Álgebra booleana e Mapa de Karnaugh

Marcos Antonio Jeremias Coelho

marcos.coelho@satc.edu.br

Álgebra booleana

- A Álgebra de Boole é uma ferramenta matemática muito utilizada na **representação** e **simplificação de funções** binárias (ou lógicas).
- As leis que governam as relações entre as proposições lógicas eram idênticas às leis válidas para dispositivos de chaveamento de **dois estados**.
- Tais dispositivos podem ter um dos seguintes estados diferentes: “ligado” ou “desligado”, voltagem “alta” ou “baixa”, “verdadeiro” ou “falso”.

Álgebra booleana

- Álgebra de Boole é estruturada sobre um conjunto de três tipos de operações: **OR**, **AND** e **NOT**, e pelos caracteres **0** e **1**.

- As operações AND e OR serão simbolizadas, respectivamente, por um ponto (.) e por um sinal de mais (+), enquanto que o NOT será representado através de uma barra colocada em cima do elemento em questão.

Definições básicas

1. **Variável lógica:** Variável que tem por domínio 2 valores lógicos distintos, representados pelos valores 0 e 1.
2. **Função lógica**: Função que tem por contradomínio os valores lógicos 0 e 1;
3. **Operadores/Funções lógicos elementares**:
   a) Intersecção – Operação AND $f_{(A,B)} = A.B = AB$
   b) União – Operação OR $f_{(A,B)} = A + B$
   c) Complemento – Operação NOT

Definições básicas

4. **Expressões lógicas:** É um conjunto de variáveis (literais) e constantes lógicas (0 e 1) ligadas entre si pelos sinais dos operadores lógicos elementares.
5. **Expressões lógicas equivalentes**: Quando uma delas só for igual a 1 quando a outra também for igual a 1, e igual a 0 quando a outra também for igual a 0.
6. **Expressões lógicas complementares**: Se uma delas for igual a 1 quando a outra for igual a 0,e vice-versa.

Definições básicas

7. **Expressões lógicas duais:** Quando de uma se pode obter a outra:
    a) transformando todos os "." em "+" (produtos em somas);
    b) transformando todos os "+" em "." (somas em produtos);
    c) transformando todos os 0 em 1;
    d) transformando todos os 1 em 0; e mantendo as ocorrências das variáveis (literais).

Definições básicas

7. **Expressões lógicas duais:** Quando de uma se pode obter a outra:

Exemplo:

$$1.B + \bar{C}.\bar{A}.B + 0 = (0 + B).(\bar{C} + \bar{A} + B).1$$

Definições básicas

8. Uma função lógica é representada de forma inequívoca por uma tabela verdade, mas admite a representação através de várias expressões lógicas equivalentes. Uma **função lógica** pode ser representada por um **circuito lógico** (diagrama lógico) constituído por **portas lógicas**.

Postulados (Axiomas)

1. Postulados da Complementação

Este postulado mostra as regras da complementação na álgebra de Boole, onde é o complemento de A.

1) Se A = 0 então A' = 1

2) Se A = 1 então A' = 0

Assim, pode-se estabelecer a seguinte identidad $\bar{\bar{A}} = A$

O bloco lógico que executa o postulado da complementação é o INVERSOR.

Postulados (Axiomas)

2. Postulados da Adição

Este postulado mostra como são as regras da adição dentro da álgebra de Boole.

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 1$$

Desta forma, pode-se estabelecer as seguintes identidades:

$$A + 0 = A$$
$$A + 1 = 1$$
$$A + A = A$$
$$A + A' = 1$$

Postulados (Axiomas)

3. Postulados da Multiplicação

Este postulado mostra como são as regras da multiplicação booleana.

$$0 \,.\, 0 = 0$$
$$0 \,.\, 1 = 0$$
$$1 \,.\, 0 = 0$$
$$1 \,.\, 1 = 1$$

Desta forma, pode-se estabelecer as seguintes identidades:

$$A \,.\, 0 = 0$$
$$A \,.\, 1 = A$$
$$A \,.\, A = A$$
$$A \,.\, A' = 0$$

Propriedades

1. **Propriedade Comutativa:** Esta propriedade é válida na adição e na multiplicação.

$$A + B = B + A$$
$$A \,.\, B = B \,.\, A$$

2. **Propriedade Associativa:** Esta propriedade também é válida tanto na adição quanto na multiplicação.

