

# Modelos de Regressão e Previsão

MRLM: variáveis qualitativas e efeito de interação

Prof. Carlos Trucíos  
carlos.trucios@facc.ufrj.br  
ctruciosm.github.io

Faculdade de Administração e Ciências Contábeis  
Universidade Federal do Rio de Janeiro

## Aula 9

# Introdução

# Introdução

- Até agora temos trabalhando com variáveis explicativas de tipo quantitativo

# Introdução

- Até agora temos trabalhando com variáveis explicativas de tipo quantitativo
- No dia a dia, variáveis explicativas de tipo **qualitativo** podem também nos ajudar a explicar a variabilidade de  $y$

# Introdução

- Até agora temos trabalhando com variáveis explicativas de tipo quantitativo
- No dia a dia, variáveis explicativas de tipo **qualitativo** podem também nos ajudar a explicar a variabilidade de  $y$ 
  - sexo

# Introdução

- Até agora temos trabalhando com variáveis explicativas de tipo quantitativo
- No dia a dia, variáveis explicativas de tipo **qualitativo** podem também nos ajudar a explicar a variabilidade de  $y$ 
  - sexo
  - estado civil

# Introdução

- Até agora temos trabalhando com variáveis explicativas de tipo quantitativo
- No dia a dia, variáveis explicativas de tipo **qualitativo** podem também nos ajudar a explicar a variabilidade de  $y$ 
  - sexo
  - estado civil
  - raça

# Introdução

- Até agora temos trabalhando com variáveis explicativas de tipo quantitativo
- No dia a dia, variáveis explicativas de tipo **qualitativo** podem também nos ajudar a explicar a variabilidade de  $y$ 
  - sexo
  - estado civil
  - raça
  - religião



# Introdução

- Até agora temos trabalhando com variáveis explicativas de tipo quantitativo
- No dia a dia, variáveis explicativas de tipo **qualitativo** podem também nos ajudar a explicar a variabilidade de  $y$ 
  - sexo
  - estado civil
  - raça
  - religião
  - estado

# Introdução

- Até agora temos trabalhando com variáveis explicativas de tipo quantitativo
- No dia a dia, variáveis explicativas de tipo **qualitativo** podem também nos ajudar a explicar a variabilidade de  $y$ 
  - sexo
  - estado civil
  - raça
  - religião
  - estado
- Variáveis qualitativas no modelo não afetarão o processo de estimação mas levarão a uma interpretação diferente dos parâmetros do modelo.

# Introdução

- Até agora temos trabalhando com variáveis explicativas de tipo quantitativo
- No dia a dia, variáveis explicativas de tipo **qualitativo** podem também nos ajudar a explicar a variabilidade de  $y$ 
  - sexo
  - estado civil
  - raça
  - religião
  - estado
- Variáveis qualitativas no modelo não afetarão o processo de estimação mas levarão a uma interpretação diferente dos parâmetros do modelo.
- Como definimos a variável qualitativa nos ajudará na interpretação.

## Variável independente binária

## Variável independente binária (dummy)

Seja

$$wage = \beta_0 + \beta_1 female + \beta_2 educ + u$$

onde:

- $female = 1$  quando a pessoa for mulher
- $female = 0$  quando a pessoa for homem

0-1?

Variáveis binárias são recategorizadas como 0 e 1, essa codificação não é mandatoria mas ajuda na interpretação.

## Variável independente binária (dummy)

Seja

$$wage = \beta_0 + \beta_1 female + \beta_2 educ + u$$

onde:

- $female = 1$  quando a pessoa for mulher
- $female = 0$  quando a pessoa for homem

0-1?

Variáveis binárias são recategorizadas como 0 e 1, essa codificação não é mandatoria mas ajuda na interpretação.

- $\beta_1$  é a diferença no salário entre mulheres ( $female = 1$ ) e homens ( $female = 0$ ) quando todos os outros fatores permanecem fixos.

## Variável independente binária (dummy)

Seja

$$wage = \beta_0 + \beta_1 female + \beta_2 educ + u$$

onde:

- $female = 1$  quando a pessoa for mulher
- $female = 0$  quando a pessoa for homem

0-1?

Variáveis binárias são recategorizadas como 0 e 1, essa codificação não é mandatoria mas ajuda na interpretação.

- $\beta_1$  é a diferença no salário entre mulheres ( $female = 1$ ) e homens ( $female = 0$ ) quando todos os outros fatores permanecem fixos.
- $\beta_1$  nos dirá, por exemplo, se existe discriminação de genero no salário.

