}}} = g'^{i\bar{i}} \leq An, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (3.1.12)$$

Pero la ecuación 3.1.5 nos dice que en p

$$\prod_{i=1}^n g'^{i\bar{i}} = e^{F(p) + \varphi(p)} \leq C_1 \quad (3.1.13)$$

Para alguna constante C_1 , cuya existencia es dada por asumir que $\sup |F|$, luego la proposición 3.1.3

implica la estimación correspondiente de $\sup |\varphi|$. Ahora, los resultados 3.1.10 y 3.1.11 implica que existe una constante C_2 tal que

$$g'_{i\bar{i}} \leq C_2, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

En particular

$$\mathrm{tr}_g g'(p) \leq nC_2.$$

Dado que $\log \mathrm{tr}_g g' - A\varphi$ alcanza su máximo en p , tenemos que para cada $x \in X$

$$\log \mathrm{tr}_g g'(x) - A\varphi(x) \leq \log \mathrm{tr}_g g'(p) - A\varphi(p) \leq \log(nC_2) - A\varphi(p)$$

de forma que la proposición 3.1.3 podemos encontrar una cota $\sup |F|$ y por lo tanto para alguna constante C_3 se tiene que

$$\sup_X \log \mathrm{tr}_g g' \leq C_3.$$

Si repetimos el mismo proceso escogiendo coordenadas normales para g para las cuales g' es diagonal, usamos los resultados análogos a los anteriores nos permiten concluir nuestro resultado como sigue: Como g' es diagonal, existe una cota superior de los términos $g'_{i\bar{i}}(x)$ para todo i . La desigualdad 3.1.11 se tiene para x también, de forma que obtenemos una cota inferior sobre cada $g'_{i\bar{i}}(x)$. \square

Hasta ahora, hemos encontrado estimaciones de orden cero, estimaciones sobre el operador Laplaciano y como extender estas a todas las derivaciones de segundo orden mediante las proposiciones 3.1.3 y 3.1.4. En la siguiente sección veremos la construcción para obtener estimaciones de orden superior para una función φ que satisface la ecuación 3.1.5.

Estimaciones de orden superior.

Si denotamos por $\hat{g}_{j\bar{k}}$ a la métrica fija (que en el capítulo anterior escribimos como $g_{j\bar{k}}$) y escribimos nuestra nueva métrica de Kähler como

$$g_{j\bar{k}} = \hat{g}_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi.$$

Es decir, en la escritura del capítulo anterior.

Usaremos la ecuación 3.1.10 para la curvatura de Ricci, que escribimos como sigue

$$R_{j\bar{k}} = -g_{j\bar{k}} + T_{j\bar{k}} \tag{3.1.14}$$

para

$$T_{j\bar{k}} = -\partial_j \partial_{\bar{k}} F + \hat{g}_{j\bar{k}} + \hat{R}_{j\bar{k}}$$

Donde $R_{j\bar{k}}$ es la curvatura de Ricci de la métrica (desconocida) g . Usando la proposición 3.1.5

sabemos que existe una constante Λ tal que

$$\Lambda^{-1} \left(\hat{g}_{j\bar{k}} \right) < \left(g_{j\bar{k}} \right) < \Lambda \left(\hat{g}_{j\bar{k}} \right) \quad (3.1.15)$$

Queremos estimar las derivadas mixtas de tercer orden de φ . Dado que tenemos una métrica acotada por la proposición 3.1.3, será equivalente estimar los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{jk}^i = g^{i\bar{\ell}} \partial_j g_{k\bar{\ell}}.$$

Será mas natural tomar una perspectiva tensorial para estos cálculos, sin embargo, podemos enfocarnos en la diferencia de los símbolos de Christoffel, es decir, el tensor de forma

$$S_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \hat{\Gamma}_{jk}^i \quad (3.1.16)$$

donde $\hat{\Gamma}_{jk}^i$ es el símbolo de Christoffel de la conexión de Levi-Civita de \hat{g} .

Un resultado clave utilizando la diferencia de los símbolos de Christoffel es el siguiente

Proposición 3.1.6.

Suponiendo que g satisface la ecuación 3.1.14 y la cota 3.1.15. Entonces existe una constante C dependiendo de X , T , \hat{g} y Λ tal que

$$\Delta |S|^2 \geq -C |S|^2 - C,$$

donde $|S|$ es la norma del tensor S medido respecto a la métrica g y Δ corresponde al Laplaciano respecto a la métrica g .

Demostración. Sumando según la convención de Einstein sobre los índices que se repiten (o bien, seleccionando un punto $p \in X$ tal que g corresponde a la identidad) podemos escribir

$$|S|^2 = g^{j\bar{k}} g^{a\bar{b}} g_{p\bar{q}} S_{ja}^p \overline{S_{kb}^q} =: S_{ja}^p \overline{S_{ja}^p},$$

De esta forma, podemos calcular el Laplaciano de $|S|^2$ como

$$\Delta |S|^2 = \nabla_p \nabla_{\bar{p}} \left(S_{jk}^p \overline{S_{jk}^p} \right)$$

Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\Delta|S|^2 &= \nabla_p \nabla_{\bar{p}} \left(S_{jk}^p \overline{S_{jk}^p} \right) \\
&= \nabla_p \left(\left(\nabla_{\bar{p}} S_{jk}^p \right) \overline{S_{jk}^p} + S_{jk}^p \left(\nabla_{\bar{p}} \overline{S_{jk}^p} \right) \right) \\
&= \left(\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^p \right) \overline{S_{jk}^p} + \left(\nabla_{\bar{p}} S_{jk}^p \right) \left(\nabla_p \overline{S_{jk}^p} \right) + \left(\nabla_p S_{jk}^p \right) \left(\nabla_{\bar{p}} \overline{S_{jk}^p} \right) + S_{jk}^p \left(\nabla_p \nabla_{\bar{p}} \overline{S_{jk}^p} \right) \quad (3.1.17) \\
&= \left(\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^p \right) \overline{S_{jk}^p} + S_{jk}^p \left(\nabla_p \nabla_{\bar{p}} \overline{S_{jk}^p} \right) + \left(\nabla_{\bar{p}} S_{jk}^p \right) \left(\nabla_p \overline{S_{jk}^p} \right) + \left(\nabla_p S_{jk}^p \right) \left(\nabla_{\bar{p}} \overline{S_{jk}^p} \right) \\
&\geq \left(\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^p \right) \overline{S_{jk}^p} + S_{jk}^p \left(\nabla_p \nabla_{\bar{p}} \overline{S_{jk}^p} \right)
\end{aligned}$$

Pues los términos de la forma $\left(\nabla_p S_{jk}^p \right) \left(\nabla_{\bar{p}} \overline{S_{jk}^p} \right)$ son no negativos. Recordemos que el impedimento para que ∇_p y $\nabla_{\bar{p}}$ conmuten es codificado por la curvatura, en este caso, utilizamos este hecho como sigue

$$(\nabla_{\bar{p}} \nabla_p - \nabla_p \nabla_{\bar{p}}) S_{jk}^i = R_{j\bar{p}\bar{p}}^m S_{mk}^i + R_{j\bar{p}\bar{p}}^m S_{jm}^i + R_{j\bar{p}\bar{p}}^m S_{jk}^m$$

Por hipótesis existe un $C_1 > 0$ que acota al tensor de Ricci, entonces

$$\begin{aligned}
|\nabla_{\bar{p}} \nabla_p S_{jk}^i| &= |\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i + R_{j\bar{p}\bar{p}}^m S_{mk}^i + R_{j\bar{p}\bar{p}}^m S_{jm}^i + R_{j\bar{p}\bar{p}}^m S_{jk}^m| \\
&\leq |\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i| + |R_{j\bar{p}\bar{p}}^m S_{mk}^i + R_{j\bar{p}\bar{p}}^m S_{jm}^i + R_{j\bar{p}\bar{p}}^m S_{jk}^m| \quad (3.1.18) \\
&\leq |\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i| + C_1 |S|
\end{aligned}$$

Por otro lado, utilizando la identidad de Bianchi

$$\nabla_p R_{jk\bar{p}}^i = \nabla_k R_{j\bar{p}p}^i = \nabla_k R_j^i$$

obtenemos que para la conexión de Levi-Civita $\widehat{\nabla}$ y la curvatura de Ricci \widehat{R} para la métrica \widehat{g} se satisface

$$\begin{aligned}
\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i &= \nabla_p \partial_{\bar{p}} \left(\Gamma_{jk}^i - \widehat{\Gamma}_{jk}^i \right) \\
&= -\nabla_p \left(R_{jk\bar{p}}^i - \widehat{R}_{jk\bar{p}}^i \right) \\
&= -\nabla_k R_j^i + \widehat{\nabla}_p \widehat{R}_{jk\bar{p}}^i + \left(\nabla_p - \widehat{\nabla}_p \right) \widehat{R}_{jk\bar{p}}^i
\end{aligned}$$

Luego, la diferencia $\nabla_p - \widehat{\nabla}_p$ es acotada por S por la definición 3.1.16, de donde podemos obtener una cota para la derivada covariante $\nabla_k R_j^i$ desde 3.1.14. Obtenemos entonces, que existen C_1 y C_2 constantes positivas tales que

$$|\nabla_p \nabla_{\bar{p}} S_{jk}^i| \leq C_2 |S| + C_3.$$

Combinando esto con los resultados de 3.1.17 y 3.1.18 obtenemos

$$\Delta|S|^2 \geq -(C_4|S| + C_5)|S| = -C_4|S|^2 - C_5|S|.$$

Si consideramos en esta última $C > 0$ como el máximo entre C_4 y C_5 se concluye el resultado. \square

Veamos ahora un último resultado que nos permitirá verificar que la diferencia S es acotada.

Lema 3.1.2.

Suponer que g es una métrica satisfaciendo la ecuación 3.1.14 y la cota 3.1.15. Entonces existe una constante C dependiendo solo de X , T , \hat{g} , y Λ tal que $|S| \leq C$.

Demostración. Por la desigualdad 3.1.8 y al ser g y g' uniformemente equivalentes podemos tomar $\varepsilon > 0$ y $C_1 > 0$ tales que

$$\Delta \operatorname{tr}_{\hat{g}} g \geq -C_1 + \varepsilon|S|^2,$$

Usando el lema anterior podemos escoger $A \in \mathbb{R}$ suficientemente grande tal que para algún $C_2 \in \mathbb{R}$

$$\Delta(|S|^2 + A \operatorname{tr}_{\hat{g}} g) \geq |S|^2 - C_2$$

Si $|S|^2 + A \operatorname{tr}_{\hat{g}} g$ alcanza un máximo en $p \in X$, entonces

$$0 \geq \operatorname{tr}(\operatorname{Hess}(|S|^2 + A \operatorname{tr}_{\hat{g}} g)) = \Delta(|S|^2 + A \operatorname{tr}_{\hat{g}} g) \geq |S|^2(p) - C_2$$

Luego, si consideramos $x \in X$ se tiene que

$$|S|^2(x) \leq |S|^2(x) + A \operatorname{tr}_{\hat{g}} g(x) \leq |S|^2(p) + A \operatorname{tr}_{\hat{g}} g(p) \leq C_2 + C_3$$

Que corresponde a nuestro resultado deseado. \square

Con los resultados de estimaciones \mathcal{C}^0 , \mathcal{C}^2 , \mathcal{C}^3 y de orden superior estamos en posición de probar el teorema 3.0.1, para esto reescribimos el teorema en función de los resultados anteriores como sigue.

Teorema 3.1.3 (Aubin-Yau (78)).

