Introdução à Probabilidade e Estatística

Variáveis aleatórias: Parte III

Carlos Trucíos
ctruciosm.github.io

Universidade Federal do ABC (UFABC)

Semana 8 - Aula 1

Revisão

Revisão: Variável aleatória

Variável aleatória

Uma v.a. X é uma função cujo dominio é o espaço amostral e cuja variação é o conjunto de números reais.

$$X : S \to \mathbb{R}$$

Função distribuição

A função de distribuição (ou função distribuição acumulada) de uma v.a. X, representada por F_X ou simplesmente F, é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Revisão: Esperança e Variância

Esperança

Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade $p(\cdot)$ e com valores x_i para i num conjunto de indices D. O valor esperado de X é definido como

$$E(X) = \sum_{i \in D} x_i p(x_i); \text{ e } E(h(X)) = \sum_{i \in D} h(x_i)p(x_i)$$

Variância

Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade $p(x)$ e $E(X) = \mu$. A Variância de X, denotada por $V(X)$ é definida como

$$V(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_x (x - \mu)^2 p(x)$$

O desvio padrão (DP) é definido como $DP(X) = \sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Revisão: Esperança e Variância

Propriedade

Seja X uma v.a. com $E(X) < \infty$. Se $Y = aX + b$ com a e b constantes, então $E(Y) = aE(X) + b$

Revisão: Esperança e Variância

Propriedade

Seja X uma v.a. com $E(X) < \infty$. Se $Y = aX + b$ com a e b constantes, então $E(Y) = aE(X) + b$

Demostração (caso discreto)

Seja $h(X) = aX + b$,

$$E(h(X)) = \sum_x h(x)p(x) = \sum_x (ax + b)p(x) = \sum_x ax \times p(x) + \sum_x b \times p(x)$$

Revisão: Esperança e Variância

Propriedade

Seja X uma v.a. com $E(X) < \infty$. Se $Y = aX + b$ com a e b constantes, então $E(Y) = aE(X) + b$

Demostração (caso discreto)

Seja $h(X) = aX + b$,

$$E(h(X)) = \sum_x h(x)p(x) = \sum_x (ax + b)p(x) = \sum_x ax \times p(x) + \sum_x b \times p(x)$$

$$E(h(X)) = a\underbrace{\sum_x xp(x)}_{E(X)} + b\underbrace{\sum_x p(x)}_{1} = aE(X) + b$$

Revisão: Esperança e Variância

Propriedade

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Revisão: Esperança e Variância

Propriedade

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Demostração

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E[\underbrace{X^2 + E^2(X) - 2XE(X)}_{h(X)=X^2+a-2Xb}] = \sum_x h(x)p(x)$$

Revisão: Esperança e Variância

Propriedade

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$$

Demostração

$$V(X) = E[X - E(X)]^2 = E[\underbrace{X^2 + E^2(X) - 2XE(X)}_{h(X)=X^2+a-2Xb}] = \sum_x h(x)p(x)$$

$$V(X) = \sum_x (x^2 + a - 2xb)p(x) = \underbrace{\sum_x x^2 p(x)}_{E(X^2)} + \underbrace{a \underbrace{\sum_x p(x)}_{1}}_{E^2(X)} - \underbrace{2b \underbrace{\sum_x xp(x)}_{E(X)}}_{2E(X)E(X)} =$$

$$E(X^2) - E^2(X)$$

Revisão: Esperança e Variância

Propriedade

$V(aX + b) = a^2 V(X)$

Revisão: Esperança e Variância

Propriedade

$V(aX + b) = a^2 V(X)$

Demostração

Lembre que $V(X) = E(X - E(X))^2$

Revisão: Esperança e Variância

Propriedade

$V(aX + b) = a^2V(X)$

Demostração

Lembre que $V(X) = E(X - E(X))^2$

$V(aX + b) = E[(aX + b) - E(aX + b)]^2 = E[aX + b - aE(X) - b]^2$

Revisão: Esperança e Variância

Propriedade

$V(aX + b) = a^2 V(X)$

Demostração

Lembre que $V(X) = E(X - E(X))^2$

$$V(aX + b) = E[(aX + b) - E(aX + b)]^2 = E[aX + b - aE(X) - b]^2$$

$$V(aX + b) = E[aX - aE(X)]^2 = E[a(X - E(X))]^2 = E[a^2 \underbrace{(X - E(X))^2}_{h(X)}]$$

Revisão: Esperança e Variância

Propriedade

$V(aX + b) = a^2 V(X)$

Demostração

Lembre que $V(X) = E(X - E(X))^2$

$$V(aX + b) = E[(aX + b) - E(aX + b)]^2 = E[aX + b - aE(X) - b]^2$$

$$V(aX + b) = E[aX - aE(X)]^2 = E[a(X - E(X))]^2 = E[a^2 \underbrace{(X - E(X))^2}_{h(X)}]$$

$$V(aX + b) = a^2 E[h(X)] = a^2 \underbrace{E[X - E(X)]^2}_{V(X)}$$

Variáveis aleatórias continuas

V.a's discretas vs. continuas

v.a. discreta

Uma v.a. X é dita discreta se assume um número finito ou enumeravel de valores, i.e., $\exists$ um conjunto $\{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \dots\}$, $\forall \omega \in S$.

