Processamento de Imagens

Filtragem no Domínio Espacial

(Filtros passa-altas)

Prof. Linder Cândido da Silva

UFMT

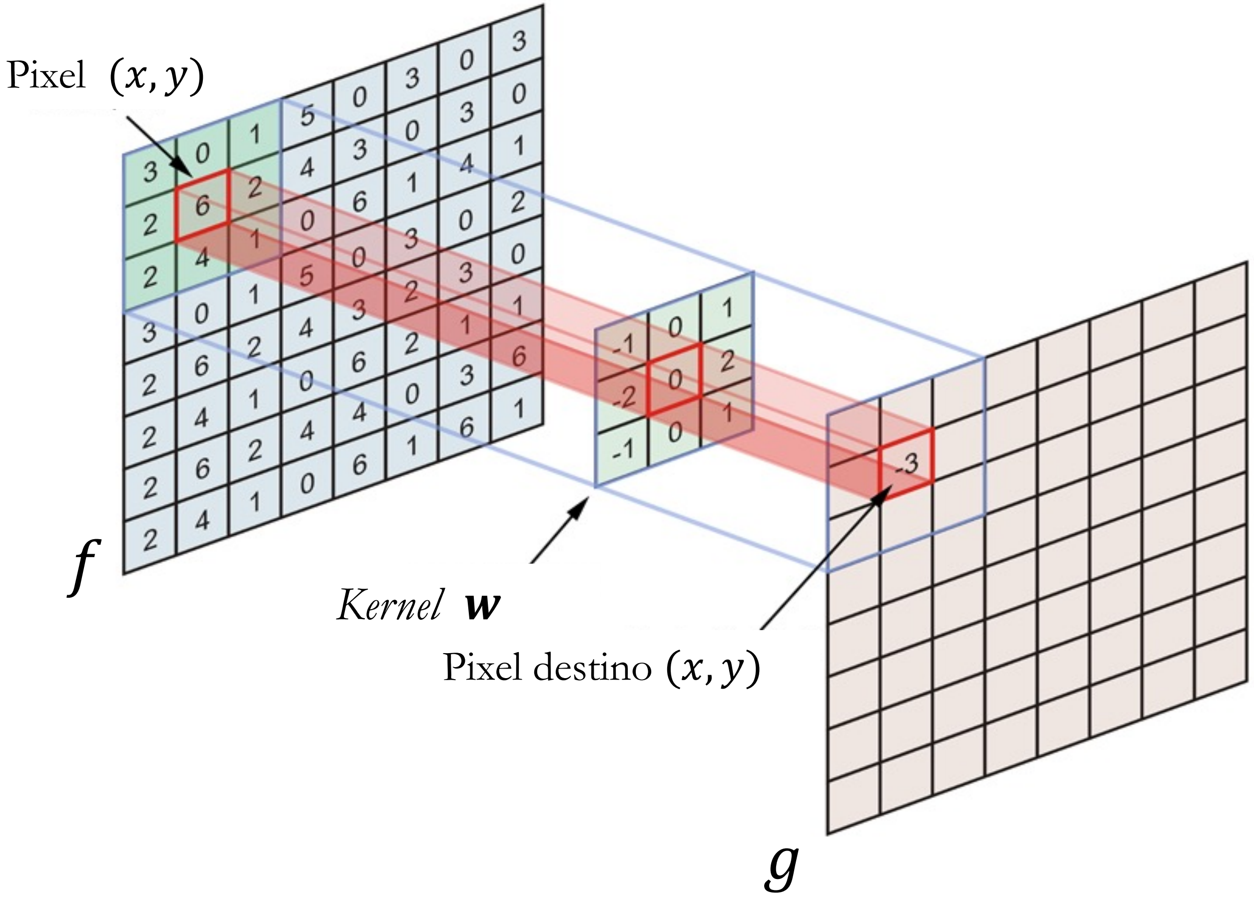
Julho de 2025

Agenda

- **Revisão.**
- Conceitos Preliminares sobre filtros passa-altas.
- Filtros baseados na derivada de segunda ordem: laplaciano.
- Aplicação do filtro laplaciano para aguçamento de imagens.
- Filtros baseados na derivada de primeira ordem.
- Aplicação dos Gradiente para aguçamento de imagens.

Relembrando

Filtragem Espacial Linear



<u>Matematicamente</u>

Com um kernel $m \times n$, $m = 2a + 1$ e $n = 2b + 1$

$$g(x, y) = (w \star f)(x, y) = \sum_{s=-a}^{a} \sum_{t=-b}^{b} w(s,t) f(x+s, y+t)$$

Para um kernel 3x3 como o da ilustração ao lado, temos:

$$g(x, y) = w(-1,-1) f(x-1, y-1) + w(-1,0) f(x-1, y) + \dots$$
$$+ w(0,0) f(x, y) + \dots + w(1,1) f(x+1, y+1)$$

$$= \begin{array}{l} (-1 \times 3) + (0 \times 0) + (1 \times 1) + \\ (-2 \times 2) + (0 \times 6) + (2 \times 2) + \\ (-1 \times 2) + (0 \times 4) + (1 \times 1) = -3 \end{array}$$

Filtros Box e Gaussiano

- Para suavização vimos os seguintes filtros lineares:

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

filtro box 3x3

Os filtros box correspondem a uma média aritmética dos pixels envolvidos pelo filtro.

