Modelos de Regressão e Previsão

MRLM: verificando as hipóteses

Prof. Carlos Trucíos
carlos.trucios@facc.ufrj.br
ctruciosm.github.io

Faculdade de Administração e Ciências Contábeis
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aula 10

Introdução

Introdução

O MRLM é contruido sob as seguintes hipóteses:

- HRLM1: Modelo Populacional Linear nos parâmetros
- HRLM2: Amostragem aleatória
- HRLM3: Colinearidade não perfeita
- HRLM4: Média condicional zero
- HRLM5: Variância constante
- HRLM6: Normalidade

O que acontece se algumas essas hipóteses não são verificadas?

Introdução

A não verificação das hipóteses pode levar a resultados instaveis, *i.e.* uma amostra diferente pode levar a resultados totalmente diferentes e inclusíve conclusões opostas.

Introdução

A não verificação das hipóteses pode levar a resultados instaveis, *i.e.* uma amostra diferente pode levar a resultados totalmente diferentes e inclusíve conclusões opostas.

- Os resultados padrão do ajuste do modelo como R^2, Teste-t, Teste-F não nos permitem saber se alguma das hipóteses foi violada.

Introdução

A não verificação das hipóteses pode levar a resultados instaveis, *i.e.* uma amostra diferente pode levar a resultados totalmente diferentes e inclusíve conclusões opostas.

- Os resultados padrão do ajuste do modelo como R^2, Teste-t, Teste-F não nos permitem saber se alguma das hipóteses foi violada.
- Os resíduos nos ajudarão nesta tarefa

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$

Introdução

A não verificação das hipóteses pode levar a resultados instaveis, *i.e.* uma amostra diferente pode levar a resultados totalmente diferentes e inclusíve conclusões opostas.

- Os resultados padrão do ajuste do modelo como R^2, Teste-t, Teste-F não nos permitem saber se alguma das hipóteses foi violada.
- Os resíduos nos ajudarão nesta tarefa

$$\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$$

- A análise dos resíduos é uma maneira eficaz de descobrir vários tipos de *inadequações* no modelo ajustado.

Tipos de resíduos

Tipos de resíduos

Standardized Residuals:

Sabemos que

$$\hat{u} = y - \underbrace{\hat{y}}_{X'\hat{\beta}} = y - X'\underbrace{(X'X)^{-1}X'y}_{\hat{\beta}} = (I - \underbrace{X'(X'X)^{-1}X'}_{H})y = (I - H)y$$

vamos *padronizar* cada resíduo pelo seu respectivo desvio padrão

Tipos de resíduos

Standardized Residuals:

Sabemos que

$$\hat{u} = y - \underbrace{\hat{y}}_{X'\hat{\beta}} = y - X'\underbrace{(X'X)^{-1}X'y}_{\hat{\beta}} = (I - \underbrace{X'(X'X)^{-1}X'}_{H})y = (I-H)y$$

vamos *padronizar* cada resíduo pelo seu respectivo desvio padrão

$$V(\hat{u}_i|X) = V(\underbrace{[0\ldots1\ldots0]}_{\mathbb{I}_i}\hat{u}|X) = \mathbb{I}_i\underbrace{V(\hat{u}|X)}_{(I-H)\sigma^2}\mathbb{I}_i' = \sigma^2(1-h_{ii})$$

Tipos de resíduos

Standardized Residuals:

Sabemos que

$$\hat{u} = y - \underbrace{\hat{y}}_{X'\hat{\beta}} = y - X'\underbrace{(X'X)^{-1}X'y}_{\hat{\beta}} = (I - \underbrace{X'(X'X)^{-1}X'}_{H})y = (I-H)y$$

vamos *padronizar* cada resíduo pelo seu respectivo desvio padrão

$$V(\hat{u}_i|X) = V(\underbrace{[0\ldots 1 \ldots 0]}_{\mathbb{I}_i}\hat{u}|X) = \mathbb{I}_i \underbrace{V(\hat{u}|X)}_{(I-H)\sigma^2}\mathbb{I}_i' = \sigma^2(1-h_{ii})$$

$$r_i = \frac{\hat{u}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(1-h_{ii})}}$$

Tipos de resíduos

Studentized Residuals

Seja $\hat{y}_{(i)}$ o valor estimado de y_i utilizando todas as observações menos a i-ésima.

$$\hat{u}_{(i)} = y_i - \hat{y}_{(i)} = \frac{\hat{u}_i}{1 - h_{ii}}$$

Se dividirmos pelo desvio padrão de $\hat{u}_{(i)}$, temos:

$$t_i = \frac{\hat{u}_i}{\sqrt{S^2_{(i)}(1 - h_{ii})}} = r_i\sqrt{\frac{n - k - 2}{n - k - 1 - r_i^2}}$$

onde $S^2_{(i)} = \frac{(n-k-1)\hat{\sigma}^2 - \hat{u}_i^2/(1-h_{ii})}{n-k-2}$

Tipos de resíduos

Resíduo	Notação	Formula
Standardized	r_i	$\dfrac{\hat{u}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(1-h_{ii})}}$
Studentized	t_i	$\dfrac{\hat{u}_i}{\sqrt{S^2_{(i)}(1-h_{ii})}}$

Studentized é preferido.