Existe una constante $C > 0$ dependiendo solo de X , ω_0 y F tal que φ_t satisface la ecuación

$$(\omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi_t)^n = e^{tF+\varphi_t}\omega_0^n \quad (\text{MA}_t)$$

para $t \in [0, 1]$, entonces

$$(g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi_t) > C^{-1} (g_{j\bar{k}})$$

y además

$$\|\varphi_t\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}(X)} \leq C$$

donde la norma de Hölder es medida con respecto a la métrica ω_0 .

Demostración. Las proposiciones 3.1.3 y 3.1.4 nos permiten afirmar que $g_{j\bar{k}} + \partial_j \partial_{\bar{k}}$ es uniformemente equivalente a $g_{j\bar{k}}$. Luego el lema 3.1.6 muestra que existe una estimación a priori para las derivadas mixtas de tercer orden de la forma $\partial_j \partial_{\bar{k}} \partial_{\bar{\ell}} \varphi$ y $\partial_{\bar{j}} \partial_k \partial_{\bar{\ell}} \varphi$. En particular, esto nos permite establecer cotas de tipo $\mathcal{C}^\alpha(X)$ sobre las derivadas mixtas de segundo orden de la forma $\partial_j \partial_{\bar{k}} \varphi$. Para concluir, debemos utilizar el argumento utilizado en la proposición 3.1.1 usando las estimaciones de Schauder tras diferenciar la ecuación para encontrar una estimación a priori para $\|\varphi\|_{\mathcal{C}^{3,\alpha}}$. \square

3.2. Métricas Kähler-Einstein en variedades de Calabi-Yau, el caso $c_1(X) = 0$

En esta sección consideraremos X una variedad cuya primera clase de chern es nula, en este caso, una métrica de Kähler-Einstein necesariamente será Ricci plana. Dada cualquier métrica ω sobre X , la forma de Ricci de ω es exacta, de esta forma, por el $\partial\bar{\partial}$ -lema debe existir una función suave F tal que como

$$0 = c_1(X) = \frac{1}{2\pi} \text{Ric}(\omega)$$

entonces se satisface

$$\text{Ric}(\omega) = \mathbf{i}\partial\bar{\partial}F$$

De la misma forma que en la deducción de la ecuación MA en la primera sección se puede obtener que la existencia de tal métrica de Kähler Ricci plana esta dada por la solubilidad de la ecuación

$$(\omega + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^F \omega^n \quad (\text{MA}_2)$$

Una ligera pero crucial diferencia es que en esta ecuación, para empezar estudiar su solubilidad debemos normalizar F sumando una constante. De hecho, integrando la igualdad se tiene que

$$\int_X e^F \omega^n = \int_X (\omega + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = \int_X \omega^n = \text{vol}_\omega(X)$$

Donde hemos utilizado que

$$\begin{aligned} (\omega + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n - \omega^n &= \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi \wedge (\omega'^{n-1} + \omega'^{n-2} \wedge \omega + \dots + \omega^{n-1}) \\ &= \mathbf{d} \left(\mathbf{i}\bar{\partial}\varphi \wedge (\omega'^{n-1} + \dots + \omega^{n-1}) \right) \end{aligned}$$

es exacta, de modo que el volumen de X con respecto a ambas métricas debe coincidir.

El siguiente teorema de Yau, responde de forma definitiva la problemática de la existencia de métricas de Kähler-Einstein en el caso $c_1(X) = 0$.

Teorema 3.2.1 (Yau (78)).

Sea (X, ω) una variedad de Kähler compacta, y sea $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave tal que

$$\int_X e^F \omega^n = \int_X \omega^n.$$

Entonces existe una función suave $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$, única salvo sumar una constante, tal que $\omega + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi$ es una forma positiva y se satisface

$$(\omega + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^F \omega^n \quad (\text{MA}_2)$$

Pese a que esta ecuación es bastante similar a [MA](#), que ya hemos resuelto en la sección anterior, esta ecuación es fundamentalmente diferente. Dado que [MA₂](#) no aparece el término $e^{F+\varphi}$ no podremos encontrar una estimación a priori para $\sup_X |\varphi|$ como lo hemos hecho antes utilizando el principio del máximo. Sin embargo, podemos encontrar estimaciones siguiendo otros métodos siguiendo la solución original de Yau [[Yau78](#)] con modificaciones dadas por Blocki en [[Blo12](#)] y [[Blo13](#)].

Como ya hemos mencionado, nuestro actual objetivo es probar una estimación \mathcal{C}^0 , esto se logrará con el siguiente resultado.

Proposición 3.2.1.

Sean $F, \varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ funciones suaves sobre una variedad de Kähler compacta (X, ω) tales que $\omega - \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi$ es positiva y satisfacen

$$(\omega - \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^F \omega^n.$$

Entonces existe una constante C que depende de M , ω y $\sup_X F$ satisfaciendo

$$\text{osc}_X \varphi := \sup_X \varphi - \inf_X \varphi < C.$$

Demostración. Para probar este resultado utilizaremos una técnica denominada iteración de Moser, que consiste en estimar las normas L^p

$$\|\varphi\|_p = \left(\int_X |\varphi|^p \omega^n \right)^{1/p}$$

de forma iterativa para p cada vez mas grande y tomando finalmente el limite cuando $p \rightarrow \infty$. (Consideremos $\omega - \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi$ en vez de $\omega + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi$). Modificando φ por una constante y reescalando ω de forma adecuada, podemos asumir que $\inf_X \varphi = 1$ y que $\text{vol}_\omega = 1$, esto nos permite asegurar que para $p \leq q$ se tiene que

$$\|\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_q.$$

Como $\omega - \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi$ es positivo, al tomar traza respecto a ω obtenemos que

$$n - \Delta_\omega \varphi > 0,$$

para Δ_ω el Laplaciano de (X, ω) . Supongamos que $\varphi(p) = 1$, y sea $G(x, y)$ la función de Green del Laplaciano (Ver su definición en la ecuación 2.2.1), entonces

$$\varphi(p) = \int_X \varphi \omega^n - \int_X G(x, p) \Delta \varphi(x) \omega^n(x).$$

Asumiendo que $G \geq 0$ y que $G(x, p)$ es integrable respecto a x , se tiene que

$$1 = \varphi(p) \geq \int_X \varphi(x) \omega^n(x) dx - n \int_X G(x, p) \omega^n(x) dx \geq \int_X \varphi \omega^n(x) dx - C_1$$

para alguna constante $C_1 > 0$, de esta forma obtenemos $\|\varphi\|_1 \leq C_1 + 1 =: C_2$. Si consideramos $\omega_\varphi = \omega - \mathbf{i} \partial \bar{\partial} \varphi$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_X \varphi (\omega_\varphi^n - \omega^n) &= \int_X \varphi (\omega_\varphi - \omega) (\omega_\varphi^{n-1} + \dots + \omega^n) \\ &= \int_X -\varphi \mathbf{i} \partial \bar{\partial} \varphi \wedge (\omega_\varphi^{n-1} + \dots + \omega^n) \\ &= \int_{\partial X} -\mathbf{i} \varphi \bar{\partial} \varphi \wedge (\omega_\varphi^{n-1} + \dots + \omega^n) + \int_X \mathbf{i} \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi \wedge (\omega_\varphi^{n-1} + \dots + \omega^n) \\ &= \int_X \mathbf{i} \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi \wedge (\omega_\varphi^{n-1} + \dots + \omega^n) \end{aligned}$$

Las formas $\mathbf{i} \partial \varphi \wedge \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi \wedge \omega_\varphi^k \wedge \omega^{n-1-k}$ son no negativas, para ver esto podemos calcular en coordenadas locales en torno a un punto $p \in X$ en el que ω y ω_φ son diagonales (como en 1.3.2). Luego, se tiene que

$$\int_X \varphi (\omega_\varphi^n - \omega^n) \geq \int_X \mathbf{i} \partial \varphi \wedge \bar{\partial} \varphi \wedge \omega^{n-1} = \frac{1}{n} \int_X |\partial \varphi|^2 \omega^n,$$

□

Como $\omega_\varphi^n - \omega^n = (e^F - 1) \omega^n$ tenemos que

$$\int_X |\partial \varphi|^2 \omega^n < C_3,$$

para alguna constante C_3 . Por otro lado, la desigualdad de Poincaré sobre X implica que

$$\int_X (\varphi - \|\varphi\|_1)^2 \omega^n \leq C \int_X |\partial \varphi|^2 \omega^n := C_4,$$

y por la cota obtenida para $\|\varphi\|_1$ esta ultima desigualdad nos da una cota superior $\|\varphi\|_2 < C_4$. Procediendo de forma similar, podemos concluir que

$$\|\partial \varphi^{p/2}\|_2^2 \leq p \cdot C \|\varphi\|_{p-1}^{p-1},$$

para una constante C que no depende de $p \in \mathbb{N}$. La desigualdad de Sobolev para (X, ω) nos dice que para todo f suficientemente regular se tiene que

$$\|f\|_{\frac{2n}{n-1}}^2 \leq C_S (\|f\|_2^2 + \|\partial f\|_2^2)$$

para una constante C_S que solo depende de X y la métrica ω . Aplicando la desigualdad de Sobolev a $f = \varphi^{p/2}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{\frac{np}{n-1}}^p &= \|\varphi^{p/2}\|_{\frac{2n}{n-1}}^2 \leq C_S (\|\varphi^{p/2}\|_2^2 + \|\partial \varphi^{p/2}\|_2^2) \\ &\leq C_S (\|\varphi\|_p^p + pC \|\varphi\|_{p-1}^{p-1}) \\ &\leq pC' \|\varphi\|_p^p \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|\varphi\|_{\frac{np}{n-1}} \leq (pC)^{1/p} \|\varphi\|_p.$$

Haciendo $p_k := \left(\frac{n}{n-1}\right)^k p$, obtenemos que

$$\|\varphi\|_{p_k} \leq (p_{k-1}C)^{1/p_{k-1}} \|\varphi\|_{p_{k-1}} \leq \dots \leq \|\varphi\|_p \prod_{i=0}^{k-1} (p_i C)^{1/p_i} \leq \|\varphi\|_p \prod_{i \in \mathbb{N}} (p_i C)^{1/p_i} < \infty$$

Así, si escogemos $p = 2$ y hacemos $k \rightarrow \infty$ una cota para $\sup_X \varphi$ como sigue

$$\sup_X \varphi \leq \widehat{C} \|\varphi\|_2,$$

es decir, nuestra cota para la norma L^2 de φ implica la estimación uniforme que en la sección obtuvimos utilizando el principio del máximo.

Como ya hemos conseguido estimaciones para la norma uniforme, el resto del problema corresponde a encontrar estimaciones de orden superior, pero no existe impedimento para utilizar los argumentos de los lemas 3.1.5 y 3.1.2. El argumento de apertura del conjunto

$$S_2 = \{s \in [0, 1] \mid \text{MA}_2(t) \text{ tiene solución para } t = s\}$$

es análogo al que utilizamos en el caso $c_1(X) < 0$.

Para concluir este capítulo, deduciremos la ecuación de tipo Monge-Ampere que debe ser resuelta para asegurar la existencia de métricas de Kähler Einstein en una variedad de Fano, y en el proceso mencionaremos y daremos detalles de algunos de los impedimentos para que esta sea siempre resoluble.

