Introdução à Probabilidade e Estatística

Analise Combinatória: Parte II

Carlos Trucíos
ctruciosm.github.io

Universidade Federal do ABC (UFABC)

Semana 2 - Aula 1

Resumo da última aula

O número de maneiras de formar grupos de r elementos de um conjunto com n elementos distintos:

	Ordem importa	Ordem não importa
Com reposição	n^r	$\binom{r+n-1}{n-1}$
Sem reposição	$n(n-1)\cdots(n-r+1)$	$\binom{n}{r}$

Teorema Binomial

Motivação

$$(x + y)^1 = x + y$$

Motivação

$$(x+y)^1 = x + y$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

Motivação

$$(x+y)^1 = x+y$$

$$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$$

Motivação

$$(x+y)^1 = x+y$$

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{\text{n-vezes}}$$

Teorema Binomial

Teorema Binomial

Para quaisquer números x e y, e para qualquer inteiro positivo n,

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Teorema Binomial

Caso n=3

Teorema Binomial

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{\text{n-vezes}}$$

Temos os termos $x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \cdots, xy^{n-1}, y^n$

- x^n só pode ocorrer se $\underbrace{x\cdots x}_{\text{n-vezes}} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$

Teorema Binomial

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{\text{n-vezes}}$$

Temos os termos $x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \cdots, xy^{n-1}, y^n$

- x^n só pode ocorrer se $\underbrace{x\cdots x}_{\text{n-vezes}} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$
- $x^{n-1}y$ pode ocorrer $\binom{n}{n-1,1} = \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$

Teorema Binomial

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{\text{n-vezes}}$$

Temos os termos $x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \cdots, xy^{n-1}, y^n$

- x^n só pode ocorrer se $\underbrace{x\cdots x}_{\text{n-vezes}} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$
- $x^{n-1}y$ pode ocorrer $\binom{n}{n-1,1} = \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$
- $x^{n-2}y^2$ pode ocorrer $\binom{n}{n-2,2} = \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$

Teorema Binomial

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{\text{n-vezes}}$$

Temos os termos $x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \cdots, xy^{n-1}, y^n$

- x^n só pode ocorrer se $\underbrace{x\cdots x}_{\text{n-vezes}} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$
- $x^{n-1}y$ pode ocorrer $\binom{n}{n-1,1} = \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$
- $x^{n-2}y^2$ pode ocorrer $\binom{n}{n-2,2} = \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$
- $\cdots$

Teorema Binomial

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{\text{n-vezes}}$$

Temos os termos $x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \cdots, xy^{n-1}, y^n$

- x^n só pode ocorrer se $\underbrace{x\cdots x}_{\text{n-vezes}} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$
- $x^{n-1}y$ pode ocorrer $\binom{n}{n-1,1} = \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$
- $x^{n-2}y^2$ pode ocorrer $\binom{n}{n-2,2} = \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$
- $\cdots$
- xy^{n-1} pode ocorrer $\binom{n}{1,n-1} = \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$

Teorema Binomial

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)\cdots(x+y)}_{\text{n-vezes}}$$

Temos os termos $x^n, x^{n-1}y, x^{n-2}y^2, \cdots, xy^{n-1}, y^n$

- x^n só pode ocorrer se $\underbrace{x\cdots x}_{\text{n-vezes}} = \binom{n}{0} = \binom{n}{n}$
- $x^{n-1}y$ pode ocorrer $\binom{n}{n-1,1} = \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1}$
- $x^{n-2}y^2$ pode ocorrer $\binom{n}{n-2,2} = \binom{n}{2} = \binom{n}{n-2}$
- $\cdots$
- xy^{n-1} pode ocorrer $\binom{n}{1,n-1} = \binom{n}{n-1} = \binom{n}{1}$
- y^n só pode ocorrer se $\underbrace{y\cdots y}_{\text{n-vezes}} = \binom{n}{n} = \binom{n}{0}$

Soluções de equações inteiras

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1: O melhor alun@ da turma de IPE ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas?

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1: O melhor alun@ da turma de IPE ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas?

- **Opcão A:** Arranjo

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1: O melhor alun@ da turma de IPE ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas?

- **Opcão A:** Arranjo
- **Opção B:** Combinação

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1: O melhor alun@ da turma de IPE ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas?

- **Opcão A:** Arranjo
- **Opção B:** Combinação
- Porque A e B estão erradas?

