Introdução à Probabilidade e Estatística

Variáveis aleatórias: Parte IV

Carlos Trucíos
ctruciosm.github.io

Universidade Federal do ABC (UFABC)

Semana 8 - Aula 2

Distrubuição Normal

Distribuição Normal

Distribuição Normal

Uma v.a. continua X tem distribuição Normal (Gaussiana), denotada por $N(\mu, \sigma)$, se sua função densidade é da forma

$$f(x;\mu,\sigma) = f(x|\mu,\sigma) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ com } x \in (-\infty, \infty)$$

- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$

Distribuição Normal

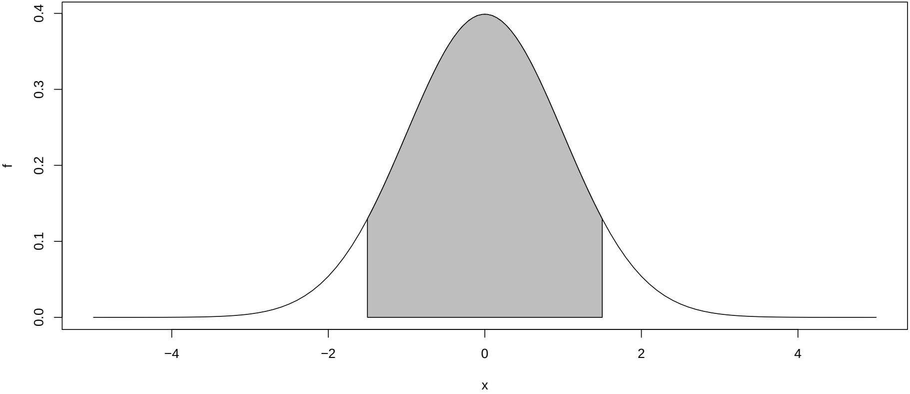
Distribuição Normal Padrão

Quando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, a distribuição Normal é conhecida como Normal Padrão, denotada por $N(0,1)$, e sua função de densidade é da forma

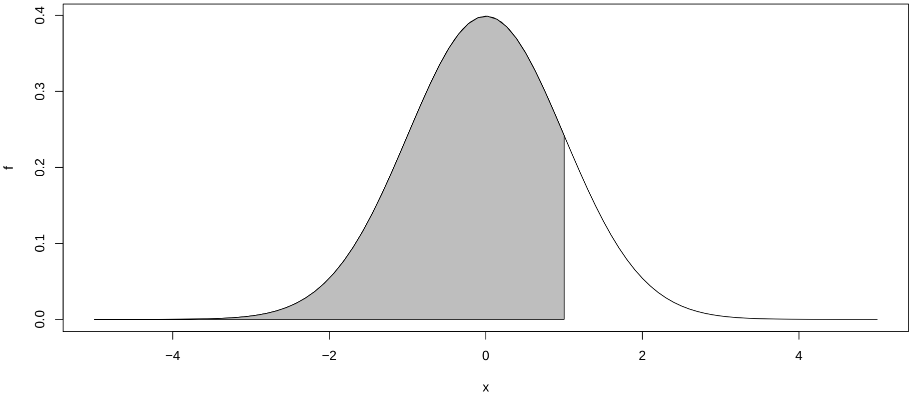
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}, \text{ com } x \in (-\infty, \infty)$$

- $E(X) = 0$
- $V(X) = 1$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \Phi(x)$