3.3. Métricas Kähler-Einstein en variedades de Fano, el caso $c_1(X) > 0$

En las secciones anteriores hemos estudiado los casos donde $c_1(X) \leq 0$. Esta última sección estará dedicada a comentar algunos resultados y propiedades que se tienen en el caso donde la primera clase de Chern es positiva. Supongamos que $\omega_0 \in 2\pi c_1(X)$ es una métrica Kähleriana cualquiera. Buscamos una métrica

$$\omega = \omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi$$

tal que $R(\omega) = \omega'$. Como antes, consideremos $[\omega_0] = 2\pi c_1(X) \in H^2(X, \mathbb{R})$, entonces, como $2\pi c_1(X) = [\text{Ric}(\omega_0)]$ podemos escribir la curvatura de Ricci ω_0 como

$$\text{Ric}(\omega_0) = \omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}F.$$

Sea entonces $\omega \in [\omega_0]$, por el $\partial\bar{\partial}$ -lema existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ tal que

$$\omega = \omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi$$

y cuya curvatura de Ricci difiere de la de ω satisfaciendo que

$$\text{Ric}(\omega) - \text{Ric}(\omega_0) = -\mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \frac{\omega^n}{\omega_0^n}.$$

Ahora bien, si ω corresponde a una métrica de Kähler-Einstein esta debe satisfacer $\text{Ric}(\omega) = \omega$ y por lo tanto la ecuación anterior se reescribe como

$$\omega - \omega_0 - \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi = -\mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \frac{\omega^n}{\omega_0^n}$$

y como $\omega = \omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi$ concluimos la igualdad

$$\omega_0 + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}F - \omega_0 - \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi = -\mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \frac{\omega^n}{\omega_0^n}$$

y finalmente, encontramos una igualdad análoga a 3.1.3 para variedades de Fano, esto es,

$$\mathbf{i}\partial\bar{\partial}(F - \varphi) = -\mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \frac{\omega^n}{\omega_0^n} \quad (3.3.1)$$

Como en la sección 3.1 podemos ver que esto requiere de la solubilidad de la ecuación

$$(\omega + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{F-\varphi}\omega^n \quad (\text{MA}_3)$$

Siguiendo la propuesta de utilizar el método de continuidad, podemos introducir la ecuación

$$(\omega + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{F-t\varphi}\omega^n \quad (\text{MA}_3(t))$$

Notemos que esta tiene solución $\varphi = 0$ para $t = 0$, pero no podemos utilizar el teorema de la función implícita para concluir la apertura del conjunto

$$S_3 = \{s \in [0, 1] \mid \text{MA}_3(t) \text{ tiene solución para } t = s\}$$

pues podemos sumar constantes a φ de tal manera que esta siga siendo solución, por lo que no contamos con la unicidad de soluciones para $t = 0$. Una forma de solucionar este problema es fijando un punto $p \in X$ y resolver la ecuación

$$(\omega + \mathbf{i}\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{F-t\varphi+\varphi(p)}\omega^n.$$

Entonces la función $\varphi - t^{-1}\varphi(p)$ es solución de $\text{MA}_3(t)$. Como en la demostración de la proposición 3.1.1 podemos reescribir la ecuación como

$$\log \frac{\omega_\varphi^n}{\omega^n} + t\varphi - \varphi(p) - F = 0, \quad (3.3.2)$$

y el operador

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{3,\alpha}(X) \times [0, 1] &\longrightarrow \mathcal{C}^{1,\alpha} \\ (\varphi, t) &\longmapsto \log \frac{\omega_\varphi^n}{\omega^n} + t\varphi - \varphi(p) - F \end{aligned}$$

en $t = 0$ su linealización en una solución φ es

$$\psi \mapsto \Delta_{\omega_\varphi}\psi - \psi(p),$$

que corresponde a un isomorfismo $\mathcal{C}^{3,\alpha}(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^{1,\alpha}(X)$. De hecho, si $h \in \mathcal{C}^{3,\alpha}(X)$ y \bar{h} denota al promedio de h respecto a ω_φ , entonces, podemos encontrar $\psi \in \mathcal{C}^{3,\alpha}(X)$ que resuelve

$$\Delta_{\omega_\varphi}\psi = h - \bar{h}.$$

Podemos entonces sumar una constante a ψ para resolver

$$\Delta_{\omega_\varphi}\psi + \psi(p) = h.$$

Se puede utilizar el teorema de la función implícita para implicar que la ecuación 3.3.2 puede resolverse para $t > 0$ suficientemente pequeño. Esto se detalla en el siguiente resultado.

Proposición 3.3.1.

Sea φ una solución de la ecuación $\text{MA}_3(t)$, es decir, solución de

$$(\omega + i\partial\bar{\partial}\varphi)^n = e^{F-t\varphi}\omega^n$$

para $t = s$, con $s \in (0, 1)$. Entonces se puede resolver la ecuación para todo $t \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Demostración. Para utilizar el teorema de la función implícita probaremos que el operador linealizado es invertible. Para esto, consideremos la igualdad

$$\log \frac{\omega_\varphi^n}{\omega^n} + t\varphi - F = 0$$

la linealización del operador en φ cuando $t = s$ es dado por

$$L(\psi) = \Delta_{\omega_\varphi} \psi + s\psi.$$

En otras palabras, necesitamos probar que el mayor autovalor no nulo de $-\Delta_{\omega_\varphi}$ es mayor o igual a s , para esto será importante el hecho que ω_φ satisface

$$\text{Ric}(\omega_\varphi) = s\omega_\varphi + (1 - s)\omega,$$

es decir, la curvatura de Ricci de ω_φ es acotada inferiormente por s . Para esto, utilizamos la identidad de Bochner-Weitzenböck (cf. [GH78, Pag. 97]) para el $\bar{\partial}$ -Laplaciano sobre $(0, 1)$ -formas

$$\Delta_{\bar{\partial}} = \bar{\nabla}^* \bar{\nabla} + \text{Ric}.$$

Explícitamente, si $L(\psi) = 0$. Entonces, podemos encontrar que

$$\begin{aligned} \int_X s \nabla_j \psi \nabla_{\bar{j}} \bar{\psi} \omega_\varphi^n &= - \int_X \nabla_j \nabla_p \nabla_{\bar{p}} \bar{\psi} \nabla_{\bar{j}} \bar{\psi} \omega_\varphi^n \\ &= \int_X \left(-\nabla_{\bar{p}} \nabla_p \nabla_j \psi \nabla_{\bar{j}} \bar{\psi} + R^{q\bar{j}} \nabla_q \psi \nabla_{\bar{j}} \bar{\psi} \right) \omega_\varphi^n \\ &= \int_X \left(\nabla_p \nabla_j \psi \nabla_{\bar{p}} \bar{\psi} \nabla_{\bar{j}} \bar{\psi} + s \nabla_j \psi \nabla_{\bar{j}} \bar{\psi} + (1 - s) \omega^{q\bar{j}} \nabla_q \psi \nabla_{\bar{j}} \bar{\psi} \right) \omega_\varphi^n \\ &\geq \int_X \left(s \nabla_j \psi \nabla_{\bar{j}} \bar{\psi} + (1 - s) \omega^{q\bar{j}} \nabla_q \psi \nabla_{\bar{j}} \bar{\psi} \right) \omega_\varphi^n, \end{aligned}$$

Donde $R^{q\bar{j}}$ corresponde a la curvatura de Ricci de ω_φ y $\omega^{q\bar{j}}$ son las componentes de ω , con índices contraídos por aplicar ω_φ . Notemos que esta igualdad se tiene solo si ψ es constante, pero en tal caso $L(\psi) = 0$. Luego, podemos ver que L es autoadjunto, lo que junto con la inyectividad probada anteriormente implica que L es de hecho invertible. \square

Como en las secciones anteriores, queda probar que el conjunto S_3 es cerrado. Para esto, utilizaríamos estimaciones a priori, el problema es que al igual que en el caso $c_1(X) = 0$ no podemos encontrar estimaciones para $\sup_X |\varphi|$ dado que en la formulación de la ecuación el signo de φ es contrario al de antes. Si pudieramos proveer una estimación de este tipo, la argumentación previa también nos sería de utilidad para encontrar que **MA₃** tiene solución, pero resulta ser que esto no siempre es posible. Obstáculos para que esto ocurra son dados por Matsushima en [Mat57] donde estudia el grupo de homeomorfismos analíticos sobre algunas variedades de Fano. Futaki en [Fut83] encuentra un obstáculo para la existencia de métricas de Kähler Einstein dado por las álgebras de campos vectoriales holomorfos. En este se considera una variedad compleja compacta n -dimensional, X con primera clase de Chern positiva. Si $c_1^+(X)$ es el conjunto de todas las $(1,1)$ -formas positivas representando $c_1(X)$. Si fijamos una métrica de Kähler $(g_{j\bar{k}})$, escribimos la forma de Kähler como

$$\omega = \mathbf{i} \sum_{j,k} g_{j\bar{k}} dz^j \wedge d\bar{z}^k \in c_1^+(X)$$

y su forma de Ricci como

$$\text{Ric}(\omega) = -\mathbf{i}\partial\bar{\partial} \log \det(g)$$

y por el $\partial\bar{\partial}$ -lema, existe F una función suave tal que

$$\text{Ric}(\omega) - \omega = \mathbf{i}\partial\bar{\partial}F$$

Sea entonces $\mathfrak{h}(X)$ el álgebra de Lie compleja de campos vectoriales holomorfos sobre X , definimos entonces el funcional lineal sobre $\mathfrak{h}(X)$ por

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}(X) &\longmapsto \mathbb{C} \\ X &\longmapsto f(X) = \int_X XF\omega^n, \end{aligned}$$

Entonces, se tiene el siguiente teorema

Teorema 3.3.1 (Futaki).

La función f no depende de la elección de $\omega \in c_1^+(X)$. El número

$$\delta_X = \dim(\mathfrak{h}(X)/\ker f)$$

solo depende de la estructura compleja de X . Si X admite una métrica de Kähler-Einstein entonces $\delta_X = 0$.

Y finalmente el obstáculo encontrado por Tian en base a una generalización de Futaki en [Tia90] y que se denomina K -poliestabilidad [Tia97, Pag.28-35] en base a la conjetura formulada por Yau una vez resueltos los casos $c_1(X) \leq 0$.

CONSECUENCIAS DEL TEOREMA DE YAU

En este capítulo, presentaremos algunas las consecuencias más notables del teorema de Yau. Estos se encuentran en secciones ordenadas de forma correlativa a las secciones del capítulo anterior, es decir, las secciones “Conexidad simple de las variedades de Kähler-Einstein”, “El teorema de Descomposición de Beauville-Bogomolov ” y “La desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau” corresponden a los casos en que $c_1(X) < 0$, $c_1(X) = 0$ y $c_1(X) > 0$ respectivamente.

