Introdução à Probabilidade e Estatística

Variáveis aleatórias: Parte II

Carlos Trucíos
ctruciosm.github.io

Universidade Federal do ABC (UFABC)

Semana 7

Revisão

Revisão: Variável aleatória

Variável aleatória

Uma v.a. X é uma função cujo dominio é o espaço amostral e cuja variação é o conjunto de números reais.

$$X : S \to \mathbb{R}$$

Propriedades

- Se X é uma v.a. e seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer, então kX é v.a.
- Se X é uma v.a., então X^2 é v.a.
- Se X é uma v.a e $g(\cdot)$ é uma função continua, então $g(X)$ é uma v.a.

Revisão: Função distribuição

Função distribuição

A função de distribuição (ou função distribuição acumulada) de uma v.a. X, representada por F_X ou simplesmente F, é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Propriedades

- (F1) $\lim_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \longrightarrow \infty} F(x) = 1$
- (F2) F é continua à direita
- (F3) F é não descrescente, i.e. $F(x) \leq F(y)$ sempre que $x \leq y$, $\forall x, y, \in \mathbb{R}$
- (F4) Para quaisquer dois números a e b com $a \leq b$, $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$ onde a^- representa o maior valor possivei de X inferior a a

Revisão: Esperança e Variância

Esperança

Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade $p(\cdot)$ e com valores x_i para i num conjunto de indices D. O valor esperado de X é definido como

$$E(X) = \sum_{i \in D} x_i p(x_i)$$

Variância

Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade $p(x)$ e $E(X) = \mu$. A Variância de X, denotada por $V(X)$ é definida como

$$V(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_x (x - \mu)^2 p(x)$$

O desvio padrão (DP) é definido como $DP(X) = \sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Revisão: Esperança e Variância

Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade $p(\cdot)$ e com valores x_i para i num conjunto de indices D. O valor esperado de qualquer função $h(X)$ é definido como $E(h(X)) = \sum_{i \in D} h(x_i)p(x_i)$

Propriedades

- Seja X uma v.a. com $E(X) < \infty$. Se $Y = aX + b$ com a e b constantes, então $E(Y) = aE(X) + b$
- $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$
- $V(aX + b) = a^2V(X)$

Revisão: Esperança e Variância

Teorema

Se $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são v.a. com $E(X_i) < \infty$. Então,

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n)$$

Teorema

Se $X_1, X_2, \cdots, X_n$ são v.a. independentes com $V(X_i) < \infty$. Então,

$$V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$$

Definição

As v.a.s X, Y são independentes se

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(Y \leq y)$$

Distribuições discretas

Distribuição Bernoulli

Considere os experimentos onde os possíveis resultados são:

- Cara ou Coroa
- Sucesso ou Fracasso
- Defeituoso ou Não defeituodo
- Sim ou não

Distribuição Bernoulli

Considere os experimentos onde os possíveis resultados são:

- Cara ou Coroa
- Sucesso ou Fracasso
- Defeituoso ou Não defeituodo
- Sim ou não

Todos são experimentos onde temos unicamente duas opções (1: sucesso ou 0: fracasso).

Distribuição Bernoulli

Considere os experimentos onde os possíveis resultados são:

- Cara ou Coroa
- Sucesso ou Fracasso
- Defeituoso ou Não defeituodo
- Sim ou não

Todos são experimentos onde temos unicamente duas opções (1: sucesso ou 0: fracasso).

Distribuição Bernoulli

Uma v.a. discreta X tem distribuição de Bernoulli com parâmetro p $(0 \leq p \leq 1)$, denotada por *bernoulli*(p), se X pode assumir unicamente os valores 0 ou 1 com respectivas probabilidades

$$P(X = 1) = p \text{ e } P(X = 0) = 1 - p$$

Distribuição Bernoulli

Sua função de probabilidade $p(x)$ é dada por

$$p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x}, & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Distribuição Bernoulli

Sua função de probabilidade $p(x)$ é dada por

$$p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x}, & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $E(X) = \sum_x xp(x) = 0 \times p(0) + 1 \times p(1) = p(1) = p$

Distribuição Bernoulli

Sua função de probabilidade $p(x)$ é dada por

$$p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x}, & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $E(X) = \sum_x xp(x) = 0 \times p(0) + 1 \times p(1) = p(1) = p$
- $V(X) = pq$

Distribuição Bernoulli

Sua função de probabilidade $p(x)$ é dada por

$$p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x}, & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $E(X) = \sum_x xp(x) = 0 \times p(0) + 1 \times p(1) = p(1) = p$
- $V(X) = pq$

Distribuição Bernoulli

Sua função de probabilidade $p(x)$ é dada por

$$p(x) = \begin{cases} p^x(1-p)^{1-x} = p^x q^{1-x}, & \text{se } x = 0, 1, \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $E(X) = \sum_x xp(x) = 0 \times p(0) + 1 \times p(1) = p(1) = p$
- $V(X) = pq$

$$V(X) = \underbrace{E(X^2)}_{\sum_x x^2 p(x)} - \underbrace{E^2(X)}_{p^2} = [0^2 p(0) + 1^2 p(1)] - p^2 = p - p^2 = p(1-p)$$

Distribuição Binomial

Suponha um experimento com as seguintes caracteristicas:

1. O experimentos consiste de n experimentos menores (ensaios)
2. Cada ensaio pode resultar em dois únicos valores (1: Sucesso, 0: Fracasso)
3. Os ensaios são independentes
4. A probabilidade de sucesso, p, é constante entre os ensaios.

Experimento Binomial

Um experimento onde 1-4 acontece, é chamado de experimento Binomial.

Distribuição Binomial

Um experimento Binomial é então formado por n ensaios Bernoulli independentes.

