Introdução à Probabilidade e Estatística

Distribuição conjunta

Carlos Trucíos
ctruciosm.github.io

Universidade Federal do ABC (UFABC)

Semana 9

Introdução

Introdução

- Até agora, estudamos modelos probabilisticos de uma única variável aleatório

Introdução

- Até agora, estudamos modelos probabilisticos de uma única variável aleatório
- Porém, um mesmo experimento aleatório pode envolver várias variáveis de interesse

Introdução

- Até agora, estudamos modelos probabilisticos de uma única variável aleatório
- Porém, um mesmo experimento aleatório pode envolver várias variáveis de interesse
- Por exemplo

Introdução

- Até agora, estudamos modelos probabilisticos de uma única variável aleatório
- Porém, um mesmo experimento aleatório pode envolver várias variáveis de interesse
- Por exemplo
  - X e Y podem ser altura e peso

Introdução

- Até agora, estudamos modelos probabilisticos de uma única variável aleatório
- Porém, um mesmo experimento aleatório pode envolver várias variáveis de interesse
- Por exemplo
  - X e Y podem ser altura e peso
  - X, Y e Z podem ser salário mensal, gasto mensal com educação e valor da fatura do cartão

Introdução

- Até agora, estudamos modelos probabilisticos de uma única variável aleatório
- Porém, um mesmo experimento aleatório pode envolver várias variáveis de interesse
- Por exemplo
  - X e Y podem ser altura e peso
  - X, Y e Z podem ser salário mensal, gasto mensal com educação e valor da fatura do cartão
  - X_1, X_2, X_3 e X_4 podem ser o total em compras feito com os cartões da bandeira Visa, MasterCard, American Express e Elo.

Introdução

- Até agora, estudamos modelos probabilisticos de uma única variável aleatório
- Porém, um mesmo experimento aleatório pode envolver várias variáveis de interesse
- Por exemplo
  - X e Y podem ser altura e peso
  - X, Y e Z podem ser salário mensal, gasto mensal com educação e valor da fatura do cartão
  - X_1, X_2, X_3 e X_4 podem ser o total em compras feito com os cartões da bandeira Visa, MasterCard, American Express e Elo.
  - X_1, X_2, X_3, X_4 e X_5 podem sexo, idade, IMC, quantidade de glóbulos brancos e quantidade total de colesterol no sangue.

Introdução

- Até agora, estudamos modelos probabilisticos de uma única variável aleatório
- Porém, um mesmo experimento aleatório pode envolver várias variáveis de interesse
- Por exemplo
  - X e Y podem ser altura e peso
  - X, Y e Z podem ser salário mensal, gasto mensal com educação e valor da fatura do cartão
  - X_1, X_2, X_3 e X_4 podem ser o total em compras feito com os cartões da bandeira Visa, MasterCard, American Express e Elo.
  - X_1, X_2, X_3, X_4 e X_5 podem sexo, idade, IMC, quantidade de glóbulos brancos e quantidade total de colesterol no sangue.
  - etc

Introdução

- Até agora, estudamos modelos probabilisticos de uma única variável aleatório
- Porém, um mesmo experimento aleatório pode envolver várias variáveis de interesse
- Por exemplo
    - X e Y podem ser altura e peso
    - X, Y e Z podem ser salário mensal, gasto mensal com educação e valor da fatura do cartão
    - X_1, X_2, X_3 e X_4 podem ser o total em compras feito com os cartões da bandeira Visa, MasterCard, American Express e Elo.
    - X_1, X_2, X_3, X_4 e X_5 podem sexo, idade, IMC, quantidade de glóbulos brancos e quantidade total de colesterol no sangue.
    - etc

