# Modelos de Regressão e Previsão

## Análise de Regressão Linear Multipla: Inferência

Prof. Carlos Trucíos
carlos.trucios@facc.ufrj.br
ctruciosm.github.io

Faculdade de Administração e Ciências Contábeis
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aula 6

# Introdução

- Até agora conhecemos $E(\hat{\beta})$ e $V(\hat{\beta}|X)$

# Introdução

- Até agora conhecemos $E(\hat{\beta})$ e $V(\hat{\beta}|X)$
- Mas para fazer inferência estatística precisamos mais do que apenas conhecer os dois primeiros momentos, precisamos conhecer a distribuição amostral toda

# Introdução

- Até agora conhecemos $E(\hat{\beta})$ e $V(\hat{\beta}|X)$
- Mas para fazer inferência estatística precisamos mais do que apenas conhecer os dois primeiros momentos, precisamos conhecer a distribuição amostral toda
- Vamos assumir que $u$ é *normalmente distribuido*

# Introdução

- Até agora conhecemos $E(\hat{\beta})$ e $V(\hat{\beta}|X)$
- Mas para fazer inferência estatística precisamos mais do que apenas conhecer os dois primeiros momentos, precisamos conhecer a distribuição amostral toda
- Vamos assumir que $u$ é *normalmente distribuido*

# Introdução

- Até agora conhecemos $E(\hat{\beta})$ e $V(\hat{\beta}|X)$
- Mas para fazer inferência estatística precisamos mais do que apenas conhecer os dois primeiros momentos, precisamos conhecer a distribuição amostral toda
- Vamos assumir que $u$ é *normalmente distribuido*

**HRLM6: Normalidade**

O erro populacional $u$ é independente das variaveis explicativas (X) e $u \sim N(0, \sigma^2)$

## Introdução

- Até agora conhecemos $E(\hat{\beta})$ e $V(\hat{\beta}|X)$
- Mas para fazer inferência estatística precisamos mais do que apenas conhecer os dois primeiros momentos, precisamos conhecer a distribuição amostral toda
- Vamos assumir que $u$ é *normalmente distribuido*

**HRLM6: Normalidade**

O erro populacional $u$ é independente das variaveis explicativas (X) e $u \sim N(0, \sigma^2)$

*MRLM1 – HRLM6 são conhecidas como **hipóteses do modelo linear clássico***

# Teste t

# Teste t

```
WAGE1 = read.table("./DadosMRP/wage1.txt")[,1:4]
colnames(WAGE1) = c("wage", "educ", "exper", "tenure")
modelo = lm(log(wage) ~ educ+exper+tenure, data = WAGE1)
coef(modelo)
```

```
## (Intercept)        educ       exper      tenure
## 0.284359545 0.092028987 0.004121109 0.022067218
```

# Teste t

## Distribuição amostral de $\hat{\beta}_j$

Sob HRLM1–HRLM6 e condicional aos valores amostrais de $X$,

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{V(\hat{\beta}_j|X)}} \sim N(0,1)$$

# Teste t

## Distribuição amostral de $\hat{\beta}_j$

Sob HRLM1–HRLM6 e condicional aos valores amostrais de $X$,

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{V(\hat{\beta}_j|X)}} \sim N(0,1)$$

mas nunca conhecemos $\sigma^2$, então

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_j|X)}} \sim t_{n-(k+1)}$$

# Teste t

No modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + u$$

Geralmente, estamos interessados em testar coisas do tipo

$$H_0 : \beta_j = b \quad vs \quad H_1 : \beta_j \neq b$$

$$H_0 : \beta_j \leq b \quad vs \quad H_1 : \beta_j > b$$

$$H_0 : \beta_j \geq b \quad vs \quad H_1 : \beta_j < b$$

Usualmente $b = 0$ (mas outros valores também são utilizados)

# Teste t

Para testar hipóteses é preciso uma **estatística de teste**. A estatística que usaremos é chamada de **estatística t**

$$t_{\hat{\beta}_j} = \frac{\hat{\beta}_j - b}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_j|X)}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-(k+1)}$$

**Quando:**

- $H_0 : \beta_j = b \quad$ vs $\quad H_1 : \beta_j \neq b$, **rejeitamos** $H_0$ se $|t_{\hat{\beta}_j}| > c_0$

# Teste t

Para testar hipóteses é preciso uma **estatística de teste**. A estatística que usaremos é chamada de **estatística t**

$$t_{\hat{\beta}_j} = \frac{\hat{\beta}_j - b}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_j|X)}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-(k+1)}$$

**Quando:**

- $H_0 : \beta_j = b \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_j \neq b$, **rejeitamos** $H_0$ se $|t_{\hat{\beta}_j}| > c_0$
- $H_0 : \beta_j \geq b \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_j < b$, **rejeitamos** $H_0$ se $t_{\hat{\beta}_j} < c_1$

# Teste t

Para testar hipóteses é preciso uma **estatística de teste**. A estatística que usaremos é chamada de **estatística t**

$$t_{\hat{\beta}_j} = \frac{\hat{\beta}_j - b}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_j|X)}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-(k+1)}$$