Distribuição Binomial

Uma v.a. discreta X tem distribuição de Binomial com parâmetros n, p $(0 \leq p \leq 1)$, denotada por $binom(n, p)$, se X pode assumir os valores $0, 1, \ldots, n$ e se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, & \text{se } x = 0, 1, \ldots, n \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Distribuição Binomial

- X é o número total de sucessos em n ensaios

Distribuição Binomial

- X é o número total de sucessos em n ensaios
- $E(X) = np$

Distribuição Binomial

- X é o número total de sucessos em n ensaios
- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$

Distribuição Binomial

- X é o número total de sucessos em n ensaios
- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$

Distribuição Binomial

- X é o número total de sucessos em n ensaios
- $E(X) = np$
- $V(X) = npq$

Teorema

Se $X_1, \ldots X_n$ são v.as. *iid* $X_i \sim bernoulli(p)$, então $X = X_1 + \ldots + X_n \sim binom(n, p)$ (Prova: Utilizar função geradora de momentos, se der tempo abordaremos esse assunto nas últimas aulas)

Distribuição Binomial

Demostração $E(X)$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Distribuição Binomial

Demostração $E(X)$

$$E(X) = E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np$$

Demostração $V(X)$

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

Como os X_i's são independentes

$$V(X) = V(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq$$

Distribuição Binomial: Demostração alternativa

$$E(X^k) = \sum_{x=0}^{n} x^k p(x) = \sum_{x=0}^{n} x^k \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x^k \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Distribuição Binomial: Demostração alternativa

$$E(X^k) = \sum_{x=0}^{n} x^k p(x) = \sum_{x=0}^{n} x^k \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x^k \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Utilizaremos a identidade: $i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$ e fazendo $y = x - 1$

Distribuição Binomial: Demostração alternativa

$$E(X^k) = \sum_{x=0}^{n} x^k p(x) = \sum_{x=0}^{n} x^k \binom{n}{x} p^x q^{n-x} = \sum_{x=1}^{n} x^k \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Utilizaremos a identidade: $i\binom{n}{i} = n\binom{n-1}{i-1}$ e fazendo $y = x - 1$

$$E(X^k) = np \sum_{x=1}^{n} x^{k-1} \binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{n-x} = np \underbrace{\sum_{y=0}^{n-1} (y+1)^{k-1} \binom{n-1}{y} p^y q^{n-1-y}}_{E((Y+1)^{k-1})}$$

onde $Y \sim binom(n-1, p)$

Distribuição Binomial: Demostração alternativa

$$E(X^k) = npE((Y+1)^{k-1})$$

com $Y \sim binom(n-1, p)$

Distribuição Binomial: Demostração alternativa

$$E(X^k) = npE((Y+1)^{k-1})$$

com $Y \sim binom(n-1, p)$

- Para $k = 1$, $E(X) = np$

Distribuição Binomial: Demostração alternativa

$$E(X^k) = npE((Y+1)^{k-1})$$

com $Y \sim binom(n-1, p)$

- Para $k = 1$, $E(X) = np$
- Para $k = 2$, $E(X^2) = npE(Y+1) = np((n-1)p+1) = np(np-p+1) = n^2p^2 - np^2 + np$

Distribuição Binomial: Demostração alternativa

$$E(X^k) = npE((Y+1)^{k-1})$$

com $Y \sim binom(n-1, p)$

- Para $k = 1$, $E(X) = np$
- Para $k = 2$, $E(X^2) = npE(Y+1) = np((n-1)p+1) = np(np-p+1) = n^2p^2 - np^2 + np$
- $V(X) = E(X^2) - E^2(X) = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p) = npq$

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.4$

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.4$
- X : número de sucessos obtidos em $n = 15$ realizações **independentes**

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.4$
- X : número de sucessos obtidos em $n = 15$ realizações **independentes**

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.4$
- X : número de sucessos obtidos em $n = 15$ realizações **independentes**

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(n = 15, p = 0.4)$

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.4$
- X : número de sucessos obtidos em $n = 15$ realizações **independentes**

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(n = 15, p = 0.4)$
- $P(6 \leq X \leq 9) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$

Distribuição Binomial: Exemplos

1. A probabilidade de sucesso de um experimento é 0.4 e seja X o número de sucessos obtidos em 15 realizações independentes do experimento. Qual é a probabilidade de $6 \leq X \leq 9$?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.4$
- X : número de sucessos obtidos em $n = 15$ realizações **independentes**

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(n = 15, p = 0.4)$
- $P(6 \leq X \leq 9) = P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9)$
- $P(6 \leq X \leq 9) = F(9) - F(6^-) = P(X \leq 9) - P(X \leq 5)$

Distribuição Binomial: Exemplos

R

```
n = 15
p = 0.4
#Primeira forma: p(6) + p(7) + p(8) + p(9)
dbinom(6,n,p) + dbinom(7,n,p) + dbinom(8,n,p) + dbinom(9,n,p)
```

```
## [1] 0.5629511
```

```
# Segunda forma: F(9)- F(5)
pbinom(9,n,p) - pbinom(5,n,p)
```

```
## [1] 0.5629511
```

Distribuição Binomial: Exemplos

Python

```
Python 3.7.3 (v3.7.3:ef4ec6ed12, Mar 25 2019, 16:52:21)
[Clang 6.0 (clang-600.0.57)] on darwin
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> from scipy.stats import binom
>>> n = 15
>>> p = 0.4
>>> #Primeira forma: p(6) + p(7) + p(8) + p(9)
>>> binom.pmf(6, n, p) + binom.pmf(7, n, p) + binom.pmf(8, n, p) + binom.pmf(9, n, p)
0.5629511467008018
>>> # Segunda forma: F(9)- F(5)
>>> binom.cdf(9,n,p)-binom.cdf(5,n,p)
0.5629511467008003
```

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.6$

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.6$
- X : número de caras obtidas em $n = 9$ lancamentos.