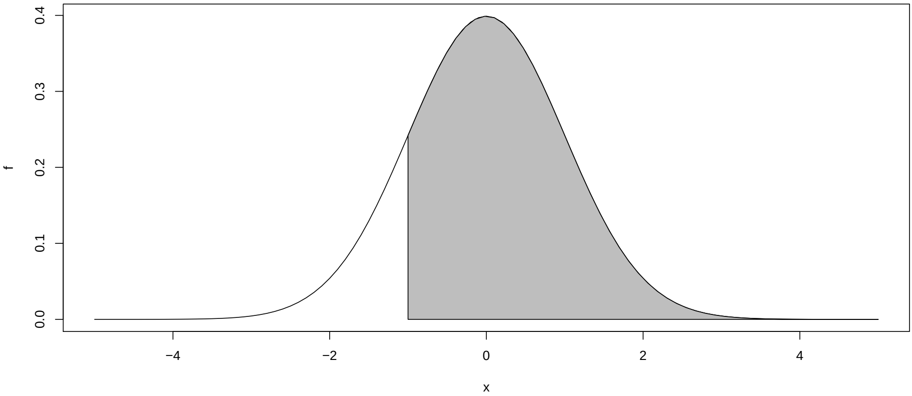
Distribução Normal



Distribução Normal



Distribução Normal



Distribução Normal

Até agora, temos estado interessados em calcular probabilidades do tipo:

- $P(a \leq X \leq b)$, $P(a < X \leq b)$, $P(a \leq X < b)$, $P(a < X < b)$

Distribução Normal

Até agora, temos estado interessados em calcular probabilidades do tipo:

- $P(a \leq X \leq b)$, $P(a < X \leq b)$, $P(a \leq X < b)$, $P(a < X < b)$
- $P(X \leq a)$, $P(X < a)$

Distribução Normal

Até agora, temos estado interessados em calcular probabilidades do tipo:

- $P(a \leq X \leq b)$, $P(a < X \leq b)$, $P(a \leq X < b)$, $P(a < X < b)$
- $P(X \leq a)$, $P(X < a)$
- $P(X \geq b)$, $P(X > b)$

Distribução Normal

Até agora, temos estado interessados em calcular probabilidades do tipo:

- $P(a \leq X \leq b)$, $P(a < X \leq b)$, $P(a \leq X < b)$, $P(a < X < b)$
- $P(X \leq a)$, $P(X < a)$
- $P(X \geq b)$, $P(X > b)$

Distribução Normal

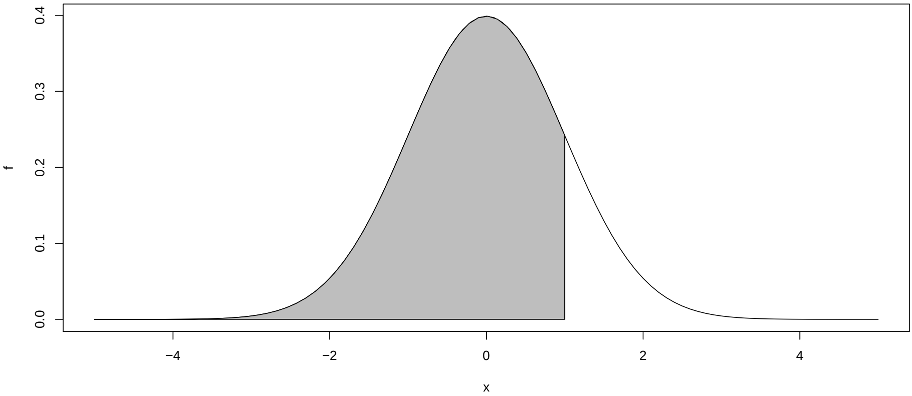
Até agora, temos estado interessados em calcular probabilidades do tipo:

- $P(a \leq X \leq b)$, $P(a < X \leq b)$, $P(a \leq X < b)$, $P(a < X < b)$
- $P(X \leq a)$, $P(X < a)$
- $P(X \geq b)$, $P(X > b)$

Percentis da Distribuição Normal

- En diversas aplicações, estamos interessados em saber o valor k tal que $P(X \leq k) = p$, para uma probabilidade $p \in (0, 1)$ previamente estabelecida.
- Esse valor k é chamado de $(100 \times p)$-ésimo percentil

Distribução Normal



Distribução Normal

1. Qual é o 99-ésimo percentil da distribuição normal padrão?

Distribuição Normal

1. Qual é o 99-ésimo percentil da distribuição normal padrão?
   - $X \sim N(0, 1)$

Distribução Normal

1. Qual é o 99-ésimo percentil da distribuição normal padrão?

- $X \sim N(0, 1)$
- $F(k) = P(X \leq k) = 0.99$

Distribução Normal

1. Qual é o 99-ésimo percentil da distribuição normal padrão?

- $X \sim N(0, 1)$
- $F(k) = P(X \leq k) = 0.99$
- $\underbrace{F^{-1}(F(k))}_{k} = \underbrace{F^{-1}(0.99)}_{\Phi^{-1}(0.99)}$

