Modelos de Regressão e Previsão

Análise de regressão com dados de séries temporais III

Prof. Carlos Trucíos
carlos.trucios@facc.ufrj.br
ctruciosm.github.io

Faculdade de Administração e Ciências Contábeis
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aula 14

Introdução

Introdução

Na aula 11, vimos que sob HST1–HST5, $\hat{\beta}$ é BLUE e sob HST1–HST6 podemos fazer inferência estatística como usual

- **HST1**: $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \cdots + \beta_k x_{tk} + u_t$, $t = 1, \ldots, n$
- **HST2**: Não existe colinearidade perfeita entre as variáveis independêntes e nenhuma das variáveis independentes é constante.
- **HST3**: $E(u_t|X) = 0$, $t = 1, \ldots, n$
- **HST4**: Homocedasticidade, $V(u_t|X) = V(u_t) = \sigma^2$, $t = 1, \ldots, n$
- **HST5**: $Corr(u_t, u_s|X) = 0$, $\forall t \neq s$
- **HST6**: Os erros u_t são independentes de X e $u_t \sim N(0, \sigma^2)$

Às vezes, alguma(s) das hipóteses HST1–HST6 pode(m) não ser satisfeita(s).

Introdução

Na última aula vimos que em grandes amostras, algumas das hipóteses podem ser modificadas e termos estimadores MQO **consistentes** e **assintóticamente normais**:

- **HST1'**: HST1 + $\{(X_t, y_t) \quad t = 1, 2, \ldots\}$ é estacionária e fracamente dependênte.
- **HST2'**: HST2 (colinearidade imperfeita)
- **HST3'**: $E(u_t|X_t) = 0$ (mais fraca que HST3: $E(u_t|X) = 0$)
- **HST4'**: $V(u_t|X_t) = \sigma^2$ (mais fraca que HST4: $V(u_t|X) = \sigma^2$)
- **HST5'**: $E(u_t u_s|X_t X_s) = 0 \; \forall \; t \neq s$

Introdução

Algumas séries temporais possuem erros correlacionados e/ou erros heteroscedasticos

Introdução

Algumas séries temporais possuem erros correlacionados e/ou erros heteroscedasticos

- Em geral, temos visto que se os erros são correlacionados temos um indicador de má-especificação do modelo e precisamos voltar ao processo de modelagem incluindo novas variáveis, fazendo transformações, incluindo outras formas funcionais, etc.

Introdução

Algumas séries temporais possuem erros correlacionados e/ou erros heteroscedasticos

- Em geral, temos visto que se os erros são correlacionados temos um indicador de má-especificação do modelo e precisamos voltar ao processo de modelagem incluindo novas variáveis, fazendo transformações, incluindo outras formas funcionais, etc.
- Contudo, algumaz vezes modelos estáticos e de defasagem distribuida finita podem apresentar erros correlacionados sem que isto signifique uma má-especificação

Introdução

Algumas séries temporais possuem erros correlacionados e/ou erros heteroscedasticos

- Em geral, temos visto que se os erros são correlacionados temos um indicador de má-especificação do modelo e precisamos voltar ao processo de modelagem incluindo novas variáveis, fazendo transformações, incluindo outras formas funcionais, etc.
- Contudo, algumaz vezes modelos estáticos e de defasagem distribuida finita podem apresentar erros correlacionados sem que isto signifique uma má-especificação
- É importante então conhecer as consequêcias e soluções da correlação serial dos erros.

Propriedades do MQO com erros correlacionados

Propriedades do MQO com erros correlacionados

Sob HST1–HST3, $\hat{\beta}$'s ainda são não viesados.

- **HST1**: $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \cdots + \beta_k x_{tk} + u_t, \; t = 1, \ldots, n$
- **HST2**: Não existe colinearidade perfeita entre as variáveis independêntes e nenhuma das variáveis independentes é constante.
- **HST3**: $E(u_t|X) = 0, \; t = 1, \ldots, n$

Propriedades do MQO com erros correlacionados

Sob HST1–HST3, $\hat{\beta}$'s ainda são não viesados.

- **HST1**: $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \cdots + \beta_k x_{tk} + u_t, \; t = 1, \ldots, n$
- **HST2**: Não existe colinearidade perfeita entre as variáveis independêntes e nenhuma das variáveis independentes é constante.
- **HST3**: $E(u_t|X) = 0, \; t = 1, \ldots, n$

Sob HST1'–HST3', $\hat{\beta}$'s ainda são consistentes.

