Introdução à Probabilidade e Estatística

Probabilidade: Parte I

Carlos Trucíos
ctruciosm.github.io

Universidade Federal do ABC (UFABC)

Semana 2 - Aula 2

Definições básicas

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.
- Seja A um conjunto de possiveis resultados de E

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.
- Seja A um conjunto de possiveis resultados de E
- Seja S (ou Ω) o conjunto de todos os resultados possíveis de E.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.
- Seja A um conjunto de possiveis resultados de E
- Seja S (ou Ω) o conjunto de todos os resultados possíveis de E.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

- Seja um experimento aleatório (E) um experimento cujo resultado não podemos prever com certeza.
- Seja A um conjunto de possiveis resultados de E
- Seja S (ou Ω) o conjunto de todos os resultados possíveis de E.

Definição

O conjunto de todos os possíveis resultados de E, S, é chamado espaço amostral (do experimento E) e todo subconjunto $A \subset S$ será chamado de evento.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.
- $A = \{Cara\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.
- $A = \{Cara\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.
- $A = \{Cara\}$

2- Se o resultado de um experimento é a ordem em que 5 jogadores (camisa número 8,9,10,11,12) chutam os penalties, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.
- $A = \{Cara\}$

2- Se o resultado de um experimento é a ordem em que 5 jogadores (camisa número 8,9,10,11,12) chutam os penalties, então

- $S = \{\text{todas as 5! permutaçóoes de } (8,9,10,11,12)\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.
- $A = \{Cara\}$

2- Se o resultado de um experimento é a ordem em que 5 jogadores (camisa número 8,9,10,11,12) chutam os penalties, então

- $S = \{$todas as 5! permutaçõoes de (8,9,10,11,12)$\}$
- Seja o evento A: os últimos 2 chutes são dado pelos camisa 11 e 10 (nessa ordem)

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

1- Se o resultado de um experimento consiste em observar a face superior de um lançamento de moeda, então

- $S = \{Cara, Coroa\}$
- Seja o evento A: o resultado é Cara.
- $A = \{Cara\}$

2- Se o resultado de um experimento é a ordem em que 5 jogadores (camisa número 8,9,10,11,12) chutam os penalties, então

- $S = \{$todas as 5! permutaçõoes de (8,9,10,11,12)$\}$
- Seja o evento A: os últimos 2 chutes são dado pelos camisa 11 e 10 (nessa ordem)
- $A = \{(a, b, c, 11, 10)$ onde a,b,c são as 3! permutações de (8,9,12)$\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7
- $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (5, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7
- $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(5,3),(5,2),(6,1)\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7
- $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(5,3),(5,2),(6,1)\}$

4- Se o experimento consiste em escolher ao acaso um ponto no circulo de raio 1 centrado na origem, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7
- $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (5, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

4- Se o experimento consiste em escolher ao acaso um ponto no circulo de raio 1 centrado na origem, então

- $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7
- $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (5, 3), (5, 2), (6, 1)\}$

4- Se o experimento consiste em escolher ao acaso um ponto no circulo de raio 1 centrado na origem, então

- $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- Seja o evento A: a distancia entre o ponto e a origem é $\leq 1/3$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

3- Se o experimento consiste em jogar 2 dados, então

- $S = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\}$
- Seja o evento A: a soma das faces é 7
- $A = \{(1,6),(2,5),(3,4),(5,3),(5,2),(6,1)\}$

4- Se o experimento consiste em escolher ao acaso um ponto no circulo de raio 1 centrado na origem, então

- $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- Seja o evento A: a distancia entre o ponto e a origem é $\leq 1/3$
- $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1/3\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

5- Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um transistor, então

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

5- Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um transistor, então

- $S = \{x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq x \leq \infty\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

5- Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um transistor, então

- $S = \{x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq x \leq \infty\}$
- Seja o evento A: o transmisor não funciona mais que 5 horas