Distribuição Normal

1. Qual é o 99-ésimo percentil da distribuição normal padrão?

- $X \sim N(0,1)$
- $F(k) = P(X \leq k) = 0.99$
- $\underbrace{F^{-1}(F(k))}_{k} = \underbrace{F^{-1}(0.99)}_{\Phi^{-1}(0.99)}$
- No fundo queremos k, t.q.

$$\int_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} dx = 0.99$$

Distribução Normal

1. Qual é o 99-ésimo percentil da distribuição normal padrão?

- $X \sim N(0,1)$
- $F(k) = P(X \leq k) = 0.99$
- $\underbrace{F^{-1}(F(k))}_{k} = \underbrace{F^{-1}(0.99)}_{\Phi^{-1}(0.99)}$
- No fundo queremos k, t.q.

$$\int_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} dx = 0.99$$

Distribução Normal

1. Qual é o 99-ésimo percentil da distribuição normal padrão?

- $X \sim N(0, 1)$
- $F(k) = P(X \leq k) = 0.99$
- $\underbrace{F^{-1}(F(k))}_{k} = \underbrace{F^{-1}(0.99)}_{\Phi^{-1}(0.99)}$
- No fundo queremos k, t.q.

$$\int_{-\infty}^{k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} dx = 0.99$$

```
qnorm(0.99)
```

```
## [1] 2.326348
```

Distribução Normal

2. Calcular o 1-ésimo, 50-ésimo e 95-ésimo percetils da $N(0, 1)$

```
# 1-ésimo percentil: P(X <= k) = 1/100 = 0.01
qnorm(0.01)
```

```
## [1] -2.326348
```

```
# 50-ésimo percentil: P(X <= k) = 50/100 = 0.5
qnorm(0.5)
```

```
## [1] 0
```

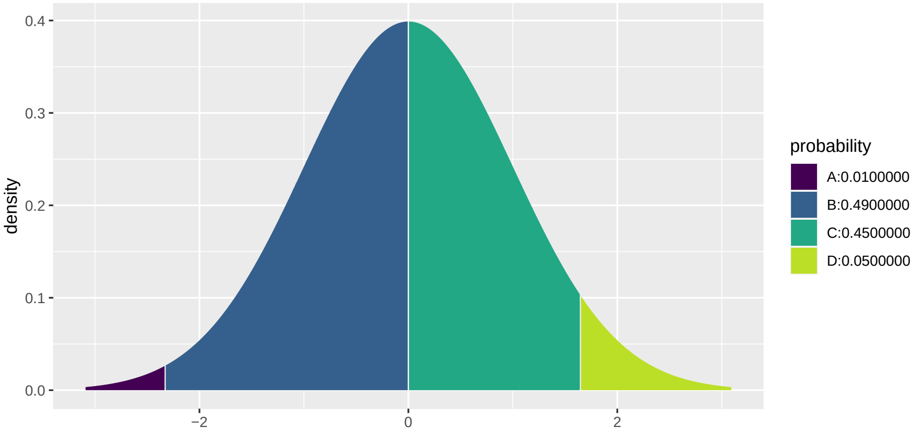
```
# 95-ésimo percentil: P(X <= k) = 95/100 = 0.95
qnorm(0.95)
```

```
## [1] 1.644854
```

Distribução Normal

```
Python 3.7.3 (v3.7.3:ef4ec6ed12, Mar 25 2019, 16:52:21)
[Clang 6.0 (clang-600.0.57)] on darwin
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> from scipy.stats import norm
>>> norm.ppf(0.01)
-2.3263478740408408
>>> norm.ppf(0.5)
0.0
>>> norm.ppf(0.95)
1.6448536269514722
```

Distribução Normal




```
## [1] -2.326348  0.000000  1.644854
```

Distribução Normal

Proposição: Percentis de uma Distribuição Normal não padronizada

Se $X \sim N(\mu, \sigma)$ e estivermos interessados no $(100p)$-ésimo percentil, então

