# Lógica Primeira ordem

# Motivação

Há vários argumentos que não podem ser adequadamente formalizados e validados em lógica proposicional.

Exemplo
Sócrates é homem.
Todo homem é mortal.
Logo, Sócrates é mortal

- intuitivamente, podemos ver que este argumento é válido
- sua formalização em lógica proposicional resulta em $\{p, q\} \models r$
- porém, não há como mostrar que $\{p, q\} \models r$ é válido
- a validade deste argumento depende do significado da palavra “todo”
- para tratar este tipo de argumento precisamos da lógica de predicados

# Linguagem formal: elementos básicos

A linguagem formal da lógica de predicados é mais expressiva que aquela da lógica proposicional.

Esta maior expressividade decorre do fato de as fórmulas da lógica de predicados serem compostas pelos seguintes elementos básicos:

- **objetos**
- **predicados**
- **conectivos**
- **variáveis**
- **quantificadores**

# Linguagem formal: Sintaxe

## Objeto

É qualquer coisa a respeito da qual precisamos dizer algo

Na lógica de predicados, a noção de objeto é usada num sentido bastante amplo.
Objetos podem ser:

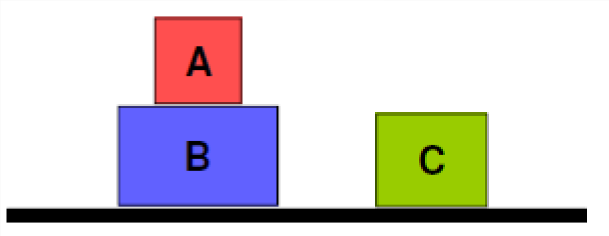
- **concretos:** a bíblia, a lua, ...
- **abstratos:** o conjunto vazio, a paz, ...
- **fictícios:** unicórnio, Saci-Pererê, ...
- **atômicos ou compostos:** um teclado é composto de teclas

Nomes de objetos devem iniciar com letra minúscula!

# Linguagem formal: Sintaxe

## Predicado

denota uma **relação entre objetos** num determinado contexto




- **sobre(a,b) :** o bloco A está sobre o bloco B
- **cor(b,azul):** o bloco B tem cor azul
- **maior(a,c):** o bloco A é maior que o bloco C

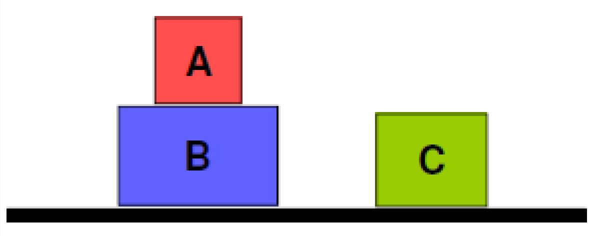
Proposições atômica

Nomes de predicados também devem iniciar com letra minúscula!

# Linguagem formal: Sintaxe

## Conectivos

forma proposições compostas, a partir de proposições atômicas




- **sobre(a,b) ∧ sobre(b,m)**: A está sobre B e B está sobre a mesa
- **¬ cor(b,azul):** a cor de B não é azul
- **maior(b,c) ∨ maior(c,b):** o bloco B é maior que C ou C é maior que B

# Linguagem formal: Sintaxe

## Variável

permite estabelecer fatos sobre objetos, sem nomeá-los explicitamente

- **bloco(X) :** X é um bloco
- **mesa(Y) :** Y é uma mesa
- **sobre(X,Y) :** X está sobre Y

Não são proposições Atômicas!

Note que proposições atômicas são sentenças que podem ter valor verdadeiro ou falso; mas não podemos dizer se **bloco(X)** é verdadeiro ou falso até que a variável **X** tenha sido **substituída** ou **quantificada**.

Nomes de variáveis devem iniciar com letra **maiúscula**!