- **HST1'**: HST1 + $\{(X_t, y_t) \quad t = 1, 2, \ldots\}$ é estacionária e fracamente dependênte.
- **HST2'**: HST2 (colinearidade imperfeita)
- **HST3'**: $E(u_t|X_t) = 0$ (mais fraca que HST3: $E(u_t|X) = 0$)

Propriedades do MQO com erros correlacionados

Na presença de **heterocedasticidade** e/ou **correlação serieal**, $\hat{\beta}$ não é mais BLUE e os erros padrão obtidos usualmente não são mais validos.

Propriedades do MQO com erros correlacionados

Na presença de **heterocedasticidade** e/ou **correlação serieal**, $\hat{\beta}$ não é mais BLUE e os erros padrão obtidos usualmente não são mais validos.

Se as séries temporais forem **estacionárias** e **fracamente dependentes**, mesmo na presença de correlação serial podemos ainda confiar os R^2's (mas se não forem estacionárias e fracamente dependentes não podemos confiar mais).

Correlação serial

Testes da correlação serial

Teste T de correlação serial AR(1) com $E(u_t|X) = 0$

- $E(u_t|X)$ implica que não podemos incluir variáveis defasadas de y_t no conjunto de variáveis explicativas.

Testes da correlação serial

Teste T de correlação serial AR(1) com $E(u_t|X) = 0$

- $E(u_t|X)$ implica que não podemos incluir variáveis defasadas de y_t no conjunto de variáveis explicativas.
- Uma das formas mais populares (e mais fáceis de se trabalhar) de correlação serial dos erros é quando $u_t \sim AR(1)$

Testes da correlação serial

Teste T de correlação serial AR(1) com $E(u_t|X) = 0$

- $E(u_t|X)$ implica que não podemos incluir variáveis defasadas de y_t no conjunto de variáveis explicativas.
- Uma das formas mais populares (e mais fáceis de se trabalhar) de correlação serial dos erros é quando $u_t \sim AR(1)$

Testes da correlação serial

Teste T de correlação serial AR(1) com $E(u_t|X) = 0$

- $E(u_t|X)$ implica que não podemos incluir variáveis defasadas de y_t no conjunto de variáveis explicativas.
- Uma das formas mais populares (e mais fáceis de se trabalhar) de correlação serial dos erros é quando $u_t \sim AR(1)$

Lembre-se

Se $u_t \sim AR(1)$, então

$$u_t = \phi u_{t-1} + e_t, \quad |\phi| < 1$$

em que e_t é iid com média zero de variância constante.

Testes da correlação serial

Teste T de correlação serial AR(1) com $E(u_t|X) = 0$

$$u_t = \phi u_{t-1} + e_t, \quad |\phi| < 1$$

- H_0 : não há correlação serial nos erros ($\phi = 0$).

Testes da correlação serial

Teste T de correlação serial AR(1) com $E(u_t|X) = 0$

$$u_t = \phi u_{t-1} + e_t, \quad |\phi| < 1$$

- H_0 : não há correlação serial nos erros ($\phi = 0$).
- Se u_t's fossem observados, fariamos uma regressão (sem intercepto) e aplicariamos o teste T. Contudo u_t's não são observados

Testes da correlação serial

Teste T de correlação serial AR(1) com $E(u_t|X) = 0$

$$u_t = \phi u_{t-1} + e_t, \quad |\phi| < 1$$

- H_0 : não há correlação serial nos erros ($\phi = 0$).
- Se u_t's fossem observados, fariamos uma regressão (sem intercepto) e aplicariamos o teste T. Contudo u_t's não são observados
- Podemos subtituir u_t por $\hat{u}_t$ e fazer o teste T. (em amostras grandes a distribuição da estatística T não é afetada por usarmos $\hat{u}_t$)

Testes da correlação serial

Teste de Durbin-Watson

Outro teste para verificar correlação serial do tipo AR(1), mas ele é construido sob as hipóteses do modelos linear clássico.

$$DW = \frac{\sum_{i=1}^{n}(\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_t^2} \approx 2(1 - \hat{\phi})$$

Quando fazemos testes de hipóteses, sempre comparamos a estatística de teste (neste caso DW) com algum quantil teórico da distribuição

- Infelizmente, a distribuição do teste de DW depende de muitos fatores (tamanho da amostra, número de variáveis explicativas, etc)

Testes da correlação serial

Teste de Durbin-Watson

Outro teste para verificar correlação serial do tipo AR(1), mas ele é construido sob as hipóteses do modelos linear clássico.

$$DW = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{u}_t^2} \approx 2(1 - \hat{\phi})$$

Quando fazemos testes de hipóteses, sempre comparamos a estatística de teste (neste caso DW) com algum quantil teórico da distribuição

- Infelizmente, a distribuição do teste de DW depende de muitos fatores (tamanho da amostra, número de variáveis explicativas, etc)
- Felizmente, o R calcula o p-valor pra gente.

