Introdução à Probabilidade e Estatística

Variáveis aleatórias: Parte I

Carlos Trucíos
ctruciosm.github.io

Universidade Federal do ABC (UFABC)

Semana 6

Variaveis aleatorias

Variaveis aleatorias: Definição

Na realização de um experimento aleatório (fenômeno aleatório) é comum termos interesse em algumas quantidades que são funções das ocorrencias do fenomeno

- Quantidade de peças defeituosas

Variaveis aleatorias: Definição

Na realização de um experimento aleatório (fenômeno aleatório) é comum termos interesse em algumas quantidades que são funções das ocorrencias do fenomeno

- Quantidade de peças defeituosas
- Tempo até a primeira falha de uma maquina de produção

Variaveis aleatorias: Definição

Na realização de um experimento aleatório (fenômeno aleatório) é comum termos interesse em algumas quantidades que são funções das ocorrencias do fenomeno

- Quantidade de peças defeituosas
- Tempo até a primeira falha de uma maquina de produção
- Número de lancamentos até a occorencia da r-ésima falha

Variaveis aleatorias: Definição

Na realização de um experimento aleatório (fenômeno aleatório) é comum termos interesse em algumas quantidades que são funções das ocorrencias do fenomeno

- Quantidade de peças defeituosas
- Tempo até a primeira falha de uma maquina de produção
- Número de lancamentos até a occorencia da r-ésima falha
- Número de pessoas que usam o metrô num determinado dia

Variaveis aleatorias: Definição

- Em geral, cada resultado do experimento é associado a um número, especificando-se uma regra de associação (quantidade de peças defeituosas num lote de n peças ou idade dos alunos de IPE).

Variaveis aleatorias: Definição

- Em geral, cada resultado do experimento é associado a um número, especificando-se uma regra de associação (quantidade de peças defeituosas num lote de n peças ou idade dos alunos de IPE).
- Tal regra de associação é denominada variável aleatória (v.a.). **Variável** porque é possivel obter diferentes valores numéricos, e **aleatória** porque o valor observado depende de qual dos resultados possíveis do experimento é obtido

Variaveis aleatorias: Definição

- Em geral, cada resultado do experimento é associado a um número, especificando-se uma regra de associação (quantidade de peças defeituosas num lote de n peças ou idade dos alunos de IPE).
- Tal regra de associação é denominada variável aleatória (v.a.). **Variável** porque é possivel obter diferentes valores numéricos, e **aleatória** porque o valor observado depende de qual dos resultados possíveis do experimento é obtido

Variaveis aleatorias: Definição

- Em geral, cada resultado do experimento é associado a um número, especificando-se uma regra de associação (quantidade de peças defeituosas num lote de n peças ou idade dos alunos de IPE).
- Tal regra de associação é denominada variável aleatória (v.a.). **Variável** porque é possivel obter diferentes valores numéricos, e **aleatória** porque o valor observado depende de qual dos resultados possíveis do experimento é obtido

Importante

Geralmente, v.a.'s são representadas por letras maiusculas e próximas do final do alfabeto (X, Y, Z) enquanto que letras minusculas representam um valor específico da v.a. $X(\omega) = x$ significa que x é o valor associado ao resultado ω pela v.a. X

Variaveis aleatorias: Definição

Definição

Para determinado espaço amostral S (de algum experimento), a v.a. é qualquer regra que associa um número com qualquer resultado de S. Ou seja, uma v.a. é uma função cujo dominio é o espaço amostral e cuja variação é o conjunto de números reais.

$$X : S \rightarrow \mathbb{R}$$

Variaveis aleatorias: Definição*

Definição formal

Uma v.a. X em um espaço de probabilidade $(S, \mathbb{A}, \mathbb{P})$ é uma função real definida no S, tal que $[X \leq x]$ é um evento aleatório.