## Variável independente binária (dummy)

```
library(wooldridge)  
coef(lm(wage~female + educ, data = wage1))
```

```
## (Intercept)      female      educ  
##    0.6228168   -2.2733619    0.5064521
```

$$wage = 0.6228168 - 2.2733619female + 0.5064521educ$$



## Variável independente binária (dummy)

```
library(wooldridge)  
coef(lm(wage~female + educ, data = wage1))
```

```
## (Intercept)      female      educ  
##    0.6228168   -2.2733619    0.5064521
```

$$wage = 0.6228168 - 2.2733619female + 0.5064521educ$$

- Quando a pessoa for homem ( $female = 0$ ),

$$\hat{y} = 0.6228168 + 0.5064521 \text{ educ}$$

## Variável independente binária (dummy)

```
library(wooldridge)
coef(lm(wage~female + educ, data = wage1))
```

```
## (Intercept)      female      educ
##    0.6228168   -2.2733619    0.5064521
```

$$wage = 0.6228168 - 2.2733619female + 0.5064521educ$$

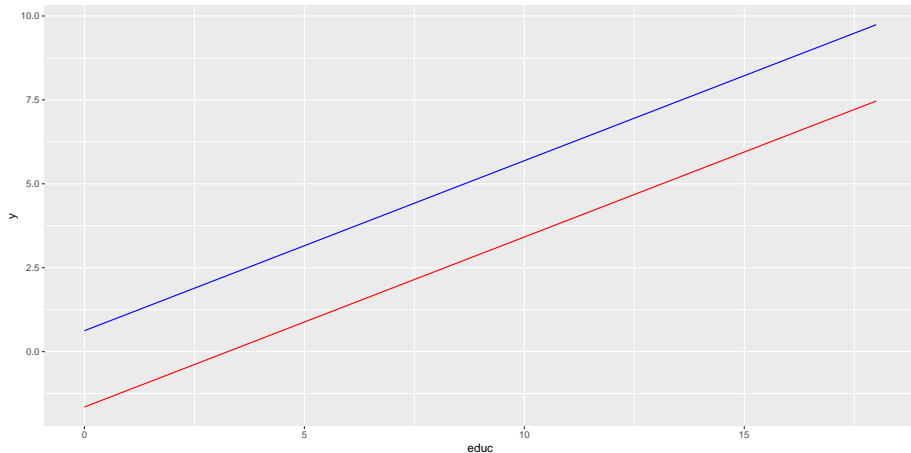
- Quando a pessoa for homem ( $female = 0$ ),

$$\hat{y} = 0.6228168 + 0.5064521 \text{ educ}$$

- Quando a pessoa for mulher ( $female = 1$ ),

$$\hat{y} = \underbrace{0.6228168 - 2.2733619}_{-1.650545} + 0.5064521 \text{ educ}$$

# Variável independente binária (dummy)



## Variável independente binária (dummy)

```
table(wage1$educ[wage1$female == 1]<5)
```

```
##  
## FALSE TRUE  
##    250    2
```

```
nrow(wage1)
```

```
## [1] 526
```

# Variável independente binária (dummy)

- Temos usado female (0 e 1)

# Variável independente binária (dummy)

- Temos usado female (0 e 1)
- E se incluirmos também outra variavel, digamos male (0 e 1)?

# Variável independente binária (dummy)

- Temos usado female (0 e 1)
- E se incluirmos também outra variavel, digamos male (0 e 1)?
  - redundante

# Variável independente binária (dummy)

- Temos usado female (0 e 1)
- E se incluirmos também outra variavel, digamos male (0 e 1)?
  - reduntante
  - $\text{female} + \text{male} = 1$



# Variável independente binária (dummy)

- Temos usado female (0 e 1)
- E se incluirmos também outra variavel, digamos male (0 e 1)?
  - reduntante
  - $\text{female} + \text{male} = 1$

## Variável independente binária (dummy)

- Temos usado female (0 e 1)
- E se incluirmos também outra variavel, digamos male (0 e 1)?
  - redundante
  - $\text{female} + \text{male} = 1$

```
wage1$male = ifelse(wage1$female == 0, 1, 0)
coef(lm(wage~female + male + educ, data = wage1))
```

## (Intercept)	female	male	educ
## 0.6228168	-2.2733619	NA	0.5064521

# Variável independente binária (dummy)

## Explicando a nota média no curso superior

$$colGPA = \beta_0 + \beta_1 PC + \beta_2 hsGPA + \beta_3 ACT + u$$

- $colGPA$  = nota média no curso superior
- $PC$  = 1 se a pessoa tem computador próprio e 0 c.c.
- $hsGPA$ : high school GPA
- $ACT$ : nota do teste de avaliação para ingresso no curso superior

## Variável independente binária (dummy)

```
summary(gpa1$colGPA)
```

##	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
##	2.200	2.800	3.000	3.057	3.300	4.000

```
summary(gpa1$hsGPA)
```

##	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
##	2.400	3.200	3.400	3.402	3.600	4.000

## Variável independente binária (dummy)

```
modelo = lm(colGPA~PC+hsGPA+ACT, data = gpa1)
round(summary(modelo)$coefficients, 5)
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	1.26352	0.33313	3.79292	0.00022
## PC	0.15731	0.05729	2.74596	0.00684
## hsGPA	0.44724	0.09365	4.77580	0.00000
## ACT	0.00866	0.01053	0.82199	0.41251

