# Gabarito da Lista 1 -IPE

Prof: Carlos Trucíos

20 de Outubro de 2020

1. Descreva o espaço amostral associado a cada um dos seguintes experimentos:

   (a) Lançamento de dois dados e observar as faces viradas para cima.
   **Resposta:**
   $$S = \{(i, j) : i, j = 1, 2, ..., 6\}$$

   (b) Lançamento de uma moeda três vezes e observar o lado virado pra cima.
   **Resposta:** Sejam C = Cara e K = Coroa:
   $$S = \{CCC, CCK, CKC, KCC, CKK, KKC, KCK, KKK\}$$

   (c) Selecionar um ponto no círculo de raio r e centro na origem do plano cartesiano.
   **Resposta:**
   $$S = \{(x, y) \in R^2 : x^2 + y^2 \leq r\}$$

   (d) Observar a proporção de dispositivos defeituosos em uma remessa de componentes eletrônicos
   **Resposta:** Seja $n$ o número de dispositivos na remessa
   $$S = \{\frac{k}{n} : k \in N \text{ e } 0 \leq k \leq n\}$$

2. Suponha que você lança uma moeda três vezes seguidas. Qual a probabilidade de obter pelo menos duas caras?
   **Resposta:**

   - Seja o o evento $A$ : obter pelo menos duas caras em três lancamentos da moeda.
   - $S = \{CCC, CCK, CKC, KCC, CKK, KKC, KCK, KKK\}$, então $N = 8$
   - $A = \{CCC, CCK, CKC, KCC\}$
   - $P(A) = \frac{4}{8}$

   **Outra forma:**

   - Sejam os eventos $A_i$ : obter i caras em três lancamentos $(i = 0, 1, 2, 3)$
   - Seja o evento $B$ : obter pelo menos duas caras em três lancamentos da moeda
   - $A_2 = \{CCK, CKC, KCC\}$
   - $A_3 = \{CCC\}$
   - $P(B) = P(A_2 \cup A_3) = P(A_2) + P(A_3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8}$

3. Uma urna contém 36 bolas numeradas, de quantas formas podemos escolher 6 bolas? (considere os casos com e sem reposição)
   **Resposta:** As bolas são numeradas (i.e. elas são distinguíveis), como as bolas são distinguíveis a ordem importa.

   - Caso com reposição: $36^6$
   - Caso sem reposição: $36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32 \times 31 = \frac{36!}{(36-6)!}$

4. Suponha que a Mega-Sena contém apenas 50 números diferentes.

   (a) Qual a probabilidade de ganhar a Mega-Sena? (acertar os 6 números)

(b) Se cada bilhete custa 2 reais, quanto dinheiro é preciso para ter certeza que você ganhará a Mega-Sena?

**Resposta:** Seja o evento $A$ : acertar os 6 números da Mega-Sena. Como não importa em que ordem apareceram os números mas sim quais números apareceram.

- $N(A) = 1$
- $N = \binom{50}{6}$
- $P(A) = \dfrac{1}{\binom{50}{6}}$

Para responder o item (b), apenas precisamos fazer $2 \times N$

5. Quatro livros de estatística, seis de economia e dois de português tem que ser colocados num estante. De quantas formas possíveis eles podem ser colocados se os livros de cada área devem estar juntos? (os livros são todos diferentes)
**Resposta:** Como os livros de cada área devem estar juntos:

- Formas de ordenar os livros de portugues: 2!
- Formas de ordenar os livros de economia: 6!
- Formas de ordenar os livros de estatística: 4!

Além dessas ordenações, temos as 3! formas de ordenar os grupos. Assim a resposta é $2! \times 6! \times 4! \times 3!$

6. 10 canetas pretas deven ser divididas entre 3 professores, de forma que cada um receba pelo menos uma caneta. De quantas formas isto pode ser feito?
**Resposta:** Note que (a): as canetas não são necessariamente distinguíveis, (b): cada professor deve receber pelo menos 1 caneta. Então queremos saber o número de soluções interias da equação

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10$$

com a restrição de que $x_1 > 0$. Logo, pela Proposição 1: $\binom{10-1}{3-1} = 36$

7. Seis alunos da turma de IPE vão para o Bar do Luizão após a $P_1$, de quantas formas os seis alunos podem se sentar à mesa (assuma que a mesa é para seis pessoas)
**Resposta:** Note que as pessoas estão sentadas numa mesa (não em uma fileira). Se estivessemos em uma fileira, teriamos que o número de formas que os alunos podem se sentar é 6!, mas como estamos em uma mesa teremos configurações repetidas e precisamos que essas configuraçãoes repetidas não sejam contadas. Note que para cada configuração, se fizermos com que cada aluno se sente uma caderia á direta (ou esquerda) teremos 6 configurações identicas. Entao, no nosso caso, a repostas será $\dfrac{6!}{6} = 5!$

8. Suponha que você está numa festa. Qual a probabilidade que pelo menos duas pessoas façam aniversário no mesmo dia se:

(a) na festa tem 20 pessoas
(b) na festa tem 40 pessoas
(c) na festa tem 100 pessoas