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$
$$A \,.\, (B \,.\, C) = (A \,.\, B) \,.\, C = A \,.\, B \,.\, C$$

3. **Propriedade Distributiva**

$$A \,.\, (B + C) = A \,.\, B + A \,.\, C$$

Teoremas da Álgebra de Boole

	Expressão	Dual	Descrição
T1	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$	
T2	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$	
T3	$A \cdot A = A$	$A + A = A$	
T4	$A \cdot \bar{A} = 0$	$A + \bar{A} = 1$	
T5	$A = \overline{\overline{A}}$		Lei da idem Potência
T6	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$	Lei da comutividade
T7	$A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A+B+C = A+(B+C) = (A+B)+C$	Lei da associatividade
T8	$A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B+C)$	$(A+B) \cdot (A+C) = A + B \cdot C$	Lei distributiva
T9	$A + A \cdot B = A$	$A \cdot (A + B) = A$	Lei da absorção
T10	$A + \bar{A} \cdot B = A + B$	$A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$	Lei do termo "menor"
T11	$A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A$	$(A + B) \cdot (A + \bar{B}) = A$	Lei da adjacência
T12	$A \cdot B + \bar{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \bar{A} \cdot C$	$(A+B)(\bar{A}+C)(B+B) = (A+B)(\bar{A}+C)$	Lei do termo "incluído"
T13	$(\overline{A \cdot B}) = \bar{A} + \bar{B}$	$(\overline{A + B}) = \bar{A} \cdot \bar{B}$	Lei de Morgan

Simplificações de expressões

1. **Simplificação recorrendo aos teoremas da Álgebra de Boole:** É um processo heurístico onde se procuram detectar partes da expressão que sejam simplificadas por aplicação dos teoremas, resultando em expressões equivalentes.

Simplificações de expressões

Exemplo:

$$A\bar{B}(C+\bar{C})+\bar{A}BC+AB(C+\bar{C})$$

	Expressão	Dual
T1	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
T2	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
T3	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
T4	$A \cdot \bar{A} = 0$	$A + \bar{A} = 1$
T5	$A = \bar{\bar{A}}$	
T6	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
T7	$A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A+B+C = A+(B+C) = (A+B)+C$
T8	$A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B+C)$	$(A+B) \cdot (A+C) = A + B \cdot C$
T9	$A + A \cdot B = A$	$A \cdot (A + B) = A$
T10	$A + \bar{A} \cdot B = A + B$	$A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$
T11	$A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A$	$(A + B) \cdot (A + \bar{B}) = A$
T12	$A \cdot B + \bar{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \bar{A} \cdot C$	$(A+B)(\bar{A}+C)(B+B) = (A+B)(\bar{A}+C)$
T13	$(\overline{A \cdot B}) = \bar{A} + \bar{B}$	$(\overline{A + B}) = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Simplificações de expressões

Exemplo:

$$\bar{A} + AB + A\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$$

	Expressão	Dual
T1	$A \cdot 0 = 0$	$A + 1 = 1$
T2	$A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A$
T3	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
T4	$A \cdot \bar{A} = 0$	$A + \bar{A} = 1$
T5	$A = \bar{\bar{A}}$	
T6	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
T7	$A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A+B+C = A+(B+C) = (A+B)+C$
T8	$A \cdot B + A \cdot C = A \cdot (B+C)$	$(A+B) \cdot (A+C) = A + B \cdot C$
T9	$A + A \cdot B = A$	$A \cdot (A + B) = A$
T10	$A + \bar{A} \cdot B = A + B$	$A \cdot (\bar{A} + B) = A \cdot B$
T11	$A \cdot B + A \cdot \bar{B} = A$	$(A + B) \cdot (A + \bar{B}) = A$
T12	$A \cdot B + \bar{A} \cdot C + B \cdot C = A \cdot B + \bar{A} \cdot C$	$(A+B)(\bar{A}+C)(B+B) = (A+B)(\bar{A}+C)$
T13	$(\overline{A \cdot B}) = \bar{A} + \bar{B}$	$(\overline{A + B}) = \bar{A} \cdot \bar{B}$

Forma Canônica

Toda função booleana de n variáveis pode ser escrita na forma canônica disjuntiva ou conjuntiva.

Forma Canônica Disjuntiva

- Chama-se forma canônica disjuntiva aquela obtida da tabela da verdade escrevendo-se:

a) Um termo para cada linha onde a função é igual a 1.

b) Os termos serão ligados pela operação "OU" (+).

c) Em cada termo as variáveis serão ligadas pela operação "E"(.).

d) A variável será barrada ou não, conforme seu valor seja 0 ou 1 naquela linha.