Função de Probabilidade

A função de probabilidade de uma v.a. discreta X é uma função que atribui probabilidade a cada um dos possíveis valores de X. Ou seja, para $i = 1, 2, \dots$

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

V.a's continuas

- No caso de v.a. discretas, tinhamos um número finito ou enumeravel de possíveis resultados de X. No caso de v.a. continuas, temos que o conjunto de possíveis valores de X é um intervalo completo de números

V.a's continuas

- No caso de v.a. discretas, tinhamos um número finito ou enumeravel de possíveis resultados de X. No caso de v.a. continuas, temos que o conjunto de possíveis valores de X é um intervalo completo de números

v.a. continua

Uma v.a X com função distribuição F é dita continua se existir uma função **não negativa** $f(\cdot)$ tal que:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

e a função $f(\cdot)$ é chamada função de densidade (ou função densidade de probabilidade)

- (P1) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$,
- (P2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$

V.a's continuas

Definição

Seja X uma v.a. continua com função densidade $f(x) \geq 0$, então para quaisquer a, b ($a \leq b$),

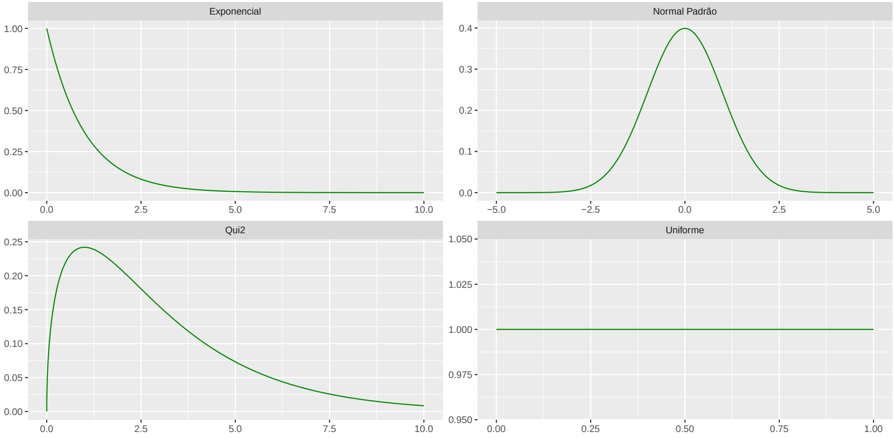
$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-) = \int_a^b f(x)dx$$

Esperança e Variância

Seja X uma v.a continua com função densidade $f(x)$, então

- $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$
- $V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx$ onde $\mu = E(X)$

V.a's continuas: funções de densidade



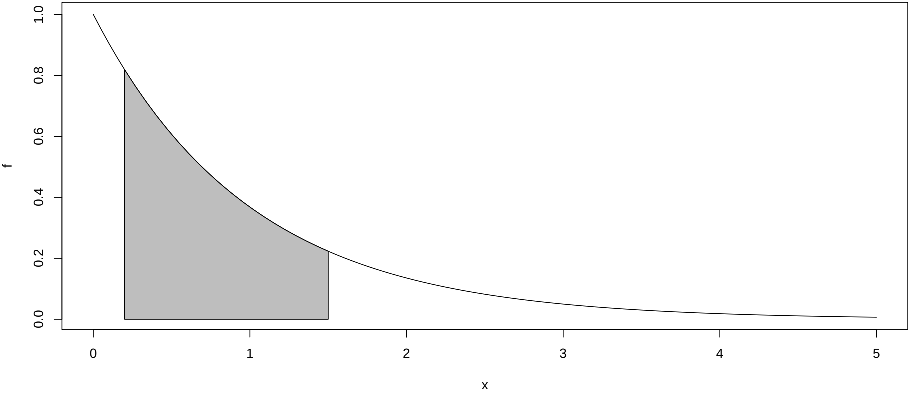
V.a's continuas

Observação

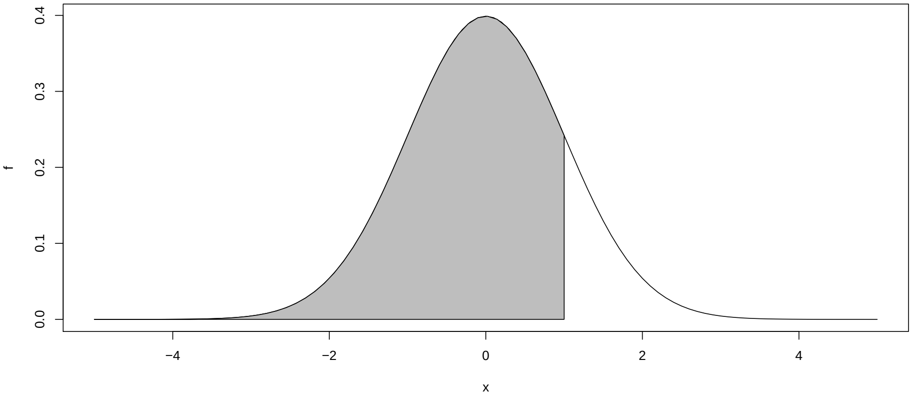
Se X é v.a. contínua, então:

- $P(X = x) = 0$
- $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$
- $f(x)$ **não representa** a probabilidade de x, a probabilidade será calculada entre 2 pontos (e será igual á area abaixo da curva)