4.1. La desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau.

Sea (X, g) una variedad Hermitiana de dimensión n , y sea (E, h) un fibrado vectorial Hermitiano de rango r sobre X . Para $\{s_i\}_{i=1}^r \subset E$ un marco local unitario para el fibrado (E, h) y $\{dz^i, d\bar{z}^i\}_{i=1}^n$ un marco local unitario para el fibrado cotangente ΩX de (X, g) . Consideremos el tensor¹

$$\Omega_k^j = \sum_{\ell, m=1}^n R_{k\ell m}^j dz^\ell \wedge d\bar{z}^m,$$

que define la forma de curvatura $\Omega = (\Omega_k^j)$ con respecto a una sección s como

$$R(s_k) = \sum_{i=1}^n \Omega_k^j s_j.$$

¹Este tensor se define a partir de la forma fundamental ω y la conexión Hermitiana (Ver [Kob87, Sección 4.1])

Definimos la **curvatura media** K del fibrado (E, h) a partir de los tensores

$$K_k^j = \sum_{\ell, m=1}^n g^{\ell\bar{m}} R_{k\ell m}^j, \quad y \quad K_{j\bar{k}} = \sum_{i=1}^r h_{i\bar{k}} K_j^i.$$

Recordemos además la **curvatura de Ricci** y **curvatura escalar**, que son dadas respectivamente por

$$\rho = R_{j\bar{k}} = g^{\ell\bar{m}} R_{j\bar{k}\ell\bar{m}} \quad (4.1.1)$$

y

$$\sigma = g^{j\bar{k}} R_{j\bar{k}}.$$

Luego, utilizando estas definiciones y contrayendo por la métrica de forma adecuada podemos concluir lo siguiente,

1. Para la forma fundamental para la métrica g , se tiene localmente que

$$\omega_g = \mathbf{i} \sum_{j=1}^n dz^j \wedge d\bar{z}^j. \quad (4.1.2)$$

2. Para el tensor de Ricci ρ , calculamos su norma como

$$\|R\|^2 = \sum |R_{k\ell\bar{m}}^j|^2 = \sum |R_{j\bar{k}\ell\bar{m}}|^2. \quad (4.1.3)$$

3. Para la curvatura media K , calculamos su norma como

$$\|K\|^2 = \sum |K_k^j|^2 = \sum |K_{ji}|^2 = \sum |R_{k\ell\bar{m}}^j|^2. \quad (4.1.4)$$

4. Finalmente, calculamos la norma de la curvatura escalar σ

$$\sigma^2 = \sum_j |R_{j\bar{j}}|^2 = \sum_{j, \ell, m} |R_{j\ell\bar{m}}^j|^2 \quad (4.1.5)$$

Estas cantidades serán de gran importancia en los siguientes puntos para calcular identidades que satisfacen las clases de Chern.

Presentamos ahora las clases de Chern mediante las $2k$ -formas γ_k con la siguiente definición

Definición.

La k -ésima **clase de Chern** $c_k(E) \in H^{2k}(X, \mathbb{Z})$ de un fibrado vectorial Hermitiano (E, h) es repre-

sentada por la $2k$ -forma cerrada γ_k definida por

$$c_k(E) = \det \left(\text{Id}_r - \frac{1}{2\pi\mathbf{i}} \omega_g \right) = 1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r \quad (4.1.6)$$

$$\gamma_k = \frac{(-1)^k}{(2\pi\mathbf{i})^k k!} \sum \delta_{\ell_1 \dots \ell_k}^{j_1 \dots j_k} \Omega_{j_1}^{\ell_1} \wedge \dots \wedge \Omega_{j_k}^{\ell_k} \quad (4.1.7)$$

Utilizaremos en particular las expresiones que entrega la definición anterior para las dos primeras clases de Chern, esto es

$$c_1(X) = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \sum_{i=1}^n \Omega_i^i = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \sum_{\ell, m=1}^n R_{k i i}^j dz^\ell \wedge d\bar{z}^m = \frac{\mathbf{i}}{2\pi} \sum_{\ell, m=1}^n R_{\ell \bar{m}} dz^\ell \wedge d\bar{z}^m \quad (4.1.8)$$

y

$$c_2(X) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathbf{i}}{2\pi} \right)^2 \sum_{i,j=1}^n \left(\Omega_j^i \wedge \Omega_k^j - \Omega_k^j \wedge \Omega_j^i \right). \quad (4.1.9)$$

El siguiente resultado muestra que no solo la primera clase de Chern es independiente de la estructura Hermitiana, más aún, todas las clases de Chern representan una cualidad topológica y no dependen de la estructura de la variedad en cuestión.

Teorema 4.1.1.

La clase $c_k(E, h)$ es independiente de h . Y por lo tanto, podemos escribir

$$c_k(E) = c_k(E, h).$$

Además, escribimos $c_k(X)$ para $c_k(T_X)$.

Habiendo establecido estas igualdades, empezaremos el camino a probar la desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau, para esto veamos el siguiente lema

Lema 4.1.1.

Las primera y segunda clase de Chern, satisfacen respectivamente, las siguientes relaciones

$$(1) \quad c_1(E)^2 \wedge \omega_g^{n-2} = \frac{1}{4\pi^2 n(n-1)} (\sigma^2 - \|\rho\|^2 \omega_g^n) = \gamma_1^2 \wedge \omega_g^{n-2}$$

$$(2) \quad c_2(E) \wedge \omega_g^{n-2} = \frac{1}{8\pi^2 n(n-1)} (\sigma^2 - \|\rho\|^2 - \|K\|^2 + \|R\|^2) \omega_g^n = \gamma_2 \wedge \omega_g^{n-2}$$

Demostración. Por la definición de γ_1 y γ_2 tenemos que

$$\begin{aligned} \gamma_1^2 &= \left(\frac{\mathbf{i}}{2\pi} \right)^2 \sum \Omega_j^i \wedge \Omega_k^j = \frac{-1}{4\pi^2} \sum \Omega_j^i \wedge \Omega_k^j \\ \gamma_2 &= \frac{-1}{4\pi^2} \left(\sum \Omega_j^i \wedge \Omega_k^j - \Omega_k^j \wedge \Omega_j^i \right) = \gamma_1^2 + \frac{1}{8\pi^2} \sum \Omega_k^j \wedge \Omega_j^k \end{aligned}$$

Notemos ahora que

$$dz^j \wedge d\bar{z}^k \wedge dz^\ell \wedge d\bar{z}^m = \begin{cases} \frac{4}{n(n-1)}\omega_g^n, & \text{si } j = k \neq \ell = m \\ -\frac{4}{n(n-1)}\omega_g^n, & \text{si } j = \ell \neq k = m \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

De esta forma, para probar (1) y (2) bastará probar

$$(1') \quad \frac{n(n-1)}{4} \sum \Omega_j^j \wedge \Omega_k^k \wedge \omega_g^{n-2} = -(\sigma^2 - \|\rho\|^2)\omega_g^n$$

$$(2') \quad \frac{n(n-1)}{4} \sum \Omega_j^k \wedge \Omega_k^j \wedge \omega_g^{n-2} = -(\|K\|^2 - \|R\|^2)\omega_g^n$$

Para esto, notemos que

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{4} \sum_{j,k=1}^n \Omega_j^j \wedge \Omega_k^k \wedge \omega_g^{n-2} &= \frac{n(n-1)}{4} \sum_{j,k,\ell,m=1}^n \left(R_{\ell\bar{j}\bar{j}} R_{m\bar{m}k\bar{k}} - R_{\ell\bar{m}j\bar{j}} R_{m\bar{k}k\bar{k}} \right) dz^\ell \wedge d\bar{z}^\ell \wedge dz^m \wedge d\bar{z}^m \wedge \omega_g^{n-2} \\ &= - \sum_{\ell,m=1}^n (R_{\ell\bar{\ell}} R_{m\bar{m}} - R_{\ell\bar{m}} R_{m\bar{\ell}}) \omega_g^n \\ &= -(\sigma^2 - \|\rho\|^2) \omega_g^n \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado las igualdades 4.1.5 y 4.1.1 para concluir la última igualdad. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \frac{n(n-1)}{4} \sum_{j,k=1}^n \Omega_j^k \wedge \Omega_k^j \wedge \omega_g^{n-2} &= \frac{n(n-1)}{4} \sum_{j,k,\ell,m=1}^n \left(R_{\ell\bar{\ell}j\bar{k}} R_{m\bar{m}j\bar{k}} - R_{\ell\bar{m}j\bar{k}} R_{m\bar{\ell}k\bar{j}} \right) dz^\ell \wedge d\bar{z}^\ell \wedge dz^m \wedge d\bar{z}^m \wedge \omega_g^{n-2} \\ &= \sum_{j,k,\ell,m=1}^n \left(R_{\ell\bar{\ell}j\bar{k}} R_{m\bar{m}k\bar{k}} - R_{\ell\bar{m}j\bar{k}} R_{m\bar{\ell}k\bar{j}} \right) \omega_g^n \\ &= -(\|K\|^2 - \|R\|^2) \omega_g^n \end{aligned}$$

Donde hemos utilizado las igualdades 4.1.3 y 4.1.4 para concluir la última igualdad. Utilizando estos dos últimos resultados hemos probado los puntos (1') y (2'), de los que siguen los resultados del lema. □

Veamos ahora un lema que relaciona la norma del tensor de Ricci $\|R\|^2$ y la del tensor de curvatura de Ricci $\|\rho\|^2$.

Lema 4.1.2.

Sea (E, h) un fibrado vectorial Hermitiano de rango r sobre una variedad Hermitiana compacta (X, g) de dimension n . Entonces

$$r\|R\|^2 \geq \|\rho\|^2$$

Además, se alcanza la igualdad si y solo si

$$r R_{k\ell\bar{m}}^j = \delta_j^i R_{\ell\bar{m}}.$$

Demostración. Sea $T_{k\ell\bar{m}}^j := R_{k\ell\bar{m}}^j - \frac{1}{r} \delta_k^j R_{\ell\bar{m}}$, entonces

$$\begin{aligned} 0 \leq \|T\|^2 &= \sum \left| R_{k\ell\bar{m}}^j - \frac{1}{r} \delta_k^j R_{\ell\bar{m}} \right|^2 \\ &= \sum \left| R_{k\ell\bar{m}}^j \right|^2 - \frac{2}{r} \sum |R_{\ell\bar{m}}|^2 + \frac{1}{r} \sum |R_{\ell\bar{m}}|^2 \end{aligned}$$

Utilizando las igualdades 4.1.1 y 4.1.3 podemos concluir que

$$0 \leq \|T\|^2 = \|R\|^2 - \frac{1}{r} \|\rho\|^2$$

□

Observación 4.1.1. Recordemos que cuando (E, h) es un fibrado holomorfo Hermitiano de rango r sobre una variedad Hermitiana (X, g) . Diremos que (E, h) satisface la condición **de Einstein débil** (con factor φ) si la curvatura media K satisface

$$K = \varphi \text{Id}_E, \quad \text{es decir } K_k^j = \varphi \delta_k^j \quad (4.1.10)$$

para φ una función real definida sobre X . Si φ es constante decimos que h es una métrica Hermite-Einstein y el par (E, h) es un fibrado vectorial de Hermite-Einstein sobre (X, g) .

Colocando $E = T_X$ y $h = g$ decimos que el par (X, g) es una variedad de Hermite-Einstein. Mas aún si ω_g es una $(1, 1)$ -forma cerrada (X, g) se denomina de Kähler-Einstein.

Utilizando las igualdades 4.1.3 a 4.1.5 junto con el recuerdo anterior podemos establecer el siguiente lema

Lema 4.1.3.

Para toda variedad de Kähler (X, g) de dimensión n , se tiene que

$$\|R\|^2 \geq \frac{2}{n+1} \|K\|^2.$$

Donde se alcanza la igualdad si y solo si X es un espacio de curvatura seccional constante.

Demostración. En el caso de Kähler, por la observación 1.4.3 se tiene que

$$R_{j\bar{k}\ell\bar{m}} = R_{\ell\bar{m}j\bar{k}}$$

y por lo tanto,

$$K_{j\bar{k}} = R_{j\bar{k}}.$$

De esta ecuación y las igualdades 4.1.1 y 4.1.5 concluimos que

$$\|K\|^2 = \|\rho\|^2 \quad (4.1.11)$$

En particular, en el caso Kähler-Einstein tenemos que $K_k^j = \frac{\sigma}{n} \delta_k^j$, donde σ es la curvatura escalar de la variedad n -dimensional X y por lo tanto

$$\|K\|^2 = \frac{\sigma^2}{n} = \|\rho\|^2. \quad (4.1.12)$$

Si definimos $T_{j\bar{k}\ell\bar{m}}$ como

$$T_{j\bar{k}\ell\bar{m}} = R_{j\bar{k}\ell\bar{m}} - \frac{\sigma}{n(n-1)} \left(\delta_k^j \delta_m^\ell - \delta_m^j \delta_k^\ell \right) \delta_k^\ell.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|T\|^2 &= \sum \left| R_{j\bar{k}\ell\bar{m}} - \frac{\sigma}{n(n-1)} \left(\delta_k^j \delta_m^\ell - \delta_m^j \delta_k^\ell \right) \right|^2 \\ &= \|R\|^2 - \frac{2\sigma^2}{n(n-1)} \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\|R\|^2 \geq 2\sigma^2 n(n-1).$$

Notemos que la igualdad solo se obtiene cuando $T = 0$, y por lo tanto, concluimos que

$$\|R\|^2 \geq \frac{2}{n+1} \|K\|^2$$

□

Ya estamos listos para enunciar y probar el resultado principal de esta sección, este corresponde al siguiente teorema.