$$X : S \rightarrow \mathbb{R} \text{ é v.a. se } [X \leq x] \in \mathbb{A}, \forall x \in \mathbb{R}$$

. Onde $\mathbb{A}$ é a $\sigma - algebra$

Variaveis aleatorias: σ-algebra*

σ-algebra

Seja $\mathbb{A}$ uma coleção de subconjutos de S, $\mathbb{A}$ é chamado σ-algebra de subconjuntos de S (σ-algebra de eventos) se:

- $\varnothing \in \mathbb{A}$
- Se $A \in \mathbb{A}$, então $A^c \in \mathbb{A}$
- Se $A_1, A_2, \ldots \in \mathbb{A}$, então $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathbb{A}$

Importante

- Os elementos em $\mathbb{A}$ são chamados eventos aleatórios e são os únicos para os quais podemos atribuir probabilidade. No nosso curso utlizaremos o conjunto potência (o conjuntos de todos os subconjuntos de S) como σ-algebra, então todos nossos eventos serão eventos aleatórios (dado que S é finito ou enumeravel).

Variaveis aleatorias: Propriedades

Propriedades

- Se X é uma v.a. e seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer, então kX é v.a.

Variaveis aleatorias: Propriedades

Propriedades

- Se X é uma v.a. e seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer, então kX é v.a.
- Se X é uma v.a., então X^2 é v.a.

Variaveis aleatorias: Propriedades

Propriedades

- Se X é uma v.a. e seja $k \in \mathbb{R}$ uma constante qualquer, então kX é v.a.
- Se X é uma v.a., então X^2 é v.a.
- Se X é uma v.a e $g(\cdot)$ é uma função continua, então $g(X)$ é uma v.a.

Variaveis aleatorias: Função distribuição

Função distribuição

A função de distribuição (ou função distribuição acumulada) de uma v.a. X, representada por F_X ou simplesmente F, é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Variaveis aleatorias: Função distribuição

Função distribuição

A função de distribuição (ou função distribuição acumulada) de uma v.a. X, representada por F_X ou simplesmente F, é definida por

$$F_X(x) = P(X \leq x), \; \forall x \in \mathbb{R}$$

Propriedades

- (F1) $\lim_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \longrightarrow \infty} F(x) = 1$
- (F2) F é continua à direita
- (F3) F é não descrescente, i.e. $F(x) \leq F(y)$ sempre que $x \leq y$, $\forall x, y, \in \mathbb{R}$

Variaveis aleatorias: Função distribuição

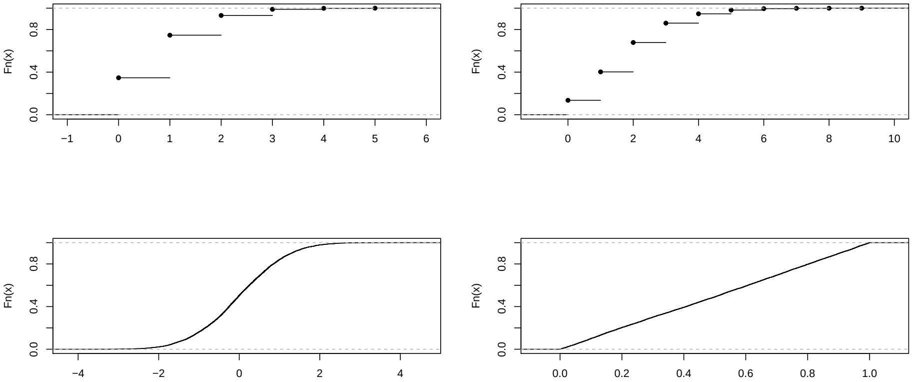

Figure 1: Exemplos de função distribuição

Variaveis aleatorias: Tipos

- V.a. discretas

Variaveis aleatorias: Tipos

- V.a. discretas
- V.a. (absolutamente) continuas

Variaveis aleatorias: Tipos

- V.a. discretas
- V.a. (absolutamente) continuas
- V.a. mixtas

Variaveis aleatorias: Tipos

- V.a. discretas
- V.a. (absolutamente) continuas
- V.a. mixtas
- V.a. singulares

