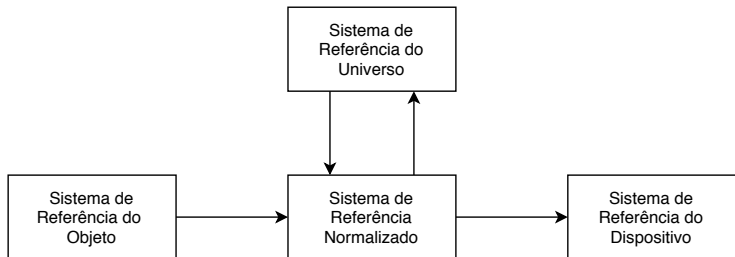


Transformações Projetiva

Caio Santiago
caio.rafael@unasp.edu.br

Computação gráfica
Engenharia da Computação
UNASP

Sistemas de Referências



Problema

Como expressar um objeto de 3 dimensões em apenas duas dimensões ?

Um pouco de historia



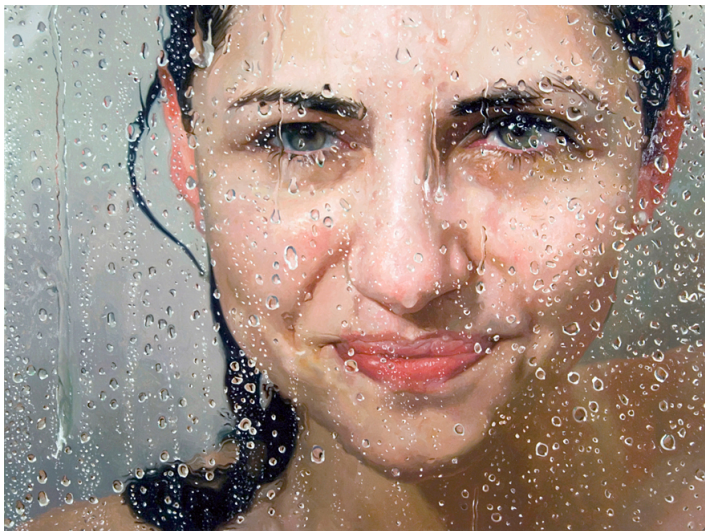
Um pouco de historia



Um pouco de historia

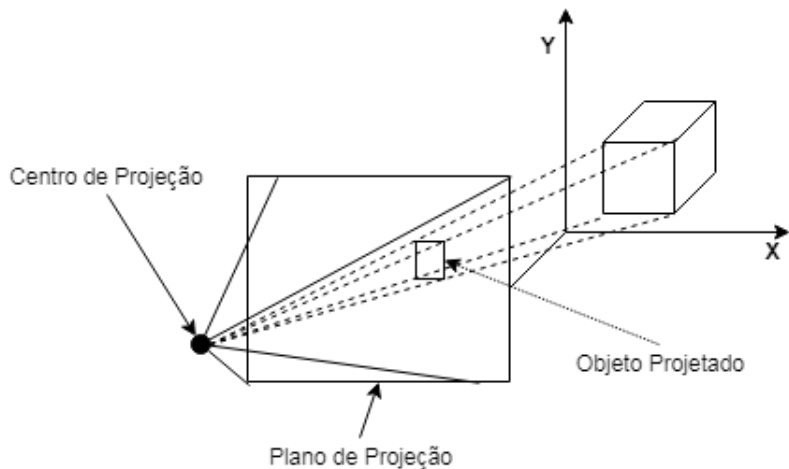