**Quando:**

- $H_0 : \beta_j = b$ vs $H_1 : \beta_j \neq b$, **rejeitamos** $H_0$ se $|t_{\hat{\beta}_j}| > c_0$
- $H_0 : \beta_j \geq b$ vs $H_1 : \beta_j < b$, **rejeitamos** $H_0$ se $t_{\hat{\beta}_j} < c_1$
- $H_0 : \beta_j \leq b$ vs $H_1 : \beta_j > b$, **rejeitamos** $H_0$ se $t_{\hat{\beta}_j} > c_2$

# Teste t

Para testar hipóteses é preciso uma **estatística de teste**. A estatística que usaremos é chamada de **estatística t**

$$t_{\hat{\beta}_j} = \frac{\hat{\beta}_j - b}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_j|X)}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-(k+1)}$$

**Quando:**

- $H_0 : \beta_j = b$ vs $H_1 : \beta_j \neq b$, **rejeitamos** $H_0$ se $|t_{\hat{\beta}_j}| > c_0$
- $H_0 : \beta_j \geq b$ vs $H_1 : \beta_j < b$, **rejeitamos** $H_0$ se $t_{\hat{\beta}_j} < c_1$
- $H_0 : \beta_j \leq b$ vs $H_1 : \beta_j > b$, **rejeitamos** $H_0$ se $t_{\hat{\beta}_j} > c_2$

# Teste t

Para testar hipóteses é preciso uma **estatística de teste**. A estatística que usaremos é chamada de **estatística t**

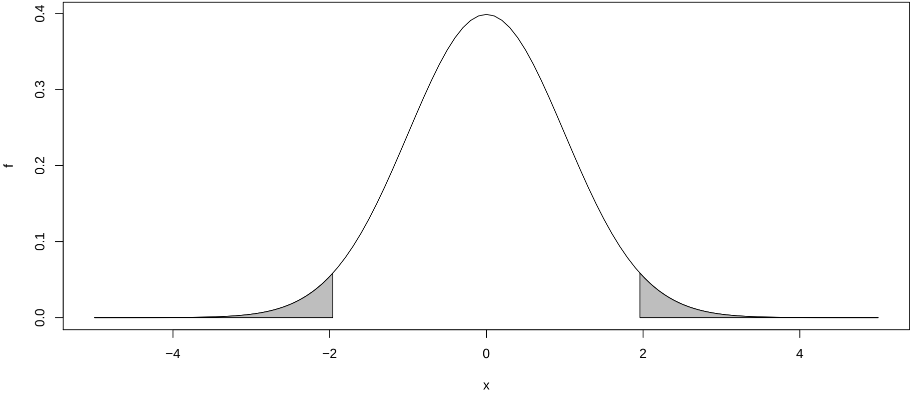
$$t_{\hat{\beta}_j} = \frac{\hat{\beta}_j - b}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_j|X)}} \overset{H_0}{\sim} t_{n-(k+1)}$$

**Quando:**

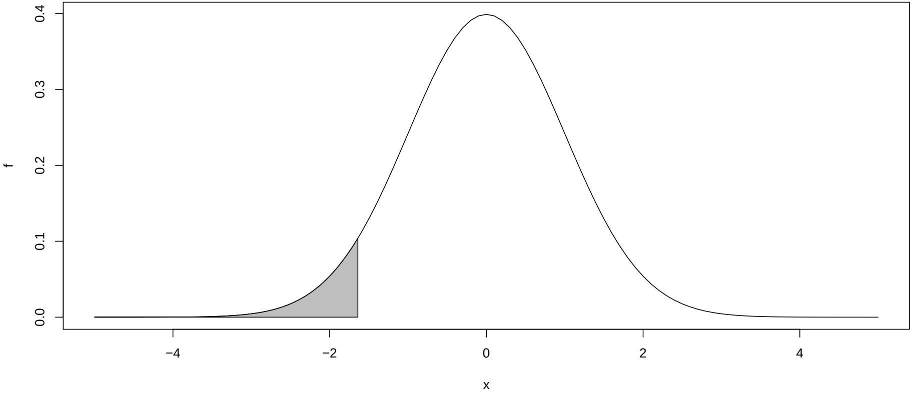
- $H_0 : \beta_j = b$ vs $H_1 : \beta_j \neq b$, **rejeitamos** $H_0$ se $|t_{\hat{\beta}_j}| > c_0$
- $H_0 : \beta_j \geq b$ vs $H_1 : \beta_j < b$, **rejeitamos** $H_0$ se $t_{\hat{\beta}_j} < c_1$
- $H_0 : \beta_j \leq b$ vs $H_1 : \beta_j > b$, **rejeitamos** $H_0$ se $t_{\hat{\beta}_j} > c_2$

onde $c$ é obtido da distribuição $t$ e depende do nível de significância.

