Processamento de Imagens

Filtragem no Domínio Espacial

(Filtros passa-baixas)

Prof. Linder Cândido da Silva

UFMT

Julho de 2025

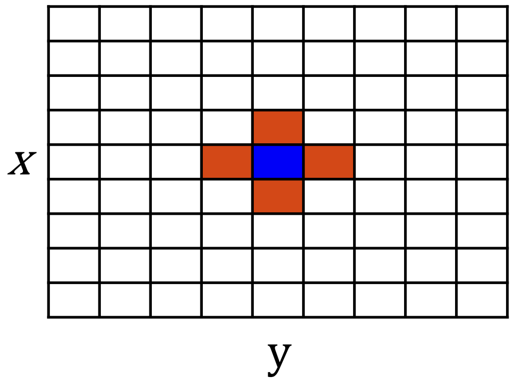
Agenda

- **Conceitos Preliminares.**
- Fundamentos de filtragem espacial.
- Convolução e correlação espaciais
- Kernels separáveis.
- Filtros espaciais de suavização: box e gaussiano.
- Filtros não lineares de suavização: filtro da mediana.

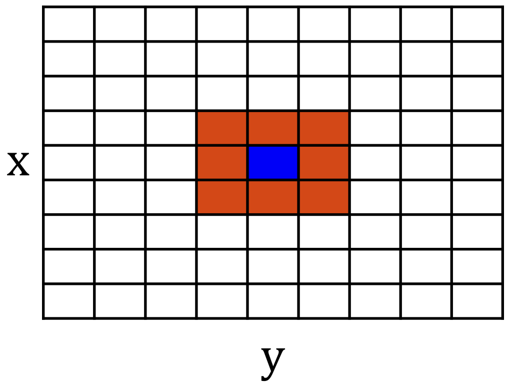
Conceitos Preliminares

Conceito de Vizinhança

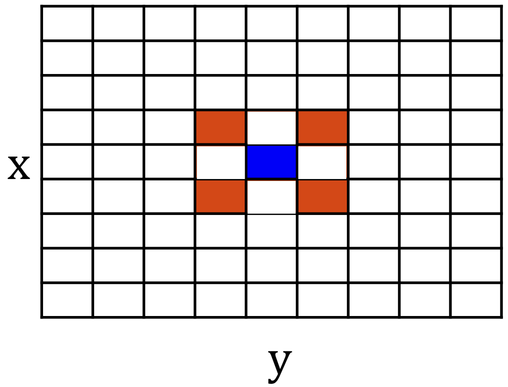
- Muitas das operações de filtragem são baseadas no conceito de **vizinhança** de um pixel. Dado as coordenadas (x, y) a definição é a seguinte:
  - Vizinhança-4: $(x-1, y), (x, y+1), (x+1, y), (x, y-1)$.
  - Vizinhança-d: $(x-1, y-1), (x-1, y+1), (x+1, y+1), (x+1, y-1)$.
  - Vizinhança-8 do pixel nas coordenadas (x, y): Vizinhança-4 $\cup$ Vizinhança-d



Vizinhança-4



Vizinhança-8



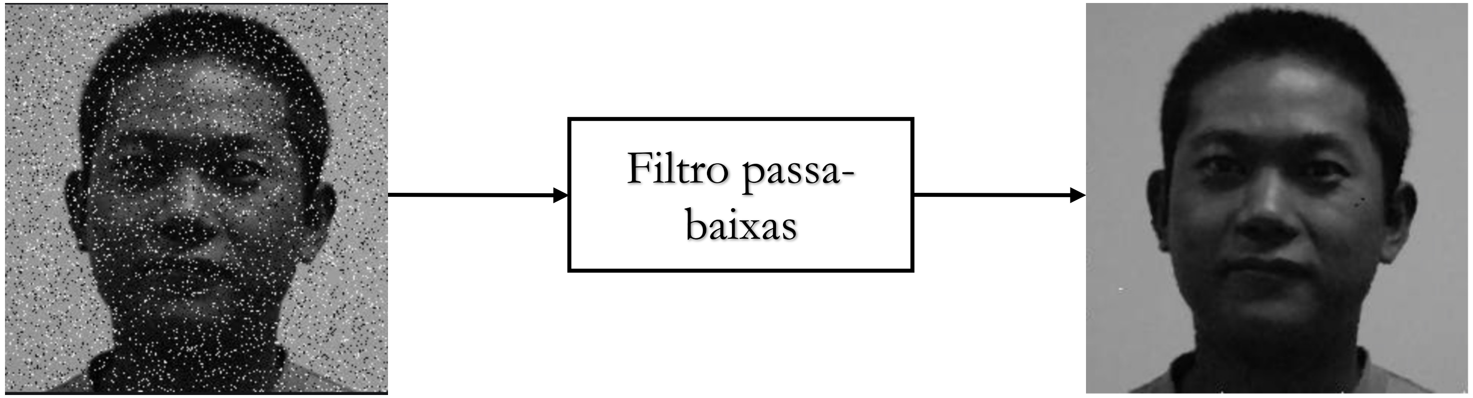
Vizinhança-d

Filtragem Espacial

- Diferente das **transformações de intensidade** que atuam sobre pixels individuais da imagem, a **filtragem espacial** é uma operação local, baseada em alguma definição de vizinhança.
- Consiste em modificar uma imagem substituindo o valor de cada pixel por uma função dos valores do pixel de interesse e de seus vizinhos.
- O termo filtragem vem do processamento no **domínio da frequência**, onde filtros são construídos para eliminar certas frequências da imagem. Como veremos, os mesmos efeitos podem ser conseguidos com transformações no **Domínio Espacial** e, por isso, usamos a mesma nomenclatura.
- As aplicações da filtragem espacial são vastas. Particularmente, são usadas para melhoramento, **removendo ruídos** e **aguçando detalhes**.

Filtragem Espacial

- Filtros que impedem a passagem de **altas frequências** são chamados de **filtros passa-baixas**. São filtros que suavizam (ou "borram") as imagens.
- Filtros que impedem a passagem de **baixas frequências** são chamados de **filtros passa-altas**. Esses filtros reforçam detalhes, tais como como bordas e ruídos da imagem.



