Introdução à Probabilidade e Estatística

Teorema Central do Limite

Carlos Trucíos
ctruciosm.github.io

Universidade Federal do ABC (UFABC)

Semana 10

Introdução

Introdução

- Um dos resultados mais interessantes e utilizados na teoria de probabilidades

Introdução

- Um dos resultados mais interessantes e utilizados na teoria de probabilidades
- Anteriormente vimos que se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são *iid* com $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, então

$$\bar{X}_n \sim N\Big(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) \text{ ou equivalentemente } \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

Introdução

- Um dos resultados mais interessantes e utilizados na teoria de probabilidades
- Anteriormente vimos que se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são *iid* com $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, então

$$\bar{X}_n \sim N\Big(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) \text{ ou equivalentemente } \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$$

- Agora veremos que, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são *iid* com $E(X_1) = \mu$ e $V(X_1) = \sigma^2$, então

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim_{aprox} N(0, 1)$$

Introdução

- Um dos resultados mais interessantes e utilizados na teoria de probabilidades
- Anteriormente vimos que se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são *iid* com $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, então

$$\bar{X}_n \sim N\Big(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\Big) \text{ ou equivalentemente } \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$$

- Agora veremos que, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ são *iid* com $E(X_1) = \mu$ e $V(X_1) = \sigma^2$, então

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim_{aprox} N(0,1)$$

- Com isso, podemos aproximar probabilidades

TCL IID

TCL IID

Teorema

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (para n grande) v.as **independentes** e **identicamente distribuidas** com $E(X_1) = \mu$ e $V(X_i 1) = \sigma^2 < \infty$. Então,

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim_{aprox} N(0,1)$$

Isto implica que:

- $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim_{aprox} N(0,1)$
- $\lim_{n\to\infty} P\left(\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \leq a\right) = \Phi(a)$

TCL IID: Exemplo

1. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

TCL IID: Exemplo

1. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

- X_i : lado superior da moeda no i-ésimo lançamento (1: cara, 0:coroa)

TCL IID: Exemplo

1. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

- X_i : lado superior da moeda no i-ésimo lançamento (1: cara, 0:coroa)
- $X_i \sim bernoulli(p = 0.5)$

TCL IID: Exemplo

1. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

- X_i : lado superior da moeda no i-ésimo lançamento (1: cara, 0:coroa)
- $X_i \sim bernoulli(p = 0.5)$
- $E(X_1) = p = 0.5$

TCL IID: Exemplo

1. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

- X_i : lado superior da moeda no i-ésimo lançamento (1: cara, 0:coroa)
- $X_i \sim bernoulli(p = 0.5)$
- $E(X_1) = p = 0.5$
- $V(X_1) = pq = 0.25$

TCL IID: Exemplo

1. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

- X_i : lado superior da moeda no i-ésimo lançamento (1: cara, 0:coroa)
- $X_i \sim bernoulli(p = 0.5)$
- $E(X_1) = p = 0.5$
- $V(X_1) = pq = 0.25$
- TCL: $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim_{aprox} N(0, 1)$

TCL IID: Exemplo

1. Suponha que uma moeda honesta é lançada 900 vezes. Qual a probabilidade de obter mais de 495 caras?

- X_i : lado superior da moeda no i-ésimo lançamento (1: cara, 0:coroa)
- $X_i \sim bernoulli(p = 0.5)$
- $E(X_1) = p = 0.5$
- $V(X_1) = pq = 0.25$
- TCL: $\dfrac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \sim_{aprox} N(0, 1)$
- $P(\sum_{i=1}^{n} X_i > 495) = P(\underbrace{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - 900 \times 0.5}{\sqrt{0.25} \times \sqrt{900}}}_{Z} > \underbrace{\dfrac{495 - 900 \times 0.5}{\sqrt{0.25} \times \sqrt{900}}}_{3})$

TCL IID: Exemplo

```r
1-pbinom(495, 900, prob = 0.5)
```

```
## [1] 0.001200108
```

```r
1-pnorm(3)
```

```
## [1] 0.001349898
```

TCL IID: Exemplo

2. Suponha que selecionamos uma amostra aleatoria de tamanho $n = 12$ de uma $U[0, 1]$. Calcule $P(|\bar{X}_n - 1/2| \leq 0.1)$