```
summary(modelo)$r.squared
```

```
## [1] 0.2193856
```

- Como interpretamos  $\hat{\beta}_{hsGPA}$ ?

## Variável independente binária (dummy)

```
modelo = lm(colGPA~PC+hsGPA+ACT, data = gpa1)
round(summary(modelo)$coefficients,5)
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	1.26352	0.33313	3.79292	0.00022
## PC	0.15731	0.05729	2.74596	0.00684
## hsGPA	0.44724	0.09365	4.77580	0.00000
## ACT	0.00866	0.01053	0.82199	0.41251

```
summary(modelo)$r.squared
```

```
## [1] 0.2193856
```

- Como interpretamos  $\hat{\beta}_{hsGPA}$ ?
- Como interpretamos  $\hat{\beta}_{PC}$ ?

## Variável independente binária (dummy)

Quando nossa variável dependente é  $\log(y)$  o  $\beta$  associado à variável *dummy* tem uma interpretação percentual.

## Variável independente binária (dummy)

Quando nossa variável dependente é  $\log(y)$  o  $\beta$  associado à variável *dummy* tem uma interpretação percentual.

```
modelo = lm(log(price) ~ log(lotsize) + log(sqrft) +  
            bdrms + colonial, data = hprice1)  
round(summary(modelo)$coefficients, 5)
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	-1.34959	0.65104	-2.07297	0.04128
## log(lotsize)	0.16782	0.03818	4.39539	0.00003
## log(sqrft)	0.70719	0.09280	7.62045	0.00000
## bdrms	0.02683	0.02872	0.93409	0.35297
## colonial	0.05380	0.04477	1.20153	0.23296



## Variável independente binária (dummy)

$$\widehat{\log(\text{price})} = -1.350 + 0.168\log(\text{lotsize}) + 0.707\log(\text{sqrft}) + 0.027\text{bdrms} + 0.054\text{colonial}$$

- lotsize: tamanho do lote em pés<sup>2</sup>
- sqrft: tamanho da casa em pés<sup>2</sup>
- bdrms: número de quartos
- colonial:=1 se a casa é de estilo colonial

1 metro = 3.2808 pés

## Variável independente binária (dummy)

$$\widehat{\log(\text{price})} = -1.350 + 0.168\log(\text{lotsize}) + 0.707\log(\text{sqrft}) + 0.027\text{bdrms} + 0.054\text{colonial}$$

### Como interpretamos... (ver aula 3)

- $\hat{\beta}_{\log(\text{lotsize})}$ : Quando o tamanho do lote aumenta em 1%, o preço do imóvel aumenta em 0.168%

## Variável independente binária (dummy)

$$\widehat{\log(\text{price})} = -1.350 + 0.168\log(\text{lotsize}) + 0.707\log(\text{sqrft}) + 0.027\text{bdrms} + 0.054\text{colonial}$$

### Como interpretamos... (ver aula 3)

- $\hat{\beta}_{\log(\text{lotsize})}$ : Quando o tamanho do lote aumenta em 1%, o preço do imóvel aumenta em 0.168%
- $\hat{\beta}_{\log(\text{sqrft})}$ : Quando o tamanho da casa aumenta em 1%, o preço do imóvel aumenta em 0.707%

## Variável independente binária (dummy)

$$\widehat{\log(\text{price})} = -1.350 + 0.168\log(\text{lotsize}) + 0.707\log(\text{sqrft}) + 0.027\text{bdrms} + 0.054\text{colonial}$$

### Como interpretamos... (ver aula 3)

- $\hat{\beta}_{\log(\text{lotsize})}$ : Quando o tamanho do lote aumenta em 1%, o preço do imóvel aumenta em 0.168%
- $\hat{\beta}_{\log(\text{sqrft})}$ : Quando o tamanho da casa aumenta em 1%, o preço do imóvel aumenta em 0.707%
- $\hat{\beta}_{\text{bdrms}}$ : A cada 1 quarto adicional, espera-se que a casa seja vendida por 2.7%(100 × 0.027) a mais

## Variável independente binária (dummy)

$$\widehat{\log(\text{price})} = -1.350 + 0.168\log(\text{lotsize}) + 0.707\log(\text{sqrft}) + 0.027\text{bdrms} + 0.054\text{colonial}$$

### Como interpretamos... (ver aula 3)

- $\hat{\beta}_{\log(\text{lotsize})}$ : Quando o tamanho do lote aumenta em 1%, o preço do imóvel aumenta em 0.168%
- $\hat{\beta}_{\log(\text{sqrft})}$ : Quando o tamanho da casa aumenta em 1%, o preço do imóvel aumenta em 0.707%
- $\hat{\beta}_{\text{bdrms}}$ : A cada 1 quarto adicional, espera-se que a casa seja vendida por 2.7%(100 × 0.027) a mais
- $\hat{\beta}_{\text{colonial}}$ : Um imóvel colonial espera-se ser vendido por 5.4%(100 × 0.054) a mais

# Variável independente binária (dummy)

## Outro exemplo