Tipos de resíduos

Resíduo	Notação	Formula
Standardized	r_i	$\dfrac{\hat{u}_i}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(1-h_{ii})}}$
Studentized	t_i	$\dfrac{\hat{u}_i}{\sqrt{S^2_{(i)}(1-h_{ii})}}$

Studentized é preferido.

Com os resíduos vamos identificar **outliers** ou **valores extremos** e as hipóteses do **modelo linear clássico**

Tipos de resíduos

```
library(wooldridge)
modelo = lm(log(bwght) ~ npvis + I(npvis^2), data = bwght2)
uhat = residuals(modelo)
r = rstandard(modelo)
t = rstudent(modelo)
```

Gráfico de resíduos

Gráfico para detecção de outliers/extremos

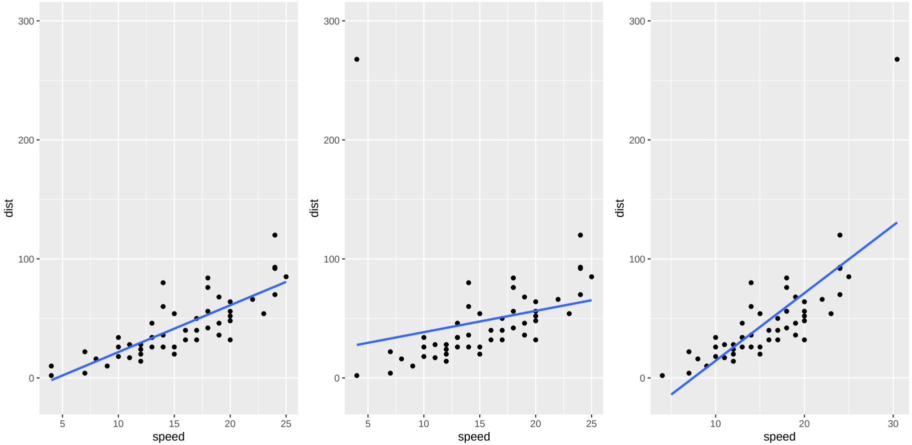


Gráfico para detecção de outliers/extremos: residuais vs yhat

- Faremos o gráfico dos valores estimados $\hat{y}$ (eixo X) vs. os resíduais (eixo Y)
- Se algum ponto está muito afastado dos outros, ele será um possível outliers
- Faremos os gráficos utilizando os três tipos de resíduos

Mas os *Studentized Residuals* são preferidos quando fazemos análise de resíduos.

Gráfico para detecção de outliers/extremos: residuais vs yhat

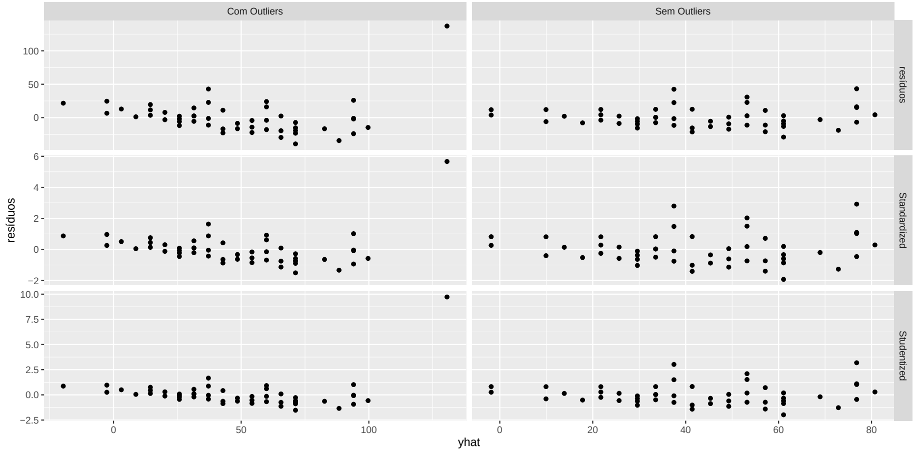


Gráfico de probabilidade Normal

- Quando precisamos verificar a hipótese de normalidade
- Nos permite identificar se as caudas são mais pessadas do que as caudas da distribuição Normal
- Nos permite identificar asssimetrias
- Sob Normalidade, esperamos que os pontos estejam sobre a reta

```
qqnorm(normal)
qqline(normal)
```