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.6$
- X : número de caras obtidas em $n = 9$ lancamentos.

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.6$
- X : número de caras obtidas em $n = 9$ lancamentos.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(n = 9, p = 0.6)$

Distribuição Binomial: Exemplos

2. Uma moeda com probabilidade cara 0.6 é jogada 9 vezes. Qual a probabilidade de obter um número par de caras?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.6$
- X : número de caras obtidas em $n = 9$ lancamentos.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(n = 9, p = 0.6)$
- $P(X = 2) + P(X = 4) + P(X = 6) + P(X = 8)$

Distribuição Binomial: Exemplos

R

```
n = 9
p = 0.6
# Queremos: p(2) + p(4) + p(6) + p(8)
dbinom(2,n,p) + dbinom(4,n,p) + dbinom(6,n,p) + dbinom(8,n,p)
```

```
## [1] 0.4997376
```

Distribuição Binomial: Exemplos

R

```
n = 9
p = 0.6
# Queremos: p(2) + p(4) + p(6) + p(8)
dbinom(2,n,p) + dbinom(4,n,p) + dbinom(6,n,p) + dbinom(8,n,p)
```

```
## [1] 0.4997376
```

Qual o número esperado de caras (em $n = 9$ lancamentos da moeda)?

- $E(X) = np = 9 \times 0.6 = 5.4$

Distribuição Binomial: Exemplos

3. Uma empresa de cristais finos sabe por experiência que 10% das suas taças possuem defeitos estéticos e devem ser classificadas como "de segunda linha". Se selecionarmos 6 taças aleatoriamente, qual é a probabilidade de apenas 1 ser de segunda linha?

Distribuição Binomial: Exemplos

3. Uma empresa de cristais finos sabe por experiência que 10% das suas taças possuem defeitos estéticos e devem ser classificadas como "de segunda linha". Se selecionarmos 6 taças aleatoriamente, qual é a probabilidade de apenas 1 ser de segunda linha?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.1$

Distribuição Binomial: Exemplos

3. Uma empresa de cristais finos sabe por experiência que 10% das suas taças possuem defeitos estéticos e devem ser classificadas como "de segunda linha". Se selecionarmos 6 taças aleatoriamente, qual é a probabilidade de apenas 1 ser de segunda linha?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.1$
- X : número de taças de segunda linha de entre as $n = 6$ taças selecionadas.

Distribuição Binomial: Exemplos

3. Uma empresa de cristais finos sabe por experiência que 10% das suas taças possuem defeitos estéticos e devem ser classificadas como “de segunda linha”. Se selecionarmos 6 taças aleatoriamente, qual é a probabilidade de apenas 1 ser de segunda linha?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.1$
- X : número de taças de segunda linha de entre as $n = 6$ taças selecionadas.

Distribuição Binomial: Exemplos

3. Uma empresa de cristais finos sabe por experiência que 10% das suas taças possuem defeitos estéticos e devem ser classificadas como "de segunda linha". Se selecionarmos 6 taças aleatoriamente, qual é a probabilidade de apenas 1 ser de segunda linha?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.1$
- X : número de taças de segunda linha de entre as $n = 6$ taças selecionadas.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(6, 0.1)$

Distribuição Binomial: Exemplos

3. Uma empresa de cristais finos sabe por experiência que 10% das suas taças possuem defeitos estéticos e devem ser classificadas como "de segunda linha". Se selecionarmos 6 taças aleatoriamente, qual é a probabilidade de apenas 1 ser de segunda linha?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.1$
- X : número de taças de segunda linha de entre as $n = 6$ taças selecionadas.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(6, 0.1)$
- $P(X = 1) = \binom{6}{1} 0.1^1 (1 - 0.1)^5 = 0.354294$

Distribuição Binomial

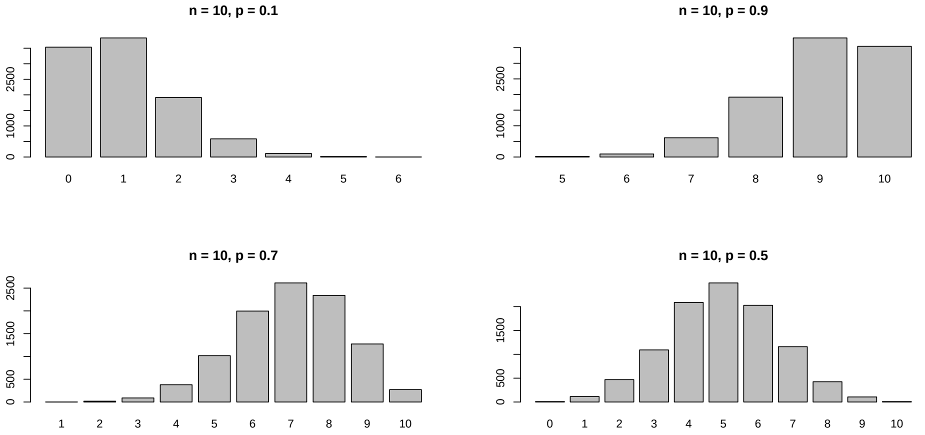

Figure 1: Exemplos: Distribuição Binomial

Distribuição Poisson

Suponha que estamos interessados nas seguintes variáveis aleatórias:

- Número de erros de impressão em uma página (ou em um grupo de páginas)
- Número de pessoas em uma comunidade que vive mais de 105 anos
- Número de refrigerantes vendidos em uma determinada loja
- Número de clientes que entram numa agencia do banco em um dia
- Número de ciclistas que transitam numa ciclovia em um dia

Distribuição Poisson

Suponha que estamos interessados nas seguintes variáveis aleatórias:

- Número de erros de impressão em uma página (ou em um grupo de páginas)
- Número de pessoas em uma comunidade que vive mais de 105 anos
- Número de refrigerantes vendidos em uma determinada loja
- Número de clientes que entram numa agencia do banco em um dia
- Número de ciclistas que transitam numa ciclovia em um dia