$$G(s,t) = ke^{-\left(\frac{s^2+t^2}{2\sigma^2}\right)}$$

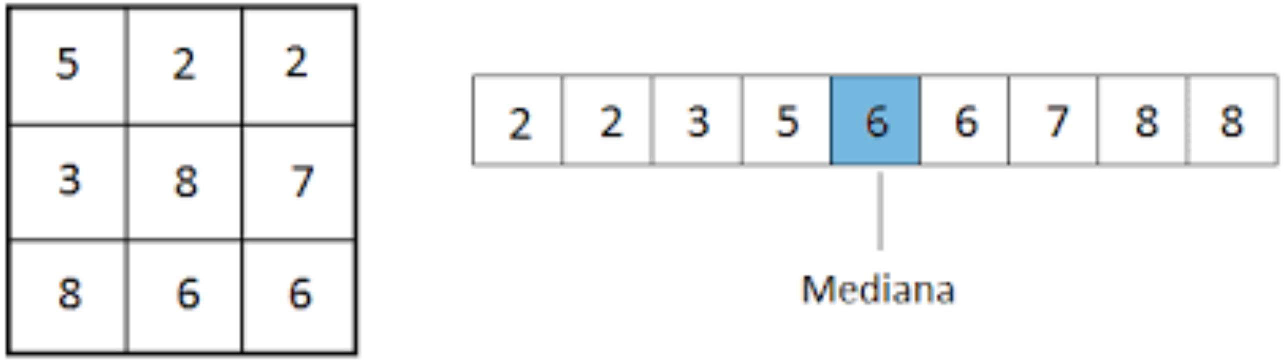
$$\frac{1}{4.8976} \times \begin{bmatrix} 0.3679 & 0.6065 & 0.3679 \\ 0.6065 & 1.0000 & 0.6065 \\ 0.3679 & 0.6065 & 0.3679 \end{bmatrix}$$

$k=1$ e $\sigma=1$

Os filtros gaussianos correspondem a uma média ponderada dos pixels envolvidos pelo filtro.

Filtro da Mediana

- Para suavização vimos o seguinte filtro não linear:



Atribuímos ao pixel de saída a mediana dos valores dos pixels numa vizinhança especificada.

Conceitos Preliminares Sobre Filtros Passa Altas

Filtros Espaciais Passa-Altas

- A convolução de imagens com filtros lineares passa-baixas corresponde ao cálculo de médias com o efeito geral de **suavizar** a imagem. Esses filtros corresponde a **operações integrativas**.
- A convolução de imagens com filtros lineares passa-alta tem **efeito oposto**. Isto significa que transições bruscas, como os contornos e ruídos, **são enfatizados**. A operação desses filtros corresponde a **operações derivativas**.

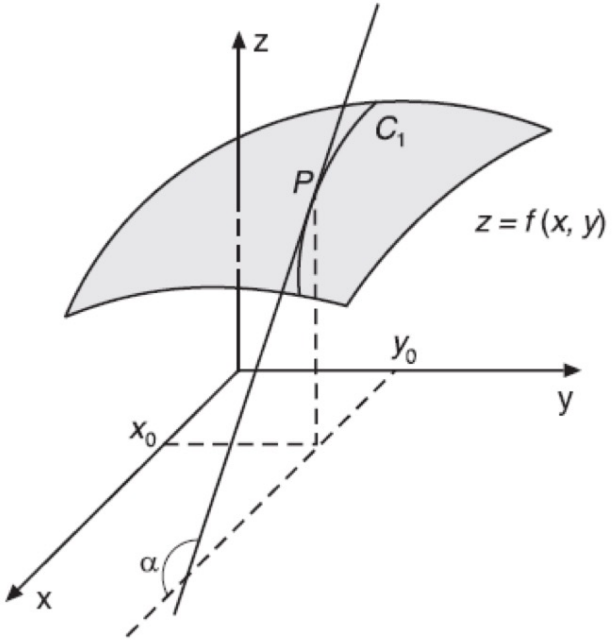
Original

Filtrada

Derivadas Parciais de Primeira Ordem

A definição de derivada parcial de uma função contínua $f(x, y)$ em relação a x:

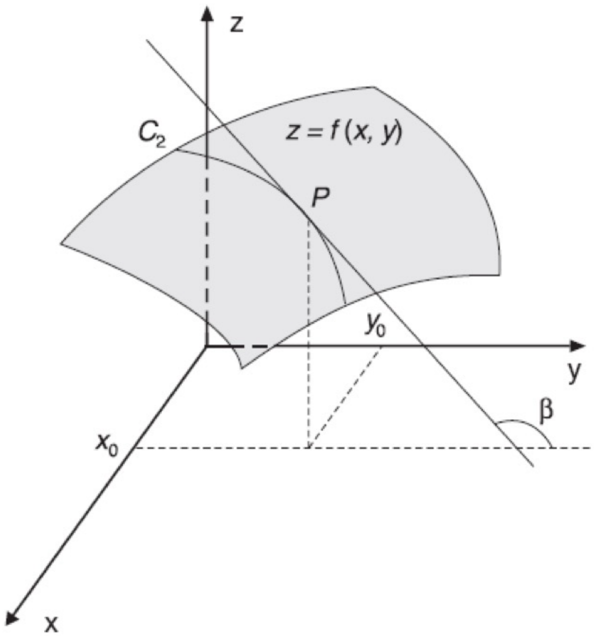
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$



Derivadas Parciais de Primeira Ordem

A definição de derivada parcial de uma função contínua $f(x, y)$ em relação a x:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}$$