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

5- Se o experimento consiste em medir (em horas) o tempo de vida de um transistor, então

- $S = \{x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq x \leq \infty\}$
- Seja o evento A: o transmisor não funciona mais que 5 horas
- $A = \{x \in \mathbb{R}^+ : 0 \leq x \leq 5\}$

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

6- Seja o experimento em que cada um de três carros que trafegam em estrada siga pela direita (D) ou pela esquerda (E) em uma bifurcação. Então, $S = \{EEE, DEE, EDE, EED, EDD, DED, DDE, DDD\}$. Sejam os eventos

- A: os 3 carros siguem pela direita
- B: um dos 3 carros vira à direita
- C: os 3 carros viram na mesma direção

Quais eventos são simples e quais compostos?

Experimento aleatório, espaço amostral e eventos

6- Seja o experimento em que cada um de três carros que trafegam em estrada siga pela direita (D) ou pela esquerda (E) em uma bifurcação. Então, $S = \{EEE, DEE, EDE, EED, EDD, DED, DDE, DDD\}$. Sejam os eventos

- A: os 3 carros siguem pela direita
- B: um dos 3 carros vira à direita
- C: os 3 carros viram na mesma direção

Quais eventos são simples e quais compostos?

Eventos

Um evento A é qualquer subconjunto de S $(A \subset S)$. Um evento é dito **simples** se consistir exatamente de um único resultado e é dito **composto** se consistir em mais de um resultado

Teoria de conjuntos

Eventos são essencialmente conjuntos, assim, os resultados da teoria e conjuntos podem ser utilizados para estudar eventos. Três operações importantes (e que darão lugar a novos eventos gerados a partir dos eventos já conhecidos) são:

Complemento, União e Intersecção

Teoria de conjuntos

Eventos são essencialmente conjuntos, assim, os resultados da teoria e conjuntos podem ser utilizados para estudar eventos. Três operações importantes (e que darão lugar a novos eventos gerados a partir dos eventos já conhecidos) são:

Complemento, União e Intersecção

1. Seja o evento $A \subset S$, o **complemento** de A (A^c, A' ou $\bar{A}$), é o evento que consiste em todos os resultados em S que não estão contidos em A.

Teoria de conjuntos

Eventos são essencialmente conjuntos, assim, os resultados da teoria e conjuntos podem ser utilizados para estudar eventos. Três operações importantes (e que darão lugar a novos eventos gerados a partir dos eventos já conhecidos) são:

Complemento, União e Intersecção

1. Seja o evento $A \subset S$, o **complemento** de A (A^c, A' ou $\bar{A}$), é o evento que consiste em todos os resultados em S que não estão contidos em A.
2. Sejam A e B dois eventos, a **união** $A \cup B$ é o evento que consiste em todos os resultados que estão em A ou em B ou em ambos.

Teoria de conjuntos

Eventos são essencialmente conjuntos, assim, os resultados da teoria e conjuntos podem ser utilizados para estudar eventos. Três operações importantes (e que darão lugar a novos eventos gerados a partir dos eventos já conhecidos) são:

Complemento, União e Intersecção

1. Seja o evento $A \subset S$, o **complemento** de A (A^c, $A^{'}$ ou $\bar{A}$), é o evento que consiste em todos os resultados em S que não estão contidos em A.
2. Sejam A e B dois eventos, a **união** $A \cup B$ é o evento que consiste em todos os resultados que estão em A ou em B ou em ambos.
3. a **intersecção** $A \cap B$ é o evento que consiste em todos os resultados que estão em A e também em B simultaneamente

Teoria de conjuntos

Lei		
Commutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Associativa	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Distributiva	$(A \cup B) \cap C =$ $(A \cap C) \cup (B \cap C)$	$(A \cap B) \cup C =$ $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

Leis de DeMorgan

- $\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$
- $\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então
$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Seja o evento A: o primeiro dado é impar

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então
$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Seja o evento A: o primeiro dado é impar
- Seja o evento B: o primeiro dado é par

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então
$S = \{(i,j) : i,j = 1,2,3,4,5,6\}$

- Seja o evento A: o primeiro dado é impar
- Seja o evento B: o primeiro dado é par
- $A \cap B$?, $A \cup B$?