```
modelo = lm(log(wage)~ female + educ + exper +
            I(exper^2) + tenure + I(tenure^2), data = wage1)
round(summary(modelo)$coefficients,5)
```

##		Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
##	(Intercept)	0.41669	0.09893	4.21207	0.00003
##	female	-0.29651	0.03581	-8.28117	0.00000
##	educ	0.08020	0.00676	11.86823	0.00000
##	exper	0.02943	0.00498	5.91587	0.00000
##	I(exper^2)	-0.00058	0.00011	-5.43053	0.00000
##	tenure	0.03171	0.00685	4.63304	0.00000
##	I(tenure^2)	-0.00059	0.00023	-2.49336	0.01296

## Variável independente binária (dummy)

```
round(coef(modelo),5)
```

```
## (Intercept)      female      educ      exper  I(exper^2)
##      0.41669    -0.29651    0.08020    0.02943    -0.00058
## I(tenure^2)
##      -0.00059
```

- Mulheres ganham em média  $\approx 29.65\%$  a menos do que homens

## Variável independente binária (dummy)

```
round(coef(modelo),5)
```

```
## (Intercept)      female      educ      exper  I(exper^2)
##      0.41669    -0.29651    0.08020    0.02943    -0.00058
## I(tenure^2)
##      -0.00059
```

- Mulheres ganham em média  $\approx 29.65\%$  a menos do que homens
- Se quisermos não a percentagem aproximada, mas a exata?



## Variável independente binária (dummy)

```
round(coef(modelo),5)
```

```
## (Intercept)      female      educ      exper  I(exper^2)
##      0.41669    -0.29651    0.08020    0.02943    -0.00058
## I(tenure^2)
##      -0.00059
```

- Mulheres ganham em média  $\approx 29.65\%$  a menos do que homens
- Se quisermos não a percentagem aproximada, mas a exata?
- $\log(wage_F) - \log(wage_M) = \log(wage_F/wage_M) = -0.2965$

## Variável independente binária (dummy)

```
round(coef(modelo),5)
```

```
## (Intercept)      female      educ      exper  I(exper^2)
##      0.41669    -0.29651    0.08020    0.02943    -0.00058
## I(tenure^2)
##      -0.00059
```

- Mulheres ganham em média  $\approx 29.65\%$  a menos do que homens
- Se quisermos não a percentagem aproximada, mas a exata?
- $\log(wage_F) - \log(wage_M) = \log(wage_F/wage_M) = -0.2965$
- $wage_F/wage_M = \exp(-0.2965)$

# Variável independente binária (dummy)

```
round(coef(modelo),5)
```

```
## (Intercept)      female      educ      exper  I(exper^2)
##      0.41669    -0.29651     0.08020     0.02943    -0.00058
## I(tenure^2)
##      -0.00059
```

- Mulheres ganham em média  $\approx 29.65\%$  a menos do que homens
- Se quisermos não a percentagem aproximada, mas a exata?
- $\log(wage_F) - \log(wage_M) = \log(wage_F / wage_M) = -0.2965$
- $wage_F / wage_M = \exp(-0.2965)$
- $\underbrace{wage_F / wage_M - 1}_{\frac{wage_F - wage_M}{wage_M}} = \underbrace{\exp(-0.2965) - 1}_{-0.2565844}$

# Variável independente binária (dummy)

```
round(coef(modelo),5)
```

```
## (Intercept)      female      educ      exper  I(exper^2)
##      0.41669    -0.29651    0.08020    0.02943    -0.00058
## I(tenure^2)
##      -0.00059
```

- Mulheres ganham em média  $\approx 29.65\%$  a menos do que homens
- Se quisermos não a percentagem aproximada, mas a exata?
- $\log(wage_F) - \log(wage_M) = \log(wage_F / wage_M) = -0.2965$
- $wage_F / wage_M = \exp(-0.2965)$
- $\underbrace{wage_F / wage_M - 1}_{\frac{wage_F - wage_M}{wage_M}} = \underbrace{\exp(-0.2965) - 1}_{-0.2565844}$
- O salário da mulher é, em média, 25.65% menor.

# Variável independente com multiplas categorias

```
modelo = lm(log(wage)~ married + female + educ + exper +  
            I(exper^2) + tenure + I(tenure^2), data = wage1)  
round(summary(modelo)$coefficients,5)
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	0.41778	0.09887	4.22575	0.00003
## married	0.05292	0.04076	1.29850	0.19469
## female	-0.29018	0.03611	-8.03565	0.00000
## educ	0.07915	0.00680	11.63989	0.00000
## exper	0.02695	0.00533	5.06095	0.00000
## I(exper^2)	-0.00054	0.00011	-4.81350	0.00000
## tenure	0.03130	0.00685	4.56999	0.00001
## I(tenure^2)	-0.00057	0.00023	-2.44753	0.01471

# Variável independente com multiplas categorias

- *married* não diferencia entre homem e mulher

## Variável independente com multiplas categorias

- *married* não diferencia entre homem e mulher
- *female* não diferencia entre casado ou solteiro.