Estas v.a. têm todas a forma:

- X : número de ____________ (distribuidos independêntemente) em um intervalo fixo de **tempo/espaço**

Distribuição Poisson

Distribuição Poisson

A v.a. discreta X (com valores inteiros não negativos) têm distribuição Poisson com parâmetro $\lambda > 0$, denotada $Pois(\lambda)$, se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & \text{se } x = 0, 1, \dots \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Distribuição Poisson

- λ : média de ______

Distribuição Poisson

- λ : média de ________
- $E(X) = \lambda$

Distribuição Poisson

- λ : média de ________
- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

Distribuição Poisson

- λ : média de ________
- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

Distribuição Poisson

- λ : média de ________
- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

Demostração

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{x-1!}$$

Distribuição Poisson

- λ : média de ______
- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

Demostração

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{x-1!}$$

Fazendo $y = x - 1$

Distribuição Poisson

- λ : média de ______
- $E(X) = \lambda$
- $V(X) = \lambda$

Demostração

$$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{x-1!}$$

Fazendo $y = x - 1$

$$E(X) = \lambda \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{y}}{y!}}_{1} = \lambda e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{\lambda^{y}}{y!}}_{e^{\lambda}} = \lambda$$

Distribuição Poisson

(continuação) Demostração

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \lambda \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x-1}}{x-1!}$$

Fazendo $y = x - 1$

$$E(X^2) = \lambda \sum_{y=0}^{\infty} (y+1) \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!} = \lambda \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} y \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}}_{\lambda} + \lambda \underbrace{\sum_{y=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^y}{y!}}_{1} = \lambda^2 + \lambda$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

Distribuição Poisson

Teorema:

Se as v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_k$ são independentes e $X_i \sim Pois(\lambda_i)$, então

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_k \sim Pois(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k)$$

Demostração (função geradora de momentos)

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$
- X : número de erros tipográficos numa determinado página livro.

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$
- X : número de erros tipográficos numa determinado página livro.

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$
- X : número de erros tipográficos numa determinado página livro.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(lambda = 4)$

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$
- X : número de erros tipográficos numa determinado página livro.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(lambda = 4)$
- $P(X = 0) = \dfrac{e^{-4}4^0}{0!} = 0.01831564$

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$
- X : número de erros tipográficos numa determinado página livro.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(lambda = 4)$
- $P(X = 0) = \frac{e^{-4}4^0}{0!} = 0.01831564$

Distribuição Poisson: Exemplo

1. Suponha que em um determinado livro, em media, temos 4 erros tipográficos por página. Qual é a probabilidade de selecionar uma página aleatóriamente e a mesma não conter erros tipográficos?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 4$
- X : número de erros tipográficos numa determinado página livro.

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(lambda = 4)$
- $P(X = 0) = \frac{e^{-4}4^0}{0!} = 0.01831564$

```r
dpois(0,4) #dpois(x,lambda)
```

```
## [1] 0.01831564
```

Distribuição Poisson: Exemplo

2. Em horario de pico, um caixa de supermercado atende em média 15 clientes por hora. O dono do supermercado, para motivar seus funcionários, estabelece que o funcionário que atender pelo menos 22 clientes por hora recebera um bonus \$ \$ \$. Qual é a probabilidade de um caixa qualquer ganhar o bonus?

Distribuição Poisson: Exemplo

2. Em horario de pico, um caixa de supermercado atende em média 15 clientes por hora. O dono do supermercado, para motivar seus funcionários, estabelece que o funcionário que atender pelo menos 22 clientes por hora recebera um bonus \$ \$ \$. Qual é a probabilidade de um caixa qualquer ganhar o bonus?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 15$

Distribuição Poisson: Exemplo

2. Em horario de pico, um caixa de supermercado atende em média 15 clientes por hora. O dono do supermercado, para motivar seus funcionários, estabelece que o funcionário que atender pelo menos 22 clientes por hora recebera um bonus \$ \$ \$. Qual é a probabilidade de um caixa qualquer ganhar o bonus?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 15$
- X : número de clientes atendidos por um caixa de supermecado por hora (no horario de pico)

Distribuição Poisson: Exemplo

2. Em horario de pico, um caixa de supermercado atende em média 15 clientes por hora. O dono do supermercado, para motivar seus funcionários, estabelece que o funcionário que atender pelo menos 22 clientes por hora recebera um bonus \$ \$ \$. Qual é a probabilidade de um caixa qualquer ganhar o bonus?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 15$
- X : número de clientes atendidos por um caixa de supermecado por hora (no horario de pico)

Distribuição Poisson: Exemplo

2. Em horario de pico, um caixa de supermercado atende em média 15 clientes por hora. O dono do supermercado, para motivar seus funcionários, estabelece que o funcionário que atender pelo menos 22 clientes por hora recebera um bonus $ $ $. Qual é a probabilidade de um caixa qualquer ganhar o bonus?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 15$
- X : número de clientes atendidos por um caixa de supermecado por hora (no horario de pico)

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(lambda = 15)$

Distribuição Poisson: Exemplo

2. Em horario de pico, um caixa de supermercado atende em média 15 clientes por hora. O dono do supermercado, para motivar seus funcionários, estabelece que o funcionário que atender pelo menos 22 clientes por hora recebera um bonus \$ \$ \$. Qual é a probabilidade de um caixa qualquer ganhar o bonus?