Variaveis aleatorias: Tipos

- V.a. discretas
- V.a. (absolutamente) continuas
- V.a. mixtas
- V.a. singulares

Variaveis aleatorias: Tipos

- V.a. discretas
- V.a. (absolutamente) continuas
- V.a. mixtas
- V.a. singulares

No curso abordaremos apenas v.a. discretas e continuas

Variaveis aleatorias: Exemplos

- Suponha que nosso experimento consista em jogar 5 moedas honestas e observar o resultado na face superior. Se X representa o número de caras obtidos, então X é v.a. que pode ter um dos valores 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Variaveis aleatorias: Exemplos

- Suponha que nosso experimento consista em jogar 5 moedas honestas e observar o resultado na face superior. Se X representa o número de caras obtidos, então X é v.a. que pode ter um dos valores 0, 1, 2, 3, 4, 5.
- Considere um experimento onde se seleciona uma pessoa aleatoriamente de uma população e se mede a altura (em cm). Esta altura é uma v.a.

Variaveis aleatorias: Exemplos

- Suponha que nosso experimento consista em jogar 5 moedas honestas e observar o resultado na face superior. Se X representa o número de caras obtidos, então X é v.a. que pode ter um dos valores 0, 1, 2, 3, 4, 5.
- Considere um experimento onde se seleciona uma pessoa aleatoriamente de uma população e se mede a altura (em cm). Esta altura é uma v.a.
- Quando ligamos no setor de reclamação de uma loja virtual, podemos falar diretamente com alguem (s, de sucesso) ou ficar aguardando (f, de fracasso). Podemos definir a v.a. X como

$$X(s) = 1, \; X(f) = 0$$

Variaveis aleatorias discretas

Variaveis aleatorias discretas

Uma v.a. X é dita discreta se assume um número finito ou enumeravel de valores, i.e., $\exists$ um conjunto $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \ldots\}$, $\forall \omega \in S$.

Variaveis aleatorias discretas

Uma v.a. X é dita discreta se assume um número finito ou enumeravel de valores, i.e., $\exists$ um conjunto $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \ldots\}$, $\forall \omega \in S$.

- Número de ligações telefónicas recebidas por uma central de atenção ao cliente.

Variaveis aleatorias discretas

Uma v.a. X é dita discreta se assume um número finito ou enumeravel de valores, i.e., $\exists$ um conjunto $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \ldots\}$, $\forall \omega \in S$.

- Número de ligações telefónicas recebidas por uma central de atenção ao cliente.
- Número de celulares com defeito em um lote de 1000.

Variaveis aleatorias discretas

Uma v.a. X é dita discreta se assume um número finito ou enumeravel de valores, i.e., $\exists$ um conjunto $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset \mathbb{R}$ tal que $X(\omega) \in \{x_1, x_2, \ldots\}$, $\forall \omega \in S$.

- Número de ligações telefónicas recebidas por uma central de atenção ao cliente.
- Número de celulares com defeito em um lote de 1000.
- Número de aparelhos conectados a uma rede wifi.

Função de Probabilidade

Função de Probabilidade

A função de probabilidade de uma v.a. discreta X é uma função que atribui probabilidade a cada um dos possíveis valores de X. Ou seja, para $i = 1, 2, \ldots$

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

Função de Probabilidade

Função de Probabilidade

A função de probabilidade de uma v.a. discreta X é uma função que atribui probabilidade a cada um dos possíveis valores de X. Ou seja, para $i = 1, 2, \ldots$

$$p(x_i) = P(X = x_i)$$

Propriedades

- $0 \leq p(x_i) \leq 1$, $\forall i = 1, 2, \ldots$
- A soma das probabiidades de todos os possíveis valores de X é 1, $\sum_i p(x_i) = 1$
- $P(X \leq y) = \sum_{x \leq y} p(x)$