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então
$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Seja o evento A: o primeiro dado é impar
- Seja o evento B: o primeiro dado é par
- $A \cap B$?, $A \cup B$?
- $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = S$

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então
$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Seja o evento A: o primeiro dado é impar
- Seja o evento B: o primeiro dado é par
- $A \cap B$?, $A \cup B$?
- $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = S$

Teoria de conjuntos

Seja o experimento que consiste em jogar 2 dados, então
$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Seja o evento A: o primeiro dado é impar
- Seja o evento B: o primeiro dado é par
- $A \cap B$?, $A \cup B$?
- $A \cap B = \varnothing$, $A \cup B = S$

Evento certo e evento impossível

S é o evento certo e $\varnothing$ é o evento nulo (ou impossível). Quando $A \cap B = \varnothing$, A e B são eventos mutuamente exclusivos (ou disjuntos)

Probabilidade

Definições

- Seja $A \subset S$ um evento quaisquer e S finito enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos em A}}{\text{Número de elementos em S}}$$

(**definição clássica de probabilidade**)

Definições

- Seja $A \subset S$ um evento quaisquer e S finito enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos em A}}{\text{Número de elementos em S}}$$

(**definição clássica de probabilidade**)

- se S não for enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Comprimento de A}}{\text{Comprimento de S}}$$

(**probabilidade geometrica**)

Definições

- Seja $A \subset S$ um evento quaisquer e S finito enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Número de elementos em A}}{\text{Número de elementos em S}}$$

(**definição clássica de probabilidade**)
- se S não for enumerável,

$$P(A) = \frac{\text{Comprimento de A}}{\text{Comprimento de S}}$$

(**probabilidade geometrica**)
- se S for infinito,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n_A}{n},$$

onde n_A é o número de ocorrências de A em n repetições independentes (**definição frequentista** ou **estatística**)

Definições

- Não vamos nos preocupar com o problema de como definir probabilidades para cada experimento.

Definições

- Não vamos nos preocupar com o problema de como definir probabilidades para cada experimento.
- As definições previamente apresentadas têm o apelo da intuição, contudo, não são suficientes para uma formulação rigorosa da probabilidade.

Definições

- Não vamos nos preocupar com o problema de como definir probabilidades para cada experimento.
- As definições previamente apresentadas têm o apelo da intuição, contudo, não são suficientes para uma formulação rigorosa da probabilidade.
- Kolmogorov apresentou um conjunto de axiomas para definir probabilidade, permitindo incluir as definições anteriores como casos particulares.

Axiomas

Axiomas de Kolmogorov

Seja um experimento cujo espaço amostral é S. Uma função P definida nos subconjuntos de S é uma probabilidade de satisfaz os seguintes axiomas:

- **(A1)** Seja $A \subset S$, $0 \leq P(A)$ $(0 \leq P(A) \leq 1$ $)$,
- **(A2)** $P(S) = 1$,
- **(A3)** Sejam $A_1, A_2, \ldots$ eventos disjuntos $(A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j)$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Axiomas

- Note que (A3) não se restringe ao caso de S ser finito

Axiomas

- Note que (A3) não se restringe ao caso de S ser finito
- **Desafio 1:** Prove que $P(\varnothing) = 0$

Axiomas

- Note que (A3) não se restringe ao caso de S ser finito
- **Desafio 1:** Prove que $P(\varnothing) = 0$
- **Desafio 2:** Prove que $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