Gráfico de probabilidade Normal

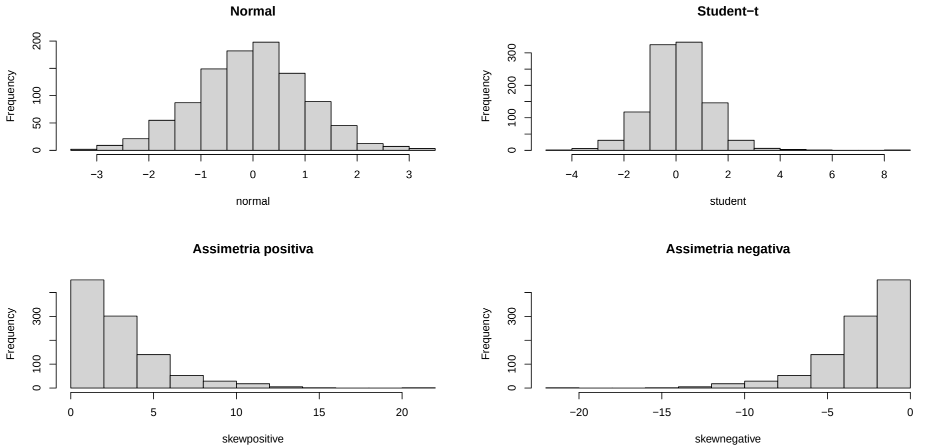


Gráfico de probabilidade Normal

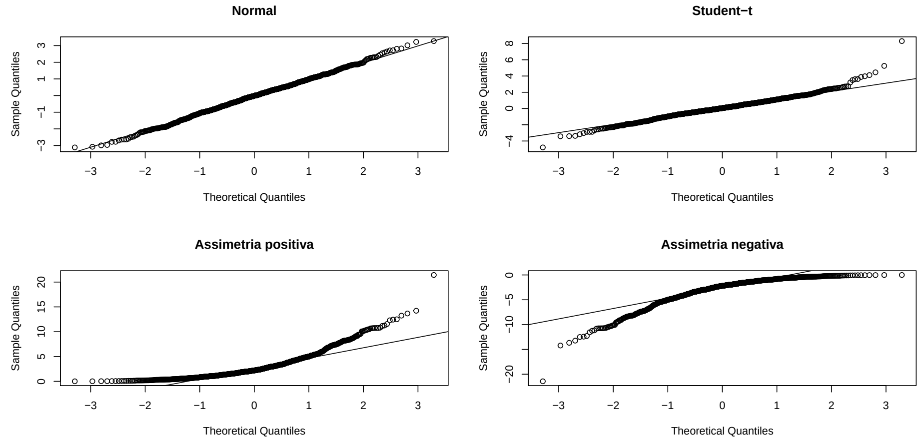
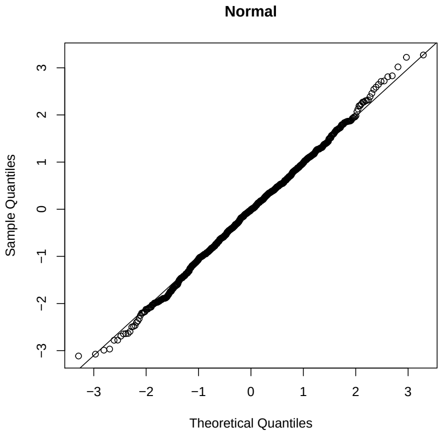
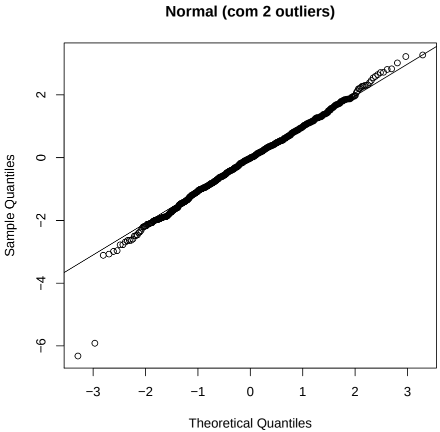
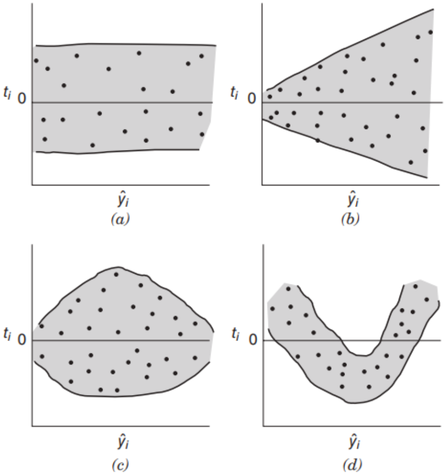


Gráfico de probabilidade Normal: Detecção de outliers





Gráficos para verificar homecasticidade e forma funcional



Gráficos para verificar homecasticidade e forma funcional

Preferivelmente utilizamos os *Studentized Residuals*

$$t_i = \frac{\hat{u}_i}{\sqrt{S^2_{(i)}(1 - h_{ii})}},$$

onde $S^2_{(i)} = \frac{(n-p)\hat{\sigma}^2 - \hat{u}_i^2/(1-h_{ii})}{n-p-1}$

- (a): modelo aparentemente ok
- (b) e (c): indicam que a variância dos erros não é constante
- (d): não linearidade

Cuidado!