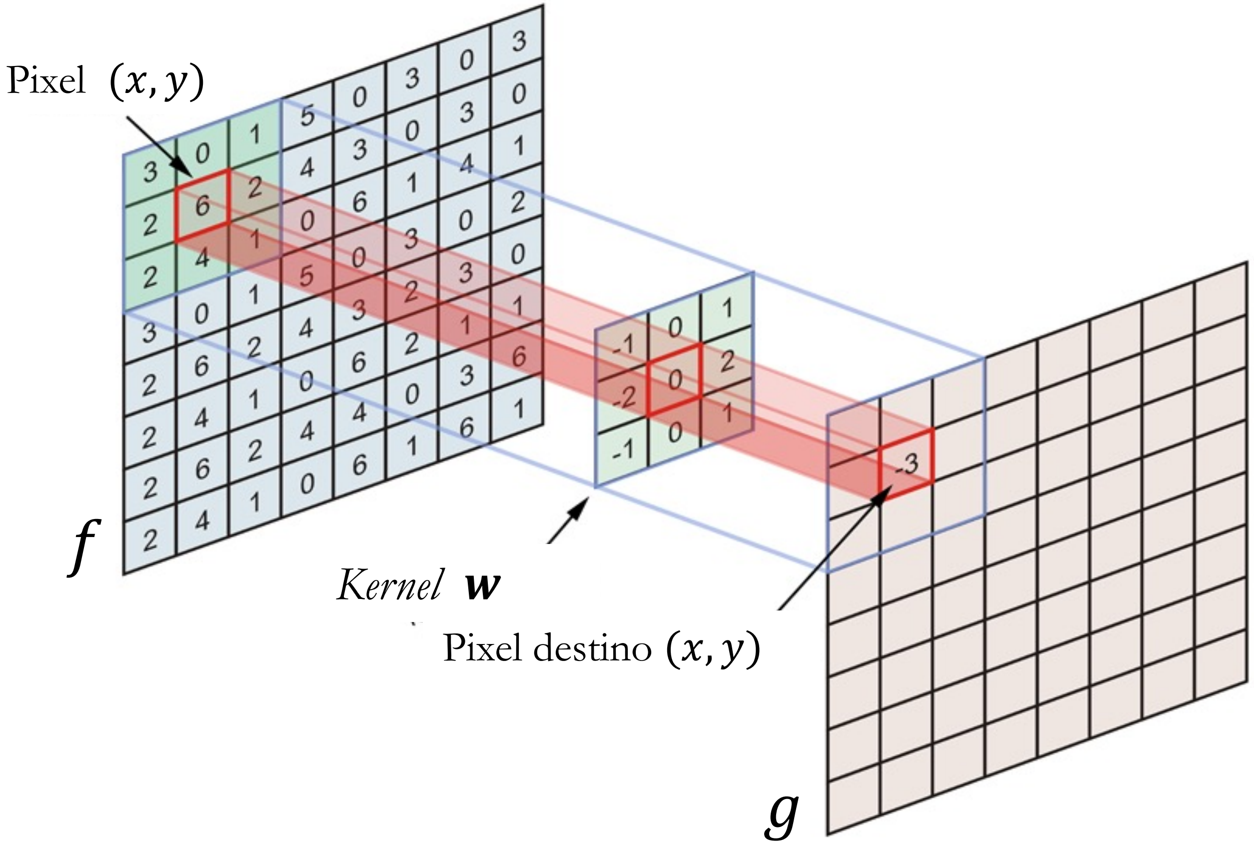
Filtragem Espacial

- Se a transformação realizada nos pixels da imagem é linear, então o filtro é chamado de **Filtro Espacial Linear**. Caso contrário, temos um **Filtro Espacial Não Linear**.
- Segue alguns exemplos de de filtros espaciais comumente utilizados:
  - Filtro Box (passa-baixa, linear).
  - Gaussiano (passa-baixa, linear).
  - Filtro de Sobel (passa-altas, linear).
  - Laplaciano (passa-altas, linear).
  - Filtro da Mediana (filtro de estatística de ordem, não linear).

Fundamentos de Filtragem Espacial

A "Mecânica" da Filtragem Espacial Linear

- Um filtro espacial linear (kernel) consiste de uma **matriz de pesos**.
- Um pixel da imagem de saída é calculado posicionando o filtro sobre o pixel correspondente na imagem de entrada e calculando a soma dos produtos dos pesos pelos valores dos pixels.



<u>Matematicamente</u>

Com um kernel $m \times n,\ m = 2a + 1$ e $n = 2b + 1$

$$g(x,y) = (w \star f)(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t)$$

Para um kernel 3x3 como o da ilustração ao lado, temos:

$$g(x,y) = w(-1,-1)f(x-1,y-1) + w(-1,0)f(x-1,y) + \ldots$$
$$+ w(0,0)f(x,y) + \ldots + w(1,1)f(x+1,y+1)$$

$$= \begin{array}{l} (-1 \times 3) + (0 \times 0) + (1 \times 1) + \\ (-2 \times 2) + (0 \times 6) + (2 \times 2) + \\ (-1 \times 2) + (0 \times 4) + (1 \times 1) \ = -3 \end{array}$$

A “Mecânica” da Filtragem Espacial Linear

Entrada

10	27	22	31	44	50	43
20	5	21	50	43	8	115
50	43	8	42	115	8	7
11	55	6	31	44	50	43
23	200	7	10	27	22	31
42	115	8	43	8	42	115
31	44	50	43	200	7	10

Saída

Kernel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

A “Mecânica” da Filtragem Espacial Linear

Entrada

10	27	22	31	44	50	43
20	5	21	50	43	8	115
50	43	8	42	115	8	7
11	55	6	31	44	50	43
23	200	7	10	27	22	31
42	115	8	43	8	42	115
31	44	50	43	200	7	10

Saída

-28				

Kernel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

A “Mecânica” da Filtragem Espacial Linear

Entrada

10	27	22	31	44	50	43
20	5	21	50	43	8	115
50	43	8	42	115	8	7
11	55	6	31	44	50	43
23	200	7	10	27	22	31
42	115	8	43	8	42	115
31	44	50	43	200	7	10

Saída

-28				

Kernel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

A “Mecânica” da Filtragem Espacial Linear

Entrada

10	27	22	31	44	50	43
20	5	21	50	43	8	115
50	43	8	42	115	8	7
11	55	6	31	44	50	43
23	200	7	10	27	22	31
42	115	8	43	8	42	115
31	44	50	43	200	7	10

Saída

-28	93			

Kernel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

A "Mecânica" da Filtragem Espacial Linear

Entrada

10	27	22	31	44	50	43
20	5	21	50	43	8	115
50	43	8	42	115	8	7
11	55	6	31	44	50	43
23	200	7	10	27	22	31
42	115	8	43	8	42	115
31	44	50	43	200	7	10

Saída

-28	93			

Kernel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

A “Mecânica” da Filtragem Espacial Linear

Entrada

10	27	22	31	44	50	43
20	5	21	50	43	8	115
50	43	8	42	115	8	7
11	55	6	31	44	50	43
23	200	7	10	27	22	31
42	115	8	43	8	42	115
31	44	50	43	200	7	10

Saída

-28	93	257		

Kernel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

A "Mecânica" da Filtragem Espacial Linear

Entrada

10	27	22	31	44	50	43
20	5	21	50	43	8	115
50	43	8	42	115	8	7
11	55	6	31	44	50	43
23	200	7	10	27	22	31
42	115	8	43	8	42	115
31	44	50	43	200	7	10

Saída

-28	93	257		

Kernel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

A “Mecânica” da Filtragem Espacial Linear

Entrada

10	27	22	31	44	50	43
20	5	21	50	43	8	115
50	43	8	42	115	8	7
11	55	6	31	44	50	43
23	200	7	10	27	22	31
42	115	8	43	8	42	115
31	44	50	43	200	7	10

Saída

-28	93	257	-99	

Kernel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

A "Mecânica" da Filtragem Espacial Linear

Entrada

10	27	22	31	44	50	43
20	5	21	50	43	8	115
50	43	8	42	115	8	7
11	55	6	31	44	50	43
23	200	7	10	27	22	31
42	115	8	43	8	42	115
31	44	50	43	200	7	10

Saída

-28	93	257	-99	

Kernel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

A “Mecânica” da Filtragem Espacial Linear

Entrada

10	27	22	31	44	50	43
20	5	21	50	43	8	115
50	43	8	42	115	8	7
11	55	6	31	44	50	43
23	200	7	10	27	22	31
42	115	8	43	8	42	115
31	44	50	43	200	7	10

Saída

-28	93	257	-99	35

Kernel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

A “Mecânica” da Filtragem Espacial Linear

Entrada

10	27	22	31	44	50	43
20	5	21	50	43	8	115
50	43	8	42	115	8	7
11	55	6	31	44	50	43
23	200	7	10	27	22	31
42	115	8	43	8	42	115
31	44	50	43	200	7	10

Saída

-28	93	257	-99	35

Kernel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

A “Mecânica” da Filtragem Espacial Linear

Entrada

10	27	22	31	44	50	43
20	5	21	50	43	8	115
50	43	8	42	115	8	7
11	55	6	31	44	50	43
23	200	7	10	27	22	31
42	115	8	43	8	42	115
31	44	50	43	200	7	10

Saída

-28	93	257	-99	35
-88				

Kernel

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

Padding

- **Padding** se refere à prática de adicionar pixels extras ao redor de uma imagem antes de aplicar operações de filtragem.