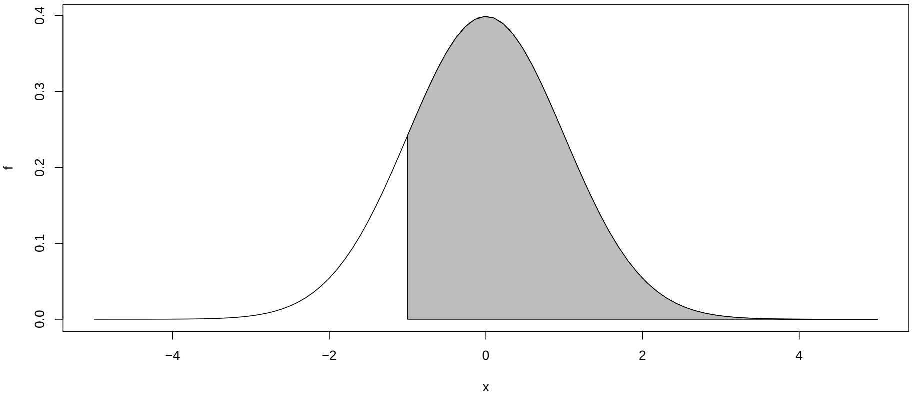
V.a's continuas



V.a's continuas



V.a's continuas



Distribuições especiais

Distribuição uniforme

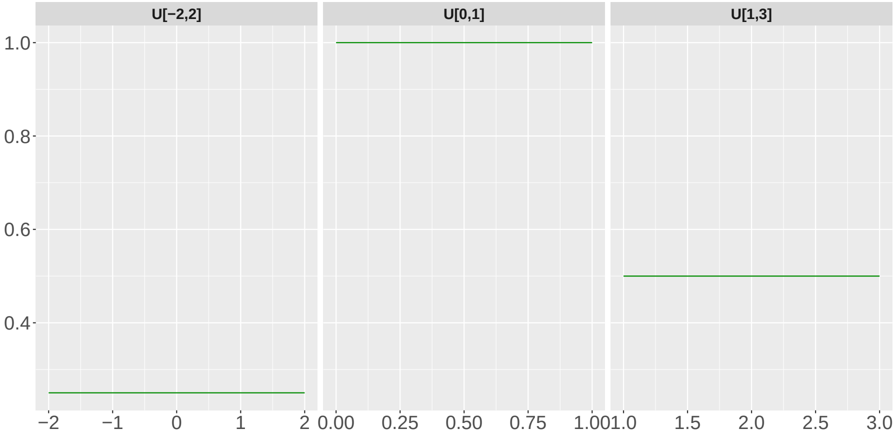
- É a distribuição continua mais simples

Distribuição uniforme

Uma v.a. continua X tem distribuição uniforme no intervalo $[a, b]$, denotada por $X \sim U_{[a,b]}$ se sua função densidade é dada por

$$f(x; a, b) = f(x|a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Distribuição uniforme



Distribuição uniforme

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Distribuição uniforme

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Demostração

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{a}^{b} xf(x)dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} xdx$$

Distribuição uniforme

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Demostração

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx$$

Lembre:

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

Distribuição uniforme

- $E(X) = \dfrac{a+b}{2}$

Demostração

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx$$

Lembre:

$$\int_a^b xdx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

$$E(X) = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2-a^2}{2} = \frac{(b+a)(b-a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Distribuição uniforme

- $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Distribuição uniforme

- $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Demostração

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \text{ (Verificar!)}$$

Distribuição uniforme

- $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

Demostração

$$E(X^2) = \int_a^b x^2 f(x)dx = \frac{b^2+ab+a^2}{3} \text{ (Verificar!)}$$

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Distribuição uniforme

Importante

Se $X \sim U[a, b]$, para qualquer intervalor $[c, d]$ com $a \leq c \leq d \leq b$,

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}dx = \frac{d-c}{b-a}$$

Distribuição uniforme

Importante

Se $X \sim U[a,b]$, para qualquer intervalor $[c,d]$ com $a \leq c \leq d \leq b$,

$$P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \frac{1}{b-a}dx = \frac{d-c}{b-a}$$

Por outro lado,

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{se }, a \leq x < b \\ 1, & \text{se } x \geq b \end{cases}$$

Distribuição uniforme: Exemplos

1. Suponha que João e Maria combinam de sair para um encontro e João diz que a buscará em casa às 21:30 hrs. Maria é super pontual e resolve que só saira com o Joao se ele atrasar no máximo 10 minutos. Assuma que o tempo de chegada de João se distribui como uma v.a. uniforme entre 21:15 e 21:45. Qual é a probabilidade de Joao chegar no máximo 10 minutos atrasado?

Distribuição uniforme: Exemplos

1. Suponha que João e Maria combinam de sair para um encontro e João diz que a buscará em casa às 21:30 hrs. Maria é super pontual e resolve que só saira com o Joao se ele atrasar no máximo 10 minutos. Assuma que o tempo de chegada de João se distribui como uma v.a. uniforme entre 21:15 e 21:45. Qual é a probabilidade de Joao chegar no máximo 10 minutos atrasado?