Exemplos

1. A UFABC possui 6 super computadores para serem utilizados por alunos e professores. Seja X o número de super computadores que estão em uso aos domingos ao meio dia. Suponha que a distribuição da probabilidade de X seja conforme a seguinte tabela.

x	0	1	2	3	4	5	6
P(x)	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

Suponha que você precis rodar um conjuno de simulações e precisa de pelo menos 3 super computadores disponóveis. Qual é a probabilidade de ter no máximo 3 computadores em uso um domingo ao medio dia?

Exemplos

x	0	1	2	3	4	5	6
P(x)	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

- Queremos $P(X \leq 3) = \sum_{x \leq 3} p(x)$

Exemplos

x	0	1	2	3	4	5	6
P(x)	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

- Queremos $P(X \leq 3) = \sum_{x \leq 3} p(x)$
- $\sum_{x \leq 3} p(x) = p(0) + p(1) + p(2) + (3) = 0.05 + 0.10 + 0.15 + 0.25 = 0.55$

Exemplos

x	0	1	2	3	4	5	6
P(x)	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

- Queremos $P(X \leq 3) = \sum_{x \leq 3} p(x)$
- $\sum_{x \leq 3} p(x) = p(0) + p(1) + p(2) + (3) = 0.05 + 0.10 + 0.15 + 0.25 = 0.55$

Exemplos

x	0	1	2	3	4	5	6
P(x)	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

- Queremos $P(X \leq 3) = \sum_{x \leq 3} p(x)$
- $\sum_{x \leq 3} p(x) = p(0) + p(1) + p(2) + (3) = 0.05 + 0.10 + 0.15 + 0.25 = 0.55$

Qual a probabilidade de ter no máximo 5 computadores em uso?

- Queremos $P(X \leq 5)$

Exemplos

x	0	1	2	3	4	5	6
P(x)	0.05	0.10	0.15	0.25	0.20	0.15	0.10

- Queremos $P(X \leq 3) = \sum_{x \leq 3} p(x)$
- $\sum_{x \leq 3} p(x) = p(0) + p(1) + p(2) + (3) = 0.05 + 0.10 + 0.15 + 0.25 = 0.55$

Qual a probabilidade de ter no máximo 5 computadores em uso?

- Queremos $P(X \leq 5)$
- $P(X \leq 5) = 1 - P(X > 5) = 1 - P(X = 6) = 1 - 0.10 = 0.90$

Exemplos

2. Sete lotes de celulares (cada lote tem 100) estão prontos para serem entregues. O número de celulares com defeito na placa por cada lote é mostrado na seguinte Tabela.

Lote	1	2	3	4	5	6	7
Q. com defeito	0	2	0	1	1	2	0

Se um lote qualquer é selecionado e enviado para a empresa “Mania Phone”. Qual é a probabilidade desta caixa não ter nenhum celular com defeito?

Exemplos

Lote	1	2	3	4	5	6	7
Q. com defeito	0	2	0	1	1	2	0

- Vamos assumir que todos os lotes tem a mesma probabilidade de serem escolhidos

Exemplos

Lote	1	2	3	4	5	6	7
Q. com defeito	0	2	0	1	1	2	0

- Vamos assumir que todos os lotes tem a mesma probabilidade de serem escolhidos
- X número de celulares com defeito no lote ($X = 0, 1, \text{ou } 2$)

Exemplos

Lote	1	2	3	4	5	6	7
Q. com defeito	0	2	0	1	1	2	0

- Vamos assumir que todos os lotes tem a mesma probabilidade de serem escolhidos
- X número de celulares com defeito no lote ($X = 0, 1,$ ou 2)
- Queremos $P(X = 0) = P(\text{Ser o lote 1 ou o lote 3 ou o lote 7}) = \frac{3}{7}$

Exemplos

3. Considere seleccionar aleatoriamente uma familia de uma determinada região e suponha que X é o número de individuos na familia selecionada. A **função de probabilidade** de X é dada na seguinta Tabela

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	0.140	0.175	0.220	0.260	0.155	0.025	0.015	0.005	0.005

Se selecionarmos uma familia aleatoriamente, qual é a probabilidade dela ter entre 4 e 7 membros?