Forma Canônica Disjuntiva

- Exemplo: Seja a tabela verdade, determine a forma disjuntiva

A	B	C	F		
0	0	0	1	$\rightarrow$	$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$
0	0	1	0		
0	1	0	0		
0	1	1	1	$\rightarrow$	$\bar{A}BC$
1	0	0	1	$\rightarrow$	$A\bar{B}\bar{C}$ A
1	0	1	0		
1	1	0	0		
1	1	1	1	$\rightarrow$	ABC

Forma Canônica Conjuntiva

- Chama-se forma canônica conjuntiva aquela obtida da tabela da verdade escrevendo-se:

a) Um termo para cada linha onde a função tem valor 0.

b) Os termos serão ligados pela operação "E " (.).

c) Em cada termo as variáveis serão ligadas pela operação "OU" (+).

d) A variável será barrada se naquela linha seu valor é 1 e não barrada se seu valor é 0.

Forma Canônica Conjuntiva

- Exemplo: Seja a tabela verdade, determine a forma Conjuntiva

A	B	C	F		
0	0	0	1		
0	0	1	0	$\rightarrow$	$\bar{A} + \bar{B} + C$
0	1	0	0	$\rightarrow$	$\bar{A} + B + \bar{C}$
0	1	1	1		
1	0	0	1		
1	0	1	0	$\rightarrow$	$A + \bar{B} + C$
1	1	0	0	$\rightarrow$	$A + B + \bar{C}$
1	1	1	1		

Mapa de Karnaugh

- O mapa de Karnaugh é uma forma ordenada para simplificar uma expressão, que geralmente nos leva a **um circuito com configuração mínima**.

- Não utiliza a tabela da verdade, e pode ser facilmente aplicado em funções envolvendo de **duas a cinco** variáveis.
- Para **seis ou mais** variáveis, o método começa a se tornar incômodo e podemos usar outras técnicas mais elaboradas.

Mintermos

- Qualquer função booleana pode ser escrita na forma canônica disjuntiva ou conjuntiva.

- A **forma canônica disjuntiva** é também conhecida como **soma de produtos**, e é escrita como soma de termos que apresentam sempre todas as variáveis envolvidas.

Mintermos

- Como exemplo, vamos escrever na forma canônica disjuntiva a função:

$$f = A(C + \bar{B})$$

Mintermos

- Como exemplo, vamos escrever na forma canônica disjuntiva a função:

$$f = A(C + \bar{B}) = ABC + A\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C}$$

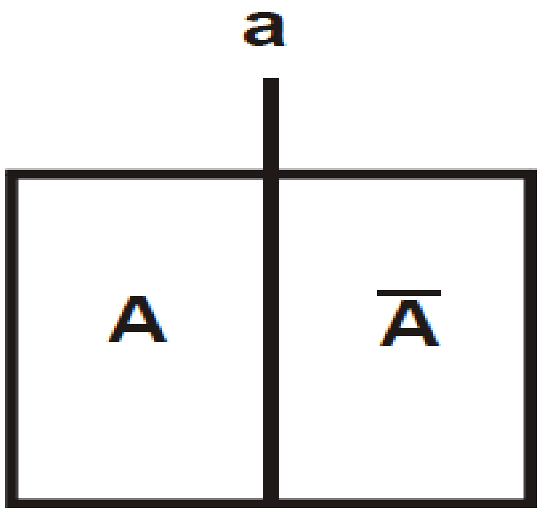
Cada termo é conhecido como produto padrão, produto canônico ou mintermo.

Mapa de Karnaugh

- Inicialmente, o mapa de Karnaugh é representado por um retângulo, que chamamos de universo (1), e de acordo com o número de variáveis, este retângulo é dividido em várias, cujas partes representam os mintermos.