- X: tempo de chegada do Joao à casa da maria

Distribuição uniforme: Exemplos

1. Suponha que João e Maria combinam de sair para um encontro e João diz que a buscará em casa às 21:30 hrs. Maria é super pontual e resolve que só saira com o Joao se ele atrasar no máximo 10 minutos. Assuma que o tempo de chegada de João se distribui como uma v.a. uniforme entre 21:15 e 21:45. Qual é a probabilidade de Joao chegar no máximo 10 minutos atrasado?

- X: tempo de chegada do Joao à casa da maria
- $X \sim U[15, 45]$

Distribuição uniforme: Exemplos

1. Suponha que João e Maria combinam de sair para um encontro e João diz que a buscará em casa às 21:30 hrs. Maria é super pontual e resolve que só saira com o Joao se ele atrasar no máximo 10 minutos. Assuma que o tempo de chegada de João se distribui como uma v.a. uniforme entre 21:15 e 21:45. Qual é a probabilidade de Joao chegar no máximo 10 minutos atrasado?

- X: tempo de chegada do Joao à casa da maria
- $X \sim U[15, 45]$
- Queremos $P(X \leq 40)$

Distribuição uniforme: Exemplos

1. Suponha que João e Maria combinam de sair para um encontro e João diz que a buscará em casa às 21:30 hrs. Maria é super pontual e resolve que só saira com o Joao se ele atrasar no máximo 10 minutos. Assuma que o tempo de chegada de João se distribui como uma v.a. uniforme entre 21:15 e 21:45. Qual é a probabilidade de Joao chegar no máximo 10 minutos atrasado?

- X: tempo de chegada do Joao à casa da maria
- $X \sim U[15, 45]$
- Queremos $P(X \leq 40)$
- $P(X \leq 40) = \int_{15}^{40} \frac{1}{45-15} dx = \frac{40-15}{45-15} = \frac{25}{30} = 0.83$

Distribuição uniforme: Exemplos

R

```r
# X: tempo de chegada do Joao à casa da Maria, X ~ U[15,45]
# P(X <= 40)
punif(40,min=15, max = 45)
```

```
## [1] 0.8333333
```

```r
# Y ~ U[-15,15]
# P(Y <= 10)
punif(10,min=-15, max = 15)
```

```
## [1] 0.8333333
```

Distribuição uniforme: Exemplos

Python

```
>>> from scipy.stats import uniform
>>> # P(X <= 40)
>>> a = 15
>>> b = 45
>>> uniform.cdf(40, a, b-a)
0.8333333333333334
```

Distribuição uniforme: Exemplos

2. A espessura de chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC* segue uma distribuição uniforme entre 0.87cm e 1.03cm. Se selecionarmos uma chapa aleatoriamente, qual é a probabilidade da chapa ter espessura entre 0.98 e 1.02?

- X : espessura das chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC*,

Distribuição uniforme: Exemplos

2. A espessura de chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC* segue uma distribuição uniforme entre 0.87cm e 1.03cm. Se selecionarmos uma chapa aleatoriamente, qual é a probabilidade da chapa ter espessura entre 0.98 e 1.02?

- X : espessura das chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC*,
- $X \sim U[0.87, 1.03]$

Distribuição uniforme: Exemplos

2. A espessura de chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC* segue uma distribuição uniforme entre 0.87cm e 1.03cm. Se selecionarmos uma chapa aleatoriamente, qual é a probabilidade da chapa ter espessura entre 0.98 e 1.02?

- X : espessura das chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC*,
- $X \sim U[0.87, 1.03]$
- Queremos $P(0.98 \leq X \leq 1.02)$

Distribuição uniforme: Exemplos

2. A espessura de chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC* segue uma distribuição uniforme entre 0.87cm e 1.03cm. Se selecionarmos uma chapa aleatoriamente, qual é a probabilidade da chapa ter espessura entre 0.98 e 1.02?

- X : espessura das chapas de metal fabricadas pela *MetaisABC*,
- $X \sim U[0.87, 1.03]$
- Queremos $P(0.98 \leq X \leq 1.02)$
- $P(0.98 \leq X \leq 1.02) = \dfrac{1.02 - 0.98}{1.03 - 0.87} = 0.25$

Distribuição uniforme: Exemplos

R

```
# P(0.98 <= X <= 1.02) = F(1.02) - F(0.98)
punif(1.02) - punif(0.87)
```

```
## [1] 0.13
```

```
# Cuidado, por padrão punif assume que queremos uma U[0,1]
a = 0.87
b = 1.03
punif(1.02, a, b)-punif(0.98, a, b)
```

```
## [1] 0.25
```

Distribuição uniforme: Exemplos

3. O metrô passa na estação Luz de 15 em 15 minutos começando as 5am. Se o tempo de chegada de um passageiro à plataforma se distribui de forma uniforme entre as 7:00 e 7:50. Qual é a probabilidade do passageiro esperar menos que 5 minutos pelo metrô?

- Note que o metrô passará as 7:00, 7:15, 7:30, 7:45, 8:00, ...

Distribuição uniforme: Exemplos

3. O metrô passa na estação Luz de 15 em 15 minutos começando as 5am. Se o tempo de chegada de um passageiro à plataforma se distribui de forma uniforme entre as 7:00 e 7:50. Qual é a probabilidade do passageiro esperar menos que 5 minutos pelo metrô?