- Isso é feito por várias razões, incluindo:

   1. **Preservar o tamanho da imagem**: Sem padding, a aplicação de filtros em uma imagem reduz o tamanho da imagem de saída.

   2. **Controlar os efeitos de borda**: Padding ajuda a garantir que todos os pixels, especialmente os das bordas, sejam considerados de forma mais equitativa no processo de filtragem.

Tipos de *Padding*

- **Zero Padding**. Consiste em adicionar zeros ao redor da imagem. É a forma mais comum e simples de padding.
- **Reflect Padding**. Consiste refletir pixels da imagem em relação à borda (espelhamento).
- **Replicate Padding**: Os pixels da borda são replicados, ou seja, repetidos para fora da imagem.
- **Constant Padding**: Consiste em adicionar pixels com valor constante ao redor da imagem. O valor constante pode ser diferente de zero e é definido pelo usuário.

Convolução & Correlação Espaciais

Convolução Espacial *vs* Correlação Espacial

- O procedimento que discutimos para realização da filtragem linear é a **correlação espacial**.
- A mecânica da **convolução espacial** é mesma, exceto pelo fato do kernel ser rotacionado em 180º antes de ser aplicado para o cálculo da soma de produtos.
- Quando os valores de um kernel são simétricos em relação ao seu centro, a correlação e a convolução produzem o mesmo resultado.

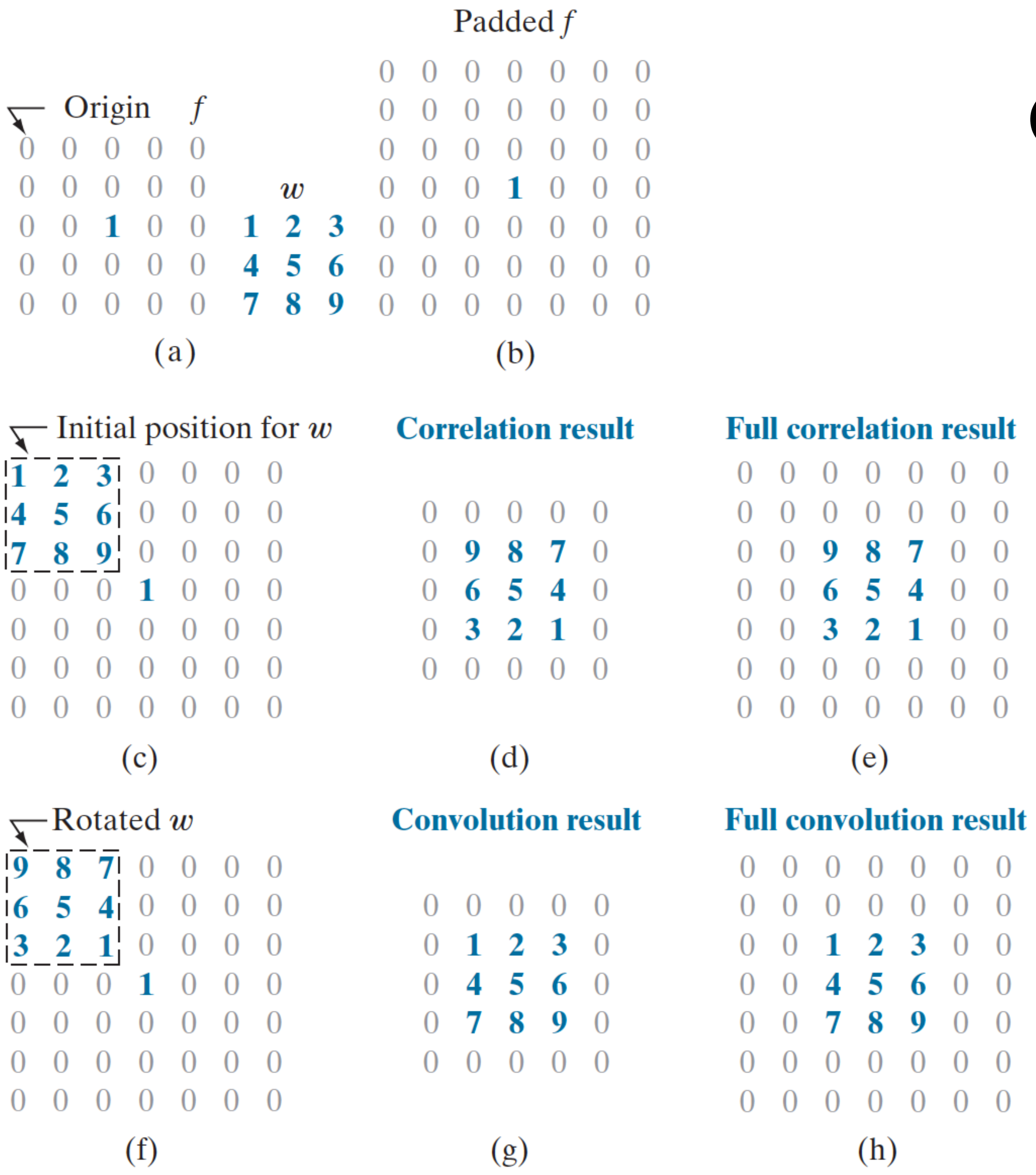
Correlação

$$(w \star f)(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t)$$

Convolução

$$(w \bigstar f)(x,y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x-s, y-t)$$

Convolução vs Correlação imagem f e kernel w.



<u>Correlação:</u> resulta numa cópia rotacionada do kernel na posição do impulso.

<u>Convolução</u>: resulta numa cópia idêntica do kernel na posição do impulso.

Convolução *vs* Correlação

- Algumas propriedades matemáticas importantes:

Propriedade	Convolução	Correlação
Comutativa	$f \star g = g \star f$	—
Associativa	$f \star (g \star h) = (f \star g) \star h$	—
Distributiva	$f \star (g + h) = (f \star g) + (f \star h)$	$f \,☆\, (g + h) = (f \,☆\, g) + (f \,☆\, h)$

A ordem de operação na correlação tem relevância

Kernels Separáveis

Filtros (kernels) Separáveis

- Uma função $G(x, y)$ é separável se pode ser escrita como o produto de duas funções com variáveis independentes: $G(x, y) = G_1(x)G_2(y)$.

- Similarmente, um kernel w é separável quando pode ser escrito como o produto de dois vetores independentes: $\mathrm{w} = \mathrm{v}_1\mathrm{v}_2^{\mathrm{T}}$.