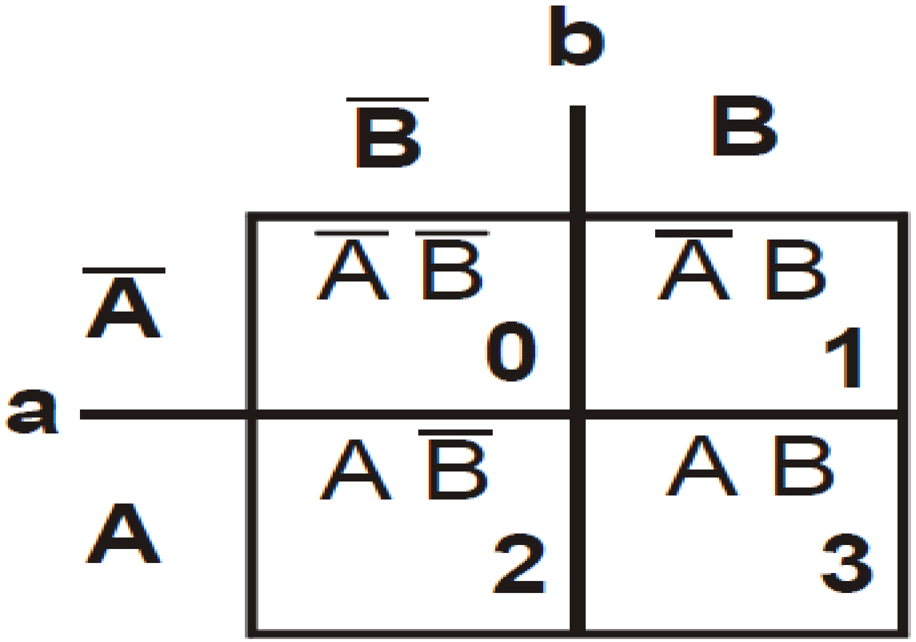
Mapa de Karnaugh

- Para uma variável simples, o retângulo é dividido em duas partes pela linha a. Todas as posições são incluídas em um dos lados da linha a, e todas as posições A’ incluídas no outro lado da linha a.



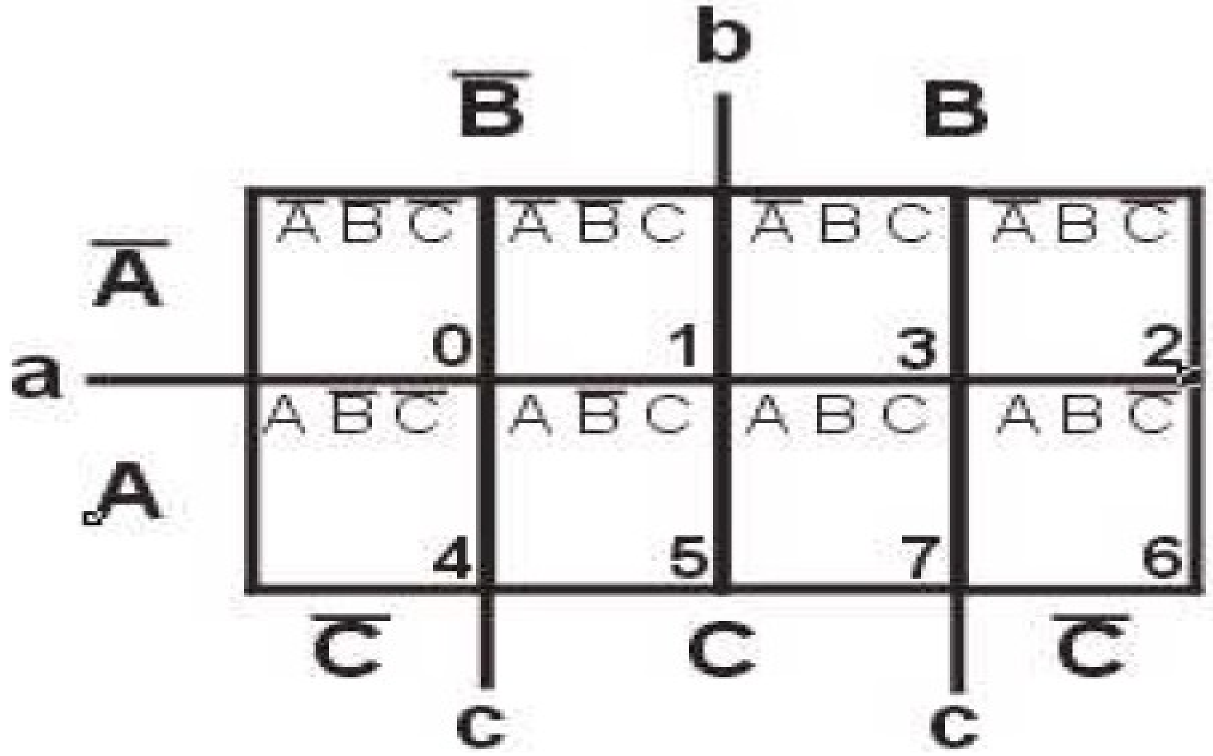
Mapa de Karnaugh

- **Duas Variáveis**: Para duas variáveis, a classe é dividida em quatro partes ou grupos pelas linhas a e b.