Um pouco de historia

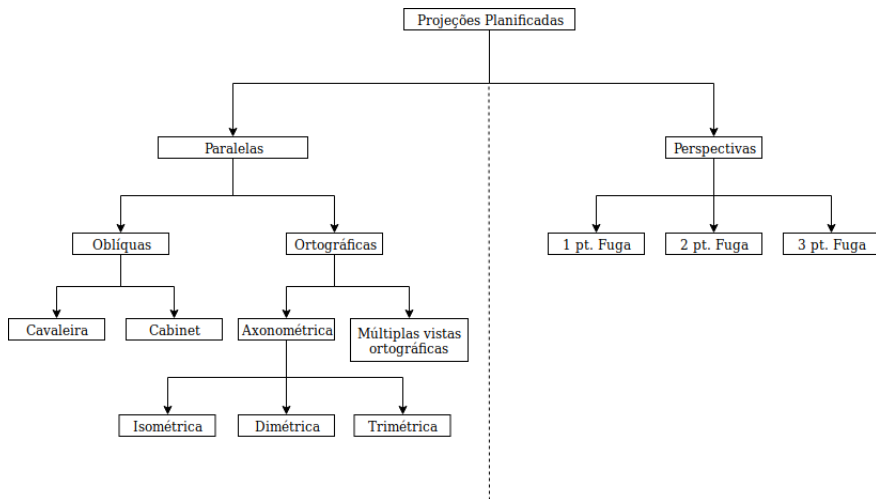


Alyssa Monks

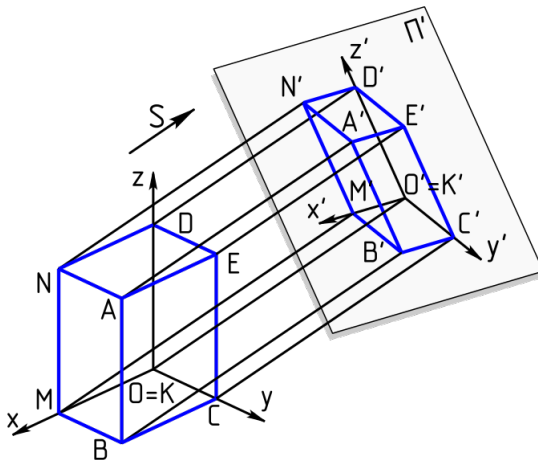
Projeção



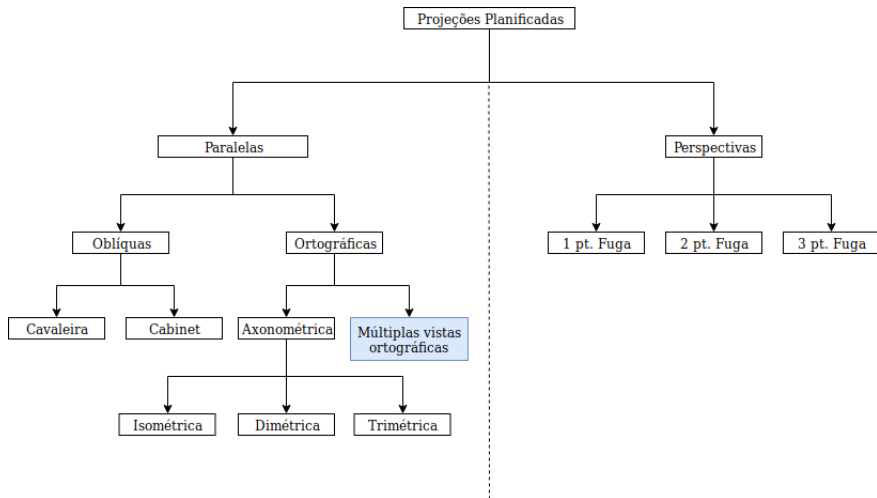
Tipos de projeção



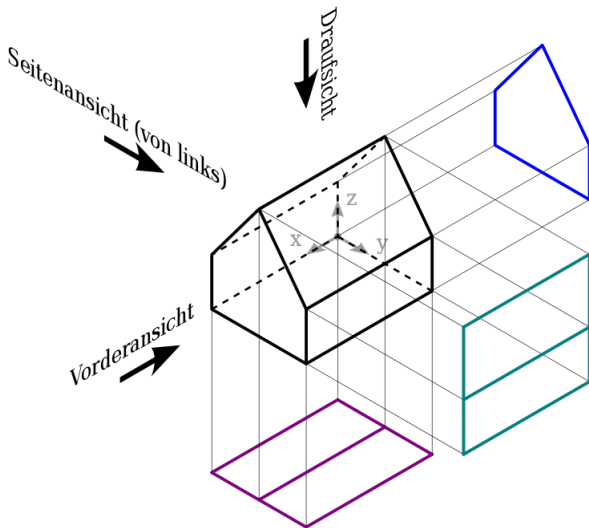
Projeção paralela



Múltiplas visões ortogonais



Múltiplas visões ortogonais



Múltiplas visões ortogonais

Projeção em XY