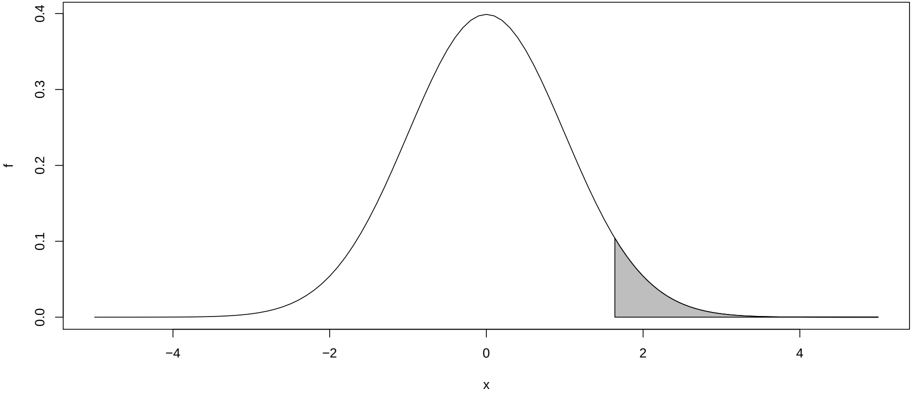
# Teste t: Bilateral $H_1 : \beta_j \neq 0$



# Teste t: Unilateral $H_1 : \beta_j < 0$



# Teste t: Unilateral $H_1 : \beta_j > 0$



# Teste t

- O valor $c$ é obtido do quantil da distribuição $t_{n-(k+1)}$

```
n = 100; k = 5
qt(p = c(0.01, 0.025, 0.05, 0.95, 0.99), df = n-(k+1))
```

```
## [1] -2.366674 -1.985523 -1.661226  1.661226  2.366674
```

# Teste t

- O valor $c$ é obtido do quantil da distribuição $t_{n-(k+1)}$

```
n = 100; k = 5
qt(p = c(0.01, 0.025, 0.05, 0.95, 0.99), df = n-(k+1))
```

```
## [1] -2.366674 -1.985523 -1.661226  1.661226  2.366674
```

- A maioria de softwares testam a hipótese
  $H_0 : \beta_j = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_j \neq 0$, e fornecem os *p-valores*.

# Teste t

- O valor $c$ é obtido do quantil da distribuição $t_{n-(k+1)}$

```
n = 100; k = 5
qt(p = c(0.01, 0.025, 0.05, 0.95, 0.99), df = n-(k+1))
```

```
## [1] -2.366674 -1.985523 -1.661226  1.661226  2.366674
```

- A maioria de softwares testam a hipótese $H_0 : \beta_j = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_j \neq 0$, e fornecem os *p-valores*.
- Olhando para os *p-valores* podemos rejeitar ou não $H_0$ sem precisar calcular $c$

# Teste t

- O valor $c$ é obtido do quantil da distribuição $t_{n-(k+1)}$

```
n = 100; k = 5
qt(p = c(0.01, 0.025, 0.05, 0.95, 0.99), df = n-(k+1))
```

```
## [1] -2.366674 -1.985523 -1.661226  1.661226  2.366674
```

- A maioria de softwares testam a hipótese $H_0 : \beta_j = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_j \neq 0$, e fornecem os *p-valores*.
- Olhando para os *p-valores* podemos rejeitar ou não $H_0$ sem precisar calcular $c$
- **Cuidado**, se nosso interesse é testar $H_0 : \beta_j = b$ (com $b \neq 0$) precisaremos fazer as contas *manualmente*

# Teste t

- O *p-valor* é a probabilidade (sob $H_0$) de obter um valor tão extremo quanto aquele observado.

# Teste t

- O *p-valor* é a probabilidade (sob $H_0$) de obter um valor tão extremo quanto aquele observado.
- Valores pequenos do *p-valor* são evidências contra $H_0$, pois indicam que o resultado dos dados ocorre com pequena probabilidade se $H_0$ for verdadeira.

# Teste t

- O *p-valor* é a probabilidade (sob $H_0$) de obter um valor tão extremo quanto aquele observado.
- Valores pequenos do *p-valor* são evidências contra $H_0$, pois indicam que o resultado dos dados ocorre com pequena probabilidade se $H_0$ for verdadeira.
- O *p-valor* fornece o menor nível de significância no qual $H_0$ deve ser rejeitada.

# Teste t

- O *p-valor* é a probabilidade (sob $H_0$) de obter um valor tão extremo quanto aquele observado.
- Valores pequenos do *p-valor* são evidências contra $H_0$, pois indicam que o resultado dos dados ocorre com pequena probabilidade se $H_0$ for verdadeira.
- O *p-valor* fornece o menor nível de significância no qual $H_0$ deve ser rejeitada.
- Rejeitamos $H_0$ se $P - valor < p_0$

# Teste t

## P-valor

$$P - valor = P(|T| > |t_0||H_0) = P_{H_0}(|T| > |t_0|)$$

$$P - valor = P(T < t_0|H_0) = P_{H_0}(T < t_0)$$

$$P - valor = P(T > t_0|H_0) = P_{H_0}(T > t_0)$$

- Uma prática comum é rejeitar $H_0$ se $P - valor < 0.05$

# Teste t

```r
WAGE1 = read.table("./DadosMRP/wage1.txt")[,1:4]
colnames(WAGE1) = c("wage", "educ", "exper", "tenure")
modelo = lm(log(wage) ~ educ+exper+tenure, data = WAGE1)
round(summary(modelo)$coefficients,4)
```

```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   0.2844     0.1042  2.7292   0.0066
## educ          0.0920     0.0073 12.5552   0.0000
## exper         0.0041     0.0017  2.3914   0.0171
## tenure        0.0221     0.0031  7.1331   0.0000
```