Primeiro passo: Informações

- $\lambda = 15$
- X : número de clientes atendidos por um caixa de supermecado por hora (no horario de pico)

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim Pois(lambda = 15)$
- $P(X \geq 22) = 1 - P(X < 22) = 1 - P(X \leq 21)$

Distribuição Poisson: Exemplo

R

```
lambda = 15
# Queremos 1-P(X <= 21)
1-ppois(21,lambda)
```

```
## [1] 0.05310641
```

```
# Outra forma
x = 0:21
1-sum(dpois(x, lambda))
```

```
## [1] 0.05310641
```

Distribuição Poisson: Exemplo

Python

```
Python 3.7.3 (v3.7.3:ef4ec6ed12, Mar 25 2019, 16:52:21)
[Clang 6.0 (clang-600.0.57)] on darwin
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> from scipy.stats import poisson
>>> lamb = 15
>>> 1-poisson.cdf(21,lamb)
0.05310640645927123
>>> 1-poisson.pmf(range(22),lamb).sum()
0.05310640645927178
```

Distribuição Poisson: Exemplo

3. Suponha que a proporção de pessoas Daltonicas em SP é 0.005. Se seleccionarmos aleatoriamente 600 individuos de SP, qual é a probabilidade de ter no máximo 2 pessoas Daltonicas?

Distribuição Poisson: Exemplo

3. Suponha que a proporção de pessoas Daltonicas em SP é 0.005. Se seleccionarmos aleatoriamente 600 individuos de SP, qual é a probabilidade de ter no máximo 2 pessoas Daltonicas?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.005$

Distribuição Poisson: Exemplo

3. Suponha que a proporção de pessoas Daltonicas em SP é 0.005. Se seleccionarmos aleatoriamente 600 individuos de SP, qual é a probabilidade de ter no máximo 2 pessoas Daltonicas?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.005$
- X : número de pessoas Daltonicas em uma amostra de $n = 600$ pessoas de SP

Distribuição Poisson: Exemplo

3. Suponha que a proporção de pessoas Daltonicas em SP é 0.005. Se seleccionarmos aleatoriamente 600 individuos de SP, qual é a probabilidade de ter no máximo 2 pessoas Daltonicas?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.005$
- X : número de pessoas Daltonicas em uma amostra de $n = 600$ pessoas de SP

Distribuição Poisson: Exemplo

3. Suponha que a proporção de pessoas Daltonicas em SP é 0.005. Se seleccionarmos aleatoriamente 600 individuos de SP, qual é a probabilidade de ter no máximo 2 pessoas Daltonicas?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.005$
- X : número de pessoas Daltonicas em uma amostra de $n = 600$ pessoas de SP

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(600, 0.005)$

Distribuição Poisson: Exemplo

3. Suponha que a proporção de pessoas Daltonicas em SP é 0.005. Se seleccionarmos aleatoriamente 600 individuos de SP, qual é a probabilidade de ter no máximo 2 pessoas Daltonicas?

Primeiro passo: Informações

- $p = 0.005$
- X : número de pessoas Daltonicas em uma amostra de $n = 600$ pessoas de SP

Segundo passo: Análise e Cálculo

- $X \sim binom(600, 0.005)$
- $P(X \leq 2) = \binom{600}{0}0.005^0(1-0.005)^{600} + \binom{600}{1}0.005^1(1-0.005)^{599} + \binom{600}{2}0.005^2(1-0.005)^{598}$

Distribuição Poisson: Exemplo

Quando n é grande é p pequeno, podemos utilizar a **Aproximação Poisson à Binomial**

Aproximação Poisson à Binomial

Seja $X \sim binom(n, p)$ com $n \longrightarrow \infty$ e $p \longrightarrow 0$. Então

$$binom(n, p) \longrightarrow Pois(\lambda = np)$$

Distribuição Poisson: Exemplo

- $\lambda = np = 600 \times 0.005 = 3$

```r
# Aproximação
lambda = 3
ppois(2,lambda)
```

```
## [1] 0.4231901
```

```r
# Valor exato
n = 600
p = 0.005
pbinom(2,n,p)
```

```
## [1] 0.4226285
```

Distribuição Poisson: Exemplo

- $\lambda = np = 600 \times 0.005 = 3$

```r
# Aproximação
lambda = 3
ppois(2,lambda)
```

```
## [1] 0.4231901
```

```r
# Valor exato
n = 600
p = 0.005
pbinom(2,n,p)
```

```
## [1] 0.4226285
```

Distribuição Poisson: Exemplo

- $\lambda = np = 600 \times 0.005 = 3$

```
# Aproximação
lambda = 3
ppois(2,lambda)
```

```
## [1] 0.4231901
```

```
# Valor exato
n = 600
p = 0.005
pbinom(2,n,p)
```

```
## [1] 0.4226285
```

- Regra de bolso: $n > 50$ e $np < 5$

Distribuição Poisson: Aproximação - Demostração

- $X \sim binom(n, p)$

Distribuição Poisson: Aproximação - Demostração

- $X \sim binom(n, p)$
- $p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x}$

Distribuição Poisson: Aproximação - Demostração

- $X \sim binom(n, p)$
- $p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x}$
- Fazendo $\lambda = np$, $p(x) = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} (\frac{\lambda}{n})^x (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-x}$

Distribuição Poisson: Aproximação - Demostração

- $X \sim binom(n, p)$
- $p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x}$
- Fazendo $\lambda = np$, $p(x) = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} (\frac{\lambda}{n})^x (1-\frac{\lambda}{n})^{n-x}$
- $p(x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} \underbrace{\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \cdots \frac{n-x+1}{n}}_{x-vezes} (1-\frac{\lambda}{n})^n (1-\frac{\lambda}{n})^{-x}$

Distribuição Poisson: Aproximação - Demostração

- $X \sim binom(n, p)$
- $p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x}$
- Fazendo $\lambda = np$, $p(x) = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} (\frac{\lambda}{n})^x (1-\frac{\lambda}{n})^{n-x}$
- $p(x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} \underbrace{\dfrac{n}{n} \dfrac{n-1}{n} \cdots \dfrac{n-x+1}{n}}_{x-vezes} (1-\frac{\lambda}{n})^n (1-\frac{\lambda}{n})^{-x}$
- Fazendo $n \longrightarrow \infty$ e $p \longrightarrow 0$, de forma que $\lambda = np$