O grafico é dos residuos vs $\hat{y}$ (não y)

Gráfico de sequencia dos resíduos e ACF

- Até agora vimos gráficos que nos ajudam a detectar heterocedasticidade, não linearidade, normalidade.

Gráfico de sequencia dos resíduos e ACF

- Até agora vimos gráficos que nos ajudam a detectar heterocedasticidade, não linearidade, normalidade.
- Agora veremos dois gráficos que nos darão uma ideia sobre a correlação dos resíduos

Gráfico de sequencia dos resíduos e ACF

- Até agora vimos gráficos que nos ajudam a detectar heterocedasticidade, não linearidade, normalidade.
- Agora veremos dois gráficos que nos darão uma ideia sobre a correlação dos resíduos
- Grafico de sequência (série temporal) e função de autocorrelação

Gráfico de sequencia dos resíduos e ACF

- Até agora vimos gráficos que nos ajudam a detectar heterocedasticidade, não linearidade, normalidade.
- Agora veremos dois gráficos que nos darão uma ideia sobre a correlação dos resíduos
- Grafico de sequência (série temporal) e função de autocorrelação

Gráfico de sequencia dos resíduos e ACF

- Até agora vimos gráficos que nos ajudam a detectar heterocedasticidade, não linearidade, normalidade.
- Agora veremos dois gráficos que nos darão uma ideia sobre a correlação dos resíduos
- Grafico de sequência (série temporal) e função de autocorrelação

Lembre-se, sob HMRLM2, os erros são não correlacionados (na verdade eles são independentes), então esperamos também que os resíduos sejam não correlacionados.

Gráfico de sequencia dos resíduos e ACF

```
ts.plot(normal)
```

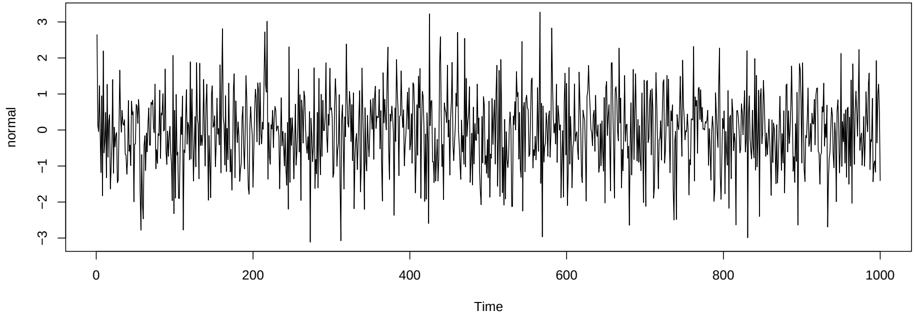
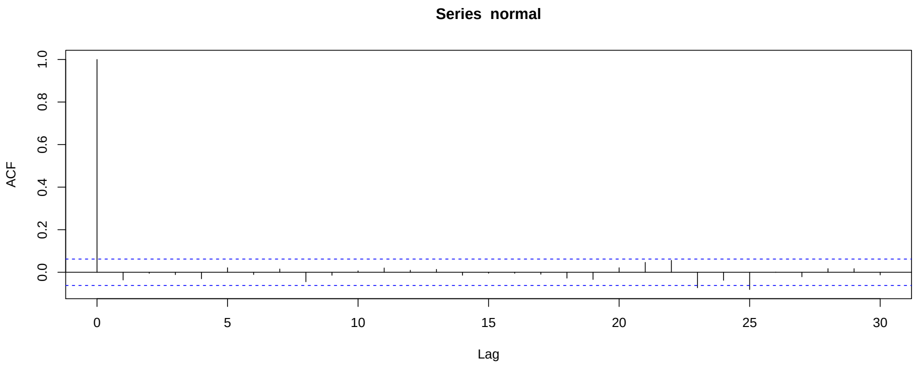


Gráfico de sequencia dos resíduos e ACF

```r
acf(normal)
```



Resumo:

O que fazer após ajustar o modelo?

1. Gráfico de sequência e ACF dos resíduos
2. Gráfico dos resíduos vs os valores ajustados $\hat{y}$
3. Gráfico de probabilidade normal*
4. Verificar se existem outliers ou valores extremos

Heterocedasticidade

Heterocedasticidade

Homocedasticidade

- Significa que a variância do erro, condicional nas variáveis explicativas, é constante *i.e.*

$$V(u|X) = \sigma^2 I$$

- É necessária para definir o *teste t*, *teste F*, *IC para* β
- Sua ausência tem consequências no método MQO
- Heterocedasticidade: não homocedasticidade

Discutiremos as consequências, detecção e soluções ao problema de Heterocedasticidade

Heterocedasticidade

A falta de homocedasticidade afeta $V(\hat{\beta})$

- Os intervalos de confiança (para β) construidos não são mais validos

As estatísticas utilizadas para testar hipóteses não são mais validas na presença de heterocedasticidade

Heterocedasticidade

A falta de homocedasticidade afeta $V(\hat{\beta})$

- Os intervalos de confiança (para β) construidos não são mais validos
- Os testes de hipóteses não são mais válidos