**Resposta:** Vamos a resolver para o caso geral:

- Sejam o evento $A$ : pelo menos duas pessoas na festa fazem aniversario no mesmo dia
- $P(A) = 1 - P(A^c)$
- Vamos assumir que ninguém nasceo no 29 de fevereiro (N = 365)
- $P(A^c) = \dfrac{365}{365} \times \dfrac{365-1}{365} \times \dfrac{365-2}{365} \dots \dfrac{365-(r-1)}{365} = \dfrac{365!}{(365-r)!365^r}$
- $P(A) = 1 - \dfrac{365!}{(365-r)!365^r}$

9. Quantos números de 4 dígitos podem ser formados com as cifras 0,1,...,9 se

(a) repetições são permitidas
(b) repetições não são permitidas

(c) o primeiro dígito deve ser 1, o último dígito deve ser 0 e não são permitidas repetições

**Resposta:** Como queremos números de 4 digitos, não podemos começar com o 0.

- repetições são permitidas: $9 \times 10 \times 10 \times 10$
- repetições não são permitidas: $9 \times 9 \times 8 \times 7$
- o primeiro dígito deve ser 1, o último dígito deve ser 0 e não são permitidas repetições: Como os números 1 e 0 já foram escolhidos, temos que para os 2 números do meio temos $8 \times 7$ possibilidades.

10. Uma urna contém quatro bolas vermelhas e seis azuis. Se escolhemos aleatoriamente quatro bolas.

   (a) qual a probabilidade de serem todas vermelhas?
   **Resposta:**
   - Seja o evento $A$ : as quatro bolas são vermelhas
   - $P(A) = \dfrac{N(A)}{N} = 0.0047$
   - $N = \binom{10}{4}$
   - $N(A) = \binom{4}{4}$

   (b) qual a probabilidade de serem todas azuis?
   **Resposta:**
   - Seja o evento $A$ : as quatro bolas são azuis
   - $P(A) = \dfrac{N(A)}{N} = 0.0714$
   - $N = \binom{10}{4}$
   - $N(A) = \binom{6}{4}$

   (c) qual a probabilidade de serem dois vermelhas e dois azuis?
   - Seja o evento $A$ : duas bolas são vermelhas e duas bolas azuis
   - $P(A) = \dfrac{N(A)}{N} = 0.42$
   - $N = \binom{10}{4}$
   - $N(A) = \binom{6}{2}\binom{4}{2}$

   (d) qual a probabildiade de 1 ser vermelha, 2 serem azuis e 1 ser verde?
   **Resposta:** 0 (não temos bolas verdes)

11. Sejam $A$ $B$ e $C$ três eventos tais que $A \cap B = \emptyset$. Prove que

$$P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$$

**Resposta:**

$$P(A \cup B|C) = \frac{P((A \cup B) \cap C)}{P(C)} = \frac{P((A \cap C) \cup (B \cap C))}{P(C)} = \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C)}{P(C)}$$

Mas, $0 \leq P(A \cap B \cap C) \leq P(A \cap B) = 0$. Então,

$$P(A \cup B|C) = \frac{P(A \cap C) + P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} + \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = P(A|C) + P(B|C)$$

12. Se $A$ e $B$ são independentes, $A^c$ e $B^c$ são também independentes? (provar ou dar um contra exemplo)
**Resposta:** A prova foi feita na aula 2 da semana 4. Ver minutos 33:35 − 35:15 da aula gravada "IPE: Probabilidade Condicional e Independência (parte 2)"

13. Entre os pacientes de um médico cirurgião, 20% dos pacientes realizam plásticas faciais, 35% realizam implantes e o restante outro tipo de cirurgia. Além disso, sabemos que 25% das plásticas faciais, 15% dos implantes e 40% das outras cirurgias são feitas por homens. Se selecionamos um paciente ao acaso, determine:

   (a) a probabilidade do paciente ser homem
   **Resposta:** (Teorema da Probabilidade Total). Sejam os eventos

- $B$ : o paciente ser homem
- $PF$ : realizar plastica facial
- $I$ : realizar implante
- $O$ : realizar outros tratamentos

$P(B) = P(B|PF)P(PF)+P(B|I)P(I)+P(B|O)P(O) = 0.25\times0.2+0.15\times0.35+0.4\times0.45 = 0.2825$

(b) Se o paciente selecionado for homem, qual a probabilidade dele ter feito um implante?
**Resposta:** (Teorema de Bayes).

$$P(I|B) = \frac{P(I)P(B|I)}{P(B|PF)P(PF) + P(B|I)P(I) + P(B|O)P(O)} = \frac{0.15 \times 0.35}{0.2825} = 0.1858$$

14. Independência a pares implica independência coletiva? (Provar ou dar um contra exemplo)
**Resposta:**

- Seja $S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$
- Sejam os eventos:
  - $A = \{\omega_1, \omega_2\}$
  - $B = \{\omega_1, \omega_3\}$
  - $C = \{\omega_1, \omega_4\}$
- Temos que
  - $P(AB) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = P(A)P(B)$
  - $P(AC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = P(A)P(C)$
  - $P(BC) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} = P(B)P(C)$
- Mas, $P(ABC) = \frac{1}{4} \neq P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$
- Independencia por pares no implica independencia coletiva!