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_z & 1 \end{bmatrix}$$

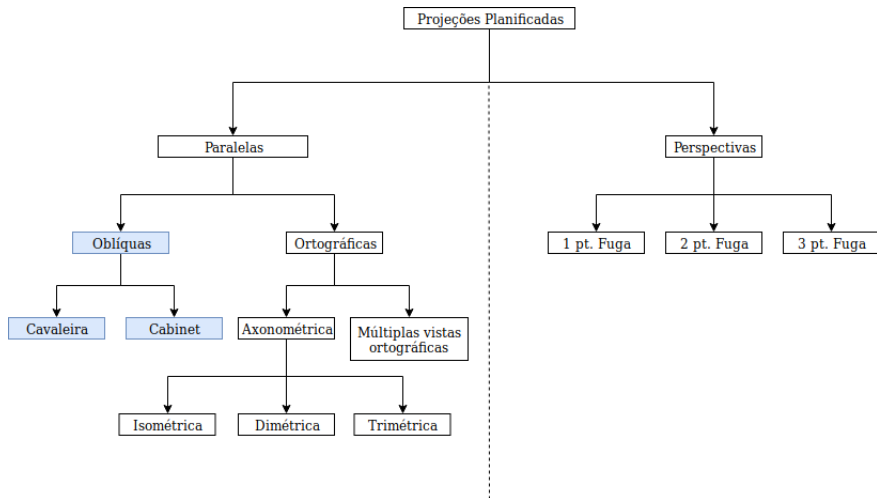
Projeção em YZ

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ T_x & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

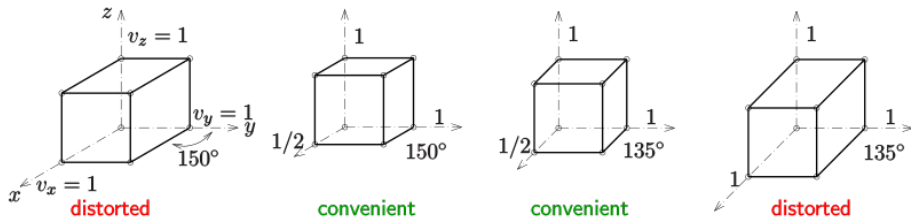
Projeção em XZ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & T_y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção oblíqua