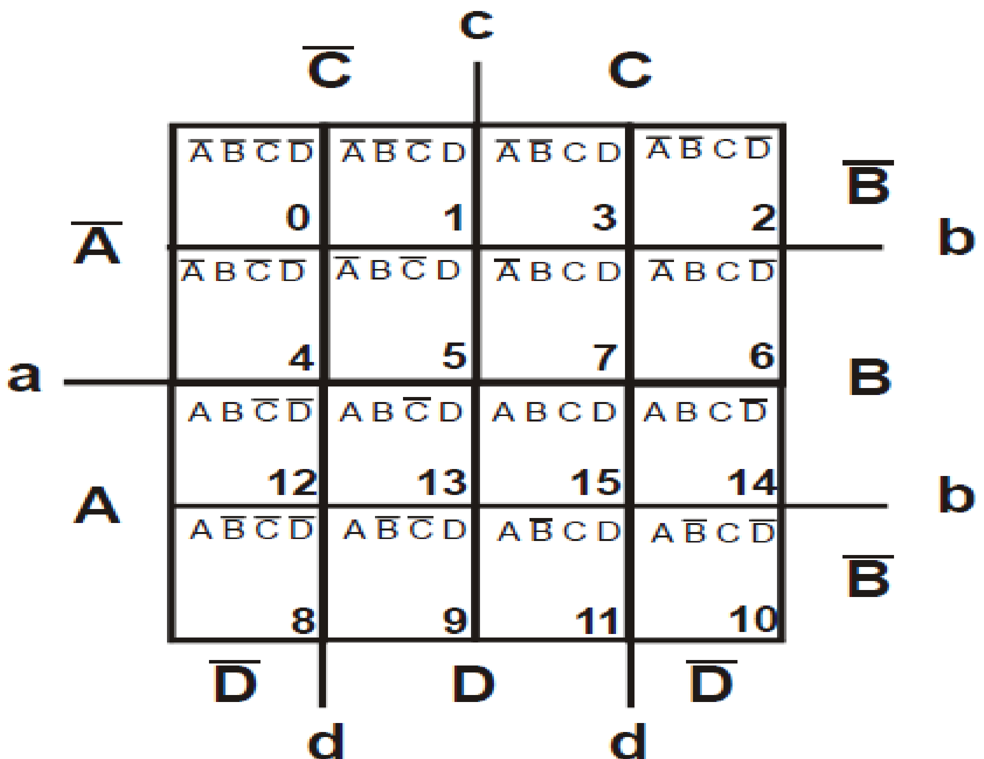
Mapa de Karnaugh

- **Três Variáveis:** Para três variáveis, a classe é dividida em oito grupos.



Mapa de Karnaugh

- **Quatro Variáveis:** Para quatro variáveis a classe é dividida em 16 grupos, e como nos casos anteriores, os quadrados de um lado da linha são adjacentes aos do lado oposto



Agrupamentos

- Os blocos adjacentes são complementares e podemos agrupá-los sempre em potências de dois (2^n) para podermos eliminar variáveis.

Agrupamentos Possíveis

HEXA	- 16 quadros
OITAVA	- 8 quadros
QUADRA	- 4 quadros
PAR	- 2 quadros
TERMO ISOLADO	- 1 quadro

Aplicação

- Para usar os mapas de Karnaugh, escreva todos os termos de uma expressão booleana de modo que possam representar quadrados ou células no mapa.

- Por exemplo, simplificar a expressão:

$$B\bar{C} + ABC$$

Aplicação

a) Trabalhe o primeiro termo usando os postulados e teoremas da álgebra booleana, de modo que se formem os mintermos, isto é, que se obtenha todas as variáveis da função. Neste caso, teremos:

$$B\bar{C} + ABC$$

Aplicação

b) Coloque então estes termos nas células correspondentes em um mapa de três variáveis:

$$AB\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + ABC$$

	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$				
A				

Sequência para Simplificação

1. Verificar o número de variáveis envolvidas na expressão;
2. Desenhar o diagrama de Karnaugh correspondente ao número de variáveis.
3. Introduzir 1s nas células correspondentes aos termos da expressão.
4. Envolver o maior número possível de agrupamentos por malha. Cada malha deve conter 2^0, 2^1, 2^2,...., 2^n números de 1s, sendo o número de agrupamentos.