100p-ésimo percentil da $N(\mu, \sigma) = \mu + [$100p-ésimo percentil da $N(0,1)]\sigma$

Distribução Normal

3. Calcule o 90-ésimo percentil da $N(5, 2)$

```
# Pela proposição anterior:
# mu + (90-ésimo pecentil da N(0,1))*sigma
5 + qnorm(0.9)*2
```

```
## [1] 7.563103
```

```
# Verificando
qnorm(0.9, mean = 5, sd = 2)
```

```
## [1] 7.563103
```

Funções de variáveis aleatórias

Funções de variáveis aleatórias

- Muitas vezes, conhecemos a distribuição de X, mas estamos interessados na distribuição de $Y = g(X)$

Funções de variáveis aleatórias

- Muitas vezes, conhecemos a distribuição de X, mas estamos interessados na distribuição de $Y = g(X)$
- **Como fazer isso?** é necessário expressar o evento $g(X) \leq y$ em termos de X para algum conjunto.

Funções de variáveis aleatórias

- Muitas vezes, conhecemos a distribuição de X, mas estamos interessados na distribuição de $Y = g(X)$
- **Como fazer isso?** é necessário expressar o evento $g(X) \leq y$ em termos de X para algum conjunto.

Funções de variáveis aleatórias

- Muitas vezes, conhecemos a distribuição de X, mas estamos interessados na distribuição de $Y = g(X)$
- **Como fazer isso?** é necessário expressar o evento $g(X) \leq y$ em termos de X para algum conjunto.

fda-fd

Se X é uma v.a. continua com fda $F(x)$, então

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x) \tag{1}$$

- Muitas vezes, é mais facil calcular a função distribuição acumulada. Nesses casos, obtemos a função densidade atraves de (1)

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo 1 Seja $X \sim U[0,1]$, qual a distribuição de $Y = X^n$?

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo 1 Seja $X \sim U[0,1]$, qual a distribuição de $Y = X^n$?

Para $0 \leq y \leq 1$:

- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^n \leq y) = P(X \leq y^{1/n}) = F_X(y^{1/n})$,

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo 1 Seja $X \sim U[0,1]$, qual a distribuição de $Y = X^n$?

Para $0 \leq y \leq 1$:

- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^n \leq y) = P(X \leq y^{1/n}) = F_X(y^{1/n})$,

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo 1 Seja $X \sim U[0,1]$, qual a distribuição de $Y = X^n$?

Para $0 \leq y \leq 1$:

- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^n \leq y) = P(X \leq y^{1/n}) = F_X(y^{1/n})$,

Lembre-se:

Se $X \sim U[a,b]$, $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{se }, a \leq x < b \\ 1, & \text{se } x \geq b \end{cases}$

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo 1 Seja $X \sim U[0,1]$, qual a distribuição de $Y = X^n$?

Para $0 \leq y \leq 1$:

- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^n \leq y) = P(X \leq y^{1/n}) = F_X(y^{1/n})$,

Lembre-se:

Se $X \sim U[a,b]$, $F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{se }, a \leq x < b \\ 1, & \text{se } x \geq b \end{cases}$

- Como $X \sim U[0,1]$, $F_Y(y) = F_X(y^{1/n}) = y^{1/n}$

Funções de variáveis aleatórias

(continuação) Exemplo 1

- Derivando w.r.t. y, $f_Y(y) = \dfrac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \dfrac{1}{n} y^{1/n-1}$

Funções de variáveis aleatórias

(continuação) Exemplo 1

- Derivando w.r.t. y, $f_Y(y) = \dfrac{\partial F_Y(y)}{\partial y} = \dfrac{1}{n} y^{1/n-1}$
- Logo, $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} y^{1/n-1}, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo 2 Seja X v.a. continua com densidade f_X. Qual é a distribuiçõ de $Y = X^2$?

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo 2 Seja X v.a. continua com densidade f_X. Qual é a distribuiçõ de $Y = X^2$?

Para $y \geq 0$:

- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo 2 Seja X v.a. continua com densidade f_X. Qual é a distribuiçõ de $Y = X^2$?

Para $y \geq 0$:

- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
- $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo 2 Seja X v.a. continua com densidade f_X. Qual é a distribuiçõ de $Y = X^2$?