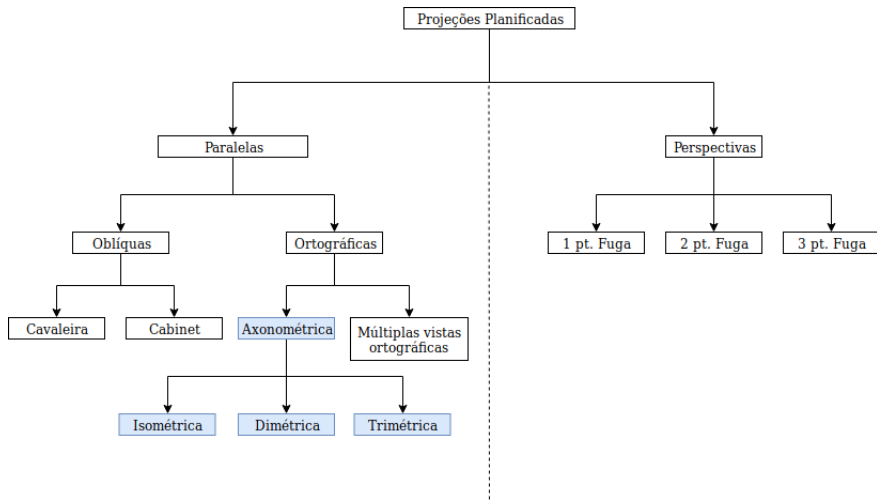
Projeção oblíqua



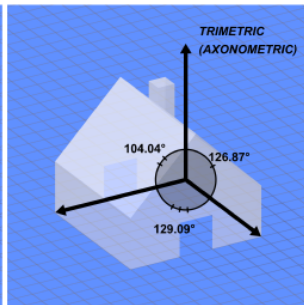
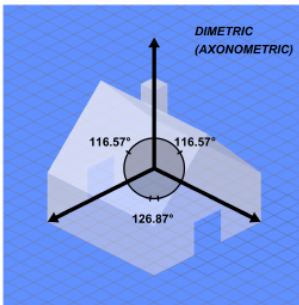
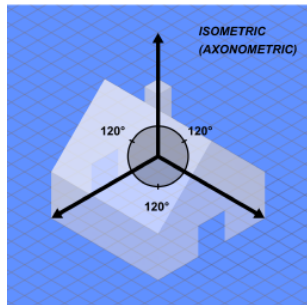
A projeção **cavaleira** distorce a perspectiva, pois retas paralelas dos eixos são representadas com o mesmo comprimento em tela.

A projeção **cabinet** não distorce a perspectiva.

Projeção axonométrica



Projeção axonométrica



A projeção **isométrica** os planos dos eixos são apresentados com a mesma angulação.

A projeção **dimétrica** dois planos dos eixos são apresentados com a mesma angulação.

A projeção **trimétrica** nenhum dos planos dos eixos têm o mesmo angulo.

Projeção axonométrica – Isométrica



Simcity 2000 - Visão isométrica

Projeção axonométrica – Isométrica



Age of Empires II

Projeção axonométrica – Isométrica



Lara Croft Go

Projeção axonométrica – Isométrica



Monument Valley

Projeção axonométrica – Isométrica

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta & 0 & -\sin \delta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin \delta & 0 & \cos \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \\ 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 \\ \sin \delta & -\cos \delta \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção axonométrica – Isométrica

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 \\ \sin \delta & -\cos \delta \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \beta \sin \delta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 \\ \sin \delta & -\cos \delta \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cos \beta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \delta \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & 0 & 0 \\ \sin \delta & -\cos \delta \sin \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \delta & -\sin \beta \cos \delta & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção axonométrica – Isométrica

Posição

Comprimento

$$\begin{bmatrix} \cos \delta & \sin \beta \sin \delta & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\sqrt{(\cos^2 \delta + \sin^2 \beta \sin^2 \delta)}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \cos \beta & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\sqrt{\cos^2 \beta}$$

$$\begin{bmatrix} \sin \delta & -\sin \beta \cos \delta & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\sqrt{\sin^2 \delta + \sin^2 \beta \cos^2 \delta}$$

Projeção axonométrica – Isométrica

Para ser isométrico :

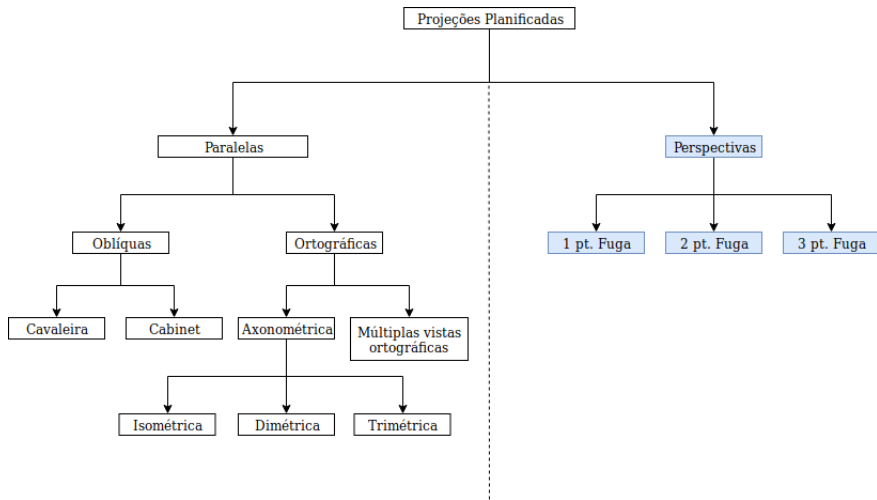
$$\sqrt{(\cos^2 \delta + \sin^2 \beta \sin^2 \beta)} = \sqrt{\cos^2 \beta}$$