- Por exemplo:

- $\mathrm{w} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \mathrm{w}_1 w_2^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Filtros (kernels) Separáveis

- A vantagem dos filtros separáveis está na eficiência computacional que resulta da propriedade associativa da convolução.
- Dado um kernel separável $w = w_1 w_2^T$, segue que, de acordo com as propriedades associativas e comutativas da convolução, realizar a convolução de w com uma imagem f é o mesmo que convoluir primeiro w_1 com f e, em seguida, convoluir o resultado com w_2.
- A convolução de uma imagem M×N com um kernel 2D, m×n, demanda MNmn multiplicações e somas, ao passo que duas convoluções 1D com kernels m×1 e 1×n demandam MNm + MNn = MN(m+n) multiplicações e somas.

Filtros (kernels) Separáveis

- Portanto, a vantagem computacional C de realizar a convolução com um kernel separável é dada por:

$$C = \frac{MNmn}{MN(m+n)} = \frac{mn}{(m+n)}$$

- O resultado mostra que é vantajoso usar kernels separáveis quando as dimensões do kernel são grandes.

Filtros (kernels) Separáveis

- Sabemos da álgebra linear que uma matriz resultante da multiplicação de um vetor coluna e um vetor linha sempre tem rank 1. Logo, para determinar se um filtro w é separável calcule o rank da matriz que o define. Para ser separável, é necessário que o rank seja 1 (um).

- Para calcular os filtros v_1 e v_2 tal que $\mathrm{w} = \mathrm{v}_1 \mathrm{v}_2^{\mathrm{T}}$, faça o seguinte:
  - Escolha qualquer elemento, E, não zero de w e chame de c a coluna e r a linha contendo E.
  - Os vetores serão dados por: $\mathrm{v}_1 = \mathrm{c}$ e $\mathrm{v}_2 = \mathrm{r}/\mathrm{E}$.

Filtros (kernels) Separáveis

- Como um exercício, determine se o filtro abaixo é separável e, em caso positivo, os vetores v_1 e v_2 que o compõe.

$$\mathrm{w} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Filtragem com OpenCV

- `cv2.filter2D(src, ddepth, kernel, [borderType])`:
  - src: é a imagem de entrada.
  - ddepth: a precisão de representação dos pixels (default -1, imagem de saída com a mesma precisão da imagem de entrada.
  - kernel: o filtro a ser aplicado.
  - borderType: opcional para especificar o tipo de *padding*.

- `cv2.sepFilter2D(src, ddepth, kernelX, kernelY [borderType]:`
  - Os parâmetros são os mesmos de `cv2.filter2D()` exceto que o kernel agora é separável.

Filtros de Suavização Lineares

Box e Gaussino

Filtros Espaciais de Suavização

- O filtros de filtros de suavização atenuam transições bruscas de intensidade.
- São usados para reduzir ruídos, eliminar detalhes irrelevantes, atenuar ou eliminar contornos falsos, entre outras aplicações.
- Em termos de componentes de frequências, correspondem aos **filtros passa baixas**, uma vez que as baixas frequências estão associadas a regiões de intensidade relativamente uniforme da imagem. As transições bruscas estão associados a componentes de altas frequências no espaço de Fourier.
- Estudaremos hoje dois tipos de filtros lineares de suavização, ambos separáveis:
  - **Filtros Box**.
  - **Filtros Gaussianos**.

Filtros Box

- A convolução com filtros Box resulta, em cada ponto, em uma média aritmética dos valores "cobertos" pelo kernel. Ao computar a média atenuamos as variações bruscas de intensidade nesse conjunto de pixels.

- São construídos com uma matriz de 1s multiplicada por um fator de normalização $1/s$, onde s é o número de elementos do filtro.

- Abaixo um filtro box 3x3:

$$\frac{1}{9} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Filtros Box

- A normalização $1/s$ evita a introdução de artefatos durante a filtragem.
- Como em um kernel Box todas as linhas e colunas são idênticas, o rank desses kernels é 1, o que significa que eles são separáveis.
- Por exemplo:

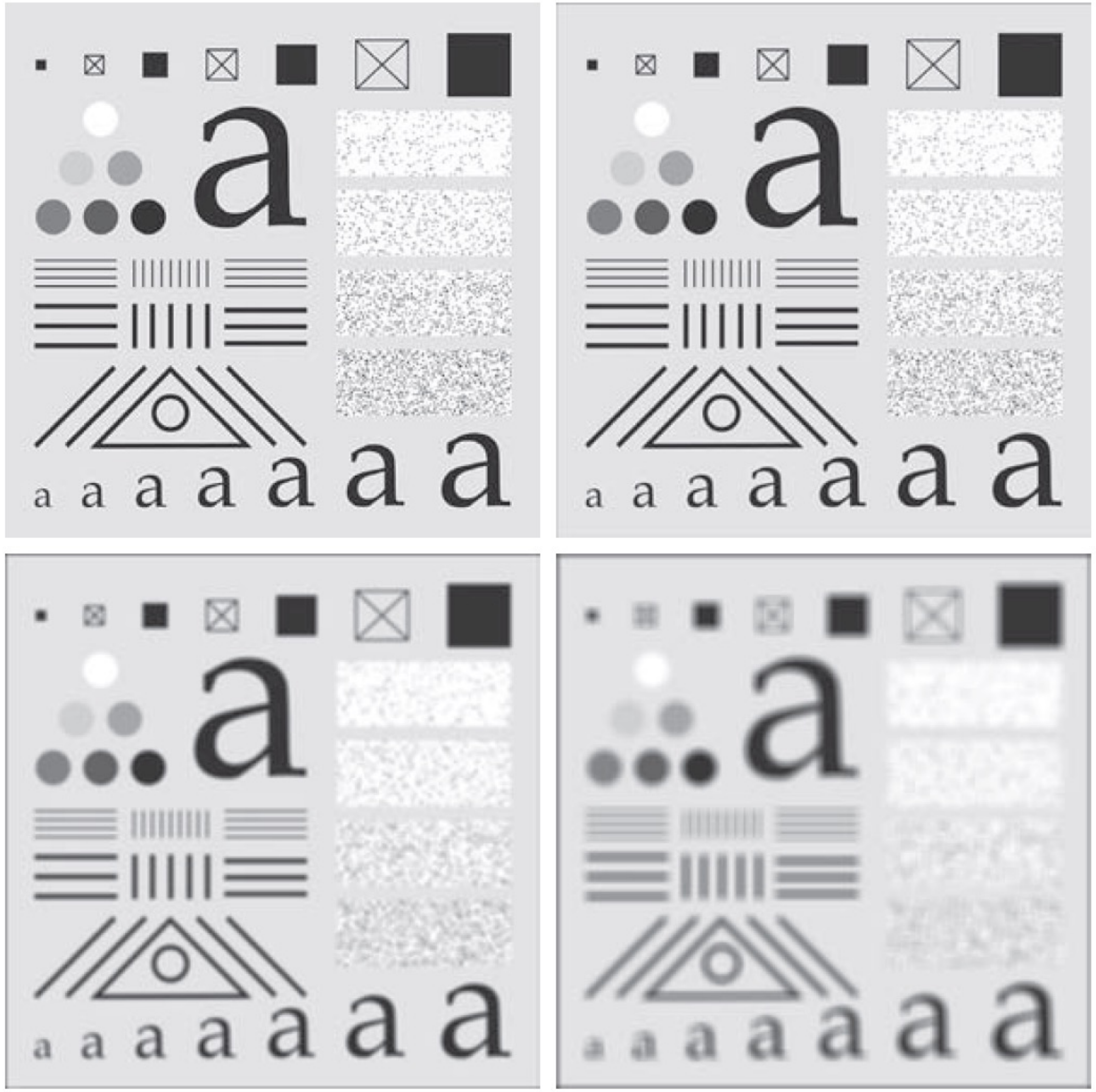
$$w = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Efeitos dos Filtros Box

