UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO ARAGUAIA
BACHARELADO EM ENGENHARIA CIVIL
1^a LISTA DE CÁLCULO III - 2024/1

Professor: Jocirei Dias Ferreira

1) Calcule as integrais duplas abaixo. Desenhe o domínio de integração.

a) $\int\int_R 3\ dx\ dy$, onde $R = \{(x,y) \in R^2 / -2 \leq x \leq 2,\ 1 \leq y \leq 6\}$

b) $\int\int_R (5-x)\ dx\ dy$, onde $R = \{(x,y) \in R^2 / 0 \leq x \leq 5,\ 0 \leq y \leq 3\}$

c) $\int\int_R (4-2y)\ dx\ dy$, onde $R = [0,1] \times [0,1]$

2) Desenhe o conjunto $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1,\ e\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$. Cálcule o volume de B.

3) Desenhe o conjunto $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\ e\ 0 \leq z \leq 1 - x^2\}$. Cálcule o volume de B.

4) Cálcule a área da região compreendida entre os gráficos das funções $y = x$ e $y = -x^2 + x + 1$, com $-1 \leq x \leq 1$. Desenhe a região antes de calcular a área.

5) Desenhe o conjunto $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ 1 \leq x \leq 2\ e\ \ 0 \leq y \leq 1\}$. Cálcule $\displaystyle\int\int_B f(x,y)\ dx\ dx$. Interprete geometricamente a integral.

6) **Proposição:** Sejam $f(x)$ e $g(y)$ duas funções contínuas, respectivamente, nos intervalos $[a,b]$ e $[c,d]$. Então vale: $\displaystyle\int\int_R f(x)g(y)\ dx\ dy = \left(\int_a^b f(x)\ dx\right)\left(\int_c^d g(y)\ dy\right)$ onde $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ /\ a \leq x \leq b\ e\ \ c \leq y \leq d\}$.
Utilizando a Proposição, calcule: $\displaystyle\int\int_R xye^{x^2-y^2}\ dx\ dy$, onde a = -1, b = 1, c = 0 e d = 3.

7) Desenhe o triangulo de vétices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$. Sendo B o triangulo, calcule $\displaystyle\int\int_B y\ dx\ dy$.

8) Inverta a ordem de integração na integral $\displaystyle\int_0^3 \left[\int_x^{4x-x^2} f(x,y)\ dy\right] dx$, onde $f(x,y)$ é suposta contínua em $\mathbb{R}^2$. Desenhe a região antes de inverter a ordem de integração.

9) Inverta a ordem de integração na integral $\displaystyle\int_0^{\pi}\left[\int_0^{senx} f(x,y)\ dy\right] dx$, onde $f(x,y)$ é suposta contínua em $\mathbb{R}^2$. Desenhe a região antes de inverter a ordem de integração.

10) Desenhe o conjunto $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ /\ x^2+4y^2 \leq 4,\ e\ x+y \leq z \leq x+y+1\}$. Cálcule o volume de B.

11) Seja B o círculo $x^2+y^2 \leq 1$. Sejam $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, se $(x,y) \neq (0,0)$, e $g : B \to R$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases} \tag{1}$$

Mostre que

$$\int\int_B \frac{x^2}{x^2+y^2}\ dx\ dy = \int\int_B g(x,y)\ dx\ dy.$$

12) Inverta a ordem de integração e calcule $\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^1 sen\ x^3\ dx\right] dy.$

13) Calcule $\int\int_B \sqrt{x^2+y^2} dx\ dy$, onde B é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$.

14) Calcule $\int\int_B (2x+y)cos(x-y)dx\ dy$, onde B é o paralelogramo de vértices $(0,0)$, $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$, $(\frac{2\pi}{3},\frac{-\pi}{3})$ e $(\frac{\pi}{3},-\frac{2\pi}{3})$.

15) Calcule o volume do conjunto B de todos os pontos (x,y,z) tais que $x \leq z \leq 1-y^2$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

16) Calcule o volume do conjunto B de todos os pontos (x,y,z) tais que $z \geq x^2+y^2$, e $x^2+y^2+z^2 = 2$.

17) Calcule a integral tripla.

a) $\int\int\int_B x\ dx\ dy\ dz$, onde B é o conjunto $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $x+y \leq z \leq x+y+1$.

b) $\int\int\int_B (x^2+z^2)\ dx\ dy\ dz$, onde B é o cilindro $x^2+y^2 \leq 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

18) Calcule o volume do conjunto B de todos os pontos (x,y,z) tais que $x^2+y^2 \leq z \leq 2x+2y-1$.

19) Calcule o volume do conjunto B de todos os pontos (x,y,z) tais que $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ e $0 \leq z \leq 5-x^2-3y^2$.

20) Calcule $\int\int\int_B \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dx\ dy\ dz$, onde B é a interseção da semi-esfera $x^2+y^2+z^2 \leq 4$, $z \geq 0$, com o cilindro $x^2+y^2 \leq 1$.

21) Calcule $\int\int\int_B \sqrt{x^2+y^2-z}\; dx\; dy\; dz$, onde B é é o conjunto de todos os pontos (x,y,z) tais que $0 \leq y \leq x,\;\; 0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq z \leq x^2+y^2$.