$$\sqrt{(\cos^2 \delta + \sin^2 \beta \sin^2 \beta)} = \sqrt{\sin^2 \delta + \sin^2 \beta \cos^2 \delta}$$

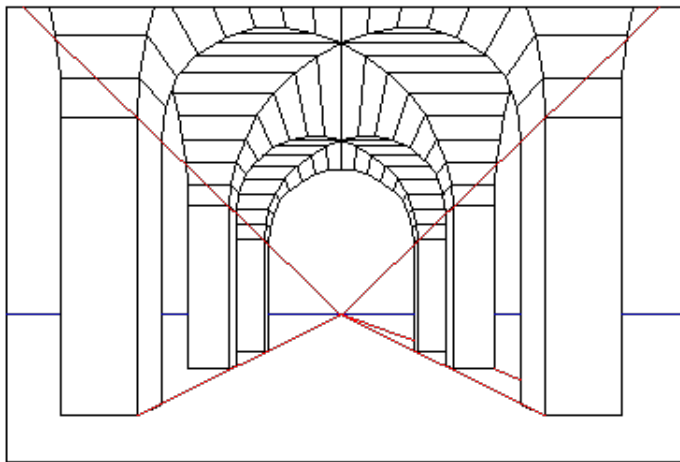
Logo, $\beta \cong 35.26^\circ$ ($\sin \beta = 0.577$ e $\cos \beta = 0.816$) e
 $\delta = 45^\circ$ ($\sin \delta = \cos \delta = 0.707$).

$$\begin{bmatrix} 0.707 & 0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0.816 & 0 & 0 \\ 0.707 & -0.408 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Projeção perspectiva ou cônica