Convolução com Zero Padding

a	b
c	d

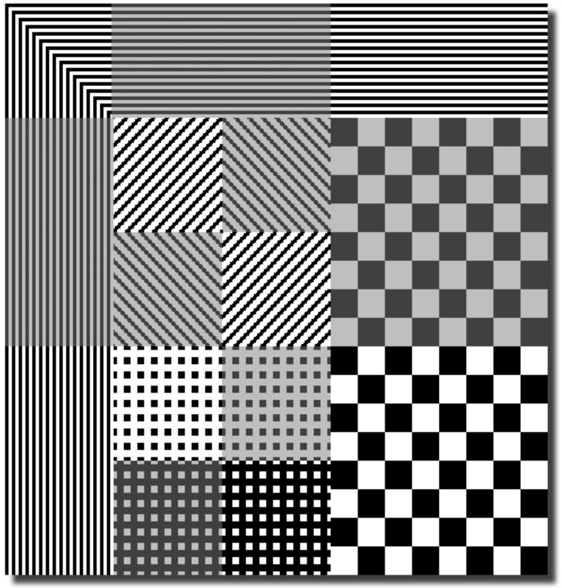
(a) Imagem original 1024x 1024 pixels.
(b) resultados da aplicação do filtro box com kernel 3x3.
(c) resultados da aplicação do filtro box com kernel 11x11.
(d) resultados da aplicação do filtro box com kernel 21x21.

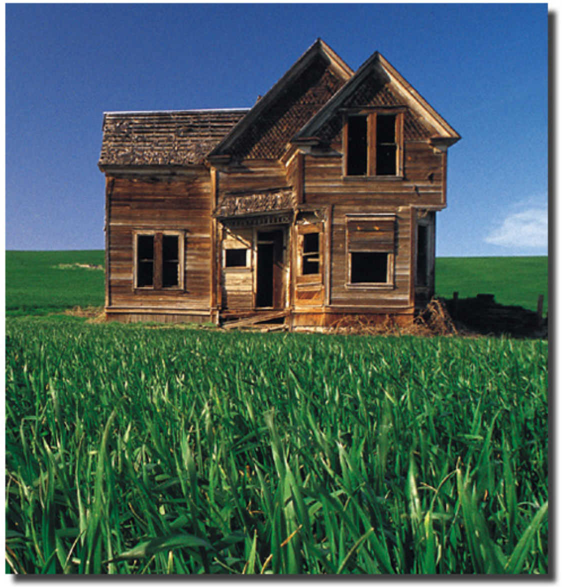


Filtro Box 3x3, Padding Espelhado

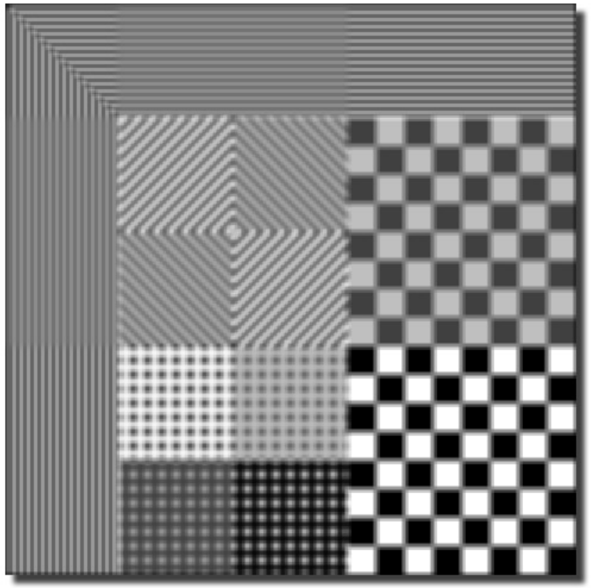
Em imagens coloridas são aplicados de forma independente em cada canal de cor