# Teste t

- E se quisermos testar $H_0 : \beta_{educ} \geq 0 \quad \text{vs} \quad \beta_{educ} < 0$?

```
round(summary(modelo)$coefficients,4)
```

```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   0.2844     0.1042  2.7292   0.0066
## educ          0.0920     0.0073 12.5552   0.0000
## exper         0.0041     0.0017  2.3914   0.0171
## tenure        0.0221     0.0031  7.1331   0.0000
```

# Teste t

- E se quisermos testar $H_0 : \beta_{educ} \geq 0 \quad \text{vs} \quad \beta_{educ} < 0$?

```
round(summary(modelo)$coefficients,4)
```

```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   0.2844     0.1042  2.7292   0.0066
## educ          0.0920     0.0073 12.5552   0.0000
## exper         0.0041     0.0017  2.3914   0.0171
## tenure        0.0221     0.0031  7.1331   0.0000
```

- **Não podemos utilizar** $P(> |t|)$ (Por quê?)

# Teste t

- E se quisermos testar $H_0 : \beta_{educ} \geq 0 \quad \text{vs} \quad \beta_{educ} < 0$?

```
round(summary(modelo)$coefficients,4)
```

```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   0.2844     0.1042  2.7292   0.0066
## educ          0.0920     0.0073 12.5552   0.0000
## exper         0.0041     0.0017  2.3914   0.0171
## tenure        0.0221     0.0031  7.1331   0.0000
```

- **Não podemos utilizar** $P(>|t|)$ (Por quê?)
- Note que $P_{H_o}(|T| > |t|) = 2P_{H_0}(T > |t|) = 2P_{H_0}(T < -|t|)$

# Teste t

- E se quisermos testar $H_0 : \beta_{educ} \geq 0 \quad \text{vs} \quad \beta_{educ} < 0$?

```
round(summary(modelo)$coefficients,4)
```

```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   0.2844     0.1042  2.7292   0.0066
## educ          0.0920     0.0073 12.5552   0.0000
## exper         0.0041     0.0017  2.3914   0.0171
## tenure        0.0221     0.0031  7.1331   0.0000
```

- **Não podemos utilizar** $P(> |t|)$ (Por quê?)
- Note que $P_{H_o}(|T| > |t|) = 2P_{H_0}(T > |t|) = 2P_{H_0}(T < -|t|)$
- Então: P-valor unilateral $= P_{H_o}(|T| > |t|)/2$

# Teste t

- E se quisermos testar $H_0 : \beta_{educ} = 1 \quad \text{vs} \quad \beta_{educ} \neq 1$?

```
round(summary(modelo)$coefficients[1:2,],4)
```

```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   0.2844     0.1042  2.7292   0.0066
## educ          0.0920     0.0073 12.5552   0.0000
```

# Teste t

- E se quisermos testar $H_0 : \beta_{educ} = 1 \quad \text{vs} \quad \beta_{educ} \neq 1$?

```
round(summary(modelo)$coefficients[1:2,],4)
```

```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   0.2844     0.1042  2.7292   0.0066
## educ          0.0920     0.0073 12.5552   0.0000
```

- **Não podemos utilizar nem "t value" nem** $P(> |t|)$ (Por quê?)

# Teste t

- E se quisermos testar $H_0 : \beta_{educ} = 1 \quad \text{vs} \quad \beta_{educ} \neq 1$?

```
round(summary(modelo)$coefficients[1:2,],4)
```

```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   0.2844     0.1042  2.7292   0.0066
## educ          0.0920     0.0073 12.5552   0.0000
```

- **Não podemos utilizar nem "t value" nem** $P(> |t|)$ (Por quê?)
- $t_{\hat{\beta}_{educ}} = \frac{\hat{\beta}_{educ} - 1}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_{educ})}} = \frac{0.0920 - 1}{0.0073} = -124.3836$

# Teste t

- E se quisermos testar $H_0 : \beta_{educ} = 1 \quad \text{vs} \quad \beta_{educ} \neq 1$?

```
round(summary(modelo)$coefficients[1:2,],4)
```

```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   0.2844     0.1042  2.7292   0.0066
## educ          0.0920     0.0073 12.5552   0.0000
```

- **Não podemos utilizar nem “t value” nem** $P(>|t|)$ (Por quê?)
- $t_{\hat{\beta}_{educ}} = \frac{\hat{\beta}_{educ} - 1}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_{educ})}} = \frac{0.0920 - 1}{0.0073} = -124.3836$
- $c = qt(0.025, nrow(WAGE1) - (3 + 1)) = -1.964519$