Série de Taylor

- Uma função contínua $f(x)$ pode ser expandida em torno de um ponto x com a chamada série de Taylor:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + o(h^2)$$
$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + o(h^2)$$

- Disso, obtemos aproximações de primeira ordem para as derivadas parciais. Por exemplo, mantido y constante:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx \frac{f(x) - f(x-h,y)}{h}$$

Aproximações da Derivada Parcial Primeira

- Imagens digitais são discretizada em pixels com separação mínima $h = 1$. Portanto, as possíveis aproximação são:

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx f(x+1) - f(x)}$$

Aproximação Progressiva

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx f(x) - f(x-1)}$$

Aproximação Regressiva

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}}$$

Aproximação Centrada

Aproximação Progressiva

- A aproximação progressiva na direção vertival pode ser calculada com a convolução com o seguinte kernel:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx f(x+1) - f(x)}$$

Aproximação Regressiva

- A aproximação regressiva na direção vertical pode ser calculada com a convolução com o seguinte kernel:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx f(x) - f(x-1)}$$

Aproximação Centrada

- A aproximação centrada na direção vertical pode ser calculada com a convolução com o seguinte kernel:

$$H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} \approx \frac{f(x+1) - f(x-1)}{2}}$$

Propriedades da Derivada Primeira

- Existem várias possibilidades de aproximações para a derivada parcial de primeira ordem em um dado ponto da imagem, mas qualquer definição deve incorporar as seguintes propriedades:

1. Deve ser zero em áreas de intensidade constante.
2. Deve ser diferente de zero no início de uma rampa.
3. Deve ser diferente de zero em um degrau (salto) de intensidade.
4. Deve ser diferente de zero ao longo de rampas de intensidade.

Aproximação da Derivada Parcial de Segunda Ordem

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \approx \frac{\partial}{\partial x}(f(x+1,y) - f(x,y))$$

$$\approx f(x+2,y) - f(x+1,y) - f(x+1,y) + f(x,y)$$

$$\approx f(x+2,y) - 2f(x+1,y) + f(x,y)$$

Fazendo um shift de 1 pixel para considerar uma vizinhança simétrica, obtemos:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \approx f(x+1,y) - 2f(x,y) + f(x-1,y)$$

Aproximação da Derivada Parcial de Segunda Ordem

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} \approx f(x+1,y) - 2f(x,y) + f(x-1,y)$$

A aproximação acima é equivalente a fazer a convolução com o seguinte kernel:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