Teorema 4.1.2 (Bogomolov-Miyaoka-Yau).

Sea (X, ω) una variedad de Kähler n -dimensional compacta con $c_1(X) < 0$, entonces

$$\int_X (nc_1(X)^2 - 2(n+1)c_2(X)) \wedge \omega_g^{n-2} \leq 0$$

Demostración. Sea $c_i(X, g)$ la i -ésima clase de Chern, que corresponde a la clase de Chern $c_i(T_X, h)$. Para utilizar los lemas anteriores fijamos $E = T_X$ y $g = h$. Por el punto (1) en el lema 4.1.1 y la

igualdad 4.1.12 sabemos que

$$\begin{aligned}
 c_1(X, g)^2 \wedge \omega_g^{n-2} &= \frac{1}{4\pi^2 n(n-1)} (\sigma^2 - \|\rho\|^2) \omega_g^n \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 n(n-1)} (n\|\rho\|^2 - \|\rho\|^2) \omega_g^n \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \|\rho\|^2 \frac{\omega_g^n}{n} \\
 &= \frac{1}{4\pi^2} \|K\|^2 \frac{\omega_g^n}{n}.
 \end{aligned}$$

Por otro lado, por el punto (2) del lema 4.1.1 y usando nuevamente la igualdad 4.1.12 se tiene que

$$\begin{aligned}
 c_2(X, g) \wedge \omega_g^{n-1} &= \frac{1}{8\pi^2 n(n-1)} (\sigma^2 - \|\rho\|^2 - \|K\|^2 + \|R\|^2) \omega_g^n \\
 &= \frac{1}{8\pi^2 n(n-1)} ((n-2)\|K\|^2 + \|R\|^2) \omega_g^n.
 \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

Luego, podemos calcular la integral del enunciado como sigue

$$\begin{aligned}
 &\int_X \{2(n+1)c_2(X) - nc_1(X)^2\} \wedge \omega_g^{n-2} \\
 &= \int_X \left(\frac{2(n+1)}{8\pi^2 n(n-1)} (\sigma^2 - \|\rho\|^2 - \|K\|^2 + \|R\|^2) - \frac{n}{4\pi^2 n(n-1)} (\sigma^2 - \|\rho\|^2) \right) \omega_g^n \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 n(n-1)} \int_X ((n+1)(n-2)\|K\|^2 + (n+1)\|R\|^2 - n(n-1)\|K\|^2) \omega_g^n \\
 &= \frac{1}{4\pi^2 n(n-1)} \int_X (-2\|K\|^2 + (n+1)\|R\|^2) \omega_g^n \\
 &= \frac{n+1}{4\pi^2 n(n-1)} \int_X \left(\|R\|^2 - \frac{2}{n+1} \|K\|^2 \right) \omega_g^n
 \end{aligned}$$

Por otro lado, el lema 4.1.3 sabemos que

$$\|R\|^2 \geq \frac{2}{n+1} \|K\|^2$$

por lo que concluimos el resultado del teorema notando que

$$\frac{1}{4\pi^2 n(n-1)} \int_X (-2\|K\|^2 + (n+1)\|R\|^2) \omega_g^n = \frac{n+1}{4\pi^2 n(n-1)} \int_X \left(\|R\|^2 - \frac{2}{n+1} \|K\|^2 \right) \omega_g^n \leq 0.$$

Notemos además, que la igualdad se alcanza cuando

$$\|R\|^2 = \frac{2}{n+1} \|K\|^2,$$

es decir, cuando la curvatura seccional es constante. \square

Observación 4.1.2. *Cuando $n = 2$ encontramos la celebre desigualdad de Bogomolov-Miyaoka-Yau para variedades de Kähler-Einstein compacta X con $\dim(X) = 2$, y que corresponde a*

$$c_1(X)^2 \leq 3c_2(X)$$

4.2. El Teorema de Descomposición de Beauville-Bogomolov.

Gracias a los teoremas de de Rham y de Berger, las variedades Kählerianas compactas Ricci planas se descomponen (módulo un revestimiento étale) en producto de tres tipos primitivos: los toros complejos y las variedades de holonomía $SU(m)$ o $Sp(r)$. El Teorema de Yau, junto con el método de Bochner, permite traducir este resultado en un teorema de descomposición de variedades compactas Kählerianas con $c_1 = 0$, independientemente de la elección de una métrica. En esta descomposición aparecen, aparte de los toros complejos, por una parte variedades proyectivas con fibrado canónico trivial, solamente admitiendo formas holomorfas no-nulas en grado maximal (todos los ejemplos usuales de variedades proyectivas simplemente conexas con $c_1 = 0$ caen en esta categoría); y de otra parte las variedades simplécticas, es decir, dotadas de una 2-forma holomorfa no-degenerada en todo punto.

4.2.1. Representaciones de Holonomía

Presentaremos a continuación los resultados clásicos sobre holonomía que necesitaremos; para las demostraciones, ver por ejemplo [KN96].

Sea (M, g) una variedad riemanniana, y sean p, q dos puntos de M . El transporte paralelo asocia a todo camino γ sobre M uniendo p con q una isometría

$$\varphi_\gamma : T_p(M) \longrightarrow T_q(M).$$

Denotemos en particular por $\Omega(p)$ al conjunto de los caminos cerrados en p , y por $\Omega_0(p)$ al subconjunto de $\Omega(p)$ formado por los caminos cerrados homotópicamente equivalentes al camino trivial. La aplicación

$$\varphi : \Omega(p) \longrightarrow O(T_p(M))$$

tiene por imagen un sub-grupo H del grupo ortogonal $O(T_p(M))$, llamado el **grupo de holonomía** de M en p . La imagen por φ de $\Omega_0(p)$ es la componente conexa de la identidad H_0 de H ; es un sub-grupo de Lie compacto (conexo) de $SO(T_p(M))$, llamado el **grupo de holonomía restringida** de M en p .

Dado que M es asumida conexa, las representaciones de holonomía en puntos diferentes de M son isomorfas. Hablaremos entonces de *la* representación de holonomía de M ou *del* sub-grupo de holonomía $H \subseteq O(n)$.

Diremos que la variedad (M, g) es **irreducible** si su representación de holonomía es irreducible.

Teorema 4.2.1 (de Rham).

Sea (M, g) una variedad riemanniana completa (como espacio métrico) simplemente conexa. Entonces M es isométrica a un producto

$$M_0 \times M_1 \times \cdots \times M_k,$$

donde M_0 es un espacio euclidiano y donde las M_i son irreducibles. Esta descomposición es única (módulo permutaciones). Sea $p = (p_0, \dots, p_k)$ un punto de M , y sea H_i la holonomía de M_i en p_i ; entonces el grupo de holonomía de M en p es el producto

$$H_0 \times \cdots \times H_k,$$

actuando en $T_p(M) = T_{p_0}(M_0) \oplus \cdots \oplus T_{p_k}(M_k)$ por la representación producto (i.e., componente a componente).

Si M es una variedad Kähleriana, las variedades M_i son Kählerianas (restringiendo la métrica de Kähler) y la isometría $M \cong \prod M_i$ es biholomorfa.

Observación 4.2.1. La aserción sobre la unicidad módulo permutación tiene el significado preciso siguiente:

Sean $u : M \rightarrow \prod_{i=0}^k M_i$ y $v : M \rightarrow \prod_{j=0}^l M'_j$ dos isometrías del tipo anterior. Entonces tenemos que $l = k$; existe una permutación σ de $\{0, \dots, k\}$ (tal que $\sigma(0) = 0$) y isometrías $w_i : M_{\sigma(i)} \rightarrow M'_i$ de tal suerte que

$$(v \circ u^{-1})(m_0, \dots, m_k) = (w_0(m_{\sigma(0)}), \dots, w_k(m_{\sigma(k)})) \text{ para } m_i \in M_i.$$

En lo que sigue, la aserción único módulo permutación de una descomposición tendrá siempre este significado.

El problema de determinar representaciones de holonomía se reduce entonces al caso de representaciones irreducibles. La lista de estas últimas fue establecida por Berger en [Ber55] (ver también [Sim62]):

Teorema 4.2.2 (Berger).

Sea (M, g) una variedad riemanniana de dimensión n , y supongamos que M **no es localmente simétrica**². Entonces el grupo de holonomía restringida $H_0 \subseteq \text{SO}(n)$ es isomorfo a uno de los subgrupos siguientes de $\text{SO}(n)$:

1. $\text{SO}(n)$;
2. $\text{U}(m)$ con $n = 2m$;

²Esta condición será automática en el caso $c_1 = 0$.

3. $SU(m)$ con $n = 2m$;
4. $Sp(r)$ con $n = 4r$;
5. $Sp(1) \cdot Sp(r)$ con $n = 4r$;
6. $Spin(9)$ con $n = 16$;
7. $Spin(7)$ con $n = 8$;
8. G_2 con $n = 7$.

El interés de este enunciado proviene de su interpretación geométrica: toda restricción de un grupo de holonomía se traduce por la existencia de campos de tensores paralelos. Recordemos que un campo de tensores t en M es *paralelo* si para cualquier camino γ uniendo p con q , el isomorfismo de transporte paralelo φ_γ hace corresponder $t(q)$ con $t(p)$. El tensor $t(p)$ es entonces invariante por la holonomía; recíprocamente, todo tensor en p invariante por holonomía se extiende de manera única en todo punto por transporte paralelo. En otras palabras:

Teorema 4.2.3 (Principio de holonomía).

Sean (M, g) una variedad riemanniana y p un punto de M . Darse un campo de tensores paralelo en M , de un tipo fijo (e.g. métricas, formas diferenciales, etc.), es equivalente a darse un tensor en p del tipo considerado que sea invariante bajo la acción del grupo de holonomía en p .

Vamos a aplicar ahora este principio a tres casos del teorema de Berger que corresponden a variedades Kählerianas.

Ejemplo 4.2.1. *Caso $H = U(m)$.*

El grupo $U(m)$ se identifica al sub-grupo de $O(2m)$ formado por aplicaciones lineales que preservan una estructura compleja $J \in O(2m)$ fija en \mathbb{R}^{2m} . Gracias al principio de holonomía, tenemos que $H \subseteq U(m)$ si y sólo si existe en M una estructura casi-compleja paralela respecto a la cual g es hermitiana. Dicha estructura es integrable, y la condición de paralelismo significa que la métrica es Kähleriana (cf. [citar]). En consecuencia, tenemos que

$H \subseteq U(m)$ si y sólo si M posee una estructura compleja respecto a la cual la métrica g sea Kähleriana.

Ejemplo 4.2.2. *Caso $H = SU(m)$.*

Supongamos que (M, g) es una variedad Kähleriana, de dimensión m . El grupo $SU(m)$ es el sub-grupo de $U(m)$ formado por las aplicaciones lineales preservando una forma m -lineal alternada (compleja) no-nula en \mathbb{C}^m (i.e., el determinante). Gracias al principio de holonomía, tenemos que $H \subseteq SU(m)$ si y sólo si existe una forma de tipo $(m, 0)$ en M que sea paralela y no-nula. Una tal forma es cerrada (al ser de grado maximal) y luego holomorfa. En otras palabras, tenemos que

$H \subseteq SU(m)$ si y sólo si existe una m -forma holomorfa en M , paralela y no-nula.