# Linguagem formal: Sintaxe

## Quantificadores

permite estabelecer fatos sobre objetos, sem enumerá-los explicitamente

- Há dois quantificadores:

  **Universal....:** "∀X[bloco(X)] estabelece que todo objeto X é um bloco

  **Existencial..:** ∃Y[mesa(Y)] estabelece que algum objeto Y é uma mesa

- Estes quantificadores podem ser combinados numa mesma fórmula

  "∀X[bloco(X) → ∃Y[sobre(X,Y) ∧ (bloco(Y) ∨ mesa(Y))]]

  Todo bloco está sobre alguma coisa que é um bloco ou uma mesa

# Linguagem formal: Semântica

## Interpretação

- um conjunto não-vazio D
- um mapeamento que associa cada objeto a um elemento fixo de D
- um mapeamento que associa cada predicado a uma relação sobre D

- **O quantificador universal denota conjunção**

  Por exemplo, para D= {a, b ,c, m}

  A fórmula ∀X(bloco(x)) equivale a bloco(a)∧bloco(b)∧ bloco(c)∧bloco(m)

- **O quantificador existe ncial denota disjunção**

  Por exemplo, para D= {a, b ,c, m}

  A fórmula ∃Y[mesa(Y)] equivale a mesa(a)∨ mesa(b)∨mesa(c)∨ mesa(m)

- **Equivalências**

¬∀X[a(X)] ≡ ∃X[¬a(X)]

¬∃X[a(X)] ≡ ∀X[¬a(X)]

# Representação de Conhecimento

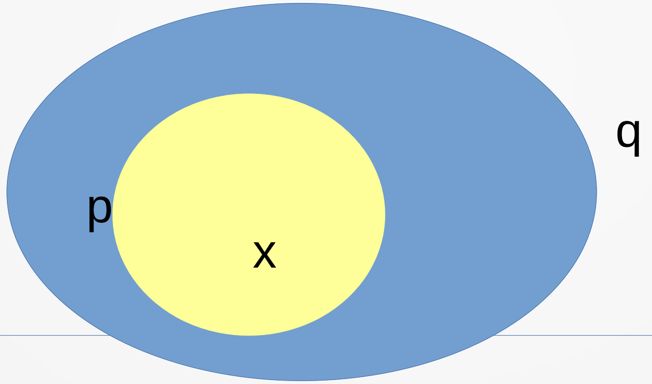
Para facilitar a formalização se sentenças na lógica de predicados,destacamos quatro tipos de sentenças de especial interesse, denominadas enunciados categóricos:

- Universal afirmativo: Todos os homens são mortais.
- Universal negativo: Nenhum homem é extra-terrestre.
- Particular afirmativo: Alguns homens são cultos.
- Particular negativo: Alguns homens não são cultos

# Representação de Conhecimento

## Enunciado universal afirmativo

- é da forma $\forall X[p(X) \rightarrow q(X)]$
- estabelece que **p** é um subconjunto de **q**




- **Exemplo:**
  - **Sentença....: Todos os homens são mortais**
  - **Sintaxe.......:** $\forall X[h(X) \rightarrow m(X)]$
  - **Semântica..:** para todo X, se $X \in h$ então $X \in m$

# Representação de Conhecimento

## Enunciado universal afirmativo

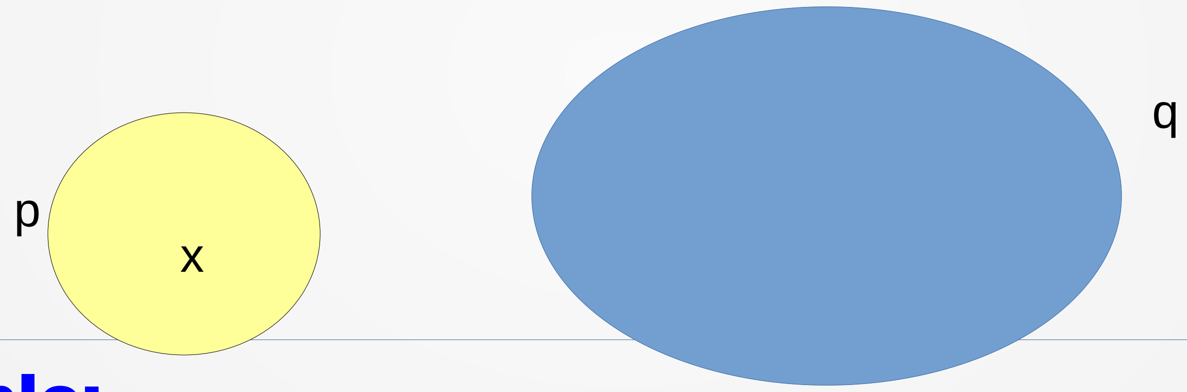
$$\forall X[p(X) \rightarrow q(X)]$$

- **Pode ser ler como:**
  - Todos os m são n
  - m são n
  - Cada m é um n
  - Qualquer m é um n
  - Todos os objetos com a propriedade m são objetos que tem a propriedade n

# Representação de Conhecimento

## Enunciado universal Negativo

- é da forma $\forall X[p(X) \rightarrow \neg\, q(X)]$
- estabelece que os conjuntos **p** e **q** são disjuntos.