TCL IID: Exemplo

2. Suponha que selecionamos uma amostra aleatoria de tamanho $n = 12$ de uma $U[0, 1]$. Calcule $P(|\bar{X}_n - 1/2| \leq 0.1)$

- $X_i \sim U[0, 1]$

TCL IID: Exemplo

2. Suponha que selecionamos uma amostra aleatoria de tamanho $n = 12$ de uma $U[0,1]$. Calcule $P(|\bar{X}_n - 1/2| \leq 0.1)$

- $X_i \sim U[0,1]$
- $E(X_1) = 1/2$

TCL IID: Exemplo

2. Suponha que selecionamos uma amostra aleatoria de tamanho $n = 12$ de uma $U[0,1]$. Calcule $P(|\bar{X}_n - 1/2| \leq 0.1)$

- $X_i \sim U[0,1]$
- $E(X_1) = 1/2$
- $V(X_1) = 1/12$

TCL IID: Exemplo

2. Suponha que selecionamos uma amostra aleatoria de tamanho $n = 12$ de uma $U[0,1]$. Calcule $P(|\bar{X}_n - 1/2| \leq 0.1)$

- $X_i \sim U[0,1]$
- $E(X_1) = 1/2$
- $V(X_1) = 1/12$
- TCL: $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim_{aprox} N(0,1)$

TCL IID: Exemplo

2. Suponha que selecionamos uma amostra aleatoria de tamanho $n = 12$ de uma $U[0,1]$. Calcule $P(|\bar{X}_n - 1/2| \leq 0.1)$

- $X_i \sim U[0,1]$
- $E(X_1) = 1/2$
- $V(X_1) = 1/12$
- TCL: $\dfrac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \sim_{aprox} N(0,1)$
- $P(|\bar{X}_n - 1/2| \leq 0.1) = P(-0.1 \leq \bar{X}_n - 1/2 \leq 0.1)$

TCL IID: Exemplo

$$P(\frac{-0.1\sqrt{12}}{1/\sqrt{12}} \leq \frac{\sqrt{12}(\bar{X}_n - 1/2)}{1/\sqrt{12}} \leq \frac{0.1\sqrt{12}}{1/\sqrt{12}})$$

TCL IID: Exemplo

$$P(\frac{-0.1\sqrt{12}}{1/\sqrt{12}} \leq \frac{\sqrt{12}(\bar{X}_n - 1/2)}{1/\sqrt{12}} \leq \frac{0.1\sqrt{12}}{1/\sqrt{12}})$$

$$P(\underbrace{-0.1 \times 12}_{-1.2} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{12}(\bar{X}_n - 1/2)}{1/\sqrt{12}}}_{Z} \leq \underbrace{0.1 \times 12}_{1.2})$$

TCL IID: Exemplo

$$P(\frac{-0.1\sqrt{12}}{1/\sqrt{12}} \leq \frac{\sqrt{12}(\bar{X}_n - 1/2)}{1/\sqrt{12}} \leq \frac{0.1\sqrt{12}}{1/\sqrt{12}})$$

$$P(\underbrace{-0.1 \times 12}_{-1.2} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{12}(\bar{X}_n - 1/2)}{1/\sqrt{12}}}_{Z} \leq \underbrace{0.1 \times 12}_{1.2})$$

```
pnorm(1.2)-pnorm(-1.2)
```

```
## [1] 0.7698607
```

TCL

TCL

- A versão apresentada do TCL é utilizada quando as variaveis são *iid* com $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2 < \infty$.

TCL

- A versão apresentada do TCL é utilizada quando as variaveis são *iid* com $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2 < \infty$.
- Se tivermos $X_1, \ldots, X_n$ **independentes** mas não identicamente distribuidas o TCL apresentado não poder ser aplicado (mesmo que $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2 < \infty$)

TCL

- A versão apresentada do TCL é utilizada quando as variaveis são *iid* com $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2 < \infty$.
- Se tivermos $X_1, \ldots, X_n$ **independentes** mas não identicamente distribuidas o TCL apresentado não poder ser aplicado (mesmo que $E(X) = \mu$ e $V(X) = \sigma^2 < \infty$)
- A. Liapounov em 1901 prova que ainda podemos ter uma versão do TCL sem precisar da suposição das v.as. de ser **identicamente distribuidas**