# Teste t

- E se quisermos testar $H_0 : \beta_{educ} = 1 \quad \text{vs} \quad \beta_{educ} \neq 1$?

```
round(summary(modelo)$coefficients[1:2,],4)
```

```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   0.2844     0.1042  2.7292   0.0066
## educ          0.0920     0.0073 12.5552   0.0000
```

- **Não podemos utilizar nem "t value" nem** $P(>|t|)$ (Por quê?)
- $t_{\hat{\beta}_{educ}} = \frac{\hat{\beta}_{educ} - 1}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_{educ})}} = \frac{0.0920 - 1}{0.0073} = -124.3836$
- $c = qt(0.025, nrow(WAGE1) - (3+1)) = -1.964519$
- Bilateral ($|t_{\hat{\beta}_{educ}}| > c$): $|-124.3836| > 1.964519$, então rejeitamos $H_0$ a um nível de significancia de 5%.

# Teste F

# Teste F

- A **estatística t** é utilizada para testar **individualmente** os parâmetros do modelo.

# Teste F

- A **estatística t** é utilizada para testar **individualmente** os parâmetros do modelo.
- Seja o modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_8 x_8$$

e suponha que queremos testar

$$H_0 : \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_5 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdadeiro}$$

# Teste F

- A **estatística t** é utilizada para testar **individualmente** os parâmetros do modelo.
- Seja o modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_8 x_8$$

e suponha que queremos testar

$$H_0 : \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_5 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdadeiro}$$

- Fazer um **teste t** para cada $\beta$?

# Teste F

- A **estatística t** é utilizada para testar **individualmente** os parâmetros do modelo.
- Seja o modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_8 x_8$$

e suponha que queremos testar

$$H_0 : \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_5 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdadeiro}$$

- Fazer um **teste t** para cada $\beta$?
- Precisamos fazer o teste de forma conjunta!

# Teste F

- A **estatística t** é utilizada para testar **individualmente** os parâmetros do modelo.
- Seja o modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_8 x_8$$

e suponha que queremos testar

$$H_0 : \beta_2 = 0, \beta_3 = 0, \beta_5 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdadeiro}$$

- Fazer um **teste t** para cada $\beta$?
- Precisamos fazer o teste de forma conjunta!
- O teste F nos permite testar $H_0$ de forma conjunta!

# Teste F

Seja o modelo **irrestrito**

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + u$$

E seja $H_0 : \beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \ldots, \beta_q = 0.$ Então, o modelo **restrito** (sob $H_0$) é dado por

$$y = \beta_0 + \beta_{q+1} x_{q+1} + \beta_{q+2} x_{q+2} + \ldots + \beta_k x_k + u$$

## Teste F

Sob HRLM1–HRLM6, o **teste F** é dado por

$$F = \frac{(SQR_r - SQR_i)/q}{SQR_i/(n-(k+1))} \overset{H_0}{\sim} F_{q,n-(k+1)}$$

# Teste F

- Intuitivamente, estamos analisando quanto aumenta a SQR quando retiramos algumas das variáveis.

# Teste F

- Intuitivamente, estamos analisando quanto aumenta a SQR quando retiramos algumas das variáveis.
- Se o aumento no SQR for grande (em relação ao SQR do modelo completo) rejeitamos $H_0$

# Teste F

- Intuitivamente, estamos analisando quanto aumenta a SQR quando retiramos algumas das variáveis.
- Se o aumento no SQR for grande (em relação ao SQR do modelo completo) rejeitamos $H_0$
- Isto implica que se $F$ for suficientemente grande, rejeitamos $H_0$

# Teste F

- Intuitivamente, estamos analisando quanto aumenta a SQR quando retiramos algumas das variáveis.
- Se o aumento no SQR for grande (em relação ao SQR do modelo completo) rejeitamos $H_0$
- Isto implica que se $F$ for suficientemente grande, rejeitamos $H_0$
- Quao grande? depende do nível de significância

# Teste F

- Intuitivamente, estamos analisando quanto aumenta a SQR quando retiramos algumas das variáveis.
- Se o aumento no SQR for grande (em relação ao SQR do modelo completo) rejeitamos $H_0$
- Isto implica que se $F$ for suficientemente grande, rejeitamos $H_0$
- Quao grande? depende do nível de significância