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\cdots$

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\cdots$
- x_8: número de coxinhas do sabor 8

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\cdots$
- x_8: número de coxinhas do sabor 8

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\cdots$
- x_8: número de coxinhas do sabor 8

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5 \tag{1}$$

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\cdots$
- x_8: número de coxinhas do sabor 8

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5 \tag{1}$$

Queremos a solução de (1) t.q $x_i \geq 0$

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\cdots$
- x_8: número de coxinhas do sabor 8

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5 \tag{1}$$

Queremos a solução de (1) t.q $x_i \geq 0$

A ordem como pedimos as coxinhas importa?

Número de soluções de equações inteiras

- x_1: número de coxinhas do sabor 1
- x_2: número de coxinhas do sabor 2
- $\cdots$
- x_8: número de coxinhas do sabor 8

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 5 \tag{1}$$

Queremos a solução de (1) t.q $x_i \geq 0$

A ordem como pedimos as coxinhas importa? Não

Número de soluções de equações inteiras

Caso 2: A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

Número de soluções de equações inteiras

Caso 2: A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

- Arranjo com repetição?

Número de soluções de equações inteiras

Caso 2: A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

- Arranjo com repetição?

- x_1: número de escrivaninhas pintadas da cor 1
- x_2: número de escrivaninhas pintadas da cor 2
- x_3: número de escrivaninhas pintadas da cor 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \tag{2}$$

Número de soluções de equações inteiras

Caso 2: A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

- Arranjo com repetição?

- x_1: número de escrivaninhas pintadas da cor 1
- x_2: número de escrivaninhas pintadas da cor 2
- x_3: número de escrivaninhas pintadas da cor 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \tag{2}$$

Queremos a solução de (2) t.q $x_i \geq 0$

Número de soluções de equações inteiras

Caso 2: A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

- Arranjo com repetição?

- x_1: número de escrivaninhas pintadas da cor 1
- x_2: número de escrivaninhas pintadas da cor 2
- x_3: número de escrivaninhas pintadas da cor 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \tag{2}$$

Queremos a solução de (2) t.q $x_i \geq 0$

A ordem importa?

Número de soluções de equações inteiras

Caso 2: A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

- Arranjo com repetição?

- x_1: número de escrivaninhas pintadas da cor 1
- x_2: número de escrivaninhas pintadas da cor 2
- x_3: número de escrivaninhas pintadas da cor 3

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7 \tag{2}$$

Queremos a solução de (2) t.q $x_i \geq 0$

A ordem importa? Não, as escrivaninhas são idênticas

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1:

O melhor alun@ da turma de IPE ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas? (a ordem não importa)

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1:

O melhor alun@ da turma de IPE ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas? (a ordem não importa)

Reinterpretando De um total de $n = 5$ elementos (não necessariamente $\neq$), queremos formar $r = 8$ grupos de tamanhos $x_1, ..., x_8$ t.q $x_i \geq 0$.

Caso 2:

A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

Número de soluções de equações inteiras

Caso 1:

O melhor alun@ da turma de IPE ganha um voucher de 5 coxinhas do Bar do Luizão, que por sua vez possui 8 sabores diferentes de coxinha. De quantas formas o alun@ pode selecionar as 5 coxinhas? (a ordem não importa)

Reinterpretando De um total de $n = 5$ elementos (não necessariamente $\neq$), queremos formar $r = 8$ grupos de tamanhos $x_1, \ldots, x_8$ t.q $x_i \geq 0$.

Caso 2:

A fabrica de escrivaninhas "Marquesone" dispõe de 3 cores diferentes para pintar 7 escrivaninhas idênticas. De quantas formas isto pode ser feito?

Reinterpretando De um total de $n = 7$ elementos (idênticos, i.e a ordem não importa), queremos formar $r = 3$ grupos de tamanhos x_1, x_2, x_3 t.q $x_i \geq 0$.

Número de soluções de equações inteiras

Proposição 2

O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i \geq 0$ é

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

Número de soluções de equações inteiras

Proposição 2

O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i \geq 0$ é

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

Proposição 1

O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i > 0$ é

$$\binom{n-1}{r-1}$$

Número de soluções de equações inteiras

Prova Proposição 1 O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i > 0$ é $\binom{n-1}{r-1}$

- Imagine que temos n objetos idênticos (i.e a ordem não importa) e queremos dividi-los em r grupos não vazios.