Imagens originais





Imagens suavizadas

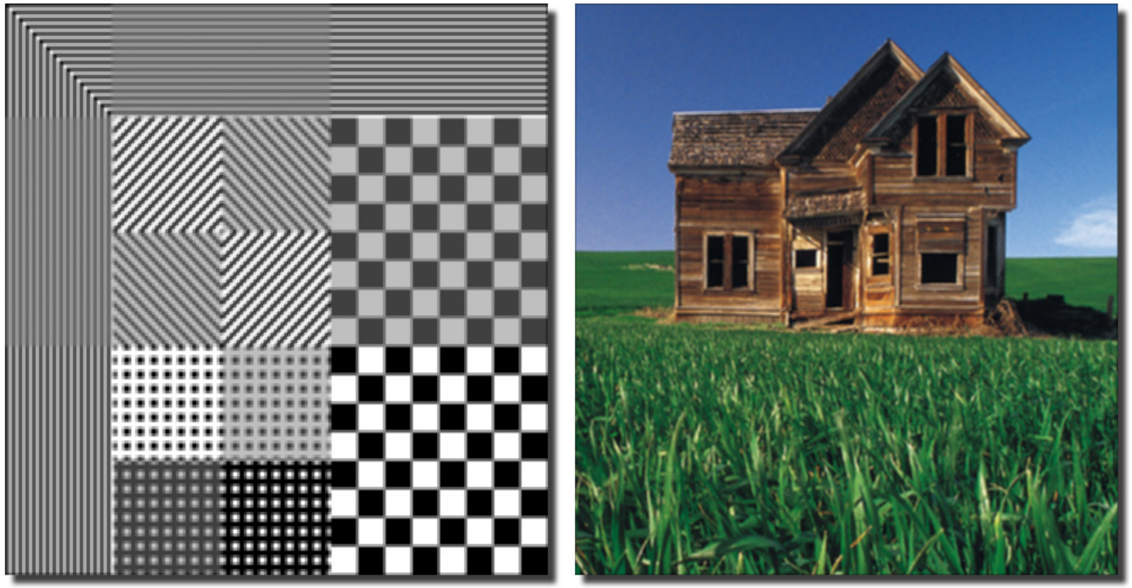


Filtros Box

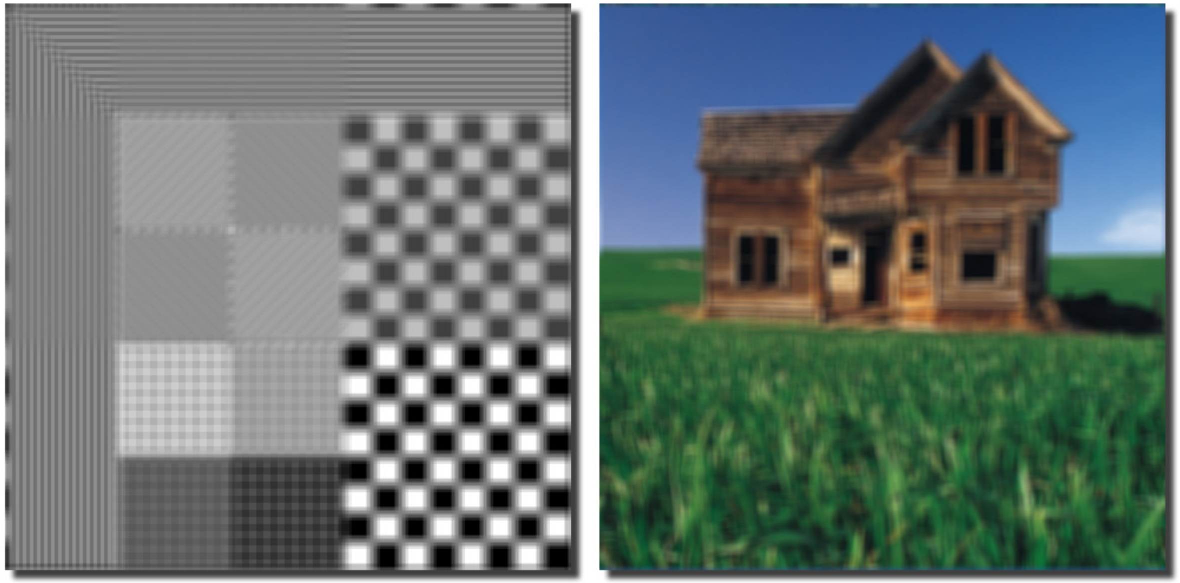
Tamanho 9x9

Padding Espelhado

Imagens originais



Imagens suavizadas



Filtros Gaussianos

- Embora sejam simples, os filtros Box apresentam certas limitações.
  - Favorecem direções perpendiculares. Devido à amostragem uniforme em grade cartesiana, apresentam resposta em frequência com maior ênfase em direções horizontais e verticais.
  - São modelos ruins para representar imagens obtidas com lentes desfocadas.
- Por esses motivos, na prática, os filtros gaussianos são mais comumente empregados. Além disso, os filtros gaussianos são um caso notável de kernel circularmente simétrico que também é separável.

Filtros Gaussianos

$$G(s,t) = ke^{-\left(\frac{s^2+t^2}{2\sigma^2}\right)}$$

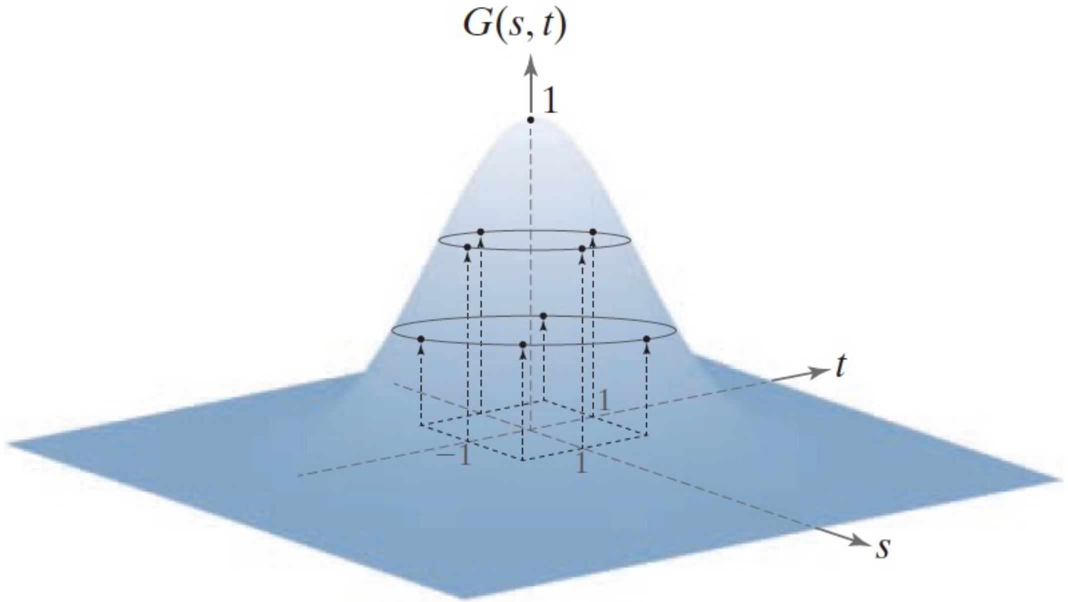


Gráfico com k=1 e σ=1

O processo de filtragem com um kernel gaussiano normalizado consiste em no cálculo de uma média ponderada, onde mais peso é dado para os pixels mais próximos do pixel de interesse.

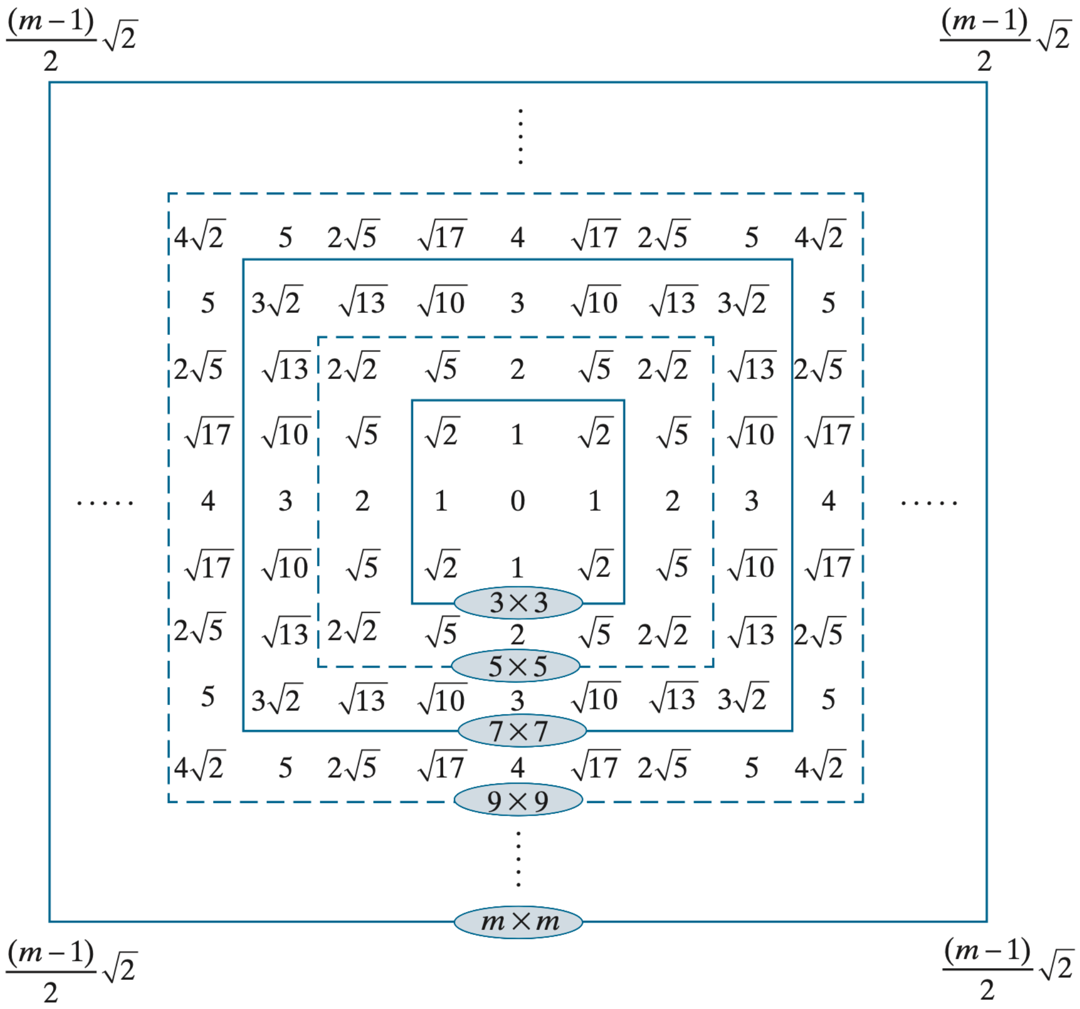
Filtros Gaussianos

- Fazendo $r = (s^2 + t^2)^{1/2}$

- Então:

$$G(r) = ke^{-\left(\frac{r^2}{2\sigma^2}\right)}$$

- Ao lado, valores computados para a distância r considerando diferentes tamanhos de kernels.