Deducimos inmediatamente que el grupo de holonomía restringida $H_0 \subseteq \mathrm{SU}(m)$ si y sólo si el fibrado canónico $\omega_X = \Omega_X^m$, dotado de la métrica inducida por g , es plano; y sabemos que su curvatura no es nada más que la curvatura de Ricci de g . Tenemos entonces que

$H_0 \subseteq \mathrm{SU}(m)$ si y sólo si la variedad Kähleriana (M, g) es Ricci plana.

Ejemplo 4.2.3. $H = \mathrm{Sp}(r)$.

Sea $\mathbb{H} \cong \mathbb{R}^4$ el álgebra de cuaterniones. El grupo $\mathrm{Sp}(r)$ es el grupo de automorfismos \mathbb{H} -lineales de \mathbb{H}^r preservando una forma hermitiana cuaternionica q . Denotando por (I, J, K) la base usual de los cuaterniones, dotamos a \mathbb{H}^r de la estructura compleja definida por I (que cumple $I^2 = -1$); podemos entonces escribir $q = h + \varphi J$, donde h es una forma hermitina compleja y φ es una \mathbb{C} -bilineal alternada. Así, $\mathrm{Sp}(r)$ se identifica al sub-grupo de $\mathrm{U}(2r)$ formado por las aplicaciones lineales que preservan la forma φ . Deducimos del mismo modo que antes

$H \subseteq \mathrm{Sp}(r)$ si y sólo si M admite una estructura compleja para la cual la métrica es Kähleriana y admite una 2-forma holomorfa paralela y no-degenerada en todo punto (vista como forma bilineal alternada en el espacio tangente de M dotado de su estructura compleja).

Dada una variedad riemanniana (M, g) fija, podemos considerar el conjunto de estructuras complejas sobre M para cuales g es Kähleriana; gracias al principio de holonomía, esto equivale a buscar elementos de $\mathrm{SO}(2m)$, de cuadrado $-\mathrm{Id}_{2m}$, conmutando con el grupo de holonomía H . En los primeros dos ejemplos, el conmutador de la representación de holonomía son las matrices de homotecia (y luego de dimensión 1 compleja); deducimos entonces que, módulo conjugación, sólo existe una estructura compleja posible. Sin embargo, en el último ejemplo el conmutador se identifica con el álgebra de cuaterniones; el conjunto de estructuras complejas para las cuales g es Kähleriana se identifica entonces a los cuaterniones de cuadrado (-1) (es decir, a los cuaterniones puros de norma 1, $\pm I$, $\pm J$ y $\pm K$ con la notación anterior). En lo que sigue, dotaremos a dichas variedades de una estructura compleja que será fija.

4.2.2. Variedades Kählerianas compactas Ricci planas

Recordemos que el Teorema de Yau implica que las variedades kählerianas Ricci planas son exactamente las variedades compactas de tipo Kähleriano cuya primera clase de Chern se anula.

Sea M una variedad Kähleriana compacta Ricci plana. Gracias a los teoremas de de Rham y Berger (Ver 4.2.1), el revestimiento universal \widetilde{M} de M es isomorfo a un producto

$$\mathbb{C}^k \times \prod V_i \times \prod X_j,$$

donde las V_j (resp. X_j) admiten como grupo de holonomía al grupo especial unitario (resp. al grupo simpléctico). En el caso en que M es compacta, podemos ser mucho más precisos, para esto utilizaremos el siguiente lema

Lema 4.2.1.

Sea M una variedad Kähleriana compacta, simplemente conexa, cuya curvatura de Ricci es nula. El grupo de automorfismos de M es discreto, y el sub-grupo de automorfismos isométricos es finito.

Demostración. El grupo G de automorfismos complejos de M es un grupo de Lie complejo cuya álgebra de Lie se identifica con $H^0(M, T_M)$, el espacio de campos vectoriales holomorfos en M . Sea \mathfrak{X} un campo vectorial holomorfo; gracias al principio de Bochner ([citar], ver más abajo) \mathfrak{X} es un tensor paralelo. Para todo punto p de M , el vector $\mathfrak{X}(p)$ es invariante por el grupo de holonomía en p ; por otro lado, deducimos gracias a (1) que este no deja invariante ningún vector no-nulo³. Tenemos entonces que $\mathfrak{X} = 0$, lo que prueba que el grupo G es discreto; el sub-grupo *compacto* de G formado por automorfismos isométricos es entonces finito. \square

Podemos ahora, enunciar y probar el siguiente teorema, que precisa el comentario inicial

Teorema 4.2.4. *Sea X una variedad Kähleriana compacta cuya curvatura de Ricci es nula.*

1. *El revestimiento universal \tilde{X} es isomorfo (como variedad Kähleriana) a un producto*

$$\mathbb{C}^k \times \prod V_i \times \prod X_j,$$

donde \mathbb{C}^k está dotado de la métrica Kähleriana estándar, V_i es una variedad Kähleriana compacta simplemente conexa, de grupo de holonomía $SU(m_i) \subseteq SO(2m_i)$, X_j es una variedad Kähleriana compacta simplemente conexa, de grupo de holonomía $Sp(r_j) \subseteq SO(4r_j)$. Esta descomposición es única módulo permutación.

2. *Existe un revestimiento étale finito X' de X , isomorfo como variedad Kähleriana al producto*

$$T \times \prod V_i \times \prod X_j,$$

donde T es un toro complejo.

En particular, el grupo fundamental $\pi_1(X)$ es una extensión de \mathbb{Z}^{2k} de un grupo finito.

Demostración de (1). El teorema de de Rham (§1) provee una descomposición

$$\tilde{X} \cong \mathbb{C}^k \times \prod_i M_i,$$

donde las variedades M_i son irreducibles. El teorema de Cheeger-Gromoll [CG72] asegura que además las variedades M_i son compactas. Dado que la curvatura de Ricci de M_i es nula, su grupo de holonomía H_i está contenido en $SU(m_i)$. Más aún, tenemos que M_i **no es** simétrica (pues la curvatura de Ricci de un espacio riemanniano simétrico compacto es positiva y no-degenerada; [KN96, Teo.

³Por verificar: aquí se usa la irreducibilidad de la holonomía.

8.6]). El teorema de Berger nos restringe solamente a las posibilidades $H_i = \mathrm{SU}(m_i)$ o bien $H_i = \mathrm{Sp}(r_i)$. \square

Demostración de (2). Escribamos

$$M := \prod_i V_i \times \prod_j X_j.$$

El grupo fundamental de X actúa sobre $\mathbb{C}^k \times M$ mediante automorfismos isométricos. Sea u un automorfismo isométrico; debido a la unicidad de la descomposición de de Rham, existen automorfismos isométricos u_1 de \mathbb{C}^k y u_2 de M de tal suerte que tenemos

$$u(z, m) = (u_1(z), u_2(m)) \text{ para } z \in \mathbb{C}^k, m \in M.$$

Consideremos el homomorfismo $u \mapsto u_2$ desde $\pi_1(X)$ en el grupo finito de automorfismos isométricos de M , y sea Γ su kernel. El grupo Γ actúa libremente sobre \mathbb{C}^k , y el cociente \mathbb{C}^k/Γ es compacto. Sea Γ' el conjunto de traslaciones de Γ ; el teorema de Bieberbach⁴ afirma que Γ' es un sub-grupo de índice finito de Γ . La variedad compacta $T = \mathbb{C}^k/\Gamma'$ es entonces un toro complejo, y luego $T \times M$ es un revestimiento finito de X , de donde deducimos (2). \square

En el caso de variedades Kählerianas *compactas*, la holonomía se puede interpretar puramente en términos de geometría compleja, sin que intervenga la métrica. Esto se basa por un lado en el Teorema de Yau, y por otra parte en el resultado siguiente de [YB53, Pag. 142].

Teorema 4.2.5 (Principio de Bochner).

Sea X una variedad Kähleriana compacta cuya curvatura de Ricci se anula. Entonces todo campo de tensores holomorfo en X es paralelo.

La demostración del principio de Bochner se basa en la fórmula siguiente (que obtenemos por cálculo directo): si τ es un campo de tensores en X , entonces

$$\Delta(\|\tau\|^2) = \|D\tau\|^2.$$

De lo anterior deducimos que el laplaciano de la función $\|\tau\|^2$ es positivo, y luego nulo, lo que implica que $D\tau = 0$. De este resultado, desprendemos el siguiente corolario que utilizaremos en dos casos de interés, que se exponen en las próximas secciones.

Corolario 4.2.1.

Sea $x \in X$, y sea H la holonomía de X en x . La aplicación

$$\omega \longmapsto \omega(x)$$

⁴Detallar.

induce un isomorfismo entre $H^0(X, \Omega_X^p)$ y el sub-espacio de $\Omega^p(x)$ dado por las p -formas invariantes por H .

Aplicaremos este corolario en las siguientes secciones para ver algunas consecuencias del principio de Bochner.

4.2.3. Variedades Especiales Unitarias

Proposición 4.2.1.

Sea X una variedad Kähleriana compacta, de dimensión $m \geq 3$, cuyo grupo de holonomía es $SU(m)$. Entonces,

(i) X es proyectiva.

(ii) Tenemos que

$$H^0(X, \Omega_X^p) = 0 \text{ para todo } 0 < p < m,$$

$$\text{y además } \chi(X, \mathcal{O}_X) = 1 + (-1)^m.$$

Demostración. Sea $x \in X$. La representación de $SU(m)$ en $\Omega^p(x)$ es isomorfa a $\Lambda^p \check{\sigma}$, donde $\check{\sigma}$ denota la representación dual de la representación estándar de $SU(m)$ en \mathbb{C}^m . Ella es irreducible para todo p , y no trivial para $0 < p < m$; para estos valores de p , ella no contiene por ende sub-espacios invariantes, de donde se obtiene la anulación de $H^0(X, \Omega_X^p)$. Deducimos por ende el valor de $\chi(X, \mathcal{O}_X)$ gracias al teorema de Hodge. Finalmente, una variedad Kähleriana compacta con $H^{2,0}(X) = 0$ es proyectiva: en efecto, podemos aproximar arbitrariamente la forma de Kähler por una forma armónica positiva cuya primera clase de Chern pertenece a $H^2(X, \mathbb{Q})$; dado que $H^{2,0}(X) = 0$, esta forma es necesariamente de tipo $(1, 1)$, y luego (gracias al Teorema de Kodaira) un múltiplo de ella define un incrustamiento de X en un espacio proyectivo. \square

Observación 4.2.2. *Notar que se tiene el resultado más fuerte siguiente. Sea ω un elemento no-nulo de $H^0(X, \Omega_X^m)$, y considerémoslo como un tensor anti-simétrico en $H^0(X, (\Omega_X^1)^{\otimes m})$. Entonces, el álgebra*

$$\bigoplus_p H^0(X, (\Omega_X^1)^{\otimes p})$$

está generada por ω . Esto resulta tal como antes gracias al principio de Bochner, junto con el resultado clásico de teoría geométrica de invariantes siguiente: los únicos tensores covariantes en \mathbb{C}^m que son invariantes por la acción de $SU(m)$ son los polinomios en la función determinante.

Recíprocamente, la propiedad (ii) anterior permite caracterizar las variedades especiales unitarias:

Proposición 4.2.2.