TCL

TCL (Liapounov)

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ v.as **independentes** com $E(X_i) = \mu_i$ e $V(X_i) = \sigma_i^2 < \infty$ com pelo menos um $\sigma_i^2 > 0$. Seja $S_n = X_1 + \ldots + X_n$ e $s_n^2 = \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2$, então

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{s_n^2}} \sim_{aprox} N(0, 1)$$

Desde que, existe $\delta > 0$, t.q.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E|X_i - \mu_i|^{2+\delta} = 0$$

TCL: Exemplo

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.as independentes, $X_i \sim U[-i, i]$. Mostre que,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{s_n} \sim_{aprox} N(0,1)$$

TCL: Exemplo

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.as independentes, $X_i \sim U[-i, i]$. Mostre que,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{s_n} \sim_{aprox} N(0,1)$$

Precisamos verificar as condições de Liapounov

- $E(X_i) = \frac{i - i}{2} = 0$

TCL: Exemplo

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.as independentes, $X_i \sim U[-i, i]$. Mostre que,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{s_n} \sim_{aprox} N(0,1)$$

Precisamos verificar as condições de Liapounov

- $E(X_i) = \frac{i - i}{2} = 0$
- $V(X_i) = \frac{(i+i)^2}{12} = \frac{i^2}{3} < \infty$

TCL: Exemplo

3. Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.as independentes, $X_i \sim U[-i, i]$. Mostre que,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{s_n} \sim_{aprox} N(0,1)$$

Precisamos verificar as condições de Liapounov

- $E(X_i) = \frac{i - i}{2} = 0$
- $V(X_i) = \frac{(i+i)^2}{12} = \frac{i^2}{3} < \infty$
- $s_n^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{18}$

TCL: Exemplo

Temos calculado s_n^2 mas de fato não precisamos calcular, apenas saber a ordem grandeza

Limite

$\forall\ \alpha > 0,\ \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha+1}$

- s_n^2 é da ordem n^3

TCL: Exemplo

Temos calculado s_n^2 mas de fato não precisamos calcular, apenas saber a ordem grandeza

Limite

$\forall\ \alpha > 0$, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}} \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha+1}$

- s_n^2 é da ordem n^3
- Falta verificar que: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n} E|X_i - \mu_i|^{2+\delta} = 0$

TCL: Exemplo

Escolhemos $\delta = 1$

- $E|X_i|^3 = \int_{-i}^{i} \frac{|x|^3}{2i} dx = \frac{1}{i} \int_0^i x^3 dx = \frac{1}{i} \frac{x^4}{4}\Big|_0^i = \frac{i^3}{4}$

TCL: Exemplo

Escolhemos $\delta = 1$

- $E|X_i|^3 = \int_{-i}^{i} \frac{|x|^3}{2i} dx = \frac{1}{i} \int_0^i x^3 dx = \frac{1}{i} \frac{x^4}{4}\Big|_0^i = \frac{i^3}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^3$ é da ordem n^4

TCL: Exemplo

Escolhemos $\delta = 1$

- $E|X_i|^3 = \int_{-i}^{i} \frac{|x|^3}{2i} dx = \frac{1}{i} \int_0^i x^3 dx = \frac{1}{i} \frac{x^4}{4}\Big|_0^i = \frac{i^3}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^3$ é da ordem n^4
- $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{s_n^{2+1}}}_{\text{ordem } n^{9/2}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^{2+1}}_{\text{ordem } n^4} = 0$

TCL: Exemplo

Escolhemos $\delta = 1$

- $E|X_i|^3 = \int_{-i}^{i} \frac{|x|^3}{2i} dx = \frac{1}{i} \int_0^i x^3 dx = \frac{1}{i} \frac{x^4}{4}\Big|_0^i = \frac{i^3}{4}$
- $\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^3$ é da ordem n^4
- $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{s_n^{2+1}}}_{\text{ordem } n^{9/2}} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} E|X_i|^{2+1}}_{\text{ordem } n^4} = 0$
- Então,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{s_n} \sim_{aprox} N(0, 1)$$

TCL

- Utilizando o TCL de Liapounov podemos provar que:

TCL

- Utilizando o TCL de Liapounov podemos provar que:

TCL v.as. Bernoulli

Sejam $X_1, \ldots, X_n$ v.as **independentes** t.q. $X_i \sim bernoulli(p_i)$. Então

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n p_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i q_i}} \sim_{aprox} N(0,1)$$

Desde que $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n p_i q_i = \infty$

TCL

Demostração

- $E(X_i) = p_i, \ V(X_i) = p_i q_i < \infty$

TCL

Demostração

- $E(X_i) = p_i$, $V(X_i) = p_i q_i < \infty$
- Provaremos que TCL Bernoulli implica que as condições do TCL Liapounov são satisfeitas

TCL

Demostração

- $E(X_i) = p_i, \; V(X_i) = p_i q_i < \infty$
- Provaremos que TCL Bernoulli implica que as condições do TCL Liapounov são satisfeitas
- $E(|X_i - p_i|^3) = (1-p_i)^3 \underbrace{p_i}_{P(X_i=1)} + p_i^3 \underbrace{q_i}_{P(X_i=0)} = p_i q_i (q_i^2 + p_i^2) \leq p_i q_i$

TCL

Demostração

- $E(X_i) = p_i, \; V(X_i) = p_i q_i < \infty$
- Provaremos que TCL Bernoulli implica que as condições do TCL Liapounov são satisfeitas
- $E(|X_i - p_i|^3) = (1-p_i)^3 \underbrace{p_i}_{P(X_i=1)} + p_i^3 \underbrace{q_i}_{P(X_i=0)} = p_i q_i (q_i^2 + p_i^2) \leq p_i q_i$
- $\dfrac{\sum_{i=1}^n E(|X_i - p_i|^3)}{\left(\sum_{i=1}^n p_i q_i\right)^{3/2}} \leq \dfrac{\sum_{i=1}^n p_i q_i}{\left(\sum_{i=1}^n p_i q_i\right)^{3/2}}$

TCL

Demostração

- $E(X_i) = p_i, \; V(X_i) = p_i q_i < \infty$
- Provaremos que TCL Bernoulli implica que as condições do TCL Liapounov são satisfeitas
- $E(|X_i - p_i|^3) = (1-p_i)^3 \underbrace{p_i}_{P(X_i=1)} + p_i^3 \underbrace{q_i}_{P(X_i=0)} = p_i q_i (q_i^2 + p_i^2) \leq p_i q_i$
- $\dfrac{\sum_{i=1}^n E(|X_i - p_i|^3)}{\left(\sum_{i=1}^n p_i q_i\right)^{3/2}} \leq \dfrac{\sum_{i=1}^n p_i q_i}{\left(\sum_{i=1}^n p_i q_i\right)^{3/2}}$
- Então, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{s_n^3} \sum_{i=1}^n E(|X_i - p_i|^3) = 0$

TCL

Demostração

- $E(X_i) = p_i, \ V(X_i) = p_i q_i < \infty$
- Provaremos que TCL Bernoulli implica que as condições do TCL Liapounov são satisfeitas
- $E(|X_i - p_i|^3) = (1-p_i)^3 \underbrace{p_i}_{P(X_i=1)} + p_i^3 \underbrace{q_i}_{P(X_i=0)} = p_i q_i (q_i^2 + p_i^2) \leq p_i q_i$
- $\dfrac{\sum_{i=1}^n E(|X_i - p_i|^3)}{\left(\sum_{i=1}^n p_i q_i\right)^{3/2}} \leq \dfrac{\sum_{i=1}^n p_i q_i}{\left(\sum_{i=1}^n p_i q_i\right)^{3/2}}$
- Então, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{s_n^3} \sum_{i=1}^n E(|X_i - p_i|^3) = 0$
- Logo, $\dfrac{\sum_{i=1}^n X_i - \sum_{i=1}^n p_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i q_i}} \sim_{aprox} N(0,1)$

TCL: Exemplo

4. Uma prova consiste de 99 questões. Suponha que a probabilidade de que um estudante responda corretamente a primeira pergunta é 0.99, a segunda, 0.98, (em geral para a i-ésima pergunta $p_i = 1 - i/100$). O estudante precisa responder corretamente pelo menos 60 questões para aprovar o examen. Assumindo independência entre as questões. Qual a probabilidade do estudante aprovar o exame?