Testes da correlação serial

Teste de Durbin-Watson

```
library(car)      #dataset mtcars
library(lmtest)   #dwtest
modelo = lm(mpg ~ disp+wt, data=mtcars)
dwtest(modelo, alternative="two.sided")
```

```
##
##  Durbin-Watson test
##
## data:  modelo
## DW = 1.2766, p-value = 0.02065
## alternative hypothesis: true autocorrelation is not 0
```

Testes da correlação serial

Teste da correlação serial AR(1) quando $E(u_t|X) \neq 0$

- Como $E(u_t|X) \neq 0$ os testes anteriores não podem ser utilizados.

Testes da correlação serial

Teste da correlação serial AR(1) quando $E(u_t|X) \neq 0$

- Como $E(u_t|X) \neq 0$ os testes anteriores não podem ser utilizados.
- $E(u_t|X) \neq 0$ implica que podemos ter como variável exlicativa y_t com alguma defasagem.

Testes da correlação serial

Teste da correlação serial AR(1) quando $E(u_t|X) \neq 0$

- Como $E(u_t|X) \neq 0$ os testes anteriores não podem ser utilizados.
- $E(u_t|X) \neq 0$ implica que podemos ter como variável exlicativa y_t com alguma defasagem.
- O teste também funciona quando $E(u_t|X) = 0$

Testes da correlação serial

Teste da correlação serial AR(1) quando $E(u_t|X) \neq 0$

- Como $E(u_t|X) \neq 0$ os testes anteriores não podem ser utilizados.
- $E(u_t|X) \neq 0$ implica que podemos ter como variável exlicativa y_t com alguma defasagem.
- O teste também funciona quando $E(u_t|X) = 0$

Testes da correlação serial

Teste da correlação serial AR(1) quando $E(u_t|X) \neq 0$

- Como $E(u_t|X) \neq 0$ os testes anteriores não podem ser utilizados.
- $E(u_t|X) \neq 0$ implica que podemos ter como variável exlicativa y_t com alguma defasagem.
- O teste também funciona quando $E(u_t|X) = 0$

Como proceder?

1. Fazer a regressão de y_t sobre $x_{t,1}, \ldots, x_{t,k}$ e obter $\hat{u}_t$.
2. Fazer a regressão de $\hat{u}_t$ sobre $x_{t,1}, \ldots, x_{t,k}, \hat{u}_{t-1}$
3. Fazer o teste T ($H_0 : \phi = 0$ vs. $H_1 : \phi \neq 0$)

Testes da correlação serial

Teste da correlação serial AR(p)

$$H_0 : \phi_1 = 0, \ldots, \phi_p = 0$$

Testes da correlação serial

Teste da correlação serial AR(p)

$$H_0 : \phi_1 = 0, \ldots, \phi_p = 0$$

Como proceder?

1. Fazer a regressão de y_t sobre $x_{1,t}, \ldots, x_{k,t}$ e obter $\hat{u}_t$.
2. Fazer a regressão de $\hat{u}_t$ sobre $x_{1,t}, \ldots, x_{k,t}, \hat{u}_{t-1}, \ldots, \hat{u}_{t-p}$.
3. Utilizar o teste F para testar H_0

O testes exige homocedasticidade, para usarmos o teste t/F precisamos fazer a correção para heterocedasticidade

Correção da correlação serial

- Se detectarmos correlação serial, as estatísticas habituais não são mais válidas e $\hat{\beta}$ não será mais BLUE.

Correção da correlação serial

- Se detectarmos correlação serial, as estatísticas habituais não são mais válidas e $\hat{\beta}$ não será mais BLUE.
- Se conhecermos ρ (a correlação), podemos aplicar o método de mínimos quadrados generalizados[1] (MQG) e $\hat{\beta}_{MQG}$ será BLUE.