- Note que o metrô passará as 7:00, 7:15, 7:30, 7:45, 8:00, $\ldots$.
- Seja X o número em minutos em que o passageiro chega na plataforma entre as 7:00 e as 7:50, $X \sim U[0, 50]$

Distribuição uniforme: Exemplos

3. O metrô passa na estação Luz de 15 em 15 minutos começando as 5am. Se o tempo de chegada de um passageiro à plataforma se distribui de forma uniforme entre as 7:00 e 7:50. Qual é a probabilidade do passageiro esperar menos que 5 minutos pelo metrô?

- Note que o metrô passará as 7:00, 7:15, 7:30, 7:45, 8:00, ...
- Seja X o número em minutos em que o passageiro chega na plataforma entre as 7:00 e as 7:50, $X \sim U[0, 50]$
- Para que o passageiro espere menos de 5 min deve chegar entre $10 < X < 15$, $25 < X < 30$ ou $40 < X < 45$

Distribuição uniforme: Exemplos

3. O metrô passa na estação Luz de 15 em 15 minutos começando as 5am. Se o tempo de chegada de um passageiro à plataforma se distribui de forma uniforme entre as 7:00 e 7:50. Qual é a probabilidade do passageiro esperar menos que 5 minutos pelo metrô?

- Note que o metrô passará as 7:00, 7:15, 7:30, 7:45, 8:00, ...
- Seja X o número em minutos em que o passageiro chega na plataforma entre as 7:00 e as 7:50, $X \sim U[0, 50]$
- Para que o passageiro espere menos de 5 min deve chegar entre $10 < X < 15$, $25 < X < 30$ ou $40 < X < 45$
- $P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30) + P(40 < X < 45) = 15/50$

Distribuição exponencial:

Distribuição exponencial

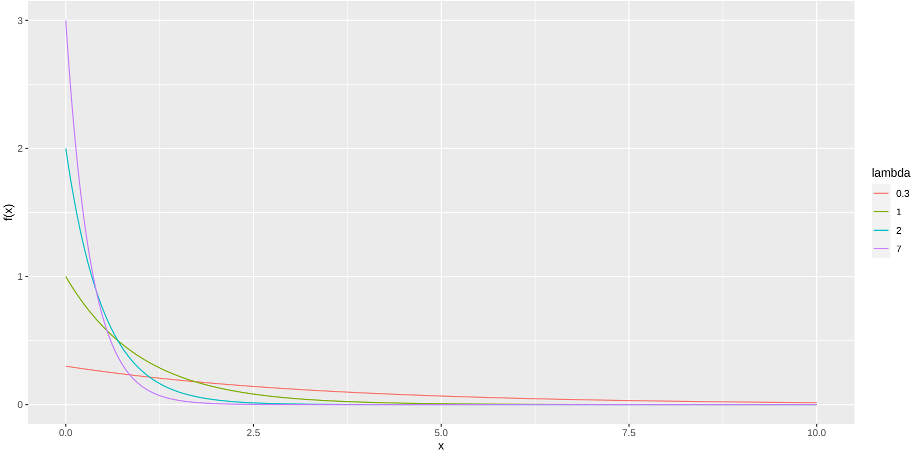
Uma v.a. continua X tem distribuição exponencial com parâmetro λ, denotada por $X \sim Exp(\lambda)$ se sua função densidade é dada por

$$f(x; a, b) = f(x|a, b) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{se } x \geq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- $E(X) = 1/\lambda$
- $V(X) = 1/\lambda^2$

Quem é o λ? $\lambda = 1/\mu$, onde μ : tempo medio

Distribuição exponencial:



Distribuição exponencial

Importante

Se $X \sim Exp(\lambda)$, para qualquer intervalor $[a, b]$ com $0 \leq a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}$$

Distribuição exponencial

Importante

Se $X \sim Exp(\lambda)$, para qualquer intervalor $[a, b]$ com $0 \leq a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-a\lambda} - e^{-b\lambda}$$

Por outro lado,

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{se } , x \geq 0 \end{cases}$$

Distribuição exponencial: Exemplos

1. O tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café (com um determinado problema XYZ) pode ser modelado por uma distribuição exponencial com $\lambda = 2/3$. João, o conserta-tudo, fala que para consertar nossa maquina de café, demorará, no mínimo 3 horas. Qual a probabilidade disso acontecer?

Distribuição exponencial: Exemplos

1. O tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café (com um determinado problema XYZ) pode ser modelado por uma distribuição exponencial com $\lambda = 2/3$. João, o conserta-tudo, fala que para consertar nossa maquina de café, demorará, no mínimo 3 horas. Qual a probabilidade disso acontecer?

- X : tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café

Distribuição exponencial: Exemplos

1. O tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café (com um determinado problema XYZ) pode ser modelado por uma distribuição exponencial com $\lambda = 2/3$. João, o conserta-tudo, fala que para consertar nossa maquina de café, demorará, no mínimo 3 horas. Qual a probabilidade disso acontecer?

- X : tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café
- $X \sim Exp(\lambda = 2/3)$

Distribuição exponencial: Exemplos

1. O tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café (com um determinado problema XYZ) pode ser modelado por uma distribuição exponencial com $\lambda = 2/3$. João, o conserta-tudo, fala que para consertar nossa maquina de café, demorará, no mínimo 3 horas. Qual a probabilidade disso acontecer?