Para $y \geq 0$:

- $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y})$
- $F_Y(y) = F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$
- Derivando w.r.t y :

$$f_Y(y) = \frac{\partial F_y(y)}{\partial y} = \frac{\partial F_X(\sqrt{y})}{\partial y} - \frac{\partial F_X(-\sqrt{y})}{\partial y} = \frac{f_X(\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} + \frac{f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}$$

Funções de variáveis aleatórias

(continuação) Exemplo 2

Logo, $f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{f_X(\sqrt{y}) + f_X(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}}, & \text{se } y \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$

Funções de variáveis aleatórias

Caso continuo

Em geral, se X é v.a. continua com densidade f_X, e definirmos outra v.a. $Y = g(X)$, a fda $F_Y(y)$ $(\forall y \in \mathbb{R})$ pode ser obtida como

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \int_{\{x:g(x)\leq y\}} f_X(x)dx$$

- Se $Y = g(X)$ com $g(\cdot)$ estritamente monotônica (crescente ou decrescente) e derivável, a densidade f_Y pode ser obtida diretamente utilizando o seguinte teorema

Funções de variáveis aleatórias

Teorema (método direto)

Seja X uma v.a. contínua com densidade f_X. Seja $g(x)$ uma função (em x) estritamente crescente (ou decrescente) e derivável. Então, a função densidade da v.a. $Y = g(X)$ é dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|\frac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y)|, & \text{se para algum } x, y = g(x) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Funções de variáveis aleatórias

Teorema (método direto)

Seja X uma v.a. contínua com densidade f_X. Seja $g(x)$ uma função (em x) estritamente crescente (ou decrescente) e derivável. Então, a função densidade da v.a. $Y = g(X)$ é dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|\frac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)|, & \text{se para algum } x, y = g(x) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Demostração (caso $g(x)$ crescente)

- $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$

Funções de variáveis aleatórias

Teorema (método direto)

Seja X uma v.a. contínua com densidade f_X. Seja $g(x)$ uma função (em x) estritamente crescente (ou decrescente) e derivável. Então, a função densidade da v.a. $Y = g(X)$ é dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|\frac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y)|, & \text{se para algum } x, y = g(x) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Demostração (caso $g(x)$ crescente)

- $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$
- Derivando w.r.t y : $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))\frac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y)$

Funções de variáveis aleatórias

Demostração (caso $g(x)$ decrescente)

- $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$

Funções de variáveis aleatórias

Demostração (caso $g(x)$ decrescente)

- $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$
- Derivando w.r.t y : $f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\dfrac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y)$

Funções de variáveis aleatórias

Demostração (caso $g(x)$ decrescente)

- $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$
- Derivando w.r.t y : $f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\dfrac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y)$
- Como, $g^{-1}(x)$ é descrescente, $\dfrac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y) < 0$

Funções de variáveis aleatórias

Demostração (caso $g(x)$ decrescente)

- $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$
- Derivando w.r.t y : $f_Y(y) = -f_X(g^{-1}(y))\dfrac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y)$
- Como, $g^{-1}(x)$ é descrescente, $\dfrac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y) < 0$
- Então, $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y))|\dfrac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y)|$

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo

Seja X uma v.a. continua com $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se}, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Qual é a função densidde de $Y = g(X) = 1 - X^2$?

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo

Seja X uma v.a. continua com $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se}, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Qual é a função densidde de $Y = g(X) = 1 - X^2$?

- $g(x)$ é derivável e estritamente decrescente em x $(0 < x < 1)$

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo

Seja X uma v.a. continua com $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se}, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Qual é a função densidde de $Y = g(X) = 1 - X^2$?

- $g(x)$ é derivável e estritamente decrescente em x $(0 < x < 1)$
- Y também varia no intervalo (0,1)

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo

Seja X uma v.a. continua com $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se}, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Qual é a função densidde de $Y = g(X) = 1 - X^2$?