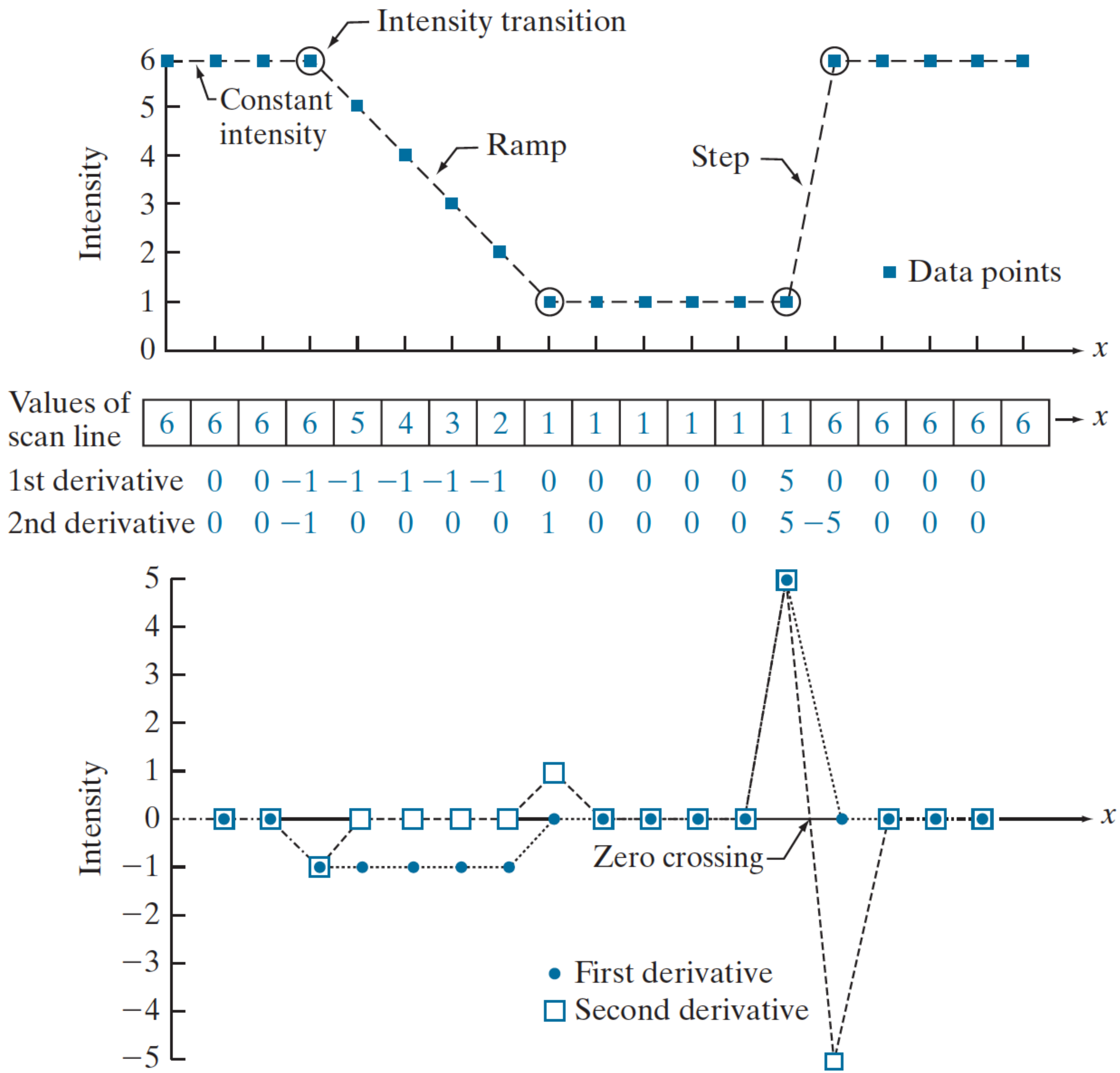
Propriedades da Derivada Segunda

- Similarmente ao caso da derivada primeira, qualquer definição aproximada da derivada segunda deve incorporar as seguintes propriedades:

1. Deve ser zero em áreas de intensidade constante.
2. Deve ser diferente de zero no início e final de uma rampa ou degrau de intensidade.
3. Deve ser zero ao longo de rampas de intensidade.

a
b
c

FIGURE 3.44
(a) A section of a horizontal scan line from an image, showing ramp and step edges, as well as constant segments.
(b)Values of the scan line and its derivatives.
(c) Plot of the derivatives, showing a zero crossing. In (a) and (c) points were joined by dashed lines as a visual aid.



Agenda

- Revisão.
- Conceitos Preliminares sobre filtros passa-altas.
- **Filtros baseados na derivada de segunda ordem: Laplacianos.**
- Aplicação do filtro laplaciano para aguçamento de imagens.
- Filtros baseados na derivada de primeira ordem.
- Aplicação dos Gradiente para aguçamento de imagens.

Filtro Laplaciano

Filtro Laplaciano

- Laplaciana de uma função de duas variáveis:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

- Aproximando por diferenças finitas nas direções x e y, obtemos:

$$\nabla^2 f \approx f(x+1,y) + f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x,y-1) - 4f(x,y)$$

- Filtro linear correspondente:

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

Variações do Filtro Laplaciano

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

1	1	1
1	−8	1
1	1	1

0	−1	0
−1	4	−1
0	−1	0

−1	−1	−1
−1	8	−1
−1	−1	−1

a b c d

(a) Kernel laplaciano do slide anterior. (b) Extensão que inclui termos diagonais. (c) e (d) Outras duas variações obtidas pela troca de sinais.

Agenda

- Revisão.
- Conceitos Preliminares sobre filtros passa-altas.
- Filtros baseados na derivada de segunda ordem: laplaciano.
- **Aplicação do filtro laplaciano para aguçamento de imagens.**
- Filtros baseados na derivada de primeira ordem.
- Aplicação do Gradiente para aguçamento de imagens.

Aplicação do Filtro Laplaciano

Aguçamento de Imagens

Aguçamento de Imagens com Filtro Laplaciano

- Procedimento:

1. Suavizar a imagem com um filtro gaussiano para eliminar pequenos ruídos.

2. Calcular laplaciana $\nabla^2 f(x, y)$ da imagem de entrada. A laplaciana destacará transições abruptas de intensidade.