Introdução

- Até agora, estudamos modelos probabilisticos de uma única variável aleatório
- Porém, um mesmo experimento aleatório pode envolver várias variáveis de interesse
- Por exemplo
    - X e Y podem ser altura e peso
    - X, Y e Z podem ser salário mensal, gasto mensal com educação e valor da fatura do cartão
    - X_1, X_2, X_3 e X_4 podem ser o total em compras feito com os cartões da bandeira Visa, MasterCard, American Express e Elo.
    - X_1, X_2, X_3, X_4 e X_5 podem sexo, idade, IMC, quantidade de glóbulos brancos e quantidade total de colesterol no sangue.
    - etc

O estudo desse conjunto de variáveis é o interesse desta aula

Distribuição conjunta

Distribuição conjunta: Caso discreto

Função de probabilidade conjunta

Sejam X e Y duas v.a. discretas definidas no espaço amostral S. A função de probabilidade conjunta $p(x, y)$ é definida por

$$p(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

- $p(x, y) \geq 0$
- $\sum_{x} \sum_{y} p(x, y) = 1$

Assim, para qualquer conjunto A de pares de valores (x, y),

$$P((X, Y) \in A) = \sum_{(x,y)} \sum_{\in A} p(x, y)$$

Distribuição conjunta: Caso discreto - Exemplo

1. A função de probabilidade conjunta das v.as X e Y é apresentada na seguinte Tabela

x / y	1	2	3	4
1	0.1	0.0	0.1	0.0
2	0.3	0.0	k	0.2
3	0.0	0.2	0.0	0.0

- Qual o valor de k?
- Calcule: $P(X \geq 2, Y \geq 3)$
- Calcule: $P(X = 2)$

Distribuição conjunta: Caso discreto - Exemplo

x / y	1	2	3	4
1	0.1	0.0	0.1	0.0
2	0.3	0.0	k	0.2
3	0.0	0.2	0.0	0.0

- Sabemos que $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1 >>> k = 0.1$

Distribuição conjunta: Caso discreto - Exemplo

x / y	1	2	3	4
1	0.1	0.0	0.1	0.0
2	0.3	0.0	k	0.2
3	0.0	0.2	0.0	0.0

- Sabemos que $\sum_x \sum_y p(x, y) = 1 >>> k = 0.1$
- $P(X \geq 2, Y \geq 3) = p(2,3) + p(2,4) + p(3,3) + p(3,4) = 0.1 + 0.2 + 0 + 0 = 0.3$

Distribuição conjunta: Caso discreto - Exemplo

x / y	1	2	3	4
1	0.1	0.0	0.1	0.0
2	0.3	0.0	k	0.2
3	0.0	0.2	0.0	0.0

- Sabemos que $\sum_x \sum_y p(x,y) = 1 >>> k = 0.1$
- $P(X \geq 2, Y \geq 3) = p(2,3) + p(2,4) + p(3,3) + p(3,4) = 0.1 + 0.2 + 0 + 0 = 0.3$
- $P(X = 2) = p(2,1) + p(2,2) + p(2,3) + p(2,4) = 0.3 + 0 + 0.1 + 0.2$

Distribuição conjunta: Caso discreto

Em muitas situaçãoes, temos a função de probabilidade conjunta, mas estamos interessados apenas na distribuição marginal de X ou Y.

Distribuição conjunta: Caso discreto

Em muitas situaçãoes, temos a função de probabilidade conjunta, mas estamos interessados apenas na distribuição marginal de X ou Y.

Função de probabilidade marginal

Dada uma função de probabilidade conjunta $p(x, y)$, a função de probabilidade marginal de X e Y, denotadas por $p_X(x)$ e $p_Y(y)$ são dadas por