Número de soluções de equações inteiras

Prova Proposição 1 O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i > 0$ é $\binom{n-1}{r-1}$

- Imagine que temos n objetos idênticos (i.e a ordem não importa) e queremos dividi-los em r grupos não vazios.
- $$\underbrace{o \quad o \quad o \quad o \quad \cdots \quad o}_{\text{n-objetos}}$$

Número de soluções de equações inteiras

Prova Proposição 1 O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i > 0$ é $\binom{n-1}{r-1}$

- Imagine que temos n objetos idênticos (i.e a ordem não importa) e queremos dividi-los em r grupos não vazios.
- $$\underbrace{o \quad o \quad o \quad o \quad \cdots \quad o}_{\text{n-objetos}}$$
- Para poder dividi-los em r grupos não vazios, podemos selecionar $r - 1$ dos $n - 1$ espaços entre os objetos

Número de soluções de equações inteiras

Prova Proposição 1 O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i > 0$ é $\binom{n-1}{r-1}$

- Imagine que temos n objetos idênticos (i.e a ordem não importa) e queremos dividi-los em r grupos não vazios.
- $$\underbrace{o \quad o \quad o \quad o \quad \cdots \quad o}_{\text{n-objetos}}$$
- Para poder dividi-los em r grupos não vazios, podemos selecionar $r-1$ dos $n-1$ espaços entre os objetos
- Temos $\binom{n-1}{r-1}$ seleções possíveis

Número de soluções de equações inteiras

Prova Proposição 2 O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i \geq 0$ é $\binom{n+r-1}{r-1}$

- Agora temos n objetos idênticos e queremos dividi-los em r grupos.

Número de soluções de equações inteiras

Prova Proposição 2 O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i \geq 0$ é $\binom{n+r-1}{r-1}$

- Agora temos n objetos idênticos e queremos dividi-los em r grupos.
- $\underbrace{o \quad o \quad o \quad o \quad \cdots \quad o}_{\text{n-objetos}}$

Número de soluções de equações inteiras

Prova Proposição 2 O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i \geq 0$ é $\binom{n+r-1}{r-1}$

- Agora temos n objetos idênticos e queremos dividi-los em r grupos.
- $\underbrace{o \quad o \quad o \quad o \quad \cdots \quad o}_{\text{n-objetos}}$
- Para poder dividi-los em r grupos, podemos utilizar $r-1$ dos $n-1$ espaços entre os objetos mas agora é permitido utilizar o mesmo espaço mais do que uma vez

Número de soluções de equações inteiras

Prova Proposição 2 O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i \geq 0$ é $\binom{n+r-1}{r-1}$

- Agora temos n objetos idênticos e queremos dividi-los em r grupos.
- $\underbrace{o \quad o \quad o \quad o \quad \cdots \quad o}_{\text{n-objetos}}$
- Para poder dividi-los em r grupos, podemos utilizar $r-1$ dos $n-1$ espaços entre os objetos mas agora é permitido utilizar o mesmo espaço mais do que uma vez
- $\underbrace{o \quad l \quad l \quad o \quad o \quad o \quad \cdots \quad l \quad o}_{\text{n+r-1 objetos}}$ (*)

Número de soluções de equações inteiras

Prova Proposição 2 O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i \geq 0$ é $\binom{n+r-1}{r-1}$

- Agora temos n objetos idênticos e queremos dividi-los em r grupos.
- $\underbrace{o \quad o \quad o \quad o \quad \cdots \quad o}_{\text{n-objetos}}$
- Para poder dividi-los em r grupos, podemos utilizar $r-1$ dos $n-1$ espaços entre os objetos mas agora é permitido utilizar o mesmo espaço mais do que uma vez
- $\underbrace{o \quad / \quad / \quad o \quad o \quad o \quad \cdots \quad / \quad o}_{\text{n+r-1 objetos}} \qquad (*)$
- O número total de configurações (*) é $(n+r-1)!$

Número de soluções de equações inteiras

Prova Proposição 2 O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i \geq 0$ é $\binom{n+r-1}{r-1}$

- Agora temos n objetos idênticos e queremos dividi-los em r grupos.
- $\underbrace{o \quad o \quad o \quad o \quad \cdots \quad o}_{\text{n-objetos}}$
- Para poder dividi-los em r grupos, podemos utilizar $r-1$ dos $n-1$ espaços entre os objetos mas agora é permitido utilizar o mesmo espaço mais do que uma vez
- $\underbrace{o \;\; l \;\; l \;\; o \quad o \quad o \quad \cdots \quad l \;\; o}_{\text{n+r-1 objetos}} \qquad (*)$
- O número total de configurações (*) é $(n+r-1)!$
- Mas temos configurações repetidas (os n objetos são idênticos e a forma como colocamos os $r-1$ l's é irrelevante). Então $\frac{(n+r-1)!}{n!(r-1)!} = \binom{n+r-1}{r-1}$