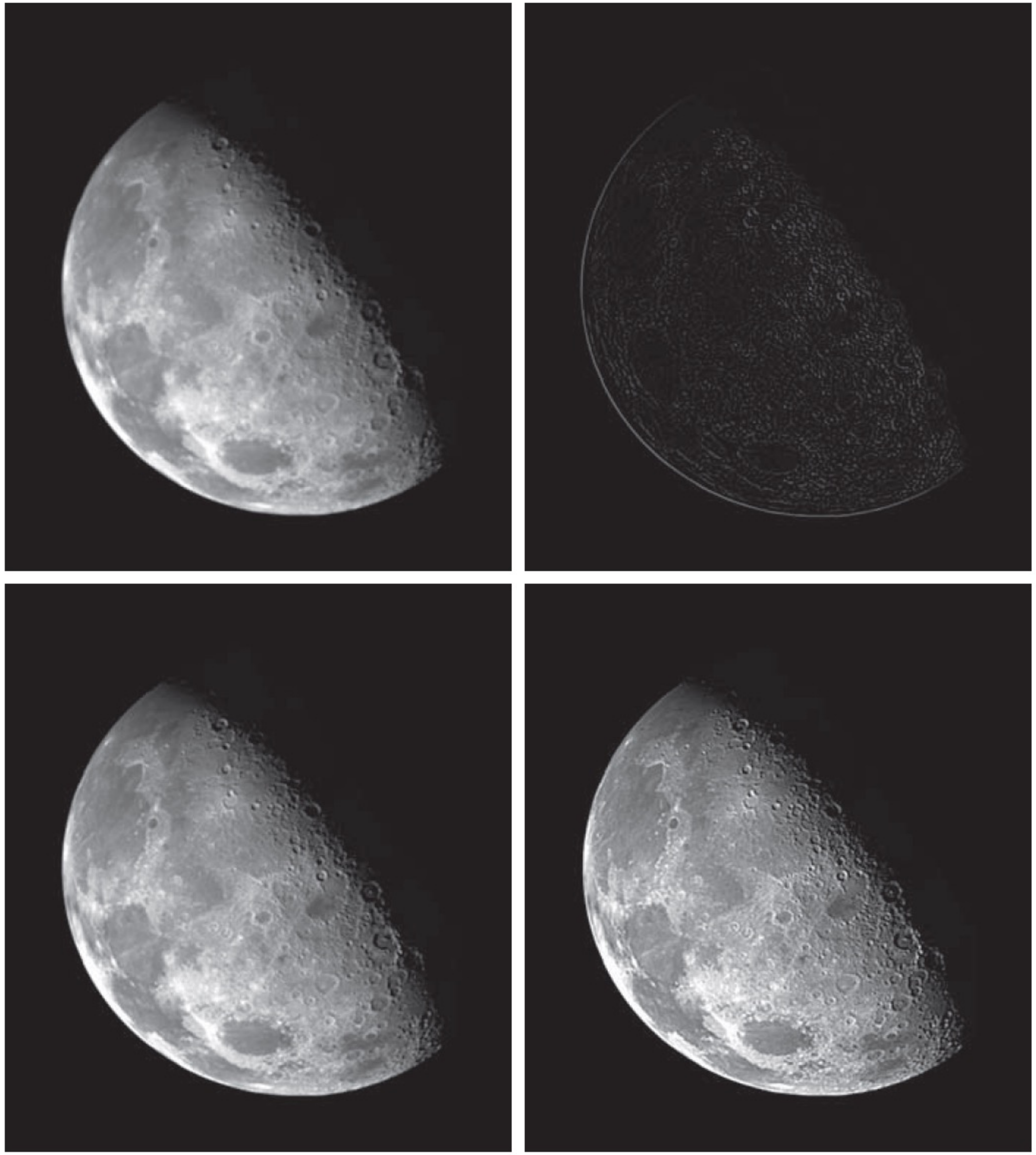
3. Usar a laplaciana para aguçar a imagem de entrada: $g(x, y) = f(x, y) + c[\nabla^2 f(x, y)]$. Onde C = -1 se um filtro com centro negativo é usado e c=1 se um filtro com centro positivo é usado.

a	b
c	d

(a) Imagem suavizada do polo norte da lua. (b) Imagem laplaciana obtida usando o kernel da esquerda. (c) Imagem aguçada usando o kernel que produziu a imagem (b). (d) Imagem aguçada usando o mesmo procedimento, mas com o kernel da direita.

0	1	0
1	−4	1
0	1	0

1	1	1
1	−8	1
1	1	1



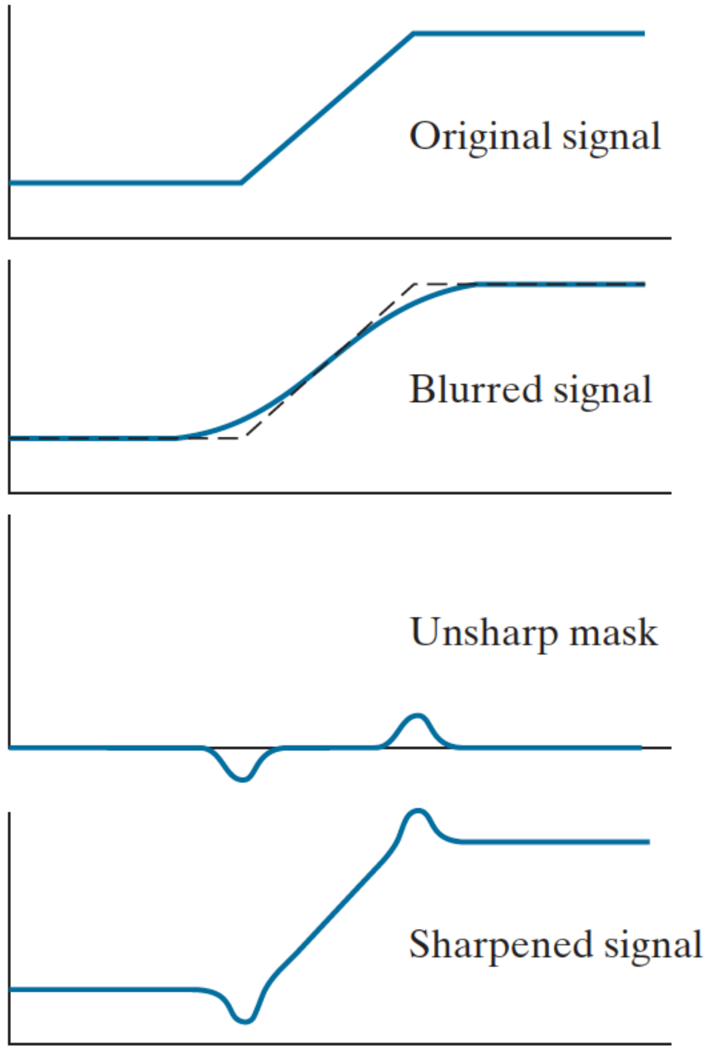
Procedimento Alternativo Usando Filtro de Suavização

- A técnica de aguçamento de imagem com filtro de suavização combina um processo de suavização e a imagem original para melhorar a nitidez dos detalhes. O processo básico envolve os seguintes passos:

1. **Suavização da Imagem**: Aplica-se um filtro de suavização na imagem original f para obter a imagem suavizada $\bar{f}$. Por exemplo, um filtro box ou gaussiano.
2. **Subtração da Imagem Suavizada da Imagem Original**: A imagem suavizada $\bar{f}$ é subtraída da imagem original f, resultando em uma imagem que representa os detalhes de alta frequência. Isso corresponde ao cálculo da máscara $g = f - \bar{f}$
3. **Adição dos Detalhes à Imagem Original**: Os detalhes extraídos são somados à imagem original para obter a imagem aguçada $o = f + cg$. Onde c é um fator de amplificação.

a
b
c
d

Ilustração 1D dos mecanismos envolvidos no aguçamento com máscara de suavização. (a) Sinal original. (b) Sinal suavizado. (c) Máscara. (d) Sinal aguçado.