[1] Consideramos que HST1–HST4 acontecem

Correção da correlação serial

- Se detectarmos correlação serial, as estatísticas habituais não são mais válidas e $\hat{\beta}$ não será mais BLUE.
- Se conhecermos ρ (a correlação), podemos aplicar o método de mínimos quadrados generalizados[1] (MQG) e $\hat{\beta}_{MQG}$ será BLUE.

[1] Consideramos que HST1–HST4 acontecem

Correção da correlação serial

- Se detectarmos correlação serial, as estatísticas habituais não são mais válidas e $\hat{\beta}$ não será mais BLUE.
- Se conhecermos ρ (a correlação), podemos aplicar o método de mínimos quadrados generalizados[1] (MQG) e $\hat{\beta}_{MQG}$ será BLUE.

$$\hat{\beta}_{MQG} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}Y$$

$$V(\hat{\beta}_{MQG}) = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}$$

[1] Consideramos que HST1–HST4 acontecem

Correção da correlação serial

- Se detectarmos correlação serial, as estatísticas habituais não são mais válidas e $\hat{\beta}$ não será mais BLUE.
- Se conhecermos ρ (a correlação), podemos aplicar o método de mínimos quadrados generalizados[1] (MQG) e $\hat{\beta}_{MQG}$ será BLUE.

$$\hat{\beta}_{MQG} = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}X'\Sigma^{-1}Y$$

$$V(\hat{\beta}_{MQG}) = (X'\Sigma^{-1}X)^{-1}$$

Quem é Σ?

[1] Consideramos que HST1–HST4 acontecem

Correção da correlação serial

Seja $Cov(u_t, u_{t-s}) = \sigma_u^2 \rho_s$, então

$$\Sigma = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Correção da correlação serial

Seja $Cov(u_t, u_{t-s}) = \sigma_u^2 \rho_s$, então

$$\Sigma = \sigma_u^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{n-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \rho_{n-1} & \rho_{n-2} & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Σ tem muitos parâmetros, então na prática precissamos definir alguma estrutura. Por exemplo, se $u_t \sim AR(1)$,

$$u_t = \phi u_{t-1} + e_t,$$

entao $\rho_s = \phi^s$

Correção da correlação serial

- Na prática, ρ é desconhecido então usaremos um estimador consistente[2] (esse método é conhecido como MQG Factível –MQGF)

[2] $\hat{\rho}$ é consistente se $plim_{n\rightarrow\infty}\hat{\rho} = \rho$

Correção da correlação serial

- Na prática, ρ é desconhecido então usaremos um estimador consistente[2] (esse método é conhecido como MQG Factível –MQGF)
- O *preço* de subtituir ρ por $\hat{\rho}$ é que $\hat{\beta}_{MQGF}$ não é mais BLUE. Contudo, é melhor do que $\hat{\beta}_{MQO}$

[2] $\hat{\rho}$ é consistente se $plim_{n \to \infty} \hat{\rho} = \rho$

Correção da correlação serial

- Na prática, ρ é desconhecido então usaremos um estimador consistente[2] (esse método é conhecido como MQG Factível –MQGF)
- O *preço* de subtituir ρ por $\hat{\rho}$ é que $\hat{\beta}_{MQGF}$ não é mais BLUE. Contudo, é melhor do que $\hat{\beta}_{MQO}$

[2] $\hat{\rho}$ é consistente se $plim_{n \rightarrow \infty} \hat{\rho} = \rho$

Correção da correlação serial

- Na prática, ρ é desconhecido então usaremos um estimador consistente[2] (esse método é conhecido como MQG Factível –MQGF)
- O *preço* de subtituir ρ por $\hat{\rho}$ é que $\hat{\beta}_{MQGF}$ não é mais BLUE. Contudo, é melhor do que $\hat{\beta}_{MQO}$

Exemplo

Seja o modelo:

$$fconvict_t = \beta_0 + \beta_1 tfr_t + \beta_2 partic_t + \beta_3 degrees_t + \beta_4 mconvict_t + u_t$$

[2] $\hat{\rho}$ é consistente se $plim_{n\rightarrow\infty}\hat{\rho} = \rho$

Correção da correlação serial: Exemplo

```r
library(nlme);  library(dplyr); glimpse(Hartnagel)
```