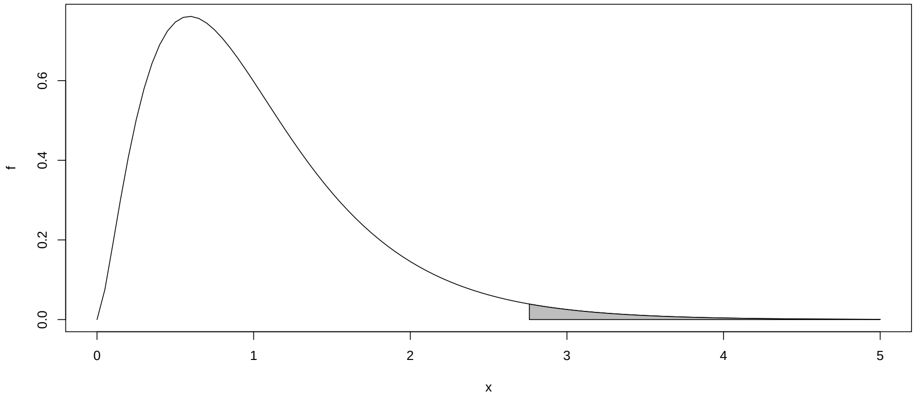
# Teste F

- Intuitivamente, estamos analisando quanto aumenta a SQR quando retiramos algumas das variáveis.
- Se o aumento no SQR for grande (em relação ao SQR do modelo completo) rejeitamos $H_0$
- Isto implica que se $F$ for suficientemente grande, rejeitamos $H_0$
- Quao grande? depende do nível de significância

```
qf(p = c(0.9, 0.95, 0.99), df1 = 5, df2 = 120)
```

```
## [1] 1.895875 2.289851 3.173545
```

# Teste F



# Teste F

No modelo $y = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + \beta_3 tenure + u$

Queremos testar: $H_0 : \beta_1 = 0, \beta_3 = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0$ não é verdadeira

$$F = \frac{(SQR_r - SQR_i)/q}{SQR_i/(n-(k+1))} \overset{H_0}{\sim} F_{q,n-(k+1)}$$

```
modeloi = lm(log(wage) ~ educ+exper+tenure, data = WAGE1)
modelor = lm(log(wage) ~ exper, data = WAGE1)
SQRi = sum(residuals(modeloi)^2)
SQRr = sum(residuals(modelor)^2)
n = nrow(WAGE1); k = 3; q = 2
```

# Teste F

```
F = ((SQRr-SQRi)/SQRi)*((n-k-1)/q)
F
```

```
## [1] 115.8532
```

```
qf(p = c(0.90, 0.95, 0.99), df1 = q, df2 = n-k-1)
```

```
## [1] 2.312772 3.012991 4.646038
```

$F > c$, então rejeitamos $H_0$

# Teste F

```
anova(modelor, modeloi)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: log(wage) ~ exper
## Model 2: log(wage) ~ educ + exper + tenure
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F    Pr(>F)
## 1    524 146.49
## 2    522 101.46  2    45.034 115.85 < 2.2e-16 ***
## ---
## Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 
```

# Teste F (significância geral do modelo)

Dado um modelo da forma

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + u \tag{1}$$

um teste bastante rotineiro nos modelos de regressão é:

$$H_0 : \beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \ldots, \beta_k = 0 \quad \text{vs} \quad H_0 : H_1 \text{ não é verdadeiro}$$

Neste teste, (1) é o modelo irrestrito e (2) é o modelo restrito.

$$y = \beta_0 + u \tag{2}$$

# Teste F (significância geral do modelo)

No modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 educ + \beta_2 exper + \beta_3 tenure + u$$

Queremos testar: $H_0 : \beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \beta_3 = 0$

```
modeloi = lm(log(wage) ~ educ+exper+tenure, data = WAGE1)
modelor = lm(log(wage) ~ 1, data = WAGE1)
SQRi = sum(residuals(modeloi)^2)
SQRr = sum(residuals(modelor)^2)
n = nrow(WAGE1); k = 3; q = 3
((SQRr-SQRi)/SQRi)*((n-k-1)/q)
```

```
## [1] 80.39092
```

# Teste F (significância geral do modelo)

```r
summary(modeloi)$fstatistic
```

```
##     value     numdf     dendf
##  80.39092   3.00000 522.00000
```

```r
qf(p = c(0.9, 0.95, 0.99), df1 = 3, df2 = 522)
```

```
## [1] 2.094309 2.621981 3.819327
```

# Teste F

- O **teste F** a diferença do **teste t**, permite que testemos conjuntamente hipóteses com mais de uma restrição

# Teste F

- O **teste F** a diferença do **teste t**, permite que testemos conjuntamente hipóteses com mais de uma restrição
- Às vezes os resultados obtidos pelos testes **t** e **F** podem levar a conclusões diferentes, nestes casos é preciso analisar cuidadosamente cada caso.

# Teste F

- O **teste F** a diferença do **teste t**, permite que testemos conjuntamente hipóteses com mais de uma restrição
- Às vezes os resultados obtidos pelos testes **t** e **F** podem levar a conclusões diferentes, nestes casos é preciso analisar cuidadosamente cada caso.
- No **teste F** quando $q = 1$, o **teste F** e o **teste t** são equivalentes.

# Testes mais gerais

# Testes mais gerais

Seja o modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + u$$

e sejam as hipóteses

- $H_0 : \beta_1 = \beta_2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$

# Testes mais gerais

Seja o modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + u$$

e sejam as hipóteses

- $H_0 : \beta_1 = \beta_2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$
- $H_0 : \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \ldots, \beta_k = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0$ não é verdadeira

# Testes mais gerais

Seja o modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + u$$

e sejam as hipóteses

- $H_0 : \beta_1 = \beta_2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$
- $H_0 : \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \ldots, \beta_k = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0$ não é verdadeira

# Testes mais gerais

Seja o modelo

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_k x_k + u$$

e sejam as hipóteses

- $H_0 : \beta_1 = \beta_2 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_1 \neq \beta_2$
- $H_0 : \beta_1 = 1, \beta_2 = 0, \ldots, \beta_k = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0$ não é verdadeira

Não podemos usar diretamente as estatísticas de teste nem p-valores reportados por padrão, precisaremos faze-lo *manualmente*.