- $g(x)$ é derivável e estritamente decrescente em x $(0 < x < 1)$
- Y também varia no intervalo (0,1)
- $g(x)^{-1} = (1 - y)^{1/2}$, $\frac{\partial}{\partial y} g(x)^{-1} = -\frac{1}{2(1 - y)^{1/2}}$

Funções de variáveis aleatórias

Exemplo

Seja X uma v.a. continua com $f_X(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{se}, 0 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

Qual é a função densidde de $Y = g(X) = 1 - X^2$?

- $g(x)$ é derivável e estritamente decrescente em x $(0 < x < 1)$
- Y também varia no intervalo (0,1)
- $g(x)^{-1} = (1-y)^{1/2}$, $\dfrac{\partial}{\partial y} g(x)^{-1} = -\dfrac{1}{2(1-y)^{1/2}}$
- Pelo **método direto**,
  $f_Y(y) = f_X(g^{-1}(x))|\dfrac{\partial}{\partial y} g^{-1}(y)| = 3(1-y)\dfrac{1}{2(1-y)^{1/2}}$

Funções de variáveis aleatórias

(continuação) Exemplo

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{3(1-y)^{1/2}}{2}, & \text{se } 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Funções de variáveis aleatórias

Caso discreto

Se X é uma v.a. discreta com função de probabilidade $p_X(x)$, a função de probabilidade de outra v.a. $Y = r(X)$ pode ser obtida atraves de:

$$p_Y(y) = P(Y = y) = P(r(X) = y) = \sum_{x:r(x)=y} p_X(x)$$

Exemplos

Exemplos

1. Uma moeda com probabilidad de cara $p = 0.6$ é lancada 10 vezes. Qual é a probabilidade de obter 6 caras? e obter no máximo 5 caras?

Exemplos

1. Uma moeda com probabilidad de cara $p = 0.6$ é lancada 10 vezes. Qual é a probabilidade de obter 6 caras? e obter no máximo 5 caras?

- X : número de caras em $n = 10$ lançamentos

Exemplos

1. Uma moeda com probabilidad de cara $p = 0.6$ é lancada 10 vezes. Qual é a probabilidade de obter 6 caras? e obter no máximo 5 caras?

- X : número de caras em $n = 10$ lançamentos
- $X \sim binom(n = 10, p = 0.6)$

Exemplos

1. Uma moeda com probabilidad de cara $p = 0.6$ é lancada 10 vezes. Qual é a probabilidade de obter 6 caras? e obter no máximo 5 caras?

- X : número de caras em $n = 10$ lançamentos
- $X \sim binom(n = 10, p = 0.6)$
- $P(X = 6) = \binom{10}{6} 0.6^6 (1 - 0.6)^4 = 0.2508227$

Exemplos

1. Uma moeda com probabilidad de cara $p = 0.6$ é lancada 10 vezes. Qual é a probabilidade de obter 6 caras? e obter no máximo 5 caras?

- X : número de caras em $n = 10$ lançamentos
- $X \sim binom(n = 10, p = 0.6)$
- $P(X = 6) = \binom{10}{6} 0.6^6 (1 - 0.6)^4 = 0.2508227$
- $P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} \binom{10}{x} 0.6^x (1 - 0.6)^(10 - x) = 0.3668967$

Exemplos

1. Uma moeda com probabilidad de cara $p = 0.6$ é lancada 10 vezes. Qual é a probabilidade de obter 6 caras? e obter no máximo 5 caras?

- X : número de caras em $n = 10$ lançamentos
- $X \sim binom(n = 10, p = 0.6)$
- $P(X = 6) = \binom{10}{6} 0.6^6 (1 - 0.6)^4 = 0.2508227$
- $P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} \binom{10}{x} 0.6^x (1 - 0.6)^(10 - x) = 0.3668967$

Exemplos

1. Uma moeda com probabilidad de cara $p = 0.6$ é lancada 10 vezes. Qual é a probabilidade de obter 6 caras? e obter no máximo 5 caras?