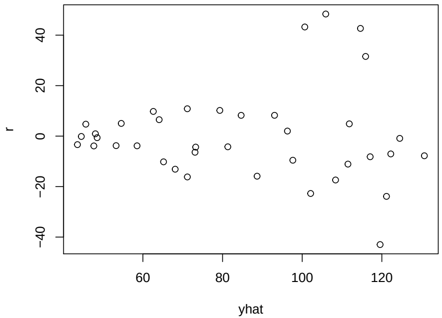
```
## Rows: 38
## Columns: 8
## $ year     <int> 1931, 1932, 1933, 1934, 1935, 1936, 1937, 19
## $ tfr      <int> 3200, 3084, 2864, 2803, 2755, 2696, 2646, 27
## $ partic   <int> 234, 234, 235, 237, 238, 240, 241, 242, 244,
## $ degrees  <dbl> 12.4, 12.9, 13.9, 13.6, 13.2, 13.2, 12.2, 12
## $ fconvict <dbl> 77.1, 92.9, 98.3, 88.1, 79.4, 91.0, 100.4, 1
## $ ftheft   <dbl> NA, NA, NA, NA, 20.4, 22.1, 22.4, 21.8, 21.1
## $ mconvict <dbl> 778.7, 745.7, 768.3, 733.6, 765.7, 816.5, 82
## $ mtheft   <dbl> NA, NA, NA, NA, 247.1, 254.9, 272.4, 285.8,
```

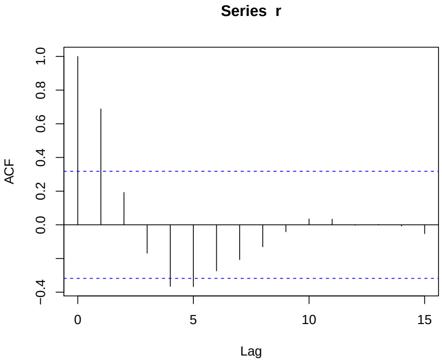
Correção da correlação serial: Exemplo

```
library(carData) #Hartnagel dataset
modelo.ols = lm(fconvict ~ tfr + partic + degrees + mconvict, dat
summary(modelo.ols)$coef
```

```
##                Estimate   Std. Error   t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) 127.63999736 59.957044218  2.128857 4.081885e-02
## tfr          -0.04656651  0.008032987 -5.796911 1.754618e-06
## partic        0.25341619  0.115131823  2.201096 3.483237e-02
## degrees      -0.21204914  0.211453792 -1.002816 3.232469e-01
## mconvict      0.05910466  0.045145314  1.309209 1.995067e-01
```

Correção da correlação serial: Exemplo





Correção da correlação serial: Exemplo

```r
library(lmtest)
dwtest(modelo.ols, alternative="two.sided")
```

```
##
##  Durbin-Watson test
##
## data:  modelo.ols
## DW = 0.61686, p-value = 1.392e-08
## alternative hypothesis: true autocorrelation is not 0
```

Correção da correlação serial: Exemplo

```
library(nlme)
modelo1 = gls(fconvict ~ tfr + partic + degrees + mconvict,
data=Hartnagel, correlation=corARMA(p=1), method = "ML")
summary(modelo1)$tTable
```

```
##                    Value   Std.Error     t-value    p-value
## (Intercept) 152.20280411 81.40130852  1.86978326 0.07040813
## tfr          -0.03169392  0.01532105 -2.06865208 0.04648719
## partic        0.05400323  0.12694397  0.42540999 0.67329934
## degrees       0.01046995  0.30896543  0.03388711 0.97317132
## mconvict      0.02665791  0.03895725  0.68428618 0.49857224
```

Correção da correlação serial: Exemplo

```
coef(modelo1)
```

```
##   (Intercept)          tfr       partic      degrees      mconvi
## 152.20280411  -0.03169392   0.05400323   0.01046995   0.02665
```

```
coef(modelo.ols)
```

```
##   (Intercept)          tfr       partic      degrees      mconvi
## 127.63999736  -0.04656651   0.25341619  -0.21204914   0.05910
```

Correção da correlação serial: Exemplo

```
modelo2 = gls(fconvict ~ tfr + partic + degrees + mconvict,
data=Hartnagel, correlation=corARMA(p=2), method = "ML")
modelo3 = gls(fconvict ~ tfr + partic + degrees + mconvict,
data=Hartnagel, correlation=corARMA(p=3), method = "ML")
```

Correção da correlação serial: Exemplo

```
anova(modelo1,modelo2)[2,"p-value"]
```

```
## [1] 0.002686708
```

```
anova(modelo2,modelo3)[2,"p-value"]
```

```
## [1] 0.8919052
```