## Variável independente com multiplas categorias

- *married* não diferencia entre homem e mulher
- *female* não diferencia entre casado ou solteiro.
- Vamos criar novos grupos *homemcasado*, *mulhercasada*, *homemsolteiro* e *mulhersolteira*



## Variável independente com multiplas categorias

- *married* não diferencia entre homem e mulher
- *female* não diferencia entre casado ou solteiro.
- Vamos criar novos grupos *homemcasado*, *mulhercasada*, *homemsolteiro* e *mulhersolteira*

## Variável independente com multiplas categorias

- *married* não diferencia entre homem e mulher
- *female* não diferencia entre casado ou solteiro.
- Vamos criar novos grupos *homemcasado*, *mulhercasada*, *homemsolteiro* e *mulhersolteira*

```
wage1$homemcasado = ifelse(wage1$female == 0 &  
                           wage1$married == 1, 1, 0)  
wage1$mulhercasada = ifelse(wage1$female == 1 &  
                           wage1$married == 1, 1, 0)  
wage1$homemsolteiro = ifelse(wage1$female == 0 &  
                             wage1$married == 0, 1, 0)  
wage1$mulhersolteira = ifelse(wage1$female == 1 &  
                              wage1$married == 0, 1, 0)
```

## Variável independente com multiplas categorias

```
table(wage1$homemcasado+wage1$mulhercasada +  
      wage1$homemsolteiro + wage1$mulhersolteira)
```

```
##
```

```
##      1
```

```
## 526
```

## Variável independente com multiplas categorias

```
table(wage1$homemcasado+wage1$mulhercasada +  
      wage1$homemsolteiro + wage1$mulhersolteira)
```

```
##
```

```
##      1
```

```
## 526
```

- Se temos  $p$  categorias, incluímos  $p - 1$  variáveis *dummy*.

## Variável independente com multiplas categorias

```
modelo = lm(log(wage) ~ homemcasado + mulhercasada + mulhersolteira + educ + exper + I(exper^2) + tenure + I(tenure^2), data = wage1)
round(summary(modelo)$coefficients, 5)
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	0.32138	0.10001	3.21349	0.00139
## homemcasado	0.21268	0.05536	3.84188	0.00014
## mulhercasada	-0.19827	0.05784	-3.42813	0.00066
## mulhersolteira	-0.11035	0.05574	-1.97966	0.04827
## educ	0.07891	0.00669	11.78733	0.00000
## exper	0.02680	0.00524	5.11183	0.00000
## I(exper^2)	-0.00054	0.00011	-4.84710	0.00000
## tenure	0.02909	0.00676	4.30161	0.00002
## I(tenure^2)	-0.00053	0.00023	-2.30555	0.02153

## Variável independente ordinal

- Se temos poucas categorias podemos criar variáveis dummy

## Variável independente ordinal

- Se temos poucas categorias podemos criar variáveis dummy
- Quando a variável ordinal tem muitas categorias podemos trabalhar com ela como se fosse uma variável quantitativa ou recategoriza-la e então utilizar variáveis dummy

## Variável independente ordinal

- Se temos poucas categorias podemos criar variáveis dummy
- Quando a variável ordinal tem muitas categorias podemos trabalhar com ela como se fosse uma variável quantitativa ou recategoriza-la e então utilizar variáveis dummy
- Trade-off entre interpretabilidade e proporção da variável dependente sendo explicada.



## Efeito de interação

## Efeito de interação

- No exemplo anterior, tivemos que criar as variáveis *homemcasado*, *mulhercasada*, *homemsolteiro* e *mulhersolteira* pois as variáveis *married* e *female* separadas, não consideravam o efeito de alguma **interação**

## Efeito de interação

- No exemplo anterior, tivemos que criar as variáveis *homemcasado*, *mulhercasada*, *homemsolteiro* e *mulhersolteira* pois as variáveis *married* e *female* separadas, não consideravam o efeito de alguma **interação**
- Efeitos de interação são interessante quando suspeitamos que o efeito parcial de uma variável explicativa depende da magnitude de **outra** variável explicativa.

## Efeito de interação

- No exemplo anterior, tivemos que criar as variáveis *homemcasado*, *mulhercasada*, *homemsolteiro* e *mulhersolteira* pois as variáveis *married* e *female* separadas, não consideravam o efeito de alguma **interação**
- Efeitos de interação são interessante quando suspeitamos que o efeito parcial de uma variável explicativa depende da magnitude de **outra** variável explicativa.
- Analisaremos casos de efeitos de interação entre

# Efeito de interação

- No exemplo anterior, tivemos que criar as variáveis *homemcasado*, *mulhercasada*, *homemsolteiro* e *mulhersolteira* pois as variáveis *married* e *female* separadas, não consideravam o efeito de alguma **interação**
- Efeitos de interação são interessante quando suspeitamos que o efeito parcial de uma variável explicativa depende da magnitude de **outra** variável explicativa.
- Analisaremos casos de efeitos de interação entre
  - 2 variáveis qualitativas

## Efeito de interação

- No exemplo anterior, tivemos que criar as variáveis *homemcasado*, *mulhercasada*, *homemsolteiro* e *mulhersolteira* pois as variáveis *married* e *female* separadas, não consideravam o efeito de alguma **interação**
- Efeitos de interação são interessante quando suspeitamos que o efeito parcial de uma variável explicativa depende da magnitude de **outra** variável explicativa.
- Analisaremos casos de efeitos de interação entre
  - 2 variáveis qualitativas
  - 1 qualitativa e 1 quantitativa

# Efeito de interação

- No exemplo anterior, tivemos que criar as variáveis *homemcasado*, *mulhercasada*, *homemsolteiro* e *mulhersolteira* pois as variáveis *married* e *female* separadas, não consideravam o efeito de alguma **interação**
- Efeitos de interação são interessante quando suspeitamos que o efeito parcial de uma variável explicativa depende da magnitude de **outra** variável explicativa.
- Analisaremos casos de efeitos de interação entre
  - 2 variáveis qualitativas
  - 1 qualitativa e 1 quantitativa
  - 2 quantitativas

## Efeito de interação