- X : tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café
- $X \sim Exp(\lambda = 2/3)$
- Queremos $P(X \geq 3)$

Distribuição exponencial: Exemplos

1. O tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café (com um determinado problema XYZ) pode ser modelado por uma distribuição exponencial com $\lambda = 2/3$. João, o conserta-tudo, fala que para consertar nossa maquina de café, demorará, no mínimo 3 horas. Qual a probabilidade disso acontecer?

- X : tempo (em horas) necessário para consertar uma maquina de café
- $X \sim Exp(\lambda = 2/3)$
- Queremos $P(X \geq 3)$
- $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - [1 - e^{-2/3 \times 3}] = 0.1353353$

Distribuição exponencial: Exemplos

R

```
# P(X >= 3)
lambda = 2/3
1-pexp(3, rate = lambda)
```

```
## [1] 0.1353353
```

```
pexp(3, rate = lambda, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.1353353
```

Distribuição exponencial: Exemplos

Python

```
Python 3.7.3 (v3.7.3:ef4ec6ed12, Mar 25 2019, 16:52:21)
[Clang 6.0 (clang-600.0.57)] on darwin
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> from scipy.stats import expon
>>> lamb = 2/3
>>> 1-expon.cdf(3, scale = lamb)
0.011108996538242266
>>> 1-expon.cdf(3, scale = 1/lamb)
0.1353352832366127
```

Distribuição exponencial: Exemplos

2. A vida útil de um celular Xing-Ling segue uma distribuição exponencial com tempo de vida médio de 3 meses. Joao esta precisando muito de um celular, e um vendedor oferece um celular Xing-Ling por um preço bem camarada e ainda afirma que, se o celular estragar em menos de 2 meses, Joao recebera o dinheiro de volta. Qual a probabilidade do celular durar menos do que 2 meses?

Distribuição exponencial: Exemplos

2. A vida útil de um celular Xing-Ling segue uma distribuição exponencial com tempo de vida médio de 3 meses. Joao esta precisando muito de um celular, e um vendedor oferece um celular Xing-Ling por um preço bem camarada e ainda afirma que, se o celular estragar em menos de 2 meses, Joao recebera o dinheiro de volta. Qual a probabilidade do celular durar menos do que 2 meses?

- X tempo de vida útil de um celular Xing-Ling

Distribuição exponencial: Exemplos

2. A vida útil de um celular Xing-Ling segue uma distribuição exponencial com tempo de vida médio de 3 meses. Joao esta precisando muito de um celular, e um vendedor oferece um celular Xing-Ling por um preço bem camarada e ainda afirma que, se o celular estragar em menos de 2 meses, Joao recebera o dinheiro de volta. Qual a probabilidade do celular durar menos do que 2 meses?

- X tempo de vida útil de um celular Xing-Ling
- $X \sim Exp(\lambda = 1/3)$

Distribuição exponencial: Exemplos

2. A vida útil de um celular Xing-Ling segue uma distribuição exponencial com tempo de vida médio de 3 meses. Joao esta precisando muito de um celular, e um vendedor oferece um celular Xing-Ling por um preço bem camarada e ainda afirma que, se o celular estragar em menos de 2 meses, Joao recebera o dinheiro de volta. Qual a probabilidade do celular durar menos do que 2 meses?

- X tempo de vida útil de um celular Xing-Ling
- $X \sim Exp(\lambda = 1/3)$
- Queremos $P(X < 2)$

Distribuição exponencial: Exemplos

$P(X < 2) = P(X \leq 2)$ (Por que?)

Distribuição exponencial: Exemplos

$P(X < 2) = P(X \leq 2)$ (Por que?)

Lembre que

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Distribuição exponencial: Exemplos

$P(X < 2) = P(X \leq 2)$ (Por que?)

Lembre que

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

$P(X \leq 2) = F(2) = 1 - e^{-\frac{2}{3}} = 1 - e^{-2/3} = 0.4865829$

Distribuição exponencial: Exemplos

R

```
lambda = 1/3
# P(X<2) = P(X<=2)
pexp(2, rate = lambda)
```

```
## [1] 0.4865829
```

```
1-exp(-2/3)
```

```
## [1] 0.4865829
```

Distribuição exponencial:

Proposição: Poisson-Exponencial

Suponha que o número de eventos que ocurrem em um intervalo de tempo/espaço t tenha distribuição $Pois(\lambda t)$ onde λ é o número esperado de eventos que ocorrem em uma unidade de tempo/espaço. Se o número de ocorrencias em intervalos não sobrepostos é independente entre intervalos, então a distribuição do tempo entre a ocorrencia de dois eventos sucessivos é $Exp(\lambda)$.

3. Suponha que as ligações recebidas numa central de denuncias ocorram segundo um processo de Poisson com taxa de 0.7 ligações por dia. Qual a probabilidade de haver mais de 2 dias entre chamadas?