As estatísticas utilizadas para testar hipóteses não são mais validas na presença de heterocedasticidade

Heterocedasticidade

Estimador de White

Seja $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i$, então o estimator MQO é da forma

$$\hat{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) u_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Sob heterocedasticidade, *i.e.* $V(u_i|X) = \sigma_i^2$, temos que:

$$V(\hat{\beta}_1|X) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sigma_i^2}{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right]^2}$$

Heterocedasticidade

Estimador de White

Como σ_i^2 é desconhecido, estimamos $V(\hat{\beta}_1|X) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sigma_i^2}{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right]^2}$ por

Estimador de White | White-Huber

$$\widehat{V}(\hat{\beta}_1|X) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \hat{u}_i^2}{\left[\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2\right]^2}$$

Heterocedasticidade

No modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + u$

Sob HRLM1–HRLM4 e $V(u|X) = E(uu'|X) = \Omega$,

Estimador de White | White-Huber

$$\widehat{V}(\hat{\beta}|X) = (X'X)^{-1}X'\widehat{\Omega}X(X'X)^{-1}$$

onde $\widehat{\Omega} = diag\{\hat{u}_1^2, \ldots, \hat{u}_n^2\}$

Heterocedasticidade

No modelo $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \ldots + \beta_k x_k + u$

Sob HRLM1–HRLM4 e $V(u|X) = E(uu'|X) = \Omega$,

Estimador de White | White-Huber

$$\widehat{V}(\hat{\beta}|X) = (X'X)^{-1}X'\widehat{\Omega}X(X'X)^{-1}$$

onde $\widehat{\Omega} = diag\{\hat{u}_1^2, \ldots, \hat{u}_n^2\}$

Usando as variâncias obtidas pelo estimador de White, os *testes t*, *testes F* e *IC* podem ser obtidos como de costume.

Heterocedasticidade: wage1

```
modelo = lm(log(wage) ~ homemcasado + mulhercasada +
              mulhersolteira + educ + exper +
              I(exper^2) +  tenure + I(tenure^2),
            data = wage1)
round(coef(modelo),4)
```

```
##     (Intercept)    homemcasado   mulhercasada mulhersolteira
##          0.3214         0.2127        -0.1983        -0.1104
##           exper     I(exper^2)         tenure    I(tenure^2)
##          0.0268        -0.0005         0.0291        -0.0005
```

Heterocedasticidade: wage1

```
library(sandwich); library(lmtest)
coeftest(modelo,vcov= vcovHC(modelo, type="HC"))
```

```
##
## t test of coefficients:
##
##                   Estimate  Std. Error t value  Pr(>|t|)
## (Intercept)     0.32137810  0.10852842  2.9612 0.0032049 **
## homemcasado     0.21267568  0.05665095  3.7541 0.0001937 ***
## mulhercasada   -0.19826760  0.05826505 -3.4029 0.0007186 ***
## mulhersolteira -0.11035021  0.05662551 -1.9488 0.0518632 .
## educ            0.07891028  0.00735096 10.7347 < 2.2e-16 ***
## exper           0.02680057  0.00509497  5.2602 2.111e-07 ***
## I(exper^2)     -0.00053525  0.00010543 -5.0770 5.360e-07 ***
```

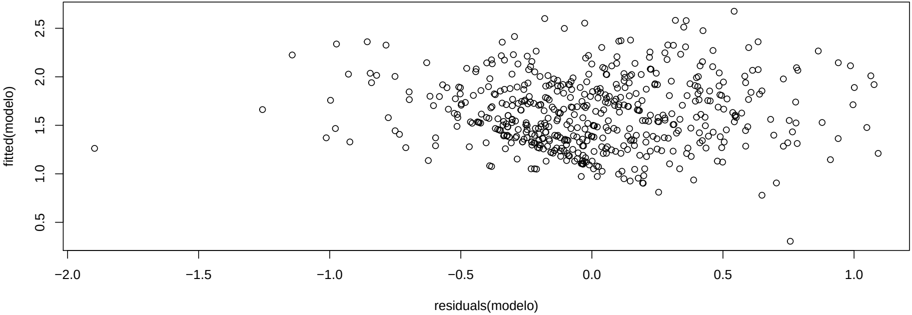
Heterocedasticidade: wage1

Comparação

```
##                    betas     Std   White P-valor P-valor_W
## (Intercept)      0.32138 0.10001 0.10853 0.00139   0.00320
## homemcasado      0.21268 0.05536 0.05665 0.00014   0.00019
## mulhercasada    -0.19827 0.05784 0.05827 0.00066   0.00072
## mulhersolteira -0.11035 0.05574 0.05663 0.04827   0.05186
## educ             0.07891 0.00669 0.00735 0.00000   0.00000
## exper            0.02680 0.00524 0.00509 0.00000   0.00000
## I(exper^2)      -0.00054 0.00011 0.00011 0.00000   0.00000
## tenure           0.02909 0.00676 0.00688 0.00002   0.00003
## I(tenure^2)     -0.00053 0.00023 0.00024 0.02153   0.02777
```