Gradiente de Imagens

Gradiente

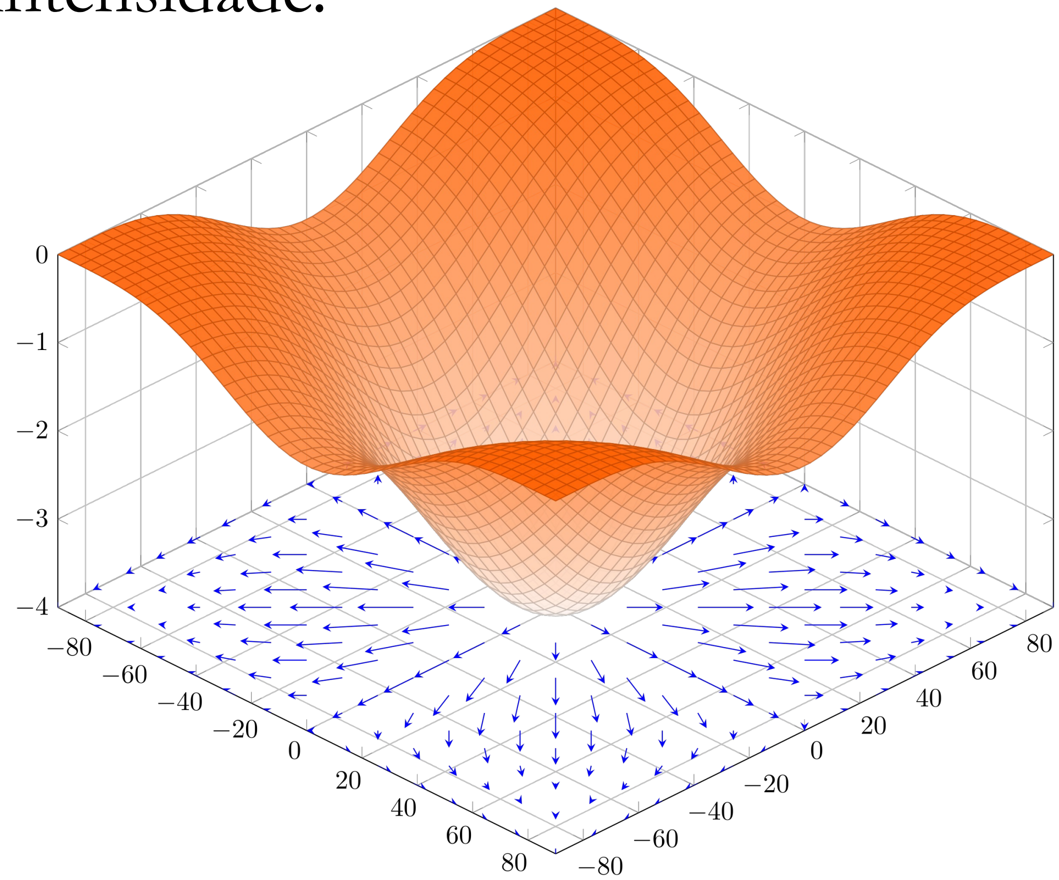
- Vimos que as derivadas parciais de primeira ordem podem ser aproximadas por diferenças finitas. Particularmente, no caso de imagens, essas derivadas são calculadas convoluindo kernels com pesos apropriados. Com essas aproximações, podemos obter em cada ponto da imagem o **vetor gradiente**.

$$\nabla f \equiv \text{grad}(f) = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Sua principal propriedade é que ele aponta para a direção de **maior aumento** de intensidade da imagem (para imagens coloridas temos um gradiente para cada canal de cor).

O Vetor Gradiente

- O vetor gradiente aponta para a direção de maior variação da função. No caso de uma imagem em escala de cinza, para a direção de maior aumento de intensidade.



- Se essa superfície for interpretada como uma imagem, teríamos o centro escuro clareando para as laterais.
- No plano estão indicados a direção do vetor gradiente.