- X : número de caras em $n = 10$ lançamentos
- $X \sim binom(n = 10, p = 0.6)$
- $P(X = 6) = \binom{10}{6} 0.6^6 (1-0.6)^4 = 0.2508227$
- $P(X \leq 5) = \sum_{x=0}^{5} \binom{10}{x} 0.6^x (1-0.6)^(10-x) = 0.3668967$

```
dbinom(6,10,0.6)
```

```
## [1] 0.2508227
```

```
pbinom(5,10,0.6)
```

```
## [1] 0.3668967
```

Exemplos

2. Suponha que o número de particulas que caem numa determinado área seguem um processo Poisson com taxa de 3/**minuto**. Qual é a probabilidade de que 10 ou mais partícula caiam nessa área num período de **2 minutos**?

Exemplos

2. Suponha que o número de particulas que caem numa determinado área seguem um processo Poisson com taxa de 3/**minuto**. Qual é a probabilidade de que 10 ou mais partícula caiam nessa área num período de **2 minutos**?

- **Precisamos passar tudo às mesmas unidades!**

```
1-ppois(9,6)
```

```
## [1] 0.08392402
```

Exemplos

2. Suponha que o número de particulas que caem numa determinado área seguem um processo Poisson com taxa de 3/**minuto**. Qual é a probabilidade de que 10 ou mais partícula caiam nessa área num período de **2 minutos**?

- **Precisamos passar tudo às mesmas unidades!**
- X : número de particular que caem numa determinada área em 2 minutos

```
1-ppois(9,6)
```

```
## [1] 0.08392402
```

Exemplos

2. Suponha que o número de particulas que caem numa determinado área seguem um processo Poisson com taxa de 3/**minuto**. Qual é a probabilidade de que 10 ou mais partícula caiam nessa área num período de **2 minutos**?

- **Precisamos passar tudo às mesmas unidades!**
- X : número de particular que caem numa determinada área em 2 minutos
- $X \sim Pois(3+3)$

```r
1-ppois(9,6)
```

```
## [1] 0.08392402
```

Exemplos

2. Suponha que o número de particulas que caem numa determinado área seguem um processo Poisson com taxa de 3/**minuto**. Qual é a probabilidade de que 10 ou mais partícula caiam nessa área num período de **2 minutos**?
   - **Precisamos passar tudo às mesmas unidades!**
   - X : número de particular que caem numa determinada área em 2 minutos
   - $X \sim Pois(3+3)$
   - $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10) = 1 - [\sum_{x_0}^{9} \frac{e^{-6} 6^x}{x!}]$

```
1-ppois(9,6)
```

```
## [1] 0.08392402
```

Exemplos

3. A probabilidade de Daniel acertar o alvo com os dardos é $p = 0.2$. Ele está obsecado e só terminará jogo se conseguir 5 acertos. Qual a probabilidade do jogo terminar com 12 lancamentos?

Exemplos

3. A probabilidade de Daniel acertar o alvo com os dardos é $p = 0.2$. Ele está obsecado e só terminará jogo se conseguir 5 acertos. Qual a probabilidade do jogo terminar com 12 lancamentos?

- **Cuidado com a paramtreização**

```
choose(5+7-1,4)*0.2^5*0.8^7
```

```
## [1] 0.02214593
```

```
dnbinom(7,5,0.2)
```

```
## [1] 0.02214593
```

Exemplos

3. A probabilidade de Daniel acertar o alvo com os dardos é $p = 0.2$. Ele está obsecado e só terminará jogo se conseguir 5 acertos. Qual a probabilidade do jogo terminar com 12 lancamentos?

   - **Cuidado com a paramtreização**
   - X : número de fracassos até obter os 5 sucessos

```
choose(5+7-1,4)*0.2^5*0.8^7
```

```
## [1] 0.02214593
```

```
dnbinom(7,5,0.2)
```

```
## [1] 0.02214593
```

Exemplos

3. A probabilidade de Daniel acertar o alvo com os dardos é $p = 0.2$. Ele está obsecado e só terminará jogo se conseguir 5 acertos. Qual a probabilidade do jogo terminar com 12 lancamentos?

   - **Cuidado com a paramtreização**
   - X : número de fracassos até obter os 5 sucessos
   - $X \sim nb(r = 5, p = 0.2)$

```
choose(5+7-1,4)*0.2^5*0.8^7
```

```
## [1] 0.02214593
```

```
dnbinom(7,5,0.2)
```

```
## [1] 0.02214593
```

Exemplos

3. A probabilidade de Daniel acertar o alvo com os dardos é $p = 0.2$. Ele está obsecado e só terminará jogo se conseguir 5 acertos. Qual a probabilidade do jogo terminar com 12 lancamentos?