# Testes mais gerais

```
TWOYEAR = read.table("./DadosMRP/twoyear.txt")[,8:11]
colnames(TWOYEAR) = c("exper","jc","univ","lwage")
modelo = lm(lwage~., data = TWOYEAR)
coef(modelo)
```

```
## (Intercept)       exper          jc        univ
## 1.472325551 0.004944224 0.066696724 0.076876252
```

# Testes mais gerais

```
TWOYEAR = read.table("./DadosMRP/twoyear.txt")[,8:11]
colnames(TWOYEAR) = c("exper","jc","univ","lwage")
modelo = lm(lwage~., data = TWOYEAR)
coef(modelo)
```

```
## (Intercept)       exper          jc        univ
## 1.472325551 0.004944224 0.066696724 0.076876252
```

$$H_0 : \beta_{jc} = \beta_{univ} \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_{jc} \neq \beta_{univ}$$

# Testes mais gerais

```
TWOYEAR = read.table("./DadosMRP/twoyear.txt")[,8:11]
colnames(TWOYEAR) = c("exper","jc","univ","lwage")
modelo = lm(lwage~., data = TWOYEAR)
coef(modelo)
```

```
## (Intercept)       exper          jc        univ
## 1.472325551 0.004944224 0.066696724 0.076876252
```

$$H_0 : \beta_{jc} = \beta_{univ} \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_{jc} \neq \beta_{univ}$$

$$H_0 : \beta_{jc} - \beta_{univ} = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : \beta_{jc} - \beta_{univ} \neq 0$$

# Testes mais gerais

$$\frac{\hat{\beta}_{jc} - \hat{\beta}_{univ}}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_{jc} - \hat{\beta}_{univ})}} = \frac{\hat{\beta}_{jc} - \hat{\beta}_{univ}}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_{jc}) + \widehat{V}(\hat{\beta}_{univ}) - 2\widehat{Cov}(\hat{\beta}_{jc}, \hat{\beta}_{univ})}}$$

```
summary(modelo)$coefficients
```

```
##                Estimate   Std. Error   t value      Pr(>|t|)
## (Intercept) 1.472325551 0.0210602392 69.910201  0.000000e+00
## exper       0.004944224 0.0001574735 31.397175 4.122707e-202
## jc          0.066696724 0.0068287941  9.766984  2.193040e-22
## univ        0.076876252 0.0023087290 33.298084 2.955100e-225
```

# Testes mais gerais

```
coef(modelo)
```

```
## (Intercept)       exper          jc        univ
## 1.472325551 0.004944224 0.066696724 0.076876252
```

```
betajc = coef(modelo)[3]; betauniv = coef(modelo)[4]
vcov(modelo)
```

```
##               (Intercept)         exper            jc
## (Intercept)  4.435337e-04 -3.104756e-06 -1.741432e-05 -1.5734
## exper       -3.104756e-06  2.479792e-08 -1.718296e-08  3.9334
## jc          -1.741432e-05 -1.718296e-08  4.663243e-05  1.9279
## univ        -1.573472e-05  3.933491e-08  1.927929e-06  5.3302
```

# Testes mais gerais

```
COV = vcov(modelo)
s2jc = COV[3,3]; s2univ = COV[4,4]; covjc_univ = COV[3,4]
Testet = (betajc-betauniv)/sqrt(s2jc+s2univ-2*covjc_univ)
abs(Testet)
```

```
##       jc
## 1.467656
```

```
n = nrow(TWOYEAR); k = 4
c(qt(0.975, df =  n-k-1), 1- pt(abs(Testet),df =  n-k-1))
```

```
##                    jc
## 1.96031508 0.07112206
```

# Testes mais gerais

```
COV = vcov(modelo)
s2jc = COV[3,3]; s2univ = COV[4,4]; covjc_univ = COV[3,4]
Testet = (betajc-betauniv)/sqrt(s2jc+s2univ-2*covjc_univ)
abs(Testet)
```

```
##       jc
## 1.467656
```

```
n = nrow(TWOYEAR); k = 4
c(qt(0.975, df =  n-k-1), 1- pt(abs(Testet),df =  n-k-1))
```

```
##                     jc
## 1.96031508 0.07112206
```

Rejeitamos $H_0$ (com um nível de significância de 5%)

# Intervalos de Confiança

# Intervalos de Confiança

Sabemos que $\dfrac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_j)}} \sim t_{n-k-1}$

Então, sob HMRLM1 – HMRLM6, calcular IC para os $\beta_j$ é simples.