Heterocedasticidade: wage1

```
plot(residuals(modelo),fitted(modelo))
```



Heterocedasticidade: gpa3

```
newgpa = gpa3[gpa3$term == 2,]
modelo = lm(cumgpa~sat+hsperc + tothrs +
              female + black+white, data = newgpa)
round(summary(modelo)$coef,6)
```

```
##              Estimate Std. Error   t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  1.470065   0.229803  6.397063 0.000000
## sat          0.001141   0.000179  6.388504 0.000000
## hsperc      -0.008566   0.001240 -6.906004 0.000000
## tothrs       0.002504   0.000731  3.425511 0.000685
## female       0.303433   0.059020  5.141166 0.000000
## black       -0.128284   0.147370 -0.870486 0.384616
## white       -0.058722   0.140990 -0.416497 0.677295
```

Heterocedasticidade: gpa3

```
coeftest(modelo,vcov= vcovHC(modelo, type="HC"))
```

```
##
## t test of coefficients:
##
##                Estimate  Std. Error t value  Pr(>|t|)
## (Intercept)  1.47006477  0.21855969  6.7261 6.888e-11 ***
## sat          0.00114073  0.00018969  6.0136 4.468e-09 ***
## hsperc      -0.00856636  0.00140430 -6.1001 2.744e-09 ***
## tothrs       0.00250400  0.00073353  3.4136 0.0007142 ***
## female       0.30343329  0.05856959  5.1807 3.693e-07 ***
## black       -0.12828368  0.11809549 -1.0863 0.2780880
## white       -0.05872173  0.11032164 -0.5323 0.5948631
## ---
```

Heterocedasticidade: gpa3

Comparação

```
##                betas     Std   White P-valor P-valor_W
## (Intercept)  1.47006 0.22980 0.21856 0.00000   0.00000
## sat          0.00114 0.00018 0.00019 0.00000   0.00000
## hsperc      -0.00857 0.00124 0.00140 0.00000   0.00000
## tothrs       0.00250 0.00073 0.00073 0.00068   0.00071
## female       0.30343 0.05902 0.05857 0.00000   0.00000
## black       -0.12828 0.14737 0.11810 0.38462   0.27809
## white       -0.05872 0.14099 0.11032 0.67730   0.59486
```

Heterocedasticidade: gpa3

Seja

$$H_0 : \beta_{black} = 0, \quad \beta_{white} = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : H_0 \quad \text{não é verdade}$$

- Precisamos do Teste F

Heterocedasticidade: gpa3

Seja

$$H_0 : \beta_{black} = 0, \quad \beta_{white} = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : H_0 \quad \text{não é verdade}$$

- Precisamos do Teste F
- Modelo irrestrito

$$cumgpa = \beta_0 + \beta_1 sat + \beta_2 hsperc + \beta_3 tothrs + \beta_4 female + \beta_5 black + \beta_6 white + u$$

Heterocedasticidade: gpa3

Seja

$$H_0 : \beta_{black} = 0, \quad \beta_{white} = 0 \quad \text{vs.} \quad H_1 : H_0 \quad \text{não é verdade}$$

- Precisamos do Teste F
- Modelo irrestrito

$$cumgpa = \beta_0 + \beta_1 sat + \beta_2 hsperc + \beta_3 tothrs + \beta_4 female + \beta_5 black + \beta_6 white + u$$

- Modelo restrito

$$cumgpa = \beta_0 + \beta_1 sat + \beta_2 hsperc + \beta_3 tothrs + \beta_4 female + u$$

Heterocedasticidade: gpa3

```
modeloi = lm(cumgpa~sat+hsperc + tothrs + female + black +
               white, data = newgpa)
modelor = lm(cumgpa~sat+hsperc + tothrs + female, data = newgpa)
# Teste F clássico
anova(modelor,modeloi)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: cumgpa ~ sat + hsperc + tothrs + female
## Model 2: cumgpa ~ sat + hsperc + tothrs + female + black + wh
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
## 1    361 79.362
## 2    359 79.062  2   0.29934 0.6796 0.5075
```

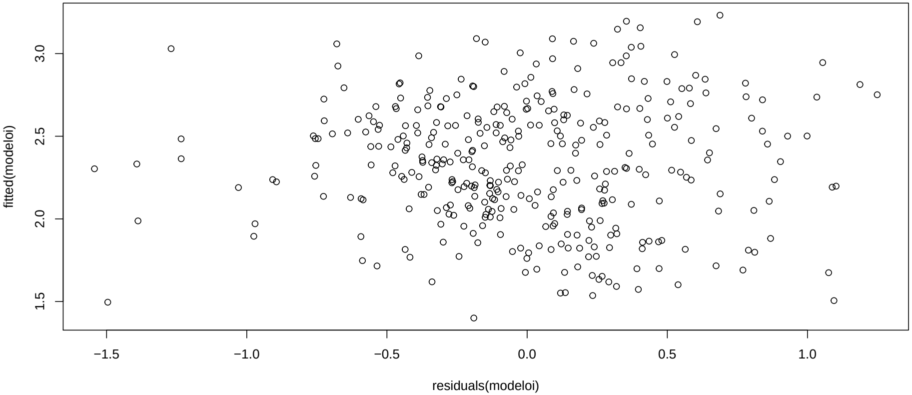
Heterocedasticidade: gpa3

```r
library(sandwich)
library(lmtest)
# Versão robusta (à Heterocedasticidade) do teste F
waldtest(modelor, modeloi, vcov = vcovHC(modeloi, type = "HC"))
```

```
## Wald test
##
## Model 1: cumgpa ~ sat + hsperc + tothrs + female
## Model 2: cumgpa ~ sat + hsperc + tothrs + female + black + wh
##   Res.Df Df      F Pr(>F)
## 1    361
## 2    359  2 0.7478 0.4741
```