Calculando as Derivadas Parciais de Primeira Ordem

- Como já mencionado, existem várias possibilidades para especificar de forma aproximada o valor das derivadas parciais de primeira ordem.
- O mais importante é que a definição usada seja zero em áreas de intensidade constante, seja diferente de zero no início de uma rampa ou degrau de intensidade e seja diferente de zero ao longo de rampas de intensidade.
- Os **Filtros de Sobel** são baseados nas diferenças finitas centradas:

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$

−1	−2	−1
0	0	0
1	2	1

−1	0	1
−2	0	2
−1	0	1

$\dfrac{\partial f}{\partial y}$

Magnitude do Vetor Gradiente

- Dado o gradiente:

$$\nabla f \equiv \text{grad}(f) = \begin{bmatrix} g_x \\ g_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- A magnitude é o comprimento do gradiente. Indica quão forte é a variação de intensidade na direção do gradiente.

$$M(x,y) = \|\nabla f\| = \text{mag}(\nabla f) = \sqrt{g_x^2 + g_y^2}$$

Aguçamento de Imagens Usando Gradientes

- Procedimento:

1. Suavizar a imagem com um filtro gaussiano para eliminar pequenos ruídos.
2. Calcular o gradiente $\nabla f(x, y)$ da imagem de entrada usando os filtros de Sobel.
3. Combinar as componentes do gradiente gerando uma imagem que destaca os detalhes e bordas. Por exemplo, calculando sua magnitude $M(x, y) = \|\nabla f(x, y)\|$.
4. Usar a imagem de borda para aguçar a imagem original $g(x, y) = f(x, y) + cM(x, y)$.

Aguçamento de Imagens Usando Gradientes

- Em geral é preferível realçar imagens (aguçar) usando a Laplacina, pois o gradiente tende a reforçar bordas espeças que as vezes desagradam visualmente.

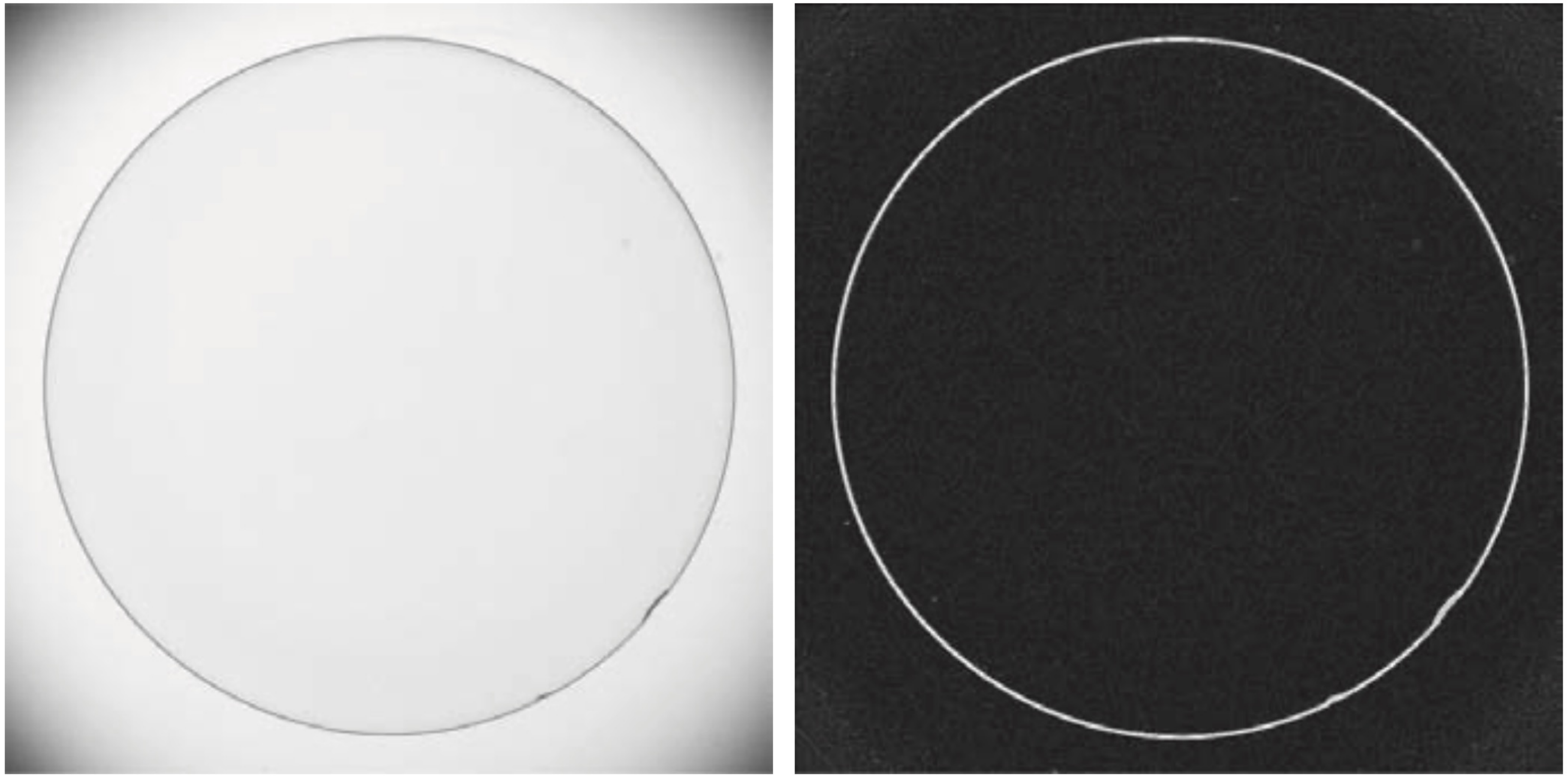
- O gradiente é frequentemente utilizado em inspeção industrial, seja para auxiliar humanos na detecção de defeitos ou, o que é mais comum, como etapa de pré-processamento em inspeção automatizada.

- O slide a seguir ilustra um exemplo simples de como o gradiente pode ser usado para realçar defeitos e eliminar características de fundo que mudam lentamente.