```
modelo = lm(log(wage)~ married + female + educ + exper +  
            I(exper^2) + tenure + I(tenure^2), data = wage1)  
round(summary(modelo)$coefficients,5)
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	0.41778	0.09887	4.22575	0.00003
## married	0.05292	0.04076	1.29850	0.19469
## female	-0.29018	0.03611	-8.03565	0.00000
## educ	0.07915	0.00680	11.63989	0.00000
## exper	0.02695	0.00533	5.06095	0.00000
## I(exper^2)	-0.00054	0.00011	-4.81350	0.00000
## tenure	0.03130	0.00685	4.56999	0.00001
## I(tenure^2)	-0.00057	0.00023	-2.44753	0.01471



## Efeito de interação

```
modelo = lm(log(wage)~ married + female + married*female +  
educ + exper + I(exper^2) + tenure + I(tenure^2), data = wage1)  
round(summary(modelo)$coefficients,5)
```

##	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
## (Intercept)	0.32138	0.10001	3.21349	0.00139
## married	0.21268	0.05536	3.84188	0.00014
## female	-0.11035	0.05574	-1.97966	0.04827
## educ	0.07891	0.00669	11.78733	0.00000
## exper	0.02680	0.00524	5.11183	0.00000
## I(exper^2)	-0.00054	0.00011	-4.84710	0.00000
## tenure	0.02909	0.00676	4.30161	0.00002
## I(tenure^2)	-0.00053	0.00023	-2.30555	0.02153
## married:female	-0.30059	0.07177	-4.18846	0.00003

## Efeito de interação

```
coef(modelo)
```

```
##      (Intercept)          married          female          educ
##  0.3213780953    0.2126756752   -0.1103502102    0.0789102812
##      I(exper^2)          tenure      I(tenure^2) married:female
## -0.0005352452    0.0290875220   -0.0005331425   -0.3005930681
```

## Efeito de interação

```
coef(modelo)
```

```
##      (Intercept)          married          female          educ  
##  0.3213780953    0.2126756752   -0.1103502102    0.0789102812  
##      I(exper^2)          tenure      I(tenure^2) married:female  
## -0.0005352452    0.0290875220   -0.0005331425   -0.3005930681
```

- Qual é o *grupo base*? female = 0 e married = 0 (homem solteiro)

## Efeito de interação

```
coef(modelo)
```

```
##      (Intercept)          married          female          educ
##  0.3213780953    0.2126756752   -0.1103502102    0.0789102812
##      I(exper^2)          tenure      I(tenure^2) married:female
## -0.0005352452    0.0290875220   -0.0005331425   -0.3005930681
```

- Qual é o *grupo base*? female = 0 e married = 0 (homem solteiro)
- Uma mulher solteira (female = 1 e married = 0) ganha 11% menos do que um homem solteiro

## Efeito de interação

```
coef(modelo)
```

```
##      (Intercept)          married          female          educ
##  0.3213780953    0.2126756752   -0.1103502102    0.0789102812
##      I(exper^2)          tenure      I(tenure^2) married:female
## -0.0005352452    0.0290875220   -0.0005331425   -0.3005930681
```

- Qual é o *grupo base*? female = 0 e married = 0 (homem solteiro)
- Uma mulher solteira (female = 1 e married = 0) ganha 11% menos do que um homem solteiro
- Uma mulher casada (female = 1 e married = 1) ganha 19.8% (0.2126-0.1103-0.3005) menos do que um homem solteiro