$$p_X(x) = \sum_y p(x, y) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

e

$$p_Y(y) = \sum_x p(x, y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$$

Distribuição conjunta: Caso discreto - Exemplo

2. Obtenha as funções de probabildade marginal de X.

x / y	1	2	3	4
1	0.1	0.0	0.1	0.0
2	0.3	0.0	0.1	0.2
3	0.0	0.2	0.0	0.0

Distribuição conjunta: Caso discreto - Exemplo

2. Obtenha as funções de probabildade marginal de X.

x / y	1	2	3	4
1	0.1	0.0	0.1	0.0
2	0.3	0.0	0.1	0.2
3	0.0	0.2	0.0	0.0

$$p_X(x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

Distribuição conjunta: Caso discreto - Exemplo

2. Obtenha as funções de probabildade marginal de X.

x / y	1	2	3	4
1	0.1	0.0	0.1	0.0
2	0.3	0.0	0.1	0.2
3	0.0	0.2	0.0	0.0

$$p_X(x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$$

x	1	2	3
p(x)	0.2	0.6	0.2

Distribuição conjunta: Caso continuo

Função densidade conjunta

Sejam X e Y duas v.a.continuas definidas no espaço amostral S. A função densidade conjunta, $f(x,y)$ para essas duas v.as, é uma função f t.q.

- $f(x,y) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdx = 1$

Assim, para qualquer subconjunto A,

$$P((X,Y) \in A) = \int_A \int f(x,y)dxdx$$

Em particular, se $A = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, então

$$P((X,Y) \in A) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdx$$

Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo

3. Suponha que a função densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y, & \text{se } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

- Qual o valor de c?
- Calcule $P(X \geq Y)$

Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo

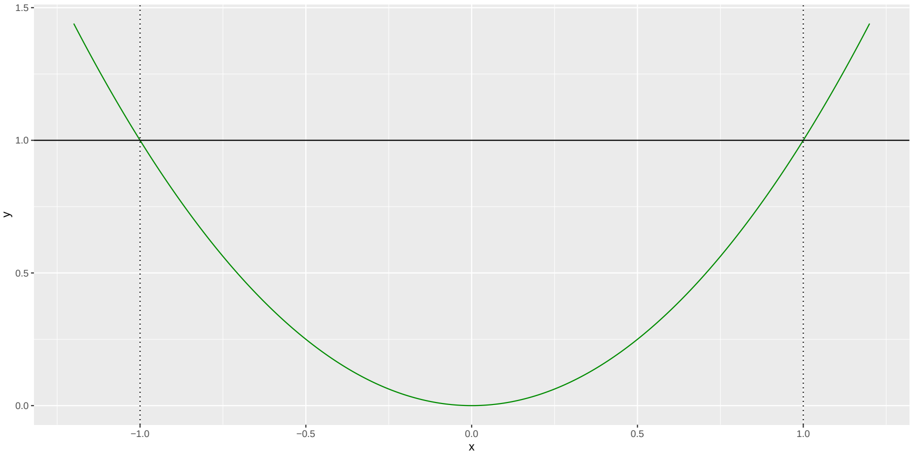
3. Suponha que a função densidade conjunta de X e Y é dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2y, & \text{se } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

- Qual o valor de c?
- Calcule $P(X \geq Y)$

Precisamos definir os limites de integração

Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo



Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdx = \int_{-1}^{1}\Big(\int_{x^2}^{1} cx^2 ydy\Big)dx = \int_{-1}^{1} cx^2\Big(\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1}\Big)dx$$

Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdx = \int_{-1}^{1}\Big(\int_{x^2}^{1} cx^2ydy\Big)dx = \int_{-1}^{1} cx^2\Big(\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1}\Big)dx$$

$$\int_{-1}^{1} cx^2\Big(\frac{1}{2}-\frac{x^4}{2}\Big)dx = \int_{-1}^{1}\frac{cx^2}{2}dx - \int_{-1}^{1}\frac{cx^6}{2}dx = \frac{cx^3}{6}\Big|_{-1}^{1} - \frac{cx^7}{14}\Big|_{-1}^{1}$$

Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdx = \int_{-1}^{1}\Big(\int_{x^2}^{1} cx^2 ydy\Big)dx = \int_{-1}^{1} cx^2\Big(\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1}\Big)dx$$

$$\int_{-1}^{1} cx^2\Big(\frac{1}{2}-\frac{x^4}{2}\Big)dx = \int_{-1}^{1}\frac{cx^2}{2}dx - \int_{-1}^{1}\frac{cx^6}{2}dx = \frac{cx^3}{6}\Big|_{-1}^{1} - \frac{cx^7}{14}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2c}{6} - \frac{2c}{14} = \frac{28c-12c}{14\times 6} = \frac{4c}{21}$$

Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdx = \int_{-1}^{1}\Big(\int_{x^2}^{1} cx^2 ydy\Big)dx = \int_{-1}^{1} cx^2\Big(\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1}\Big)dx$$

$$\int_{-1}^{1} cx^2\Big(\frac{1}{2}-\frac{x^4}{2}\Big)dx = \int_{-1}^{1}\frac{cx^2}{2}dx - \int_{-1}^{1}\frac{cx^6}{2}dx = \frac{cx^3}{6}\Big|_{-1}^{1} - \frac{cx^7}{14}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2c}{6} - \frac{2c}{14} = \frac{28c-12c}{14\times 6} = \frac{4c}{21}$$

Logo, $c = 21/4$

Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdx = \int_{-1}^{1}\Big(\int_{x^2}^{1} cx^2 ydy\Big)dx = \int_{-1}^{1} cx^2\Big(\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1}\Big)dx$$

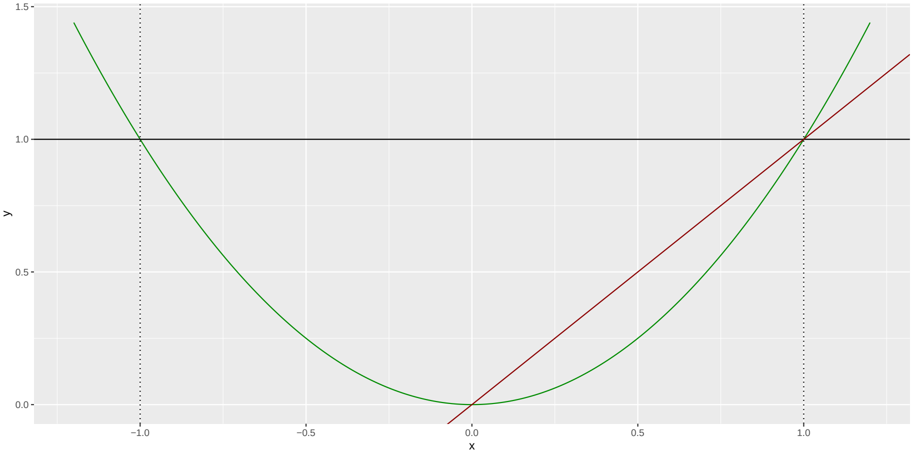
$$\int_{-1}^{1} cx^2\Big(\frac{1}{2} - \frac{x^4}{2}\Big)dx = \int_{-1}^{1}\frac{cx^2}{2}dx - \int_{-1}^{1}\frac{cx^6}{2}dx = \frac{cx^3}{6}\Big|_{-1}^{1} - \frac{cx^7}{14}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{2c}{6} - \frac{2c}{14} = \frac{28c - 12c}{14 \times 6} = \frac{4c}{21}$$

Logo, $c = 21/4$

Para calcular $P(X \geq Y)$, precisamos definir os limites de integração

Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo



Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo

Então, $P(X \geq Y) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{21}{4} x^2 y dy dx = \int_0^1 \frac{21}{4} x^2 \Big(\int_{x^2}^{x} y dy \Big) dx$

Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo

Então, $P(X \geq Y) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{21}{4}x^2 y dy dx = \int_0^1 \frac{21}{4}x^2 \Big(\int_{x^2}^{x} y dy \Big) dx$

$= \int_0^1 \frac{21}{4}x^2 \Big(\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{x} \Big) dx = \int_0^1 \frac{21}{8}x^4 - \frac{21}{8}x^6 dx$

Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo

Então, $P(X \geq Y) = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{21}{4} x^2 y dy dx = \int_0^1 \frac{21}{4} x^2 \Big(\int_{x^2}^{x} y dy \Big) dx$

$$= \int_0^1 \frac{21}{4} x^2 \Big(\frac{y^2}{2} \Big|_{x^2}^{x} \Big) dx = \int_0^1 \frac{21}{8} x^4 - \frac{21}{8} x^6 dx$$

$$= \frac{21}{8} \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 - \frac{21}{8} \frac{x^7}{7} \Big|_0^1 = \frac{21}{40} - \frac{21}{56} == \frac{336}{2240} = \frac{3}{20}$$

Distribuição conjunta: Caso continuo

Assim como no caso discreto, no caso continuo podemos tambem estar interessados na distribuição marginal de uma das variaveis aleatórias.

Distribuição conjunta: Caso continuo

Assim como no caso discreto, no caso continuo podemos tambem estar interessados na distribuição marginal de uma das variaveis aleatórias.

Função densidade marginal

Dada uma função densidade conjunta $f(x,y)$, a função de densidade marginal de X e Y, denotadas por $f_X(x)$ e $f_Y(y)$ são dadas por

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy, \text{ para } -\infty < x < \infty$$

e

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx, \text{ para } -\infty < y < \infty$$

Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo

4. Se

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y, & \text{se } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Distribuição conjunta: Caso continuo - Exemplo

4. Se

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y, & \text{se } x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Então,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = \int_{x^2}^{1} \frac{21}{4}x^2ydy = \frac{21}{4}x^2\left(\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{1}\right) = \frac{21}{8}x^2(1-x^4)$$

Variáveis aleatórias independentes

Variáveis aleatórias independentes

- Em muitas situçãoes, as informações sobre o valor observado de uma das duas variáveis X ou Y fornecem informação sobre o valor da outra variavel. Quando isto acontece, podemos dizer que existe uma dependência entre as duas variáveis

Variáveis aleatórias independentes

- Em muitas situçãoes, as informações sobre o valor observado de uma das duas variáveis X ou Y fornecem informação sobre o valor da outra variavel. Quando isto acontece, podemos dizer que existe uma dependência entre as duas variáveis
- Contudo, não sempre as informações sobre o valor observado de uma das duas variáveis X ou Y fornecem informação sobre o valor da outra.

Variáveis aleatórias independentes

- Em muitas situçãoes, as informações sobre o valor observado de uma das duas variáveis X ou Y fornecem informação sobre o valor da outra variavel. Quando isto acontece, podemos dizer que existe uma dependência entre as duas variáveis
- Contudo, não sempre as informações sobre o valor observado de uma das duas variáveis X ou Y fornecem informação sobre o valor da outra.

Variáveis aleatórias independentes

- Em muitas situçãoes, as informações sobre o valor observado de uma das duas variáveis X ou Y fornecem informação sobre o valor da outra variavel. Quando isto acontece, podemos dizer que existe uma dependência entre as duas variáveis
- Contudo, não sempre as informações sobre o valor observado de uma das duas variáveis X ou Y fornecem informação sobre o valor da outra.

Definição: V.as independentes

X e Y v.as. são independentes se, para dois conjuntos quaisquer A e B,

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Variáveis aleatórias independentes

- Em muitas situçãoes, as informações sobre o valor observado de uma das duas variáveis X ou Y fornecem informação sobre o valor da outra variavel. Quando isto acontece, podemos dizer que existe uma dependência entre as duas variáveis
- Contudo, não sempre as informações sobre o valor observado de uma das duas variáveis X ou Y fornecem informação sobre o valor da outra.