## IC para $\beta_j$

Um intervalo de confiança (1-$\alpha$)% para $\beta_j$, é dado por

$$\Big(\underbrace{\hat{\beta}_j - t_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_j)}}_{\underline{\beta}_j} \quad ; \quad \underbrace{\hat{\beta}_j + t_{1-\alpha/2}\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_j)}}_{\overline{\beta}_j}\Big) \tag{3}$$

onde $t_{1-\alpha/2} = F^{-1}_{t_{n-k-1}}(1-\alpha/2)$

# Intervalos de Confiança

- Se as a.a. fossem obtidas repetidas vezes, e em todas elas calcularmos o IC 95%, o valor de $\beta_j$ estará dentro de $(\underline{\beta}_j; \overline{\beta}_j)$ em (1-$\alpha$)100% das vezes.

# Intervalos de Confiança

- Se as a.a. fossem obtidas repetidas vezes, e em todas elas calcularmos o IC 95%, o valor de $\beta_j$ estará dentro de $(\underline{\beta}_j; \overline{\beta}_j)$ em (1-$\alpha$)100% das vezes.
- Na prática, esperamos ter obtido uma a.a. que seja umas das (1-$\alpha$)100% em que $\beta_j$ estará dentro de $(\underline{\beta}_j; \overline{\beta}_j)$, mas não temos essa certeza.

# Intervalos de Confiança

- Se as a.a. fossem obtidas repetidas vezes, e em todas elas calcularmos o IC 95%, o valor de $\beta_j$ estará dentro de $(\underline{\beta}_j; \overline{\beta}_j)$ em (1-$\alpha$)100% das vezes.
- Na prática, esperamos ter obtido uma a.a. que seja umas das (1-$\alpha$)100% em que $\beta_j$ estará dentro de $(\underline{\beta}_j; \overline{\beta}_j)$, mas não temos essa certeza.
- Lembre-se, quando $n - k - 1$ for grande, podemos aproximar a distribuição t com uma distribuição Normal

# Intervalos de Confiança

```
WAGE1 = read.table("./DadosMRP/wage1.txt")[,1:4]
colnames(WAGE1) = c("wage", "educ", "exper", "tenure")
modelo = lm(log(wage) ~ educ+exper+tenure, data = WAGE1)
confint(modelo, level = 0.95)
```

```
##                    2.5 %     97.5 %
## (Intercept) 0.0796755739 0.48904352
## educ        0.0776292142 0.10642876
## exper       0.0007356984 0.00750652
## tenure      0.0159896851 0.02814475
```

# MQO assimptotico

# MQO assimptotico

- Até aqui, temos utilizado a HMRLM6 (Normalidade) para construir os testes de hipóteses e os intervalos de confiança

# MQO assimptotico

- Até aqui, temos utilizado a HMRLM6 (Normalidade) para construir os testes de hipóteses e os intervalos de confiança
- Quando $u$ não é normalmente distribuido, a **estatística t** não tem mais uma distribuição t, e a **estatística F** não tem mais uma distribuição F

# MQO assimptotico

- Até aqui, temos utilizado a HMRLM6 (Normalidade) para construir os testes de hipóteses e os intervalos de confiança
- Quando $u$ não é normalmente distribuido, a **estatística t** não tem mais uma distribuição t, e a **estatística F** não tem mais uma distribuição F
- Felizmente, em amostras grandes ($n \to \infty$), mesmo quando HRLM6 não acontece, temos que **estatística t/F** tem aproximadamente distribuição t/F.

# MQO assimptotico

- Até aqui, temos utilizado a HMRLM6 (Normalidade) para construir os testes de hipóteses e os intervalos de confiança
- Quando $u$ não é normalmente distribuido, a **estatística t** não tem mais uma distribuição t, e a **estatística F** não tem mais uma distribuição F
- Felizmente, em amostras grandes ($n \to \infty$), mesmo quando HRLM6 não acontece, temos que **estatística t/F** tem aproximadamente distribuição t/F.
- Além disso, veremos algumas propriedades interessantes quando $n \to \infty$

# MQO assimptotico

## Consistencia

Sob HRLM1–HRLM4,

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\beta}_j = \beta_j \quad j = 1, \ldots, k \quad \text{(em probabilidade)}$$

- Na verdade, podemos susbtituir a HRLM4 por

$$HRLM4' : \quad E(u) = 0 \quad e \quad Cov(x_i, u) = 0 \quad \forall i$$

# MQO assimptotico

## Consistencia

Sob HRLM1–HRLM4,

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\beta}_j = \beta_j \quad j = 1, \ldots, k \quad \text{(em probabilidade)}$$

- Na verdade, podemos susbtituir a HRLM4 por

$$HRLM4' : \quad E(u) = 0 \quad e \quad Cov(x_i, u) = 0 \quad \forall i$$

- Se $Cov(x_i, u) \neq 0$ para algum $i$, todos os estimadores MQO serão geralmente incosistentes.

# MQO assimptotico

## Normalidade assintótica

Sob HRLM1–HRML5,

$$\frac{\hat{\beta}_j - \beta_j}{\sqrt{\widehat{V}(\hat{\beta}_j)}} \overset{a}{\sim} N(0,1)$$

# Leituras recomendadas

## Leituras recomendadas

- Wooldridge, Jeffrey M. *Introdução à Econometria: Uma abordagem moderna*. (2016). Cengage Learning. – **Cap 4** e **Cap 5**