## Efeito de interação

```
coef(modelo)
```

##	(Intercept)	married	female	educ
##	0.3213780953	0.2126756752	-0.1103502102	0.0789102812
##	I(exper^2)	tenure	I(tenure^2)	married:female
##	-0.0005352452	0.0290875220	-0.0005331425	-0.3005930681

- Qual é o *grupo base*? female = 0 e married = 0 (homem solteiro)
- Uma mulher solteira (female = 1 e married = 0) ganha 11% menos do que um homem solteiro
- Uma mulher casada (female = 1 e married = 1) ganha 19.8% (0.2126-0.1103-0.3005) menos do que um homem solteiro
- Um homem casado (female = 0 e married = 1) ganha 21% a mais do que um homem solteiro

## Efeito de interação

**Interação também pode acontecer entre uma dummy e uma quantitativa**

```
modelo = lm(log(wage)~female + educ + female*educ, data = wage1)
round(coef(modelo),5)
```

## (Intercept)	female	educ	female:educ
## 0.82595	-0.36006	0.07723	-0.00006

**Como mudam as retas de regressão?**

- Intercepto para o homem é 0.82595

## Efeito de interação

**Interação também pode acontecer entre uma dummy e uma quantitativa**

```
modelo = lm(log(wage)~female + educ + female*educ, data = wage1)
round(coef(modelo),5)
```

## (Intercept)	female	educ	female:educ
## 0.82595	-0.36006	0.07723	-0.00006

**Como mudam as retas de regressão?**

- Intercepto para o homem é 0.82595
- Intercepto para a mulher é  $0.82595 - 0.36006 = 0.46589$



## Efeito de interação

**Interação também pode acontecer entre uma dummy e uma quantitativa**

```
modelo = lm(log(wage)~female + educ + female*educ, data = wage1)
round(coef(modelo),5)
```

## (Intercept)	female	educ	female:educ
## 0.82595	-0.36006	0.07723	-0.00006

**Como mudam as retas de regressão?**

- Intercepto para o homem é 0.82595
- Intercepto para a mulher é  $0.82595 - 0.36006 = 0.46589$
- Inclinação para o homem é 0.07723

## Efeito de interação

**Interação também pode acontecer entre uma dummy e uma quantitativa**

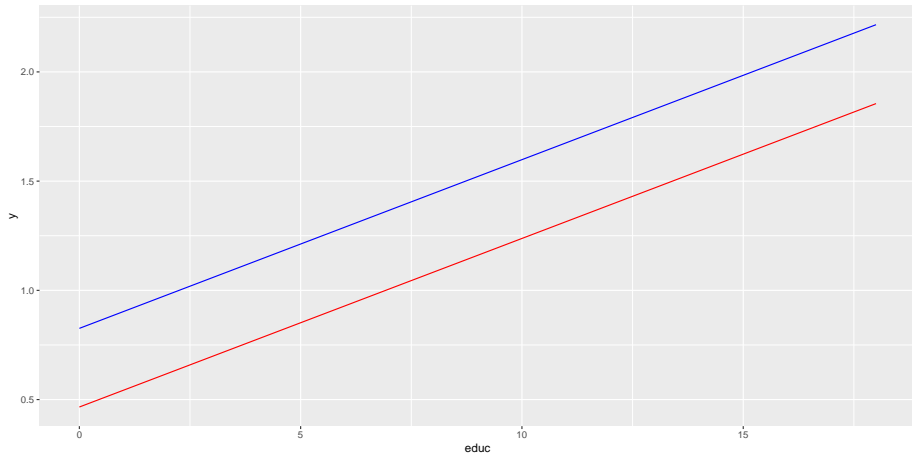
```
modelo = lm(log(wage)~female + educ + female*educ, data = wage1)
round(coef(modelo),5)
```

## (Intercept)	female	educ	female:educ
## 0.82595	-0.36006	0.07723	-0.00006

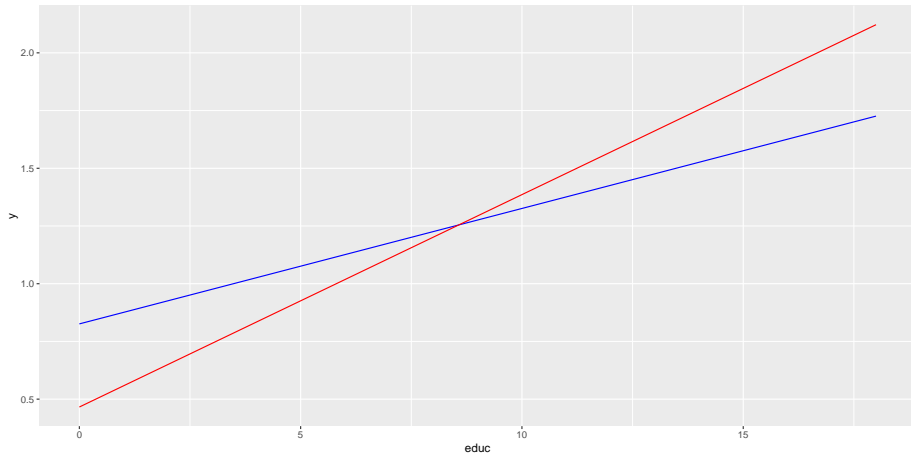
**Como mudam as retas de regressão?**

- Intercepto para o homem é 0.82595
- Intercepto para a mulher é  $0.82595 - 0.36006 = 0.46589$
- Inclinação para o homem é 0.07723
- Inclinação para a mulher é  $0.07723 - 0.00006 = 0.07717$