TCL: Exemplo

4. Uma prova consiste de 99 questões. Suponha que a probabilidade de que um estudante responda corretamente a primeira pergunta é 0.99, a segunda, 0.98, (em geral para a i-ésima pergunta $p_i = 1 - i/100$). O estudante precisa responder corretamente pelo menos 60 questões para aprovar o examen. Assumindo independência entre as questões. Qual a probabilidade do estudante aprovar o exame?

- X_i : a i-ésima questão é respondida corretamente (Sim: 1, Não: 0)

TCL: Exemplo

4. Uma prova consiste de 99 questões. Suponha que a probabilidade de que um estudante responda corretamente a primeira pergunta é 0.99, a segunda, 0.98, (em geral para a i-ésima pergunta $p_i = 1 - i/100$). O estudante precisa responder corretamente pelo menos 60 questões para aprovar o examen. Assumindo independência entre as questões. Qual a probabilidade do estudante aprovar o exame?

- X_i : a i-ésima questão é respondida corretamente (Sim: 1, Não: 0)
- $X_i \sim bernoulli(p_i = 1 - i/100)$

TCL: Exemplo

4. Uma prova consiste de 99 questões. Suponha que a probabilidade de que um estudante responda corretamente a primeira pergunta é 0.99, a segunda, 0.98, (em geral para a i-ésima pergunta $p_i = 1 - i/100$). O estudante precisa responder corretamente pelo menos 60 questões para aprovar o examen. Assumindo independência entre as questões. Qual a probabilidade do estudante aprovar o exame?

- X_i : a i-ésima questão é respondida corretamente (Sim: 1, Não: 0)
- $X_i \sim bernoulli(p_i = 1 - i/100)$
- $E(X_i) = 1 - i/100$, $V(X_i) = (1 - i/100)(i/100) < \infty$

TCL: Exemplo

4. Uma prova consiste de 99 questões. Suponha que a probabilidade de que um estudante responda corretamente a primeira pergunta é 0.99, a segunda, 0.98, (em geral para a i-ésima pergunta $p_i = 1 - i/100$). O estudante precisa responder corretamente pelo menos 60 questões para aprovar o examen. Assumindo independência entre as questões. Qual a probabilidade do estudante aprovar o exame?

- X_i : a i-ésima questão é respondida corretamente (Sim: 1, Não: 0)
- $X_i \sim bernoulli(p_i = 1 - i/100)$
- $E(X_i) = 1 - i/100, \ V(X_i) = (1 - i/100)(i/100) < \infty$
- $\sum_{i=1}^{99} p_i = 99 - \dfrac{1}{100} \sum_{i=1}^{99} = 99 - \dfrac{1}{100} \dfrac{99 \times 100}{2} = 49.5$

TCL: Exemplo

- $\sum_{i=1}^{99} p_i q_i = \underbrace{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{99} i}_{49.5} - \frac{1}{100^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{99} i^2}_{\frac{99\times100\times199}{99}} = 16.665$

```
1-pnorm(2.572)
```

```
## [1] 0.005055645
```

TCL: Exemplo

- $\sum_{i=1}^{99} p_i q_i = \underbrace{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{99} i}_{49.5} - \frac{1}{100^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{99} i^2}_{\frac{99\times 100\times 199}{99}} = 16.665$
- Pelo TCL: $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} p_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i}} \sim_{aprox} N(0,1)$

```
1-pnorm(2.572)
```

```
## [1] 0.005055645
```

TCL: Exemplo

- $\sum_{i=1}^{99} p_i q_i = \underbrace{\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{99} i}_{49.5} - \frac{1}{100^2} \underbrace{\sum_{i=1}^{99} i^2}_{\frac{99\times 100\times 199}{99}} = 16.665$
- Pelo TCL: $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} p_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} p_i q_i}} \sim_{aprox} N(0,1)$
- Queremos: $P(\sum_{i=1}^{99} X_i \geq 60) = P(\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{99} -49.5}{\sqrt{16.665}} X_i}_{Z} \geq \underbrace{\frac{60-49.5}{\sqrt{16.665}}}_{2.572})$

```
1-pnorm(2.572)
```

```
## [1] 0.005055645
```

Leituras recomendadas

Leituras recomendadas

- Degroot & Schervish (6.3)
- Ross (8.3)

Para praticar

- Lista 9 do gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/ipe/listas/