- **Cuidado com a paramtreização**
- X : número de fracassos até obter os 5 sucessos
- $X \sim nb(r = 5, p = 0.2)$
- $P(X = 7) = \binom{5+7-1}{5-1} 0.2^5 0.8^7 = 0.02214593$ (Por quê?)

```
choose(5+7-1,4)*0.2^5*0.8^7
```

```
## [1] 0.02214593
```

```
dnbinom(7,5,0.2)
```

```
## [1] 0.02214593
```

Exemplos

4. Há duas máquinas disponíveis para corte de rolhas de garrafas de vinho. A máquina **A** produz rolhas segundo uma distribuição Normal com diametro médio de 3 cm e desvio padrão de 0.1 cm. A máquina **B** produz rolhas segundo uma normal com diametro médio de 3.04 cm e desvio padrão de 0.02 cm. As rolhas aceitaveis tem entre 2.9 cm e 3.1 cm, qual máquina tem maior probabilidade de produzir uma rolha aceitavel?

Exemplos

4. Há duas máquinas disponíveis para corte de rolhas de garrafas de vinho. A máquina **A** produz rolhas segundo uma distribuição Normal com diametro médio de 3 cm e desvio padrão de 0.1 cm. A máquina **B** produz rolhas segundo uma normal com diametro médio de 3.04 cm e desvio padrão de 0.02 cm. As rolhas aceitaveis tem entre 2.9 cm e 3.1 cm, qual máquina tem maior probabilidade de produzir uma rolha aceitavel?

- $X_A \sim N(3, 0.1)$
- $X_B \sim N(3.04, 0.02)$

Exemplos

$X_A \sim N(3, 0.1)$, $X_B \sim N(3.04, 0.02)$.

- $P(2.9 \leq X_A \leq 3.1) = P(\frac{2.9-3}{0.1} \leq Z_A \leq \frac{3.1-3}{0.1}) = P(-1 \leq Z_A \leq 1)$

Exemplos

$X_A \sim N(3, 0.1)$, $X_B \sim N(3.04, 0.02)$.

- $P(2.9 \leq X_A \leq 3.1) = P(\frac{2.9-3}{0.1} \leq Z_A \leq \frac{3.1-3}{0.1}) = P(-1 \leq Z_A \leq 1)$
- $P(2.9 \leq X_B \leq 3.1) = P(\frac{2.9-3.04}{0.02} \leq Z_B \leq \frac{3.1-3.04}{0.02}) = P(-7 \leq Z_B \leq -1.5)$

Exemplos

$X_A \sim N(3, 0.1)$, $X_B \sim N(3.04, 0.02)$.

- $P(2.9 \leq X_A \leq 3.1) = P(\frac{2.9-3}{0.1} \leq Z_A \leq \frac{3.1-3}{0.1}) = P(-1 \leq Z_A \leq 1)$
- $P(2.9 \leq X_B \leq 3.1) = P(\frac{2.9-3.04}{0.02} \leq Z_B \leq \frac{3.1-3.04}{0.02}) = P(-7 \leq Z_B \leq -1.5)$

Exemplos

$X_A \sim N(3, 0.1)$, $X_B \sim N(3.04, 0.02)$.

- $P(2.9 \leq X_A \leq 3.1) = P(\frac{2.9-3}{0.1} \leq Z_A \leq \frac{3.1-3}{0.1}) = P(-1 \leq Z_A \leq 1)$
- $P(2.9 \leq X_B \leq 3.1) = P(\frac{2.9-3.04}{0.02} \leq Z_B \leq \frac{3.1-3.04}{0.02}) = P(-7 \leq Z_B \leq -1.5)$

```
pnorm(1)-pnorm(-1)
```

```
## [1] 0.6826895
```

```
pnorm(-1.5) -pnorm(-7)
```

```
## [1] 0.0668072
```

Leituras recomendadas

Leituras recomendadas

- Ross (5.7)

Para praticar

- Lista 6 do gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/ipe/listas/