- Escolhemos um modelos com $u_t \sim AR(2)$

Correção da correlação serial: Exemplo

```
round(coef(modelo2),5)
```

```
## (Intercept)         tfr      partic     degrees    mconvict
##    83.34028    -0.03999     0.28761    -0.20984     0.07569
```

```
round(coef(modelo.ols),5)
```

```
## (Intercept)         tfr      partic     degrees    mconvict
##   127.64000    -0.04657     0.25342    -0.21205     0.05910
```

Correção da correlação serial: Exemplo

```r
summary(modelo2)$tTable
```

```
##                   Value   Std.Error   t-value      p-value
## (Intercept) 83.3402784 59.470835291  1.401364 0.1704404420
## tfr         -0.0399870  0.009280671 -4.308632 0.0001390135
## partic       0.2876118  0.112013488  2.567653 0.0149558891
## degrees     -0.2098362  0.206580991 -1.015757 0.3171347348
## mconvict     0.0756860  0.035009033  2.161899 0.0379757100
```

Correção da correlação serial

Observações

- Quando $E(u_t|X) = 0$, MQGF não é consistente, então é melhor utilizar MQO e utilizar estimadores robustos do erro padrão.
- Quando $E(u_t|X) \neq 0$, podemos usar MQO e utilizar algum tipo de correção do estimador da variância dos $\hat{\beta}$

Heterocedasticidade

Heterocedasticidade

- Já discutimos como testar e corrigir heterocedasticidade em aplicações de corte transversal
- Mas heterocedsticidade também pode ocorrer num contexto de séries temporais
- $\hat{\beta}_{MQO}$ são ainda não viesados/consistentes
- Não podemos mais confiar nos erro padrão, consequentemente nos testes T e F

Teste

- Os erros u_t não devem ser correlacionados (se existir autocorrelação, em geral invalidamos o teste)
- Aplicamos o Teste de Breusch-Pagan ou o Teste de White.

Heterocedasticidade

```
library(wooldridge,lmtest)
modelo = lm(return ~ return_1, data = nyse)
dwtest(modelo)
```

```
##
##  Durbin-Watson test
##
## data:  modelo
## DW = 1.9969, p-value = 0.4829
## alternative hypothesis: true autocorrelation is greater than (
```

Heterocedasticidade

```
bptest(modelo, studentize = TRUE)
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  modelo
## BP = 28.879, df = 1, p-value = 7.705e-08
```

Se encontrarmos presença de heterocedasticidade, podemos usar testes robustos em relação à heterocedasticidade. Outra alternativa é utilizar o **Mínimos Quadrados Ponderados**

Heterocedasticidade

Em séries temporais com erros heterocedasticos é comum utilizarmos o modelo **ARCH** – Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, proposto por Robert Engle (1982).

Heterocedasticidade

Em séries temporais com erros heterocedasticos é comum utilizarmos o modelo **ARCH** – Autoregressive Conditional Heteroskedasticity, proposto por Robert Engle (1982).

ARCH(1)

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \nu_t$$

em que $E(\nu_t | u_{t-1}, u_{t-2}, \ldots) = 0$

Heterocedasticidade

```
u = residuals(modelo)
u_1 = dplyr::lag(u,1)
dadosarch = na.omit(data.frame(u2 = u^2,u2_1 = u_1^2))
arch = lm(u2~u2_1, data = dadosarch)
summary(arch)$coef
```

```
##              Estimate Std. Error  t value     Pr(>|t|)
## (Intercept) 2.9474329 0.44023418 6.695148 4.485047e-11
## u2_1        0.3370624 0.03594678 9.376707 9.705970e-20
```

Heterocedasticidade

- Erros ARCH não afetam a cosistencia dos $\hat{\beta}$, mas incluir o modelo ARCH na modelagem forencerão estimadores assintoticamente mais eficientes (menor variância).
- Para estimar o modelo com erros tipo ARCH podemos usar **mínimos quadrados ponderados** ou o **método de máxima verossimilhança**
- É possivel incluir no modelo de regressãoo erros heterocedasticos e com correlação serial, mas esse assunto está fora do escopo dessa matéria.

Leituras recomendadas

Leituras recomendadas

- Wooldridge, Jeffrey M. *Introdução à Econometria: Uma abordagem moderna*. (2016). Cengage Learning. – **Cap 12**
- John, Fox e Sanford, Weisberg. *Time-Series Regression and Generalized Least Squares in R*. Link