Propriedades

Propriedades

Propriedades

- **(P0)**: $0 \leq P(A) \leq 1$
- **(P1)**: $P(A^c) = 1 - P(A)$
- **(P2)**: $A \subset B$, então $P(A) \leq P(B)$
- **(P3)**: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- **(P4)**: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots +$ $(-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}) + \ldots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$
- **(P5)**: Para quaisquer eventos $A_1, A_2, \ldots$, $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Propriedades

Prova (P0)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$

Propriedades

Prova (P0)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A1), $P(A) \geq 0$

Propriedades

Prova (P0)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A1), $P(A) \geq 0$
- Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3) $P(S) = P(A) + P(A^c)$

Propriedades

Prova (P0)

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A1), $P(A) \geq 0$
- Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3) $P(S) = P(A) + P(A^c)$
- $P(A) = P(S) - P(A^c) = 1 - P(A^c) \leq 1$

Propriedades

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$

Propriedades

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A2), temos que $P(S) = 1$

Propriedades

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A2), temos que $P(S) = 1$
- Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3), $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$

Propriedades

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A2), temos que $P(S) = 1$
- Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3), $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$
- $1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$

Propriedades

Prova (P1)

$$P(A^c) = 1 - P(A)$$

- Seja $A \subset S$, então $S = A \cup A^c$
- Pelo (A2), temos que $P(S) = 1$
- Como A e A^c são disjuntos, pelo (A3), $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$
- $1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$
- $P(A^c) = 1 - P(A)$

Propriedades

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- Seja $A \subset B$

Propriedades

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- Seja $A \subset B$
- $B = A \cup (A^c \cap B)$

Propriedades

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- Seja $A \subset B$
- $B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$

Propriedades

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- Seja $A \subset B$
- $B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- Pelo (A1), $P(A^c \cap B) \geq 0$

Propriedades

Prova (P2)

$$A \subset B, \text{ então } P(A) \leq P(B)$$

- Seja $A \subset B$
- $B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- Pelo (A1), $P(A^c \cap B) \geq 0$
- $P(A) \leq P(B)$

Propriedades

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$

Propriedades

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$

Propriedades

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- Por outro lado: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$

Propriedades

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- Por outro lado: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$

Propriedades

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- Por outro lado: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$
- $P(B) - P(A \cap B) = P(A^c \cap B)$

Propriedades

Prova (P3)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- $A \cup B = A \cup (A^c \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B)$
- Por outro lado: $B = (A \cap B) \cup (A^c \cap B)$
- $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$
- $P(B) - P(A \cap B) = P(A^c \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(A^c \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Propriedades

Prova (P4)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i_1<i_2} P(A_{i_1} \cap A_{i_2}) + \ldots + (-1)^{r+1} \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_r} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_r}$$

Por indução ($n = 2$, supormos que funciona para n e provar para $n + 1$)

Propriedades

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \dots$

Propriedades

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \ldots$
- Pelo (A3), $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \ldots$

Propriedades

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \dots$
- Pelo (A3), $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \dots$
- Note que, $A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \subset A_j$

Propriedades

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \dots$
- Pelo (A3), $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \dots$
- Note que, $A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \subset A_j$
- Pela (P3), $P(A_1^c \cap A_2^c \cap \dots \cap A_{j-1}^c \cap A_j) \leq P(A_j)$

Propriedades

Prova (P5)

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

- $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (A_1^c \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) \cup \ldots$
- Pelo (A3), $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \ldots$
- Note que, $A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{j-1}^c \cap A_j \subset A_j$
- Pela (P3), $P(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_{j-1}^c \cap A_j) \leq P(A_j)$
- $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + P(A_1^c \cap A_2) + P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + \ldots \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

Leituras recomendadas

Leituras recomendadas

- Ross Cap. 2 (2.1 à 2.4)
- DeGroot Cap 1 (1.5, 1.10)

Para praticar

- Resolver os exercícios correspondetes ao Cap 2 do Ross
- Lista 2 do gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/ipe/listas/