- **Exemplo:**
  - **Sentença....: Nenhum homem é extra-terreste**
  - **Sintaxe.......:** $\forall X[h(X) \rightarrow \neg\, e(X)]$
  - **Semântica..:** para todo X, se $X \in h$ então $X \notin e$

# Representação de Conhecimento

## Enunciado universal negativo

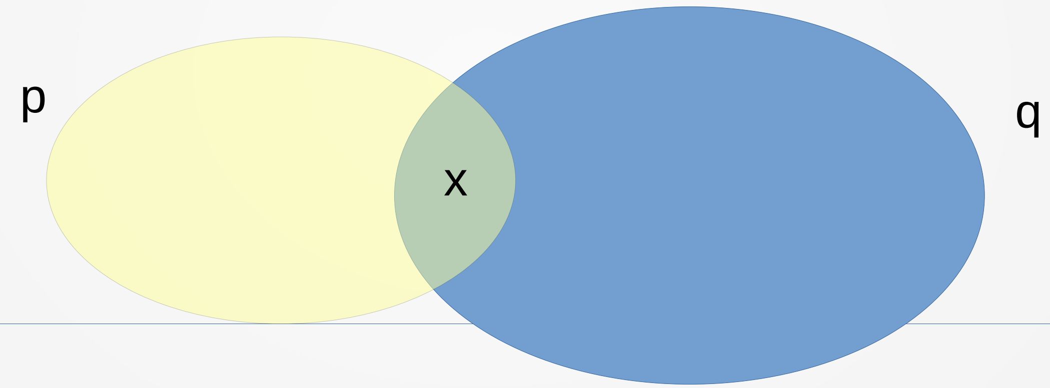
$\forall X[p(X) \rightarrow \neg\, q(X)]$

- **Pode ser ler como:**
  - Nenhum m é n
  - Ninguém que seja m é n
  - Nada que seja m é n
  - Nenhum dos m é n

# Representação de Conhecimento

## Enunciado particular Afirmativo

- é da forma $\exists X[p(X) \wedge q(X)]$
- estabelece que os conjuntos **p** e **q** têm intersecção não-vazia




- **Exemplo:**
  - **Sentença....: Alguns homens são cultos**
  - **Sintaxe.......:** $\exists X[h(X) \wedge c(X)]$
  - **Semântica..:** existe X tal que $X \in h$ e $X \in c$

# Representação de Conhecimento

## Enunciado particular afirmativo

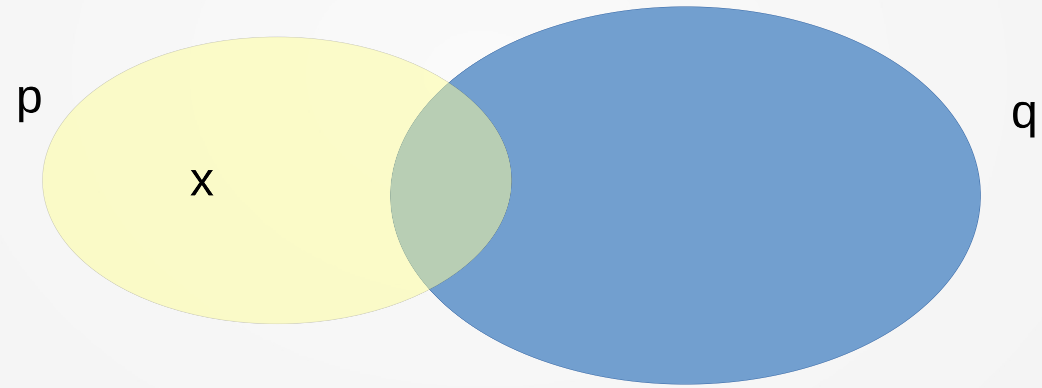
$$\exists X[p(X) \wedge q(X)]$$

- **Pode ser ler como:**
  - Alguns m são n
  - Existem m que são n
  - Há m que são n
  - Alguns m são n

# Representação de Conhecimento

## Enunciado particular negativo

- é da forma $\exists X[p(X) \wedge \neg q(X)]$
- estabelece que existem elementos em p que não estão em q