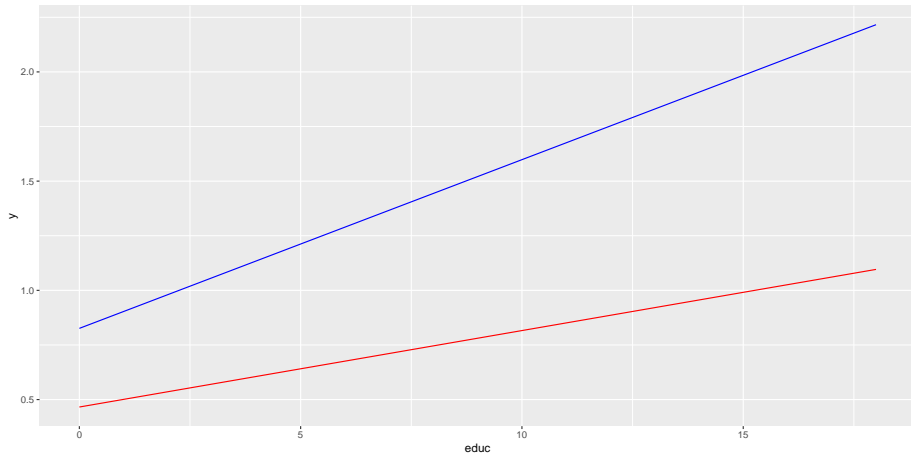
# Efeito de interação



# Efeito de interação



# Efeito de interação



# Efeito de interação

## Duas variáveis quantitativas

```
modelo = lm(log(wage)~female + educ + exper+ tenure + exper*tenure)
round(summary(modelo)$coefficients,5)
```

##		Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t )
##	(Intercept)	0.48172	0.10019	4.80820	0e+00
##	female	-0.29638	0.03660	-8.09802	0e+00
##	educ	0.08293	0.00689	12.03537	0e+00
##	exper	0.00765	0.00173	4.40802	1e-05
##	tenure	0.04772	0.00738	6.46207	0e+00
##	exper:tenure	-0.00097	0.00022	-4.47592	1e-05

```
summary(modelo)$r.squared
```

```
## [1] 0.4148152
```

## Efeito de interação

```
round(coef(modelo),5)
```

##	(Intercept)	female	educ	exper	tenure
##	0.48172	-0.29638	0.08293	0.00765	0.047

- $\frac{\Delta \log(wage)}{\Delta exper} = 0.00765 - 0.00097 tenure$

# Efeito de interação

```
round(coef(modelo),5)
```

##	(Intercept)	female	educ	exper	tenure
##	0.48172	-0.29638	0.08293	0.00765	0.047

- $\frac{\Delta \log(wage)}{\Delta exper} = 0.00765 - 0.00097 tenure$
- $\frac{\% \Delta wage}{\Delta exper} = \frac{\Delta \log(wage)}{\Delta exper} = 0.765 - 0.097 tenure$



# Efeito de interação

```
round(coef(modelo),5)
```

##	(Intercept)	female	educ	exper	tenure
##	0.48172	-0.29638	0.08293	0.00765	0.047

- $\frac{\Delta \log(wage)}{\Delta exper} = 0.00765 - 0.00097 tenure$
- $\frac{\% \Delta wage}{\Delta exper} = \frac{\Delta \log(wage)}{\Delta exper} = 0.765 - 0.097 tenure$
- $\% \Delta wage = (0.765 - 0.097 tenure) \Delta exper$

# Resumo

- Variáveis qualitativas podem ser incluídas no modelo
- O processo de estimação não muda
- A interpretação dos betas muda
- Quando temos uma variável categórica com  $p$  categorias, utilizamos  $p - 1$  *dummies*
- Quando a variável dependente  $\log(y)$  a variável *dummy* tem uma interpretação percentual
- Efeitos de interação precisam ser analisados cuidadosamente

# Leituras recomendadas

## Leituras recomendadas

- Wooldridge, Jeffrey M. *Introdução à Econometria: Uma abordagem moderna*. (2016). Cengage Learning. – **Cap 6.2 e Cap 7**
- Hansen, Bruce. *Econometrics*. (2020). – **Sec 7.14 e Sec 7.15**