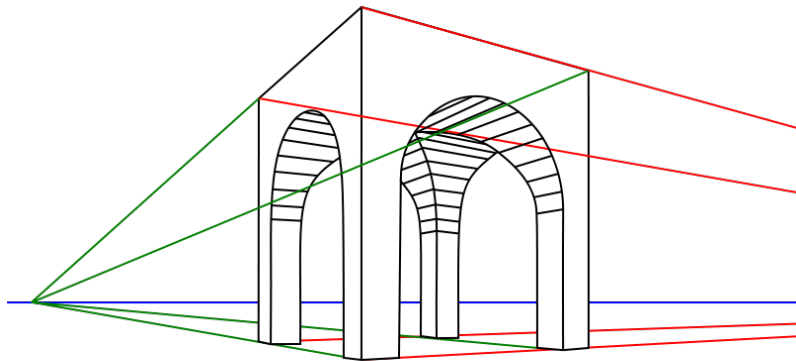


Projeção perspectiva ou cônica



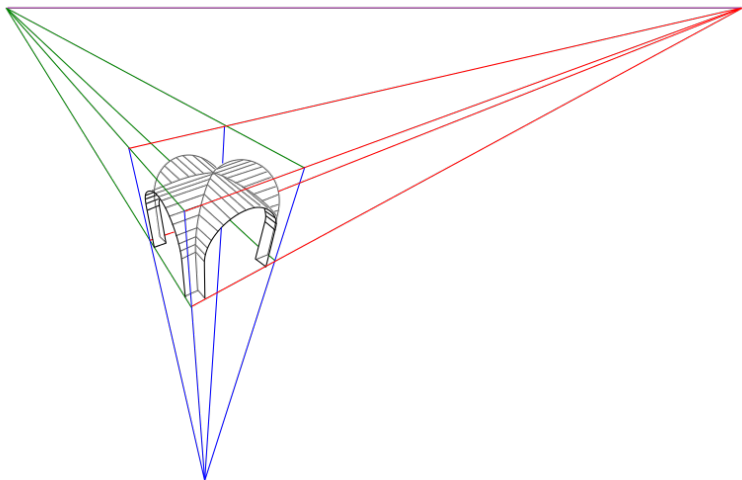
1 ponto de fuga

Projeção perspectiva ou cônica



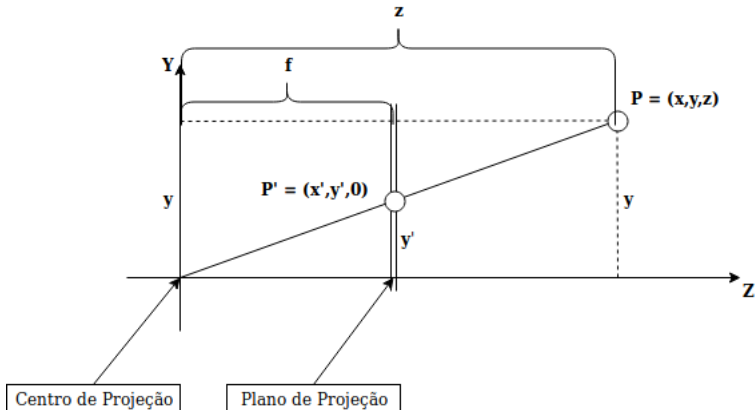
2 pontos de fuga

Projeção perspectiva ou cônica



3 pontos de fuga

Projeção perspectiva ou cônica



$$\frac{y'}{y} = \frac{f}{z} \longrightarrow y' = \frac{f}{z}y$$

Projeção perspectiva ou cônica

Se o plano de projeção está no ponto $z = 0$ e portanto o centro de projeção estiver em $z = -f$, então :

$$\frac{y'}{f} = \frac{y}{z + f}$$

$$y' = \frac{y * f}{z + f}$$

$$y' = \frac{y}{(z/f) + 1}$$

Ponto de fuga em X

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{f_x} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ponto de fuga em Y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{f_y} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ponto de fuga em Z

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{f_z} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Clipping e normalização em 2D

Precisa levar os pontos do Sistema de Coordenadas do Mundo para o Sistema de Coordenadas Normalizadas, isto é, fazer com que os pontos dentro a área a ser exibida seja estejam entre $-1 \leq x \leq 1$ e $-1 \leq y \leq 1$.

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ u_{min} & v_{min} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u_{max}-u_{min}}{x_{max}-x_{min}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{max}-v_{min}}{y_{max}-y_{min}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_{min} & -y_{min} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u_{max}-u_{min}}{x_{max}-x_{min}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{max}-v_{min}}{y_{max}-y_{min}} & 0 \\ u_{min} \left(\frac{u_{max}-u_{min}}{x_{max}-x_{min}} \right) & v_{min} \left(\frac{v_{max}-v_{min}}{y_{max}-y_{min}} \right) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_{min} & -y_{min} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{u_{max}-u_{min}}{x_{max}-x_{min}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{v_{max}-v_{min}}{y_{max}-y_{min}} & 0 \\ -x_{min} + u_{min} \left(\frac{u_{max}-u_{min}}{x_{max}-x_{min}} \right) & -y_{min} + v_{min} \left(\frac{v_{max}-v_{min}}{y_{max}-y_{min}} \right) & 1 \end{bmatrix}$$

Clipping e normalização em 3D

- 1 Transladar o plano de projeção para a origem.
- 2 Rotacionar o plano de projeção de modo que fique sobre o plano XY.
- 3 Fazer um cisalhamento para que o direção da projeção fique paralela ao eixo Z.
- 4 Transladar para que o centro de projeção fique na origem.
- 5 Fazer um cisalhamento para que a linha central da projeção fique no eixo Z.
- 6 Escalar de modo que o volume visualizado seja canônico.