Distribuição exponencial: Exemplos

- Seja X : número de dias entre as chamadas

Distribuição exponencial: Exemplos

- Seja X : número de dias entre as chamadas
- Queremos $P(X > 2)$

Distribuição exponencial: Exemplos

- Seja X : número de dias entre as chamadas
- Queremos $P(X > 2)$

Distribuição exponencial: Exemplos

- Seja X : número de dias entre as chamadas
- Queremos $P(X > 2)$

Como o número de chamadas segue uma *Poisson*(0.7), pela **Proposição Poisson-Exponencial**, X : o número de occorencias entre dois eventos sucessivos $\sim$ *Exp*(0.7)

- $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - e^{-2\times 0.7} = 0.246597$

Distribuição exponencial: Exemplos

- Seja X : número de dias entre as chamadas
- Queremos $P(X > 2)$

Como o número de chamadas segue uma *Poisson*(0.7), pela **Proposição Poisson-Exponencial**, X : o número de occorencias entre dois eventos sucessivos $\sim$ *Exp*(0.7)

- $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - e^{-2\times 0.7} = 0.246597$

Distribuição exponencial: Exemplos

- Seja X : número de dias entre as chamadas
- Queremos $P(X > 2)$

Como o número de chamadas segue uma $Poisson(0.7)$, pela **Proposição Poisson-Exponencial**, X : o número de occorencias entre dois eventos sucessivos $\sim Exp(0.7)$

- $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - e^{-2 \times 0.7} = 0.246597$

```
1-pexp(2, rate = 0.7)
```

```
## [1] 0.246597
```

Distribuição Normal

- É a distribuição continua mais importante de todas

Distribuição Normal

Uma v.a. continua X tem distribuição Normal (Gaussiana), denotada por $N(\mu, \sigma)$, se sua função densidade é da forma

$$f(x; \mu, \sigma) = f(x|\mu, \sigma) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ com } x \in (-\infty, \infty)$$

- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$

Distribuição Normal

- É a distribuição continua mais importante de todas
- tem forma de sino

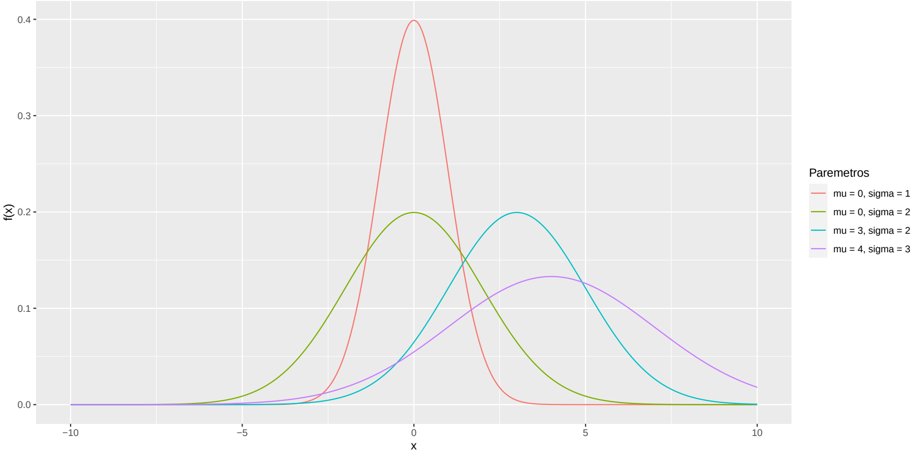
Distribuição Normal

Uma v.a. continua X tem distribuição Normal (Gaussiana), denotada por $N(\mu, \sigma)$, se sua função densidade é da forma

$$f(x;\mu,\sigma) = f(x|\mu,\sigma) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \text{ com } x \in (-\infty, \infty)$$

- $E(X) = \mu$
- $V(X) = \sigma^2$

Distribuição Normal



Distribuição Normal

Distribuição Normal Padrão

Quando $\mu = 0$ e $\sigma = 1$, a distribuição Normal é conhecida como Normal Padrão, denotada por $N(0,1)$, e sua função de densidade é da forma

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}}, \text{ com } x \in (-\infty, \infty)$$

- $E(X) = 0$
- $V(X) = 1$
- $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \Phi(x)$

Distribuição Normal

Padronização

Se $X \sim N(\mu, \sigma)$, então $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$

Observação 1

Embora no computador consigamos calcular as probabilidade para quaisquer valores de μ e σ, sempre levaremos tudo para uma distribuição padrão.

Distribuição Normal: Exercicios

1. Se $X \sim N(0,1)$, calcule: $P(X \leq -3)$, $P(X > 3)$ e $P(-2 \leq X \leq 2)$

```r
# P(X<= -3)
pnorm(-3)
```

```
## [1] 0.001349898
```

```r
# P(X>3)
1-pnorm(3)
```

```
## [1] 0.001349898
```

```r
# (c) P(-2 <= X <= 2)
pnorm(2)-pnorm(-2)
```

```
## [1] 0.9544997
```

Distribuição Normal: Exercicios

Python

```
Python 3.7.3 (v3.7.3:ef4ec6ed12, Mar 25 2019, 16:52:21)
[Clang 6.0 (clang-600.0.57)] on darwin
Type "help", "copyright", "credits" or "license()" for more information.
>>> from scipy.stats import norm
>>> # P(X<= -3)
>>> norm.cdf(-3)
0.0013498980316300933
>>> # P(X>3)
>>> 1-norm.cdf(3)
0.0013498980316301035
>>> # (c) P(-2 <= X <= 2)
>>> norm.cdf(2)-norm.cdf(-2)
0.9544997361036416
```