Sea X una variedad compacta de tipo Kähleriano, de dimensión m . Las condiciones siguientes son equivalentes:

- (a) X admite una métrica Kähleriana cuyo grupo de holonomía es $SU(m)$;
- (b) El fibrado canónico de X es trivial, y tenemos que

$$H^0(X', \Omega_{X'}^p) = 0 \text{ para todo } 0 < p < m$$

para todo revestimiento finito $X' \rightarrow X$.

Si cualquiera de estas condiciones se satisface, el grupo fundamental $\pi_1(X)$ es finito.

Demostración. Vimos que, bajo la hipótesis (a), el fibrado canónico de X es trivial (por lo visto en el ejemplo 4.2.2) y que $H^0(X, \Omega_X^p) = 0$ para $0 < p < m$. Si X' es un revestimiento étale de X , su grupo de holonomía todavía es $SU(m)$, y luego tenemos que (a) implica (b).

Supongamos que la condición (b) se satisface. Como ω_X es trivial, el teorema de Yau implica la existencia de una métrica Kähleriana Ricci plana en X . Gracias al Teorema 4.2.4, existe un revestimiento finito X' de X tal que

$$X' \cong T \times \prod V_i \times \prod X_j.$$

La condición $H^0(X', \Omega_{X'}^p) = 0$ para $0 < p < m$ implica que X' no es otra cosa que uno de los V_i (o una superficie K3 si $m = 2$). Tenemos por ende que $H_0 = SU(m)$, y como H está contenido en $SU(m)$ (ver el ejemplo 4.2.2), tenemos que $H = SU(m)$. Finalmente, notamos que X' es simplemente conexa, lo que prueba que $\pi_1(X)$ es finito. \square

Observación 4.2.3. Si m es par, entonces X es simplemente conexa. En efecto, con las notaciones anteriores, si $f : X' \rightarrow X$ es un revestimiento finito, entonces tenemos que $\chi(X', \mathcal{O}_{X'}) = 2 = \chi(X, \mathcal{O}_X)$ dado que m es par, y además (gracias al teorema de Grothendieck-Hirzebruch-Riemann-Roch) tenemos que $\chi(X', \mathcal{O}_{X'}) = \deg(f)\chi(X, \mathcal{O}_X)$, de donde se deduce que $\deg(f) = 1$ y luego $X' = X$. Veremos más abajo que este no es el caso si m es impar.

Ejemplo 4.2.4. Todos los ejemplos clásicos de variedades proyectivas cuyo fibrado canónico es trivial verifican las condiciones de la proposición anterior.

1. Por ejemplo, las hipersuperficies suaves de grado $m+2$ en \mathbb{P}^{m+1} , y las intersecciones completas suaves de grados (d_1, \dots, d_r) en \mathbb{P}^n , con $\sum d_i = n+1$. Más generalmente, las intersecciones completas quasi-homogéneas de grados (d_1, \dots, d_r) en el espacio proyectivo con pesos $\mathbb{P}(a_1, \dots, a_n)$ con $\sum d_i = \sum a_i$.
2. La siguiente construcción permite construir numerosos ejemplos. Sea V una variedad proyectiva suave de dimensión ≥ 3 , tal que el divisor anti-canónico $-K_V$ es amplio. En otras palabras, V es una **variedad de Fano**. Entonces, toda hipersuperficie suave X en el sistema lineal $| -K_V |$ es especial unitaria (es decir, verifica las condiciones de la proposición anterior). En efecto, V es simplemente conexa (por el teorema de Myers), y luego lo mismo es cierto para X gracias al teorema de la sección hiperplana de Lefschetz. Además, la fórmula de adjunción

implica que $K_X \equiv (K_V + V)|_V \equiv 0$. Finalmente, el teorema de anulación de Kodaira implica que $H^p(V, \mathcal{O}_V) = 0$ para todo $p > 0$, de donde deducimos que $H^q(X, \mathcal{O}_X) = 0$ para todo $0 < q < \dim(X)$. Como ejemplos de variedades V con divisor anti-canónico muy amplio citemos por ejemplo a los espacios homogéneos y sus productos.

3. Sea p un número primo ≥ 5 , y consideremos la hipersuperficie \tilde{X} de \mathbb{P}^{p-1} definida por la ecuación de Fermat $X_0^p + \dots + X_{p-1}^p = 0$. El grupo μ_p de raíces p -ésimas de la unidad actúa libremente sobre \tilde{X} mediante

$$\xi \cdot (X_0, \dots, X_{p-1}) := (X_0, \xi X_1, \dots, \xi^{p-1} X_{p-1}) \text{ para todo } \xi \in \mu_p.$$

La variedad cociente $X = \tilde{X}/\mu_p$ es especial unitaria, y su grupo fundamental $\pi_1(X)$ es isomorfo a μ_p .

4.2.4. Variedades Simplécticas Holomorfas

Sea X una variedad compleja. Denotaremos por T_X al fibrado tangente holomorfo de X . Diremos que una 2-forma holomorfa φ en X es *no-degenerada* en un punto $x \in X$ si la forma alternada $\varphi(x)$ en $T_X(x)$ es no-degenerada. Si $\dim(X) = 2r$, esto equivale a decir que la forma $\varphi^r := \wedge^r \varphi$ no se anula en x .

Proposición 4.2.3.

Sea X una variedad Kähleriana compacta de dimensión $2r$, cuyo grupo de holonomía es $\mathrm{Sp}(r)$. Entonces,

- (i) Existe una 2-forma holomorfa φ en X que es no-degenerada en todo punto.
- (ii) Tenemos que $H^0(X, \Omega_X^p) = 0$ si p es impar, y $H^0(X, \Omega_X^{2q}) = \mathbb{C} \cdot \varphi^q$ para $0 \leq q \leq r$. En particular, tenemos que $\chi(X, \mathcal{O}_X) = r + 1$.

Demostración. El punto (i) fue demostrado en el ejemplo 4.2.3. Gracias a [Bou75, Sección 13], la representación de $\mathrm{Sp}(r)$ en $\Omega^p(x)$ para $p \leq r$ se separa en una suma directa

$$\Omega^p(x) = P_p \oplus P_{p-2}\varphi(x) \oplus P_{p-4}\varphi^2(x) \oplus \dots,$$

donde las representaciones P_k (con $0 \leq k \leq r$) son irreducibles, y no triviales para $k > 0$. Por otra parte, la multiplicación por $\varphi^k(x)$ define un isomorfismo equivariante desde $\Omega^{r-k}(x)$ hacia $\Omega^{r+k}(x)$. Deducimos directamente que los únicos elementos invariantes de $\Omega^p(x)$ son (módulo reescalamiento) las potencias exteriores de φ , de donde se deduce (ii). \square

El resultado anterior nos lleva a introducir la siguiente definición.

Definición.

Sea X una variedad compleja. Una **estructura simpléctica** (compleja) en X es una 2-forma cerrada holomorfa en X , no-degenerada en todo punto.

Observación 4.2.4. 1. Una variedad simpléctica compleja X es de dimensión par $2r$, y su fibrado canónico K_X es trivial. En efecto, si φ es una estructura simpléctica en X , la forma φ^r es un generador de K_X sin ceros ni polos.

2. Esta terminología se introduce por analogía con la noción de estructura simpléctica real sobre una variedad diferenciable. Podemos observar que si φ es una estructura simpléctica compleja en X , las 2-formas reales $\operatorname{Re}(\varphi)$ e $\operatorname{Im}(\varphi)$ son estructuras simpléticas reales sobre la variedad diferenciable X (puesto que las formas $(\varphi + \bar{\varphi})^{2r}$ y $(\varphi - \bar{\varphi})^{2r}$, proporcionales a $\varphi^r \bar{\varphi}^r$, no se anulan nunca). En este artículo, sólo consideraremos estructuras simpléticas complejas, que llamaremos simplemente estructuras simpléticas.

3. Sea X una variedad compleja, B un sub-espacio de X de codimensión ≥ 2 . Entonces toda estructura simpléctica φ en $X \setminus B$ se extiende de manera única a una estructura simpléctica en X . En efecto, gracias al Teorema de Hartogs, φ se extiende de manera única a una 2-forma $\tilde{\varphi}$ en X ; si $\dim(X) = 2r$, el divisor de $\tilde{\varphi}^r$, que debe estar contenido en B , es nulo, de tal suerte que $\tilde{\varphi}$ es una estructura simpléctica.

Ejemplo 4.2.5.

1. El fibrado cotagente de toda variedad compleja admite una estructura simpléctica canónica.
2. Sea Y una variedad compleja de dimensión $2r$, y sea ω una 2-forma holomorfa cerrada en Y tal que ω^r no sea idénticamente nula. Entonces, ω induce una estructura simpléctica en $Y \setminus \operatorname{div}(\omega^r)$.
3. Los toros complejos y las superficies K3 son ejemplos de variedades simpléticas compactas. Otros ejemplos de dichas variedades serán estudiados en la segunda parte.

Relacionemos ahora esta definición algebraica a la geometría diferencial.

Proposición 4.2.4.

Sea X una variedad compleja compacta, de tipo Kähleriana, de dimensión $2r$.

1. Las condiciones siguientes son equivalentes:
 - (a) X posee una métrica Kähleriana cuyo grupo de holonomía está contenido en $\operatorname{Sp}(r)$.
 - (b) X admite una estructura simpléctica.
2. Las condiciones siguientes son equivalentes:
 - (a') X admite una métrica Kähleriana cuyo grupo de holonomía es $\operatorname{Sp}(r)$.

(b') X es simplemente conexa y admite una estructura simpléctica, única modulo reescalamiento.

Si alguna de las condiciones (a') o (b') se satisfacen, decimos que X es una **variedad simpléctica irreducible**.

Demostración. Probemos (1). El hecho que (a) implica (b) se obtiene del ejemplo 4.2.3. Bajo la hipótesis (b), el fibrado canónico de X es trivial; el Teorema de Yau implica entonces la existencia de una métrica Kähleriana g Ricci plana. La estructura simpléctica de X es entonces paralela (por el principio de Bochner), lo que implica que la holonomía de (X, g) está contenida en $\mathrm{Sp}(r)$ (nuevamente, por el ejemplo 4.2.3).

Probemos (2). Bajo la hipótesis (a'), la unicidad de la estructura simpléctica de X se deduce de la Proposición 4.2.3. Gracias al Teorema 4.2.4, el revestimiento universal \tilde{X} de X es una variedad Kähleriana compacta de holonomía $\mathrm{Sp}(r)$. En particular, la Proposición 4.2.3 implica

$$\chi(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = r + 1 = \chi(X, \mathcal{O}_X),$$

y luego (gracias al Teorema de Grothendieck-Hirzebruch-Riemann-Roch) tenemos que $X = \tilde{X}$, i.e., X es simplemente conexa. Supongamos ahora que X verifica las condiciones de (b'). Gracias a la primera parte de la demostración del Teorema 4.2.4, X es isomorfa a un producto de variedades Kählerianas irreducibles X_1, \dots, X_m . La estructura simpléctica φ de X induce una estructura simpléctica φ_i en cada X_i , y tenemos que $\varphi = \sum_i \mathrm{pr}_i^* \varphi_i$. Para todo elemento $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de $(\mathbb{C}^*)^m$, la forma $\sum_i \lambda_i \mathrm{pr}_i^* \varphi_i$ es también una estructura simpléctica. La hipótesis (b') implica entonces que $m = 1$, y por lo tanto que X es una variedad Kähleriana de holonomía $\mathrm{Sp}(r)$. \square

4.2.5. El teorema de Descomposición de Beauville-Bogomolov

Concluiremos esta sección dando una formulación y prueba del teorema de descomposición que es independiente de la elección de una métrica. Para la demostración, será necesario el siguiente lema.