Definição: V.as independentes

X e Y v.as. são independentes se, para dois conjuntos quaisquer A e B,

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

A definição da origem aos critérios comumente utilizados nos livros texto

Variáveis aleatórias independentes

Critério para independência

As v.as X e Y são independêntes, sss, $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Variáveis aleatórias independentes

Critério para independência

As v.as X e Y são independêntes, sss, $\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

Alternativamente:

Critério para independência

As v.as X e Y são independêntes, sss, para cada par de (x, y),

- Se X e Y são continuas: $f(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$
- Se X e Y são discretas: $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)$

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

5. Duas medidas independentes referentes à chuva são tomadas durente um período de tempo na região metropolitana de SP. A função de densidade de cada medida é

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & \text{se } 0 \leq z \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

5. Duas medidas independentes referentes à chuva são tomadas durente um período de tempo na região metropolitana de SP. A função de densidade de cada medida é

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & \text{se } 0 \leq z \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

- Qual a função de densidade conjunta?
- Calcule $P(X \leq 0.5, Y > 0.3)$
- Calcule $P(X + Y \leq 1)$

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

- Como as duas medidas (X e Y) são independentes temos que

$$f(x,y) = f(x)f(y) = \begin{cases} 4xy, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

- Como as duas medidas (X e Y) são independentes temos que

$$f(x,y) = f(x)f(y) = \begin{cases} 4xy, & \text{se } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

- $P(X \leq 0.5, Y > 0.3) = \underbrace{\underbrace{P(X \leq 0.5)}_{\int_0^{0.5} 2xdx}}_{x^2\big|_0^{0.5}} \underbrace{\underbrace{P(Y > 0.3)}_{\int_{0.3}^{1} 2ydy}}_{y^2\big|_{0.3}^{1}} = 0.2275$

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

- $P(X+Y \leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} 4xydxdy = 4\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} ydy\Big)xdx$

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

- $P(X+Y\leq 1) = \int_0^1 \int_0^{1-x} 4xydxdy = 4\int_0^1 \Big(\int_0^{1-x} ydy\Big)xdx$
- $P(X+Y\leq 1) = \int_0^1 2x(1-x)^2dx = x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{4x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

6. A função de probabilidade conjunta de duas v.as X e Y é apresentada a seguir

x / y	1	2	3	4
1	0.06	0.02	0.04	0.08
2	0.15	0.05	0.10	0.20
3	0.09	0.03	0.06	0.12

São X e Y independentes?

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

- **Passo 1:** Calcular as funções de probabilidade marginais
- **Passo 2:** verificar de $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)\ \forall x, y$

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

- **Passo 1:** Calcular as funções de probabilidade marginais
- **Passo 2:** verificar de $p(x,y) = p_X(x)p_Y(y)\ \forall x, y$

x / y	1	2	3	4	Total
1	0.06	0.02	0.04	0.08	0.2
2	0.15	0.05	0.10	0.20	0.5
3	0.09	0.03	0.06	0.12	0.3
Total	0.30	0.10	0.20	0.40	1

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

- **Passo 1:** Calcular as funções de probabilidade marginais
- **Passo 2:** verificar de $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \ \forall x, y$

x / y	1	2	3	4	Total
1	0.06	0.02	0.04	0.08	0.2
2	0.15	0.05	0.10	0.20	0.5
3	0.09	0.03	0.06	0.12	0.3
Total	0.30	0.10	0.20	0.40	1

- Verificase que $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \ \forall x, y,$

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

- **Passo 1:** Calcular as funções de probabilidade marginais
- **Passo 2:** verificar de $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \; \forall x, y$

x / y	1	2	3	4	Total
1	0.06	0.02	0.04	0.08	0.2
2	0.15	0.05	0.10	0.20	0.5
3	0.09	0.03	0.06	0.12	0.3
Total	0.30	0.10	0.20	0.40	1

- Verificase que $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y) \; \forall x, y$,
- Logo X e Y são independentes.

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

7. A função de probabilidade conjunta de duas v.as X e Y é apresentada a seguir

x / y	1	2	3	4
1	0.1	0.0	0.1	0.0
2	0.3	0.0	0.1	0.2
3	0.0	0.2	0.0	0.0

São X e Y independentes?