Distribuição Poisson: Aproximação - Demostração

- $X \sim binom(n, p)$
- $p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x}$
- Fazendo $\lambda = np$, $p(x) = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} (\frac{\lambda}{n})^x (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-x}$
- $p(x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} \underbrace{\dfrac{n}{n} \dfrac{n-1}{n} \cdots \dfrac{n-x+1}{n}}_{x-vezes} (1 - \frac{\lambda}{n})^n (1 - \frac{\lambda}{n})^{-x}$
- Fazendo $n \longrightarrow \infty$ e $p \longrightarrow 0$, de forma que $\lambda = np$
- $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (1 - \dfrac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$

Distribuição Poisson: Aproximação - Demostração

- $X \sim binom(n, p)$
- $p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x}$
- Fazendo $\lambda = np$, $p(x) = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} (\frac{\lambda}{n})^x (1-\frac{\lambda}{n})^{n-x}$
- $p(x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} \underbrace{\dfrac{n}{n} \dfrac{n-1}{n} \cdots \dfrac{n-x+1}{n}}_{x-vezes} (1-\frac{\lambda}{n})^n (1-\frac{\lambda}{n})^{-x}$
- Fazendo $n \longrightarrow \infty$ e $p \longrightarrow 0$, de forma que $\lambda = np$
- $\lim_{n \longrightarrow \infty} (1 - \dfrac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$
- $\lim_{n \longrightarrow \infty} \dfrac{n}{n} \dfrac{n-1}{n} \cdots \dfrac{n-x+1}{n} (1 - \dfrac{\lambda}{n})^{-x} = 1$

Distribuição Poisson: Aproximação - Demostração

- $X \sim binom(n,p)$
- $p(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} p^x (1-p)^{n-x}$
- Fazendo $\lambda = np$, $p(x) = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-x+1)}{x!} (\frac{\lambda}{n})^x (1-\frac{\lambda}{n})^{n-x}$
- $p(x) = \dfrac{\lambda^x}{x!} \underbrace{\dfrac{n}{n}\dfrac{n-1}{n}\cdots\dfrac{n-x+1}{n}}_{x-vezes} (1-\frac{\lambda}{n})^n (1-\frac{\lambda}{n})^{-x}$
- Fazendo $n \longrightarrow \infty$ e $p \longrightarrow 0$, de forma que $\lambda = np$
- $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} (1-\dfrac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$
- $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \dfrac{n}{n}\dfrac{n-1}{n}\cdots\dfrac{n-x+1}{n}(1-\dfrac{\lambda}{n})^{-x} = 1$
- $p(x) \longrightarrow \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$

Distribuição Poisson

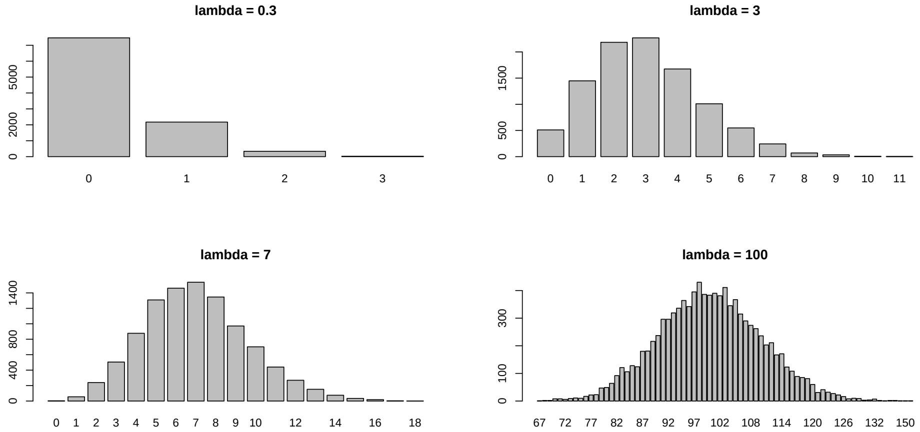

Figure 2: Exemplos: Distribuição Poisson

Distribuição Binomial Negativa

Suponha um experimento com as seguintes caracteristicas:

1. O experimentos consiste em ensaios independentes
2. Cada ensaio pode resultar em dois únicos valores (1: Sucesso, 0: Fracasso)
3. A probabilidade de sucesso p é constante entre os ensaios ($P(\text{Sucesso na tentativa i}) = p$, $i = 1, 2, \ldots$)
4. O experimento continua até observarmos r sucessos.

Experimento Binomial Negativo

Um experimento onde 1-4 acontece, é chamado de experimento Binomial Negativo.

Distribuição Binomial Negativa

- X: número de fracassos até obter r sucessos.

Distribuição Binomial Negativa

- X: número de fracassos até obter r sucessos.
- O caso particular onde $r = 1$ é conhecido como Distribuição Geométrica

Distribuição Binomial Negativa

- X: número de fracassos até obter r sucessos.
- O caso particular onde $r = 1$ é conhecido como Distribuição Geométrica

Distribução Binomial Negativa

- X: número de fracassos até obter r sucessos.
- O caso particular onde $r = 1$ é conhecido como Distribuição Geométrica

Distribuição Binomial Negativa

Uma v.a. discreta X tem distribuição de Binomial Negativa com parâmetros r e p $(0 \leq p \leq 1)$, denotada por $bn(r, p)$, se X pode assumir os valores $0, 1, 2, \ldots$ e se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x) = \begin{cases} \binom{r+x-1}{x} p^r q^x, & \text{se } x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $E(X) = rq/p$
- $V(X) = rq/p^2$