Número de soluções de equações inteiras

Proposição 2 outra forma de ver o problema

- Queremos o número de soluções não negativas de $x_1 + \cdots x_r = n$

Número de soluções de equações inteiras

Proposição 2 outra forma de ver o problema

- Queremos o número de soluções não negativas de $x_1 + \cdots x_r = n$
- Se fizermos $y_i = x_i + 1$

Número de soluções de equações inteiras

Proposição 2 outra forma de ver o problema

- Queremos o número de soluções não negativas de $x_1 + \cdots x_r = n$
- Se fizermos $y_i = x_i + 1$
- $x_1 + \cdots x_r = n$, $x_i \geq 0$ é igual a $y_1 + \cdots + y_r = n + r$, $y_i > 0$

Número de soluções de equações inteiras

Proposição 2 outra forma de ver o problema

- Queremos o número de soluções não negativas de $x_1 + \cdots x_r = n$
- Se fizermos $y_i = x_i + 1$
- $x_1 + \cdots x_r = n$, $x_i \geq 0$ é igual a $y_1 + \cdots + y_r = n + r$, $y_i > 0$
- $$\binom{n+r-1}{r-1}$$

Voltando ao inicio

Um sistema de comunicação é formado por n antenas aparentemente idênticas que devem ser alinhadas em sequência. O sistema será funcional (i.e. capaz de receber qualquer sinal) se duas antenas consecutivas não apresentam defeito. Se m das n antenas apresentam defeito:

- n objetos idênticos (m defeituosos): $\dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$

Voltando ao inicio

Um sistema de comunicação é formado por n antenas aparentemente idênticas que devem ser alinhadas em sequência. O sistema será funcional (i.e. capaz de receber qualquer sinal) se duas antenas consecutivas não apresentam defeito. Se m das n antenas apresentam defeito:

- n objetos idênticos (m defeituosos): $\dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$
- $\underbrace{D \quad D \quad D \quad D \quad \cdots \quad D}_{\text{m-antenas defeituosas}}$

Voltando ao inicio

Um sistema de comunicação é formado por n antenas aparentemente idênticas que devem ser alinhadas em sequência. O sistema será funcional (i.e. capaz de receber qualquer sinal) se duas antenas consecutivas não apresentam defeito. Se m das n antenas apresentam defeito:

- n objetos idênticos (m defeituosos): $\dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$
- $\underbrace{D \quad D \quad D \quad D \quad \cdots \quad D}_{\text{m-antenas defeituosas}}$
- Colocamos as $n - m$ antenas não defeituosas nas $m + 1$ posições

$$x_1 \;\; D \;\; x_2 \;\; D \cdots x_m \;\; D \;\; x_{m+1}$$

Voltando ao inicio

Um sistema de comunicação é formado por n antenas aparentemente idênticas que devem ser alinhadas em sequência. O sistema será funcional (i.e. capaz de receber qualquer sinal) se duas antenas consecutivas não apresentam defeito. Se m das n antenas apresentam defeito:

- n objetos idênticos (m defeituosos): $\dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \binom{n}{m}$
- $\underbrace{D \quad D \quad D \quad D \quad \cdots \quad D}_{\text{m-antenas defeituosas}}$
- Colocamos as $n-m$ antenas não defeituosas nas $m+1$ posições

$$x_1 \;\; D \;\; x_2 \;\; D \cdots x_m \;\; D \;\; x_{m+1}$$

- Precisamos $x_1 + ... + x_{m+1} = n - m$ t.q $x_1, x_{m+1} \geq 0$ e $x_i > 0$ $i = 2, ..., m$

Voltando ao inicio

- Fazendo $y_1 = x_1 + 1$, $y_{m+1} = x_{m+1} + 1$, $y_i = x_i$ $(i = 2, ..., m)$

Voltando ao inicio

- Fazendo $y_1 = x_1 + 1$, $y_{m+1} = x_{m+1} + 1$, $y_i = x_i$ $(i = 2, ..., m)$
- Precisamos $y_1 + ... + y_{m+1} = n - m + 2$ t.q $y_i > 0$