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de IPE da UFABC tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de IPE de UFABC

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de IPE da UFABC tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de IPE de UFABC
- $X \sim N(120, 15)$

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de IPE da UFABC tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de IPE de UFABC
- $X \sim N(120, 15)$
- $Z = \dfrac{X - 120}{15}$

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de IPE da UFABC tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de IPE de UFABC
- $X \sim N(120, 15)$
- $Z = \dfrac{X - 120}{15}$
- Queremos $P(X < 45)$

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de IPE da UFABC tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de IPE de UFABC
- $X \sim N(120, 15)$
- $Z = \dfrac{X - 120}{15}$
- Queremos $P(X < 45)$
- $P(X < 45) = P(\dfrac{X - 120}{15} < \dfrac{45 - 120}{45}) = P(Z < -5)$

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de IPE da UFABC tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de IPE de UFABC
- $X \sim N(120, 15)$
- $Z = \dfrac{X - 120}{15}$
- Queremos $P(X < 45)$
- $P(X < 45) = P(\dfrac{X - 120}{15} < \dfrac{45 - 120}{45}) = P(Z < -5)$

Distribuição Normal: Exercicios

2. O tempo gasto em terminar a P_1 de IPE da UFABC tem distribuição normal, com média 120 minutos e desvio padrão de 15 min. Qual é a probabilidade de um aluno terminar a prova em menos de 45 minutos?

- X : tempo gastos em terminar a P_1 de IPE de UFABC
- $X \sim N(120, 15)$
- $Z = \dfrac{X - 120}{15}$
- Queremos $P(X < 45)$
- $P(X < 45) = P(\dfrac{X - 120}{15} < \dfrac{45 - 120}{45}) = P(Z < -5)$

```
pnorm(-5)
```

```
## [1] 2.866516e-07
```

Distribuição Normal: Exercicios

3. Suponha que o peso médio dos porcos de uma fazenda seja 70 kg e que o desvio padrão dos pesos seja 10 kg. Supondo que esses pesos de destribuem normalmente, qual é a probabilidade de um porco escolhido ao acaso pesar entre 65 e 75 kg?

- X : pesos dos porcos de uma determinada fazenda, $X \sim N(70, 10)$

Distribuição Normal: Exercicios

3. Suponha que o peso médio dos porcos de uma fazenda seja 70 kg e que o desvio padrão dos pesos seja 10 kg. Supondo que esses pesos de destribuem normalmente, qual é a probabilidade de um porco escolhido ao acaso pesar entre 65 e 75 kg?

- X : pesos dos porcos de uma determinada fazenda, $X \sim N(70, 10)$
- Queremos $P(65 \leq X \leq 75)$

Distribuição Normal: Exercicios

3. Suponha que o peso médio dos porcos de uma fazenda seja 70 kg e que o desvio padrão dos pesos seja 10 kg. Supondo que esses pesos de destribuem normalmente, qual é a probabilidade de um porco escolhido ao acaso pesar entre 65 e 75 kg?

- X : pesos dos porcos de uma determinada fazenda, $X \sim N(70, 10)$
- Queremos $P(65 \leq X \leq 75)$
- Padronizando:
  $$P(\frac{65-70}{10} \leq \frac{X-70}{10} \leq \frac{75-70}{10}) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.5)$$

Distribuição Normal: Exercicios

3. Suponha que o peso médio dos porcos de uma fazenda seja 70 kg e que o desvio padrão dos pesos seja 10 kg. Supondo que esses pesos de destribuem normalmente, qual é a probabilidade de um porco escolhido ao acaso pesar entre 65 e 75 kg?

- X : pesos dos porcos de uma determinada fazenda, $X \sim N(70, 10)$
- Queremos $P(65 \leq X \leq 75)$
- Padronizando:
$$P(\frac{65-70}{10} \leq \frac{X-70}{10} \leq \frac{75-70}{10}) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.5)$$

Distribuição Normal: Exercicios

3. Suponha que o peso médio dos porcos de uma fazenda seja 70 kg e que o desvio padrão dos pesos seja 10 kg. Supondo que esses pesos de destribuem normalmente, qual é a probabilidade de um porco escolhido ao acaso pesar entre 65 e 75 kg?

- X : pesos dos porcos de uma determinada fazenda, $X \sim N(70, 10)$
- Queremos $P(65 \leq X \leq 75)$
- Padronizando:
$$P(\frac{65-70}{10} \leq \frac{X-70}{10} \leq \frac{75-70}{10}) = P(-0.5 \leq Z \leq 0.5)$$

```
pnorm(0.5)-pnorm(-0.5)
```

```
## [1] 0.3829249
```

Distribuições especiais: Como identificar?

- **Binomial:** X : número total de sucessos em n realizações
- **Poisson:** X : número de ________ em um intervalo fixo de tempo/espaço
- **Binomial negativa** X : número de fracassos até obter r sucessos
- **Uniforme:** *se distribui uniformemente*
- **Exponencial:** X : tempo até a occorencia de eventos sucessivos
- **Normal:** *se distribui normalmente*

Leituras recomendadas

Leituras recomendadas

- Jay Devore (4.1-4.4)
- Ross (Capitulo 5)
- DeGroot e Schervish (3.2)

Para praticar

- Lista 6 do gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/ipe/listas/