Distribução Binomial Negativa

Distribuição Geométrica

Uma v.a. discreta X tem distribuição geométrica com parâmetro p $(0 \leq p \leq 1)$, denotada por $geom(p)$, se X pode assumir os valores $0, 1, 2, \ldots$ e se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x) = \begin{cases} pq^x, & \text{se } x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $P(X = k + t | X \geq k) = P(X = t)$ (propriedade de falta de memória)

Distribução Binomial Negativa

Distribuição Geométrica

Uma v.a. discreta X tem distribuição geométrica com parâmetro p $(0 \leq p \leq 1)$, denotada por $geom(p)$, se X pode assumir os valores $0, 1, 2, \ldots$ e se sua função de probabilidade é dada por

$$p(x) = \begin{cases} pq^x, & \text{se } x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $P(X = k + t | X \geq k) = P(X = t)$ (propriedade de falta de memória)

Teorema

Se $X_1, X_2, \cdots, X_r$ são v.a. *iid* e $X_i \sim geom(p)$. Então

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_r \sim bn(r, p)$$

Distribuição Binomial Negativa: Exemplos

1. Suponha que jogamos uma moeda honesta até obter 5 caras. Se X é o número de coroas até obter as 5 caras, calcule $P(X = 1)$

Distribuição Binomial Negativa: Exemplos

1. Suponha que jogamos uma moeda honesta até obter 5 caras. Se X é o número de coroas até obter as 5 caras, calcule $P(X = 1)$

- $p = 0.5$

Distribuição Binomial Negativa: Exemplos

1. Suponha que jogamos uma moeda honesta até obter 5 caras. Se X é o número de coroas até obter as 5 caras, calcule $P(X = 1)$

- $p = 0.5$
- X : número de coroas (fracassos) até obter as $r = 5$ caras (sucessos)

Distribuição Binomial Negativa: Exemplos

1. Suponha que jogamos uma moeda honesta até obter 5 caras. Se X é o número de coroas até obter as 5 caras, calcule $P(X = 1)$

- $p = 0.5$
- X : número de coroas (fracassos) até obter as $r = 5$ caras (sucessos)
- $X \sim bn(r = 5, p = 0.5)$

Distribução Binomial Negativa: Exemplos

1. Suponha que jogamos uma moeda honesta até obter 5 caras. Se X é o número de coroas até obter as 5 caras, calcule $P(X = 1)$

- $p = 0.5$
- X : número de coroas (fracassos) até obter as $r = 5$ caras (sucessos)
- $X \sim bn(r = 5, p = 0.5)$
- $P(X = 1) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x = \binom{5+1-1}{1} 0.5^5 0.5^1$

Distribução Binomial Negativa: Exemplos

1. Suponha que jogamos uma moeda honesta até obter 5 caras. Se X é o número de coroas até obter as 5 caras, calcule $P(X = 1)$

- $p = 0.5$
- X : número de coroas (fracassos) até obter as $r = 5$ caras (sucessos)
- $X \sim bn(r = 5, p = 0.5)$
- $P(X = 1) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x = \binom{5+1-1}{1} 0.5^5 0.5^1$

Distribução Binomial Negativa: Exemplos

1. Suponha que jogamos uma moeda honesta até obter 5 caras. Se X é o número de coroas até obter as 5 caras, calcule $P(X = 1)$

- $p = 0.5$
- X : número de coroas (fracassos) até obter as $r = 5$ caras (sucessos)
- $X \sim bn(r = 5, p = 0.5)$
- $P(X = 1) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x = \binom{5+1-1}{1} 0.5^5 0.5^1$

```
choose(5,1)*(0.5)^6
```

```
## [1] 0.078125
```

```
#P(X=1)
dnbinom(1,5,0.5)
```

```
## [1] 0.078125
```

Distribução Binomial Negativa: Exemplos

2. Suponha que jogamos uma moeda honesta até obter 5 caras. Se X é o número de coroas até obter as 5 caras. Qual é a probabilidade de obter no máximo 3 coroas antes de obter as 5 caras?

- $P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} P(X = x) = \sum_{x=0}^{3} \binom{r + x - 1}{x} p^r q^x = \sum_{x=0}^{3} \binom{5 + x - 1}{x} (0.5)^r (0.5)^x$

Distribução Binomial Negativa: Exemplos

2. Suponha que jogamos uma moeda honesta até obter 5 caras. Se X é o número de coroas até obter as 5 caras. Qual é a probabilidade de obter no máximo 3 coroas antes de obter as 5 caras?

- $P(X \leq 3) = \sum_{x=0}^{3} P(X = x) = \sum_{x=0}^{3} \binom{r + x - 1}{x} p^r q^x = \sum_{x=0}^{3} \binom{5 + x - 1}{x} (0.5)^r (0.5)^x$
- $\binom{5+0-1}{0} 0.5^5 0.5^0 + \binom{5+1-1}{1} 0.5^5 0.5^1 + \binom{5+2-1}{2} 0.5^5 0.5^2 + \binom{5+3-1}{3} 0.5^5 0.5^3$

Distribução Binomial Negativa: Exemplos

R

```
choose(4,0)*(0.5)^5 + choose(5,1)*(0.5)^6 + choose(6,2)*(0.5)^7 +
```

```
## [1] 0.3632812
```

```
#P(X=0) + P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)
r = 5
p = 0.5
sum(dnbinom(0:3,r,p))
```

```
## [1] 0.3632812
```

```
#P(X<=3)
pnbinom(3,r,p)
```

```
## [1] 0.3632813
```

Distribução Binomial Negativa: Exemplos

Python

```
Python 3.7.3 (v3.7.3:ef4ec6ed12, Mar 25 2019, 16:52:21)
[Clang 6.0 (clang-600.0.57)] on darwin
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> from scipy.stats import nbinom
>>> r = 5
>>> p = 0.5
>>> nbinom.pmf(range(4),r,p).sum()
0.36328125000000006
>>> nbinom.cdf(3,r,p)
0.36328125000000001
```