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

- **Passo 1:** Calcular as funções de probabilidade marginais
- **Passo 2:** verificar de $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)\ \forall x, y$

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

- **Passo 1:** Calcular as funções de probabilidade marginais
- **Passo 2:** verificar de $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)\ \forall x, y$

x / y	1	2	3	4	Total
1	0.1	0.0	0.1	0.0	0.2
2	0.3	0.0	0.1	0.2	0.6
3	0.0	0.2	0.0	0.0	0.2
Total	0.4	0.2	0.2	0.2	1

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

- **Passo 1:** Calcular as funções de probabilidade marginais
- **Passo 2:** verificar de $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)\ \forall x, y$

x / y	1	2	3	4	Total
1	0.1	0.0	0.1	0.0	0.2
2	0.3	0.0	0.1	0.2	0.6
3	0.0	0.2	0.0	0.0	0.2
Total	0.4	0.2	0.2	0.2	1

São X e Y independentes? **Não!**

Variáveis aleatórias independentes: Exemplos

- **Passo 1:** Calcular as funções de probabilidade marginais
- **Passo 2:** verificar de $p(x, y) = p_X(x)p_Y(y)\ \forall x, y$

x / y	1	2	3	4	Total
1	0.1	0.0	0.1	0.0	0.2
2	0.3	0.0	0.1	0.2	0.6
3	0.0	0.2	0.0	0.0	0.2
Total	0.4	0.2	0.2	0.2	1

São X e Y independentes? **Não!**

$p(1, 1) = 0.1 \neq p_X(1)p_y(1) = 0.2 \times 0.4 = 0.08$

Variáveis aleatórias independentes:

As definições e criterios apresentados para X e Y são tambem validos para n v.as:

Variáveis aleatórias independentes:

As definições e criterios apresentados para X e Y são tambem validos para n v.as:

V.as Independentes

As v.as $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes, se para n conjuntos quaisquer $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$P(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n)$$

Variáveis aleatórias independentes:

As definições e criterios apresentados para X e Y são tambem validos para n v.as:

V.as Independentes

As v.as $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independentes, se para n conjuntos quaisquer $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$P(X_1 \in A_1, \cdots, X_n \in A_n) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n)$$

Os criterios de independência também são validos para n v.as.

Variáveis aleatórias independentes:

Critério para independência

As v.as $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independêntes, sss, $\forall\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

Variáveis aleatórias independentes:

Critério para independência

As v.as $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independêntes, sss, $\forall \; (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)\cdots F_{X_n}(x_n)$$

Alternativamente:

Critério para independência

As v.as $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são independêntes, sss, para cada $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,

- Caso continuo: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)$
- Caso discreto: $p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)\cdots p_{X_n}(x_n)$

Variáveis aleatórias independentes:

- O conceito de v.as independêntes é bastante útil e nos permite provar resultados interessantes, como os que veremos a seguir:

Teorema

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ v.as independentes t.q. $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$. Então

$$X_1 + \cdots + X_k \sim N(\sum_{i=1}^{k} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2})$$

Variáveis aleatórias independentes:

- O conceito de v.as independêntes é bastante útil e nos permite provar resultados interessantes, como os que veremos a seguir:

Teorema

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ v.as independentes t.q. $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$. Então

$$X_1 + \cdots + X_k \sim N(\sum_{i=1}^{k} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2})$$

Variáveis aleatórias independentes:

- O conceito de v.as independêntes é bastante útil e nos permite provar resultados interessantes, como os que veremos a seguir:

Teorema

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_k$ v.as independentes t.q. $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$. Então

$$X_1 + \cdots + X_k \sim N(\sum_{i=1}^{k} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2})$$

Corolario

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.as independentes t.q. $X_i \sim N(\mu, \sigma)$. Então

$$\bar{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

Leituras recomendadas

Leituras recomendadas

- Sheldon Ross (6.1–6.3)
- Jay L. Devore (Cap 5)

Para praticar

- Lista 7 do gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/ipe/listas/