Voltando ao inicio

- Fazendo $y_1 = x_1 + 1$, $y_{m+1} = x_{m+1} + 1$, $y_i = x_i$ $(i = 2, ..., m)$
- Precisamos $y_1 + ... + y_{m+1} = n - m + 2$ t.q $y_i > 0$
- Pela proposição 1

$$\binom{n - m + 2 - 1}{m + 1 - 1} = \binom{n - m + 1}{m}$$

Voltando ao inicio

- Fazendo $y_1 = x_1 + 1$, $y_{m+1} = x_{m+1} + 1$, $y_i = x_i$ $(i = 2, ..., m)$
- Precisamos $y_1 + ... + y_{m+1} = n - m + 2$ t.q $y_i > 0$
- Pela proposição 1

$$\binom{n - m + 2 - 1}{m + 1 - 1} = \binom{n - m + 1}{m}$$

Voltando ao inicio

- Fazendo $y_1 = x_1 + 1$, $y_{m+1} = x_{m+1} + 1$, $y_i = x_i$ $(i = 2, ..., m)$
- Precisamos $y_1 + ... + y_{m+1} = n - m + 2$ t.q $y_i > 0$
- Pela proposição 1

$$\binom{n - m + 2 - 1}{m + 1 - 1} = \binom{n - m + 1}{m}$$

Para $n = 5$ e $m = 2$

- $\binom{5}{2} = 10$
- $\binom{5-2+1}{2} = 6$

Voltando na primeira aula

O número de maneiras de formar grupos de r elementos de um conjunto com n elementos distintos:

	Ordem importa	Ordem não importa
Com reposição	n^r	$\binom{r+n-1}{n-1}$
Sem reposição	$n(n-1)\cdots(n-r+1)$	$\binom{n}{r}$

- Seja x_i o número de vezes que o elemento i é selecionado

Proposição 2: *O número de soluções inteiras da equação* $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ *com* $x_i \geq 0$ *é* $\binom{n+r-1}{r-1}$

Voltando na primeira aula

O número de maneiras de formar grupos de r elementos de um conjunto com n elementos distintos:

	Ordem importa	Ordem não importa
Com reposição	n^r	$\binom{r+n-1}{n-1}$
Sem reposição	$n(n-1)\cdots(n-r+1)$	$\binom{n}{r}$

- Seja x_i o número de vezes que o elemento i é selecionado
- Queremos $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, t.q $x_i \geq 0$

Proposição 2: *O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i \geq 0$ é $\binom{n+r-1}{r-1}$*

Voltando na primeira aula

O número de maneiras de formar grupos de r elementos de um conjunto com n elementos distintos:

	Ordem importa	Ordem não importa
Com reposição	n^r	$\binom{r+n-1}{n-1}$
Sem reposição	$n(n-1)\cdots(n-r+1)$	$\binom{n}{r}$

- Seja x_i o número de vezes que o elemento i é selecionado
- Queremos $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, t.q $x_i \geq 0$
- Pela Proposição 2 $\binom{r+n-1}{n-1}$

Proposição 2: *O número de soluções inteiras da equação $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ com $x_i \geq 0$ é $\binom{n+r-1}{r-1}$*

Resumo

	Tipo	Formula
Ordenar n objetos $\neq$'s	Permutação	$n!$
Escolher r de n objetos $\neq$'s (ordem importa, s/reposição)	Arranjo	$n(n-1)...(n-r+1)$
Escolher r de n objetos $\neq$'s (ordem importa, c/reposição)	Arranjo	n^r
Escolher r de n objetos $\neq$'s (ordem não importa, s/rep)	Combinação	$\binom{n}{r}$
Dividir n objetos idênticos em r grupos com $x_i \geq 0$	Soluções inteiras	$\binom{n+r-1}{r-1}$
Dividir n objetos idênticos em r grupos com $x_i > 0$	Soluções inteiras	$\binom{n-1}{r-1}$

Resumo

	Tipo	Formula
Dividir n objetos $\neq$'s em r grupos (grupo i tem tamanho n_i)	Coeficiente multinomial	$\binom{n!}{n_1,\cdots,n_r}$
Ordenar n objetos onde existem n_i objetos identicos do tipo i	Permutação com repetição	$\binom{n!}{n_1,\cdots,n_r}$

Leituras recomendadas

Leituras recomendadas

- Ross Cap. 1 (1.5 à 1.6)

Para praticar

- Resolver os exercícios correspondetes ao Cap 1 do Ross
- Lista 1 do gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/ipe/listas/