Heterocedasticidade: gpa3

```r
plot(residuals(modeloi),fitted(modeloi))
```



Heterocedasticidade: crime1

- Fazer o *teste t* para testar a significância das variáveis
- Fazer o *teste F* para testar

$$H_0 : \beta_{avgsen} = 0 \quad \beta_{avgsen^2} = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

```
modeloi = lm(narr86~pcnv+avgsen+I(avgsen^2)+ptime86+
               qemp86+inc86+black+hispan, data = crime1)
modelor = lm(narr86~pcnv+ptime86+qemp86+inc86+black+
               hispan, data = crime1)
```

Heterocedasticidade: crime1

Comparação

```
##                 betas     Std   White P-valor P-valor_W
## (Intercept)  0.56701 0.03606 0.04021 0.00000   0.00000
## pcnv        -0.13560 0.04037 0.03357 0.00079   0.00006
## avgsen       0.01784 0.00970 0.01011 0.06587   0.07763
## I(avgsen^2) -0.00052 0.00030 0.00021 0.08226   0.01283
## ptime86     -0.03936 0.00869 0.00621 0.00001   0.00000
## qemp86      -0.05051 0.01443 0.01418 0.00047   0.00037
## inc86       -0.00148 0.00034 0.00023 0.00001   0.00000
## black        0.32460 0.04542 0.05842 0.00000   0.00000
## hispan       0.19338 0.03970 0.04023 0.00000   0.00000
```

Heterocedasticidade: crime1

$$H_0 : \beta_{avgsen} = 0 \quad \beta_{avgsen^2} = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

```
# Teste F clássico
anova(modelor,modeloi)
```

```
## Analysis of Variance Table
##
## Model 1: narr86 ~ pcnv + ptime86 + qemp86 + inc86 + black + hi
## Model 2: narr86 ~ pcnv + avgsen + I(avgsen^2) + ptime86 + qemp
##     black + hispan
##   Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
## 1   2718 1866.4
## 2   2716 1864.0  2    2.3716 1.7278 0.1779
```

Heterocedasticidade: crime1

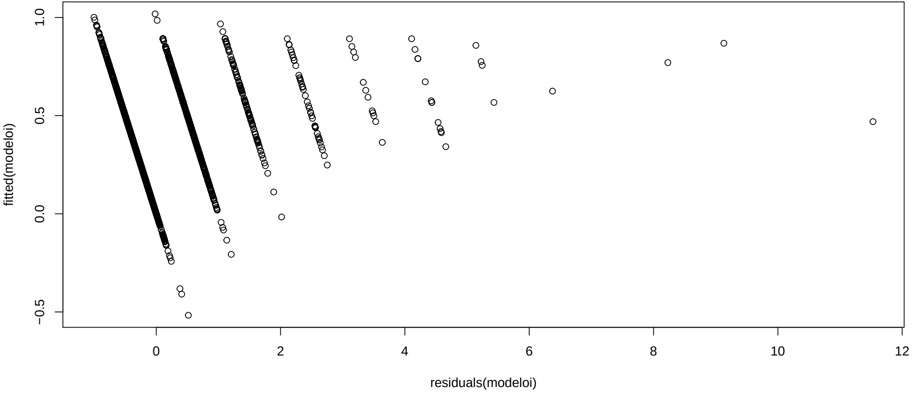
$$H_0 : \beta_{avgsen} = 0 \quad \beta_{avgsen^2} = 0 \quad \text{vs} \quad H_1 : H_0 \text{ não é verdade}$$

```
# Teste F robusto
waldtest(modelor, modeloi, vcov = vcovHC(modeloi, type = "HC"))
```

```
## Wald test
##
## Model 1: narr86 ~ pcnv + ptime86 + qemp86 + inc86 + black + hi
## Model 2: narr86 ~ pcnv + avgsen + I(avgsen^2) + ptime86 + qemp
##     black + hispan
##   Res.Df Df      F   Pr(>F)
## 1   2718
## 2   2716  2 4.7806 0.008461 **
```

Heterocedasticidade: crime1

```
plot(residuals(modeloi),fitted(modeloi))
```



Heterocedasticidade: Teste para Heterocedasticidade

- Na presença de heterocedasticidade, embora os estimadores MQO continuem sendo não viesados, eles não são mais o melhor estimador linear não viesado.