Exemplo de Aplicação do Gradiente

a b

FIGURE 3.51
(a) Image of a contact lens (note defects on the boundary at 4 and 5 o'clock).
(b) Sobel gradient.
(Original image courtesy of Perceptics Corporation.)

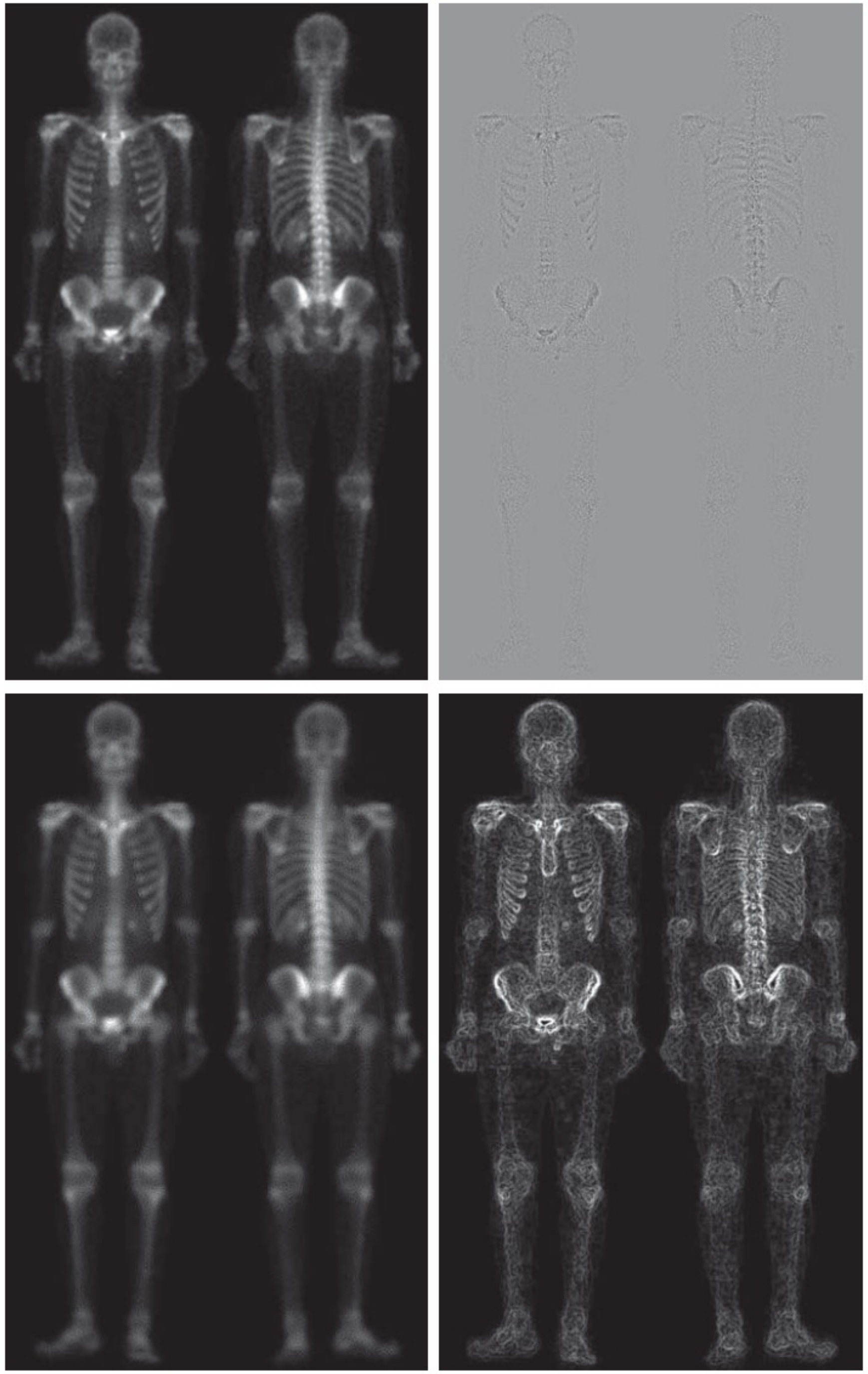


Combinação de Métodos

- As técnicas apresentadas até o momento são aplicadas em uma variedade de problemas, incluindo extração de contornos, segmentação, melhoramento, entre outras.
- Aqui estamos focando em melhoramento, e o exemplo a seguir ilustra como essas técnicas podem ser combinadas a fim de obter um resultado aceitável.
- Trata-se de um melhoramento feito em uma imagem de raio-x. O objetivo é aprimorar essa imagem, tornando-a mais nítida e realçando mais detalhes do esqueleto.
- A estreita faixa dinâmica dos níveis de intensidade e o alto conteúdo de ruído tornam esta imagem difícil de melhorar. Utilizou-se o Laplaciano para destacar detalhes finos e o gradiente para realçar bordas proeminentes.

a b
c d

FIGURE 3.57
(a) Image of whole body bone scan.
(b) Laplacian of (a).
(c) Sharpened image obtained by adding (a) and (b).
(d) Sobel gradient of image (a). (Original image courtesy of G.E. Medical Systems.)



e f
g h

FIGURE 3.57
(Continued)
(e) Sobel image smoothed with a 5×5 box filter.
(f) Mask image formed by the product of (b) and (e).
(g) Sharpened image obtained by the adding images (a) and (f).
(h) Final result obtained by applying a power-law transformation to (g). Compare images (g) and (h) with (a). (Original image courtesy of G.E. Medical Systems.)