Distribuição Binomial Negativa: Exemplos

3. Qual é o número esperado de vezes que alguem deve lancar um dado até obter 4 seis?

- $p = 1/6$

Distribução Binomial Negativa: Exemplos

3. Qual é o número esperado de vezes que alguem deve lancar um dado até obter 4 seis?

- $p = 1/6$
- $r = 4$

Distribuição Binomial Negativa: Exemplos

3. Qual é o número esperado de vezes que alguem deve lancar um dado até obter 4 seis?

- $p = 1/6$
- $r = 4$
- X : número de fracassos (numero $\neq 6$) até obter $r = 4$ sucessos (número seis)

Distribução Binomial Negativa: Exemplos

3. Qual é o número esperado de vezes que alguem deve lancar um dado até obter 4 seis?

- $p = 1/6$
- $r = 4$
- X : número de fracassos (numero $\neq 6$) até obter $r = 4$ sucessos (número seis)
- Y : número de lancamentos até obter $r = 4$ seis

Distribução Binomial Negativa: Exemplos

3. Qual é o número esperado de vezes que alguem deve lancar um dado até obter 4 seis?

- $p = 1/6$
- $r = 4$
- X : número de fracassos (numero $\neq 6$) até obter $r = 4$ sucessos (número seis)
- Y : número de lancamentos até obter $r = 4$ seis
- $E(X) = \dfrac{rq}{p} = \dfrac{4 \times \frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 20$

Distribução Binomial Negativa: Exemplos

3. Qual é o número esperado de vezes que alguem deve lancar um dado até obter 4 seis?

- $p = 1/6$
- $r = 4$
- X : número de fracassos (numero $\neq 6$) até obter $r = 4$ sucessos (número seis)
- Y : número de lancamentos até obter $r = 4$ seis
- $E(X) = \frac{rq}{p} = \frac{4 \times \frac{5}{6}}{\frac{1}{6}} = 20$
- $E(Y) = E(X + r) = E(X) + r = 20 + 4 = 24$

Distribução Binomial Negativa

No exemplo anterior vimos que a variável de interesse era o número de lancamentos até obter r sucessos. De fato existe uma outra parametrização da distribuição binomial negativa.

$$p(y) = \begin{cases} \binom{y-1}{r-1} p^r q^{y-r}, & \text{se } y = r, r+1, \dots \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

- $E(Y) = \dfrac{r}{p}$
- $V(Y) = \dfrac{rq}{p^2}$

Neste caso Y : número de tentativas até obter r sucessos

Distribuição Binomial Negativa

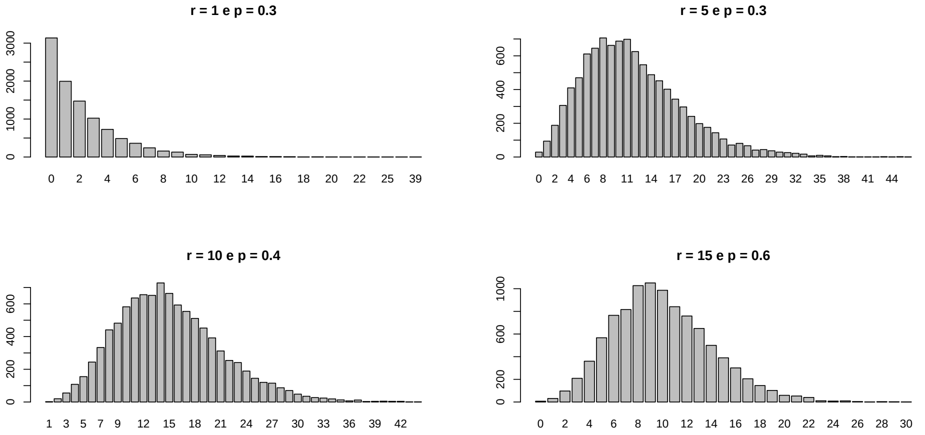

Figure 3: Exemplos: Distribuição Binomial Negativa

Leituras recomendadas

Leituras recomendadas

- Jay Devore (3.4-3.6)
- Ross (4.6 - 4.7)
- DeGroot e Schervish (3.1)
- Ver material extra no meu site.

Para praticar

- Lista 5 do gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/ipe/listas/

Leituras recomendadas

Home Research Teaching Talks Software Awards IPE

- **NB8BIN0406-15SA:** segunda das 19:00 às 21:00 (semanal); quarta das 21:00 às 23:00 (quinzenal II).

Monitorias

Horários de atendimento:

- Gabriel - Segunda-Feira das 17h às 19h;
- Gabriel - Terça-Feira das 17h às 19h;
- Mateus - Quarta-Feira das 14h às 16h;
- Mateus - Sexta-Feira das 16h às 18h.

Os atendimentos serão por email, facebook, moodle e alguma ferramenta remota.

O email do Gabriel é: g.tavares@aluno.ufabc.edu.br e link do conf web: https://conferenciaweb.rnp.br/webconf/gabriel-78

Do Mateus em princípio será: mateusborgiani@gmail.com ainda não temos o link para atendimento remoto

Aulas

Semana	Assunto	Data	Video	Slides	Extras
1	Análise Combinatória 1	2020-09-21	Link	Link	Link
2	Análise Combinatória 2	2020-09-28	Link	Link	Link
2	Probabilidade 1	2020-09-30	Link	Link	-
3	Probabilidade 2	2020-10-05	Link	Link	-
4	Probabilidade Conditional 1	2020-10-12	Link	Link	-
4	Probabilidade Conditional 2	2020-10-14		Link	-
5	Revisão	2020-10-19		-	-
6	Prova	2020-10-26		-	-
6	Variáveis aleatórias 1	2020-10-28	Link	Link	Link