Filtros Gaussianos

$$G(s,t) = ke^{-\left(\frac{s^2+t^2}{2\sigma^2}\right)}$$

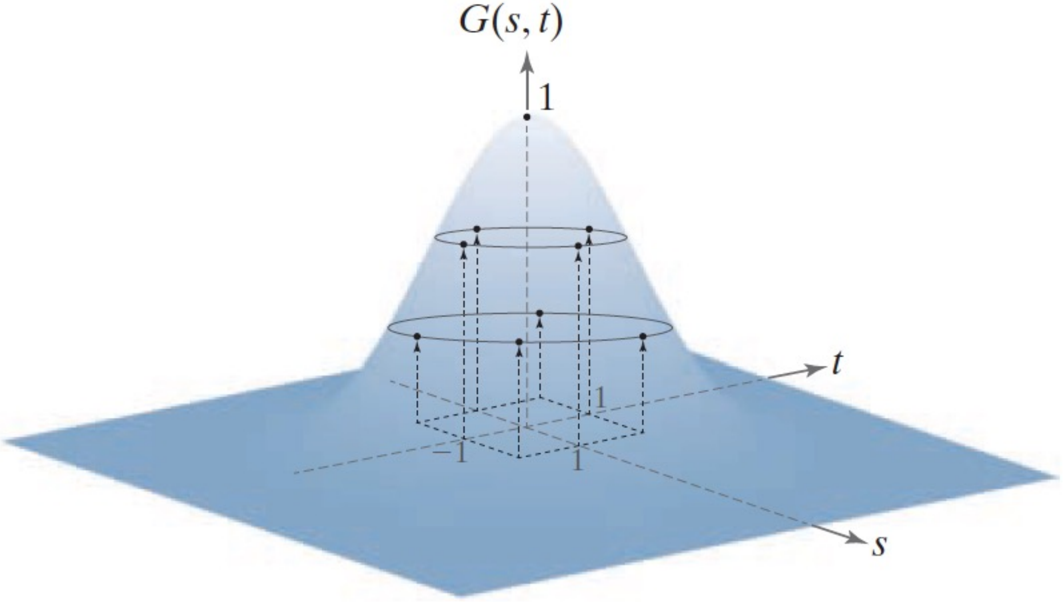


Gráfico com k=1 e σ=1

$$\frac{1}{4.8976} \times$$

0.3679	0.6065	0.3679
0.6065	1.0000	0.6065
0.3679	0.6065	0.3679

Filtro 3x3, com k=1 e σ=1

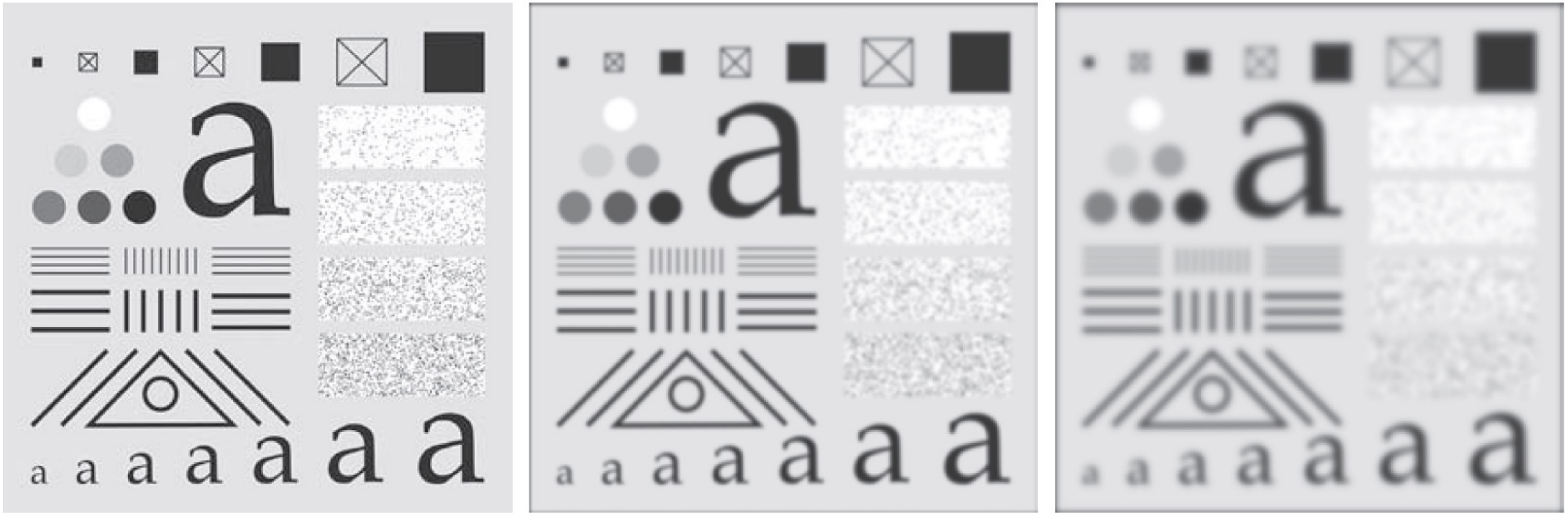
Propriedades dos Filtros Gaussianos

- Kernels gaussianos são separáveis. Valores da função gaussiana são desprezíveis para distâncias maiores que 3σ em relação à média. Isso significa que se selecionarmos o tamanho de um kernel gaussiano como $\lceil 6\sigma \rceil \times \lceil 6\sigma \rceil$, obteremos essencialmente o mesmo resultado de um kernel gaussiano arbitrariamente grande.
- O produto e a convolução de duas gaussianas também são funções gaussianas:

	f	g	$f \times g$	$f \star g$
Média	m_f	m_g	$m_{f \times g} = \dfrac{m_f \sigma_g^2 + m_g \sigma_f^2}{\sigma_f^2 + \sigma_g^2}$	$m_{f \star g} = m_f + m_g$
Desvio padrão	σ_f	σ_g	$\sigma_{f \times g} = \sqrt{\dfrac{\sigma_f^2 \sigma_g^2}{\sigma_f^2 + \sigma_g^2}}$	$\sigma_{f \star g} = \sqrt{\sigma_f^2 + \sigma_g^2}$

Efeitos dos Filtros Gaussianos

- (a) imagem original com 1024x1024 pixels; (b) resultado da filtragem com kernel gaussiano 21x21 e $\sigma = 3.5$; (c) resultado da filtragem com kernel gaussiano 43x43 e $\sigma = 7$.