Lema 4.2.2.

Sean Y_1, \dots, Y_n variedades compactas de tipo Kähleriano, simplemente conexas y de primera clase de Chern nula, y sea $X = \prod_{l=1}^n Y_l$. Entonces, las métricas Kählerianas Ricci planas en X son exactamente las métricas $\sum_l \mathrm{pr}_l^* g_l$, donde g_l es una métrica Kähleriana Ricci plana en Y_l para cada $l \in \{1, \dots, n\}$.

Demostración. Sea g una métrica Kähleriana Ricci plana en X , y sea $\omega \in H^{1,1}(X)$ su clase de cohomología. Dado que las Y_j son simplemente conexas, ω se escribe de manera única como $\omega = \sum \mathrm{pr}_l^* \omega_l$, donde ω_l es una clase de Kähler en $H^{1,1}(Y_l)$. Gracias al Teorema de Yau, existe una **única** métrica Kähleriana Ricci plana g_l en Y_l cuya clase es exactamente ω_l . Entonces, la métrica Kähleriana Ricci plana $\sum_l \mathrm{pr}_l^* g_l$ en X tiene clase ω , y luego coincide con g . \square

Teorema 4.2.6 (Descomposición de Beauville-Bogomolov).

Sea X una variedad compacta de tipo Kähleriano tal que $c_1(X) = 0$ en $H^2(X, \mathbb{R})$.

1. El revestimiento universal \tilde{X} de X es isomorfo a un producto

$$\mathbb{C}^k \times \prod_i V_i \times \prod_j X_j,$$

donde V_i es una variedad proyectiva simplemente conexa, de dimensión $m_i \geq 3$, con fibrado canónico trivial, tal que $H^0(V_i, \Omega_{V_i}^p) = 0$ para $0 < p < m_i$; X_j es una variedad simpléctica irreducible, compacta de tipo Kähleriana. Esta descomposición es única módulo permutación.

2. Existe un revestimiento étale finito X' de X tal que

$$X' \cong T \times \prod_i V_i \times \prod_j X_j,$$

donde T es un toro complejo.

Demostración. Gracias al Teorema de Yau, X admite una métrica Kähleriana Ricci plana. El Teorema 4.2.4 y los resultados anteriores sobre **variedades especiales unitarias** y **variedades simplécticas holomorfas** implican entonces las afirmaciones relacionadas a la existencia en el enunciado.

Para demostrar la unicidad, analizaremos primero el caso en que X es simplemente conexa. Fijemos en este caso una métrica Kähleriana Ricci plana. Gracias al lema anterior, tenemos que todo isomorfismo $X \rightarrow \prod V_i \times \prod X_j$ es *isométrico* siempre que elijamos métricas Kählerianas Ricci planas convenientes en cada uno de los V_i y X_j . La unicidad resulta entonces de la unicidad obtenida en el teorema 4.2.4.

Para tratar el caso general, basta probar el enunciado siguiente: si Y y Z son variedades compactas, simplemente conexas, de tipo Kähleriano cuyas primeras clases de Chern son nulas, entonces todo isomorfismo $u : \mathbb{C}^p \times Y \rightarrow \mathbb{C}^q \times Z$ se escribe como $u = (u_1, u_2)$, donde $u_1 : \mathbb{C}^p \rightarrow \mathbb{C}^q$ y $u_2 : Y \rightarrow Z$ son isomorfismos. Por otra parte, dado que Y es compacta, el teorema de Liouville implica que podemos escribir

$$u(t, y) = (u_1(t), u_t(y)) \text{ para } t \in \mathbb{C}^p \text{ e } y \in Y,$$

donde u_1 es un isomorfismo desde \mathbb{C}^p hacia \mathbb{C}^q (lo cual implica en particular que $p = q$), y donde u_t es un automorfismo de Y que depende continuamente de $t \in \mathbb{C}^p$. Dado que el grupo de automorfismo de Y es discreto, gracias al lema 4.2.1, tenemos que u_t es constante, lo que prueba nuestra afirmación y por ende el teorema. \square

4.3. Conexidad Simple de Variedades de las variedades de Fano.

Teorema 4.3.1 (Teorema de Myer).

Sea M una variedad Riemanniana completa con curvatura $\text{Ric} \geq \delta > 0$, entonces su revestimiento universal \tilde{M} es compacto, y en particular, su primer grupo fundamental $\pi_1(M)$ es finito.

Si X es una variedad proyectiva suave y $\pi : X \rightarrow Y$ es un morfismo étale, es decir,

$$\forall p \in X, \quad \exists U_p \subset X \text{ vecindad abierta de } p \text{ tal que } \pi^{-1}(U_p) = \bigsqcup_{j=1}^r U_j$$

Entonces,

1. Si Y es una variedad proyectiva, entonces existe un fibrado L amplio y el teorema de incrustación de Kodaira (ver teorema 1.8.1) nos dice que π^*L define un fibrado amplio de X por lo que X debe ser proyectiva.
2. La fórmula de Riemann-Hurwitz relaciona el fibrado canónico K_Y con el pullback de K_X como sigue

$$K_Y = \pi^*K_X + \text{Ram}(\pi)$$

donde $\text{Ram}(\pi)$ corresponde a la ramificación de π que se define en detalle en [Har77, Sección 4.2]. En particular, si π es étale entonces $\text{Ram}(\pi) = 0$. Luego, $-K_Y = \pi^*(-K_X)$ y por lo tanto, que X sea una variedad de Fano implica que Y también lo es.

3. El teorema de Grothendieck-Hirzebruch-Riemann-Roch nos dice que

$$\chi(Y, \mathcal{O}_Y) = \deg(\pi) \cdot \chi(X, \mathcal{O}_X)$$

En particular, si $Y = \tilde{X}$ el cubrimiento universal de X , entonces

$$\deg(\pi) = |\pi_1(X)|$$

Teorema 4.3.2.

Toda variedad de Fano es simplemente conexa.

Demostración. Sea X una variedad de Fano, el teorema de anulación de Kodaira (ver el teorema 1.8.2) y la dualidad de Serre implican que

$$h^{0,q}(X, \mathcal{O}_X) = h^q(X, \mathcal{O}_X) = h^{n-q}(X, -K_X) = 0, \quad \forall q > 0.$$

y por lo tanto, el teorema de Hirzebruch-Riemann-Roch nos dice que

$$\chi(X, \mathcal{O}_X) = h^0(X, \mathcal{O}_X) = 1.$$

Como $c_1(X) > 0$, la solución de Yau como replicamos en el capítulo anterior nos dice que X admite una métrica de Kähler con curvatura de Ricci positiva. Luego, el teorema de Myer implica que el primer grupo fundamental de X es finito. Además, dado que el cubrimiento universal \tilde{X} es una variedad compacta (y, gracias a las observaciones anteriores, una variedad proyectiva de Fano), el Teorema de Grothendieck-Hirzebruch-Riemann-Roch implica que

$$\chi(\tilde{X}, \mathcal{O}_{\tilde{X}}) = |\pi_1(X)| \cdot \chi(X, \mathcal{O}_X).$$

Así, dado que las características de X y \tilde{X} coinciden, concluimos que $|\pi_1(X)|$ es 1, o equivalentemente el primer grupo fundamental es trivial y por lo tanto X es simplemente conexa. \square

BIBLIOGRAFÍA

- [Aub78] Thierry Aubin. Équations du type Monge-Ampère sur les variétés kählériennes compactes. *Bull. Sci. Math. (2)*, 102(1):63–95, 1978.
- [Bal06] Werner Ballmann. *Lectures on Kähler manifolds*. ESI Lectures in Mathematics and Physics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2006.
- [Ber55] Marcel Berger. Sur les groupes d’holonomie homogène des variétés à connexion affine et des variétés riemanniennes. *Bull. Soc. Math. France*, 83:279–330, 1955.
- [Blo12] Zbigniew Błocki. The Calabi-Yau theorem. In *Complex Monge-Ampère equations and geodesics in the space of Kähler metrics*, volume 2038 of *Lecture Notes in Math.*, pages 201–227. Springer, Heidelberg, 2012.
- [Blo13] Zbigniew Błocki. The complex Monge-Ampère equation in Kähler geometry. In *Pluripotential theory*, volume 2075 of *Lecture Notes in Math.*, pages 95–141. Springer, Heidelberg, 2013.
- [Bou75] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Fasc. XXXVIII: Groupes et algèbres de Lie. Chapitre VII: Sous-algèbres de Cartan, éléments réguliers. Chapitre VIII: Algèbres de Lie semi-simples déployées*. Hermann, Paris, 1975. Actualités Sci. Indust., No. 1364.
- [Cal57] Eugenio Calabi. On Kähler manifolds with vanishing canonical class. In *Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz*, pages 78–89. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [CDS15] Xiuxiong Chen, Simon Donaldson, and Song Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities. *J. Amer. Math. Soc.*, 28(1):183–197, 2015.
- [CG72] Jeff Cheeger and Detlef Gromoll. The splitting theorem for manifolds of nonnegative Ricci curvature. *J. Differential Geometry*, 6:119–128, 1971/72.
- [CS53] Henri Cartan and Jean-Pierre Serre. Un théorème de finitude concernant les variétés analytiques compactes. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 237:128–130, 1953.

- [dC07] Mark Andrea de Cataldo. *The Hodge theory of projective manifolds*. Imperial College Press, London, 2007.
- [dC15] Manfredo Perdigao do Carmo. *Geometria Riemanniana*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 5th edition, 2nd printing edition, 2015.
- [Dem97] Jean-Pierre Demailly. *Complex analytic and differential geometry*. Citeseer, 1997.
- [DR31] Georges De Rham. *Sur l'analyse situs des variétés à n dimensions*. NUMDAM, [place of publication not identified], 1931.
- [Fut83] A. Futaki. An obstruction to the existence of Einstein Kähler metrics. *Invent. Math.*, 73(3):437–443, 1983.
- [GH78] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978. Pure and Applied Mathematics.
- [GT01] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.
- [Huy05] Daniel Huybrechts. *Complex geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005. An introduction.
- [KN96] Shoshichi Kobayashi and Katsumi Nomizu. *Foundations of differential geometry. Vol. I, II*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1996. Reprint of the 1969 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [Kob87] Shoshichi Kobayashi. *Differential geometry of complex vector bundles*, volume 15 of *Publications of the Mathematical Society of Japan*. Princeton University Press, Princeton, NJ; Princeton University Press, Princeton, NJ, 1987. Kanô Memorial Lectures, 5.
- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.
- [Mat57] Yozô Matsushima. Sur la structure du groupe d'homéomorphismes analytiques d'une certaine variété kählérienne. *Nagoya Math. J.*, 11:145–150, 1957.
- [NN57] A. Newlander and L. Nirenberg. Complex analytic coordinates in almost complex manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 65:391–404, 1957.
- [Ser55] Jean-Pierre Serre. Un théorème de dualité. *Comment. Math. Helv.*, 29:9–26, 1955.

-
- [Sim62] James Simons. On the transitivity of holonomy systems. *Ann. of Math. (2)*, 76:213–234, 1962.
- [Szé14] Gábor Székelyhidi. *An introduction to extremal Kähler metrics*, volume 152 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2014.
- [Tia90] Gang Tian. On a set of polarized Kähler metrics on algebraic manifolds. *J. Differential Geom.*, 32(1):99–130, 1990.
- [Tia97] Gang Tian. Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature. *Invent. Math.*, 130(1):1–37, 1997.
- [Yau78] Shing Tung Yau. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampère equation. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 31(3):339–411, 1978.
- [YB53] K. Yano and S. Bochner. *Curvature and Betti numbers*. Annals of Mathematics Studies, No. 32. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1953.