Sequência para Simplificação

5. Escrever a função simplificada observando o seguinte:

a) Cada malha dará origem a um termo da função simplificada. Os termos serão separados pela operação "OU".

b) O termo correspondente a uma malha é obtido unindo pela operação "E" as variáveis que na malha não variam, isto é, na extensão da malha não mudam o seu valor (ex. de variação : de A para A')

Sequência para Simplificação

Exemplo: Simplificar a expressão

$$f = ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

1) O número de variáveis é igual a 3.
2) Desenhado o mapa de Karnaugh para 3 variáveis, temos:

	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$				
A				
	$\bar{C}$	C	C	$\bar{C}$

Sequência para Simplificação

3) Introduzimos os 1s nas células correspondentes aos termos da expressão:

	$\bar{B}\bar{C}$	$\bar{B}C$	BC	$B\bar{C}$
$\bar{A}$	1		1	
A			1	1

$$f = ABC + AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

Sequência para Simplificação

4) Envolvendo por malhas o maior número de 1s, temos:

	$\overline{B}$		B	
	$\overline{C}$	C	C	$\overline{C}$
$\overline{A}$	1		1	
A			1	1

Sequência para Simplificação

5) Como temos três malhas, teremos 3 termos separados pela operação OU. Na 1ª (Verde) malha, a única variável complementar é , então teremos C; na 2ª (Azul) malha é a variável B e teremos AC; finalmente, a 3ª (Vermelha) malha não tem nenhuma variável complementar e portanto teremos o termo A'B'C'.

$$f = AB + AC + \bar{A}\bar{B}\bar{C}$$

Exemplo 1

Simplificar a expressão: $f = AB + \bar{A}\bar{B} + B\bar{C} + \bar{B}C$

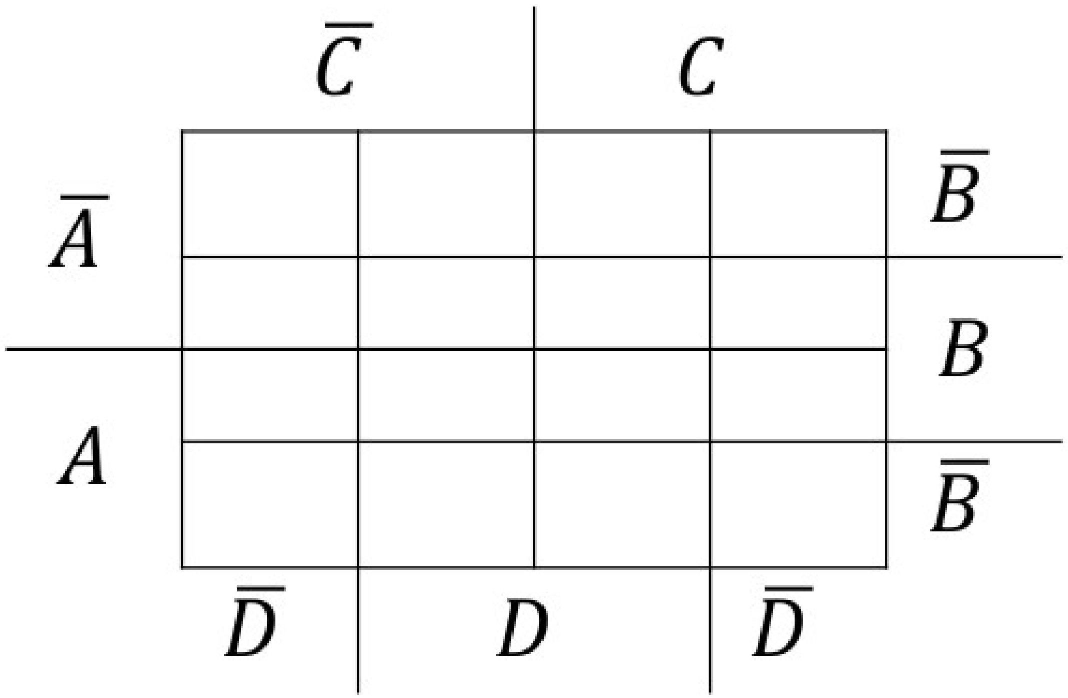
	$\bar{B}$		B	
$\bar{A}$				
A				
	$\bar{C}$	C		$\bar{C}$

Exemplo 2

Simplificar a expressão: $f = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}C$

Exemplo 2

Simplificar a expressão: $f = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C + \bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}C$



Mapa de Karnaugh

- **Cinco Variáveis:**