a b c

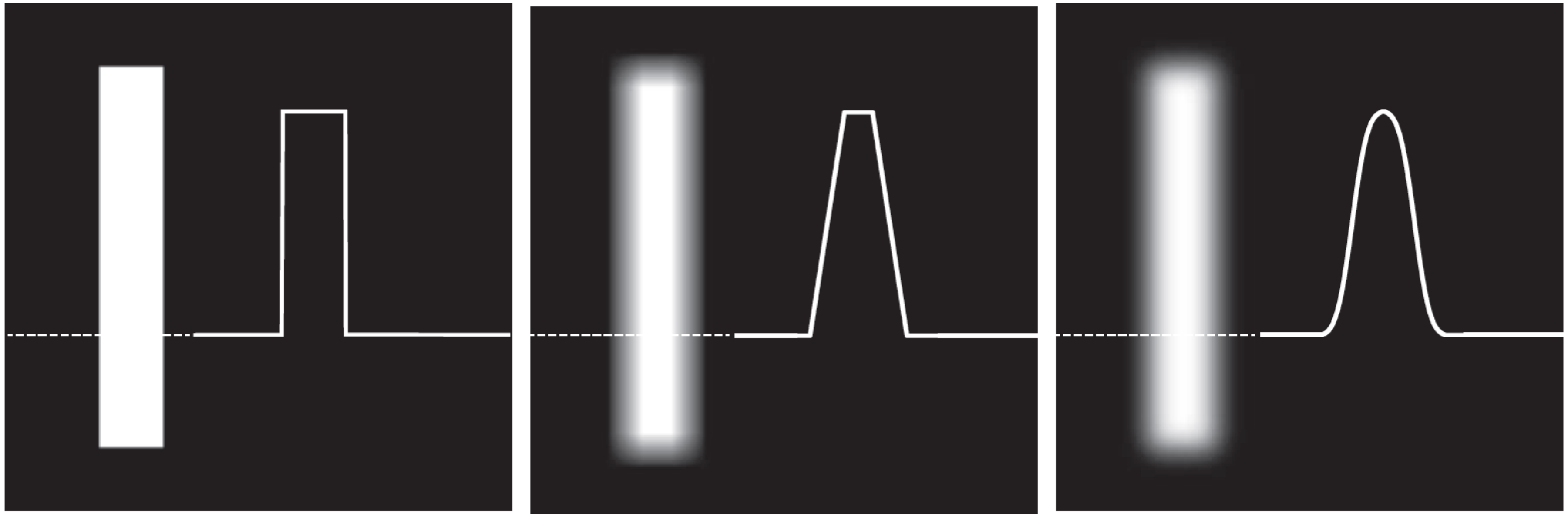
Efeitos dos Filtros Gaussianos

- (a) resultado usando um kernel gaussiano de tamanho 43x43 com $\sigma = 7$; (b) resultado usando um kernel gaussiano de tamanho 85x85 $\sigma = 7$; (c) imagem com a diferença dos resultados.

a b c

Filtros Gaussianos vs Filtros Box

- (a) imagem e perfil de intensidade ao longo da linha pontilhada horizontal. (b) suavização com kernel Box 71x71, e perfil de intensidade correspondente. (c) suavização com kernel gaussiano de tamanho 151x151, $k = 1$ e $\sigma = 25$.
- O filtro gaussiano produz resultados com transição mais suave.



a b c

Filtros Gaussianos

- Efeitos do *padding* em filtragens mais agressivas. (a) usando zero padding. (b) padding por espelhamento. (c) padding por replicação. Nos três casos foram usados um kernel gaussiano de tamanho 187x187, com $k = 1$ e $\sigma = 31$.

a b c

Filtros de Suavização Não Lineares

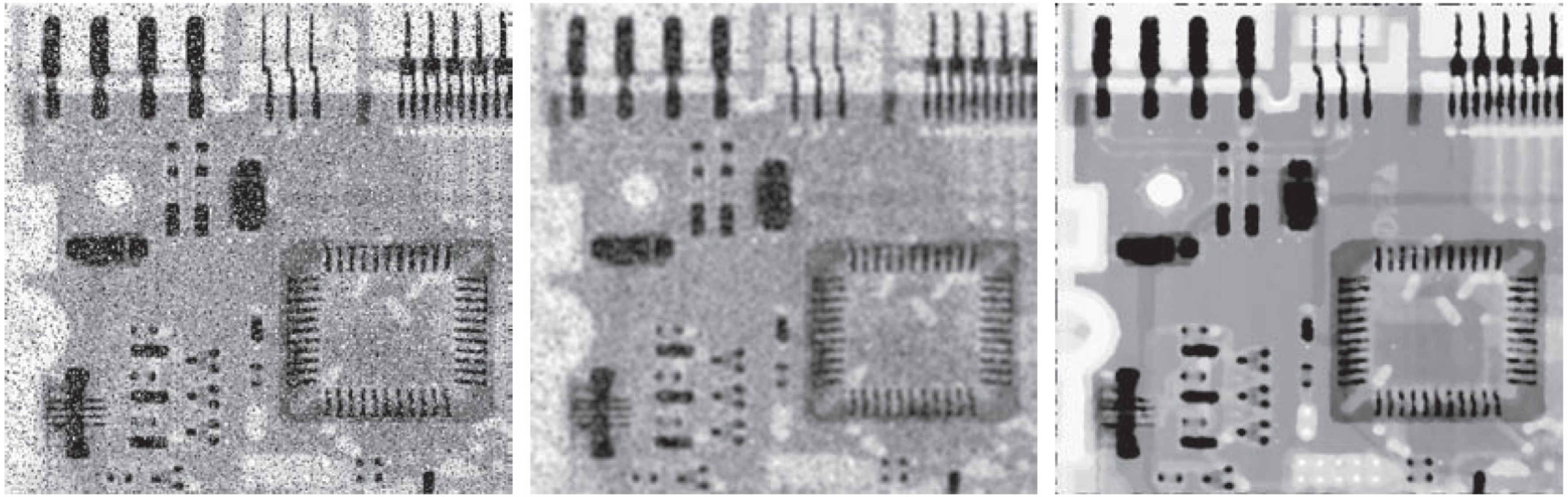
Mediana

Filtro da Mediana

- Filtro baseado em estatística de ordem, muito bom para remover ruído sal-pimenta.
- Revisando: a mediana, ξ, de um conjunto de valores é o valor tal que metade do conjunto é menor ou igual a ξ e metade é maior ou igual a ξ.
- Operação:
  - Defina uma vizinhança, por exemplo 3x3, em torno de um pixel de interesse.
  - Substitua o seu valor pela mediana dos valores do pixels na vizinhança selecionada.
  - Repita o passo 1 e 2 para todos os pixels da imagem.

Filtro da Mediana

- (a) imagem original com ruído sal-pimenta. (b) redução do ruído usando um filtro gaussiano 19x19 com $\sigma = 3$. (c) redução de ruído usando um filtro da mediana 7x7. O filtro gaussiano calcula uma média ponderada dos valores dentro de uma vizinhança, ao passo que o filtro da mediana remove valores extremos (muito pequenos ou muito grande).



a b c

Filtro da Mediana com OpenCV

- Para aplicar o filtro da mediana em uma imagem usando Opencv use a função `cv2.medianBlur(src, ksize)`.
  - src: é a imagem de entrada.
  - ksize: tamanho do kernel.

- Internamente a função faz *padding* por replicação, isto é, as bordas da imagem são replicadas de modo a acomodar a aplicação do filtro.