Heterocedasticidade: Teste para Heterocedasticidade

- Na presença de heterocedasticidade, embora os estimadores MQO continuem sendo não viesados, eles não são mais o melhor estimador linear não viesado.
- Embora o estimador robusto de White funcione bem em casos heterocedasticos e homocedasticos, sob HRLM6 (Normalidade) as estatísticas t e F são exatas e não aproximadas como com o estimador de White.

Heterocedasticidade: Teste para Heterocedasticidade

- Na presença de heterocedasticidade, embora os estimadores MQO continuem sendo não viesados, eles não são mais o melhor estimador linear não viesado.
- Embora o estimador robusto de White funcione bem em casos heterocedasticos e homocedasticos, sob HRLM6 (Normalidade) as estatísticas t e F são exatas e não aproximadas como com o estimador de White.
- Vamos utilizar um teste para testar

$$H_0 : \underbrace{V(u|X) = E(u^2|X) = E(u^2)}_{\text{HRLM4: } E(u|X)=0} = \sigma^2 I$$

Heterocedasticidade: Teste para Heterocedasticidade

Sob H_0 (Homocedasticidade) não deve existir nenhuma relação entre u^2 com alguma variavel explicativa

Teste Breusch-Pagan da Heterocedasticidade

$$\hat{u}^2 = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \ldots + \delta_k x_k + \nu$$

Teste de White para a Heterocedasticidade

$$\hat{u}^2 = \delta_0 + \delta_1 x_1 + \ldots + \delta_k x_k + \delta_{k+1} x_1^2 + \ldots + \delta_{2k} x_k^2 + \delta_{2k+1} x_1 x_2 + \delta_{2k+2} x_1 x_3 + \ldots + \nu$$

H_0 implica que os coeficientes δ sejam todos iguais a zero.

Heterocedasticidade: Teste para Heterocedasticidade

```
modelo = lm(price~lotsize+sqrft + bdrms, data = hprice1)
round(summary(modelo)$coef,4)
```

```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept) -21.7703    29.4750 -0.7386   0.4622
## lotsize       0.0021     0.0006  3.2201   0.0018
## sqrft         0.1228     0.0132  9.2751   0.0000
## bdrms        13.8525     9.0101  1.5374   0.1279
```

Heterocedasticidade: Teste para Heterocedasticidade

```
# Test Breusch-Pagan
bptest(modelo,studentize = TRUE)
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  modelo
## BP = 14.092, df = 3, p-value = 0.002782
```

Heterocedasticidade: Teste para Heterocedasticidade

```
# Teste de White
bptest(modelo, ~ lotsize*sqrft + lotsize*bdrms + sqrft*bdrms + I
         I(sqrft^2) + I(bdrms^2), studentize = TRUE, data = hpri
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  modelo
## BP = 33.732, df = 9, p-value = 9.953e-05
```

Heterocedasticidade: Teste para Heterocedasticidade

```
modelo = lm(log(price)~log(lotsize)+log(sqrft) + bdrms, data = hp
round(summary(modelo)$coef,4)
```

```
##                Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)     -1.2970     0.6513 -1.9915   0.0497
## log(lotsize)     0.1680     0.0383  4.3877   0.0000
## log(sqrft)       0.7002     0.0929  7.5403   0.0000
## bdrms            0.0370     0.0275  1.3424   0.1831
```

Heterocedasticidade: Teste para Heterocedasticidade

```r
# Test Breusch-Pagan
bptest(modelo,studentize = TRUE)
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  modelo
## BP = 4.2232, df = 3, p-value = 0.2383
```

Heterocedasticidade: Teste para Heterocedasticidade

```r
# Teste de White
bptest(modelo, ~ log(lotsize)*log(sqrft) +
         log(lotsize)*bdrms + log(sqrft)*bdrms +
         I(log(lotsize)^2) + I(log(sqrft)^2) + I(bdrms^2),
       studentize = TRUE, data = hprice1)
```

```
##
##  studentized Breusch-Pagan test
##
## data:  modelo
## BP = 9.5495, df = 9, p-value = 0.3882
```

Heterocedasticidade

- Os testes de heterocedasticidade BP e White são construidos Sob HRML1–HRML4, se umas das hipóteses não for verificada afeta os testes.
- Algumas vezes $E(y|X)$ esta mal-especificada, nesse caso os testes de heterocedasticidade podem rejetiar H_0 mesmo quando $V(u|X) = \sigma^2 I$
- Devemos primeiro verificar a má-especificação antes de testarmos heterocedasticidade
- **Outra alternativa:** Mínimos Quadrados Ponderados (MQP)

Leituras recomendadas

Leituras recomendadas

- Montgomery, D. C; Peck, E. A; Vining, G. *Introduction to Linear Regression Analysis*. (2012). Wiley, 5ed. – **Cap 4**
- Wooldridge, Jeffrey M. *Introdução à Econometria: Uma abordagem moderna*. (2016). Cengage Learning. – **Cap 8**