- **Exemplo:**
  - **Sentença....: Alguns homens não são cultos**
  - **Sintaxe.......:** $\exists X[h(X) \wedge \neg c(X)]$
  - **Semântica...:** existe X tal que $X \subset h$ e $X \not\subset c$

# Representação de Conhecimento

## Enunciado particular negativo

$$\exists X[p(X) \wedge \neg q(X)]$$

- **Pode ser ler como:**
  - Alguns m são não n
  - Alguns m não são n
  - Certos m não são n
  - Existem m que não são n
  - Pelo menos um m não é n

# Representação de Conhecimento

**Todos os homens são mortais**

$\forall x\ (homem(x) \rightarrow mortal(x))$

**Nenhuma baleia é peixe**

$\square\ x\ (baleia(x) \text{ -> } \neg\ peixe(x))$

**Nem tudo que é reluz é ouro**

$\square\ x\ (reluz(x)\ \wedge\ \neg\ ouro\ (x))$

**ou**

$\neg\square\ x(reluz(x) \text{ -> } ouro(x))$

**Alguns gatos são amarelos**

$\exists x\ (gatos(x) \wedge amarelos(x))$

**Alguns gatos são amarelos**

$\exists x\ (gatos(x) \wedge amarelos(x))$

# Representação de Conhecimento

**Há pintores que não são artistas mas artesãos**

**□x (pintor(x) ∧ ¬ artista (x) ∧ artesão(x))**

**Não há crime sem lei que o defini**

**□x(crime(x) -> □y(lei(y) ∧ defini(y,x))**

**Adão não foi o primeiro homem**

**□x (homem(x) ∧ nasceu_antes(x,adão))**

**Não há bom livro escrito por maus autores**

**□x((livro(x) ∧ bom(x) -> □y(autor(y) ∧ bom(y) ∧ escreveu(y,x)))**

**Um bom filme deve ter um bom roteiro**

**□x(( filme(x) ) ∧ bom(x) -> □x (roteiro(y) ∧ tem(x,y) ) ∧**

# Representação de Conhecimento

**Todos os números pares são divisíveis por dois**

**□x(natural(x) ∧ par(x) -> divisível(x,2))**

**TRADUZIR**

**p(x) : x é uma pessoa**

**e(x,y) : x engana y**

**$\forall x((p(x) \wedge \exists y(p(y) \wedge e(x,y))) \rightarrow e(x,x)$**

**Pessoas que enganam outras pessoas enganam a si mesmas**

# Representação de Conhecimento

**TRADUZIR**

**e(x) : x é um erro**

**h(x) : x é humano**

**f(x,y) : x faz y**

**1) $\forall x(h(x) \rightarrow \exists y(e(y) \wedge f(x,y)))$**

**Todo ser humano erra**

**2) $\forall x(\exists y(e(y) \wedge \neg f(x,y)) \rightarrow \neg H(x))$**

**Quem quer que não cometa erros não é humano**

**Não é humano quem não erra**

# Representação de Conhecimento

**Exercício 1. Formalize as sentenças a seguir usando lógica de predicados**

- Toda cobra é venenosa.
- Nenhuma bruxa é bela.
- Algumas plantas são carnívoras.
- Há aves que não voam.
- Tudo que sobe, desce.
- Existem políticos não são honestos.
- Não existe bêbado feliz.
- Pedras preciosas são caras.
- Ninguém gosta de impostos.
- Vegetarianos não gostam de açougueiros.
- Toda mãe ama seus filhos.

# Equivalência entre sentenças

- Há sentenças que podem ser escritas em mais de uma forma.
  - Exemplo
    - Sentenças

      Nem tudo que brilha é ouro.

      Existe algo que brilha e não é ouro.
    - Fórmulas

      $\neg\forall X[b(X)\rightarrow o(X)]$

      $\exists X[b(X) \wedge \neg o(X)]$
    - Equivalência

$\neg\forall X[b(X)\rightarrow o(X)]$

$\equiv \neg\forall X[\neg b(X) \vee o(X)]$

$\equiv \exists X \neg [\neg b(X) \vee o(X)]$

$\equiv \exists X [b(X) \wedge \neg o(X)]$

# Representação de Conhecimento

**Exercício 2. Verifique se os pares de sentenças são equivalentes**

- Nem toda estrada é perigosa.
- Algumas estradas não são perigosas.

- Nem todo bêbado é fumante.
- Alguns bêbados são fumantes.

- Nem todo ator americano é famoso.
- Alguns atores americanos não são famosos.

FIM