Exemplos

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	0.140	0.175	0.220	0.260	0.155	0.025	0.015	0.005	0.005

- X número de membros na familia de uma determinada região

Exemplos

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	0.140	0.175	0.220	0.260	0.155	0.025	0.015	0.005	0.005

- X número de membros na familia de uma determinada região
- Queremos $P(4 \leq X \leq 7) = p(4) + p(5) + p(6) + p(7) = 0.260 + 0.155 + 0.025 + 0.015 = 0.455$

Exemplo

4. Considere seleccionar aleatoriamente uma familia de uma determinada região e suponha que X é o número de individuos na familia selecionada. A **função distribuição acumulada** de X é dada na seguinta Tabela

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F(x)$	0.140	0.315	0.535	0.795	0.950	0.975	0.990	0.995	1

Se selecionarmos uma familia aleatoriamente, qual é a probabilidade dela ter entre 3 e 8 membros?

Exemplo

4. Considere seleccionar aleatoriamente uma familia de uma determinada região e suponha que X é o número de individuos na familia selecionada. A **função distribuição acumulada** de X é dada na seguinta Tabela

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F(x)$	0.140	0.315	0.535	0.795	0.950	0.975	0.990	0.995	1

Se selecionarmos uma familia aleatoriamente, qual é a probabilidade dela ter entre 3 e 8 membros? - Podemos resolver o problema obtendo uma nova linha das $p(x)$.

Exemplo

Proposição

Para quaisquer dois números a e b com $a \leq b$,

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a^-)$$

onde a^- representa o maior valor possivei de X inferior a a

Exemplo

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F(x)$	0.140	0.315	0.535	0.795	0.950	0.975	0.990	0.995	1

- Queremos $P(3 \leq X \leq 8)$

Exemplo

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$F(x)$	0.140	0.315	0.535	0.795	0.950	0.975	0.990	0.995	1

- Queremos $P(3 \leq X \leq 8)$
- $P(3 \leq X \leq 8) = F(8) - F(3^-) = F(8) - F(2) = 0.995 - 0.315 = 0.68$

Esperança e Variância

Esperança e Variância

O valor esperado, $E(\cdot)$, e a variância, $V(\cdot)$ são duas quantidades frequentemente utilizadas:

- Resumo do comportamento da variável

Esperança e Variância

O valor esperado, $E(\cdot)$, e a variância, $V(\cdot)$ são duas quantidades frequentemente utilizadas:

- Resumo do comportamento da variável
- Servem como parâmetro de vários modelos (Poisson, Normal)

Esperança e Variância

O valor esperado, $E(\cdot)$, e a variância, $V(\cdot)$ são duas quantidades frequentemente utilizadas:

- Resumo do comportamento da variável
- Servem como parâmetro de vários modelos (Poisson, Normal)

Esperança e Variância

O valor esperado, $E(\cdot)$, e a variância, $V(\cdot)$ são duas quantidades frequentemente utilizadas:

- Resumo do comportamento da variável
- Servem como parâmetro de vários modelos (Poisson, Normal)

Esperança

Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade $p(\cdot)$ e com valores x_i para i num conjunto de indices D. O valor esperado de X é definido como

$$E(X) = \sum_{i \in D} x_i p(x_i)$$

Esperança: Exemplo

No exemplo anterior, tinhamos:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	0.140	0.175	0.220	0.260	0.155	0.025	0.015	0.005	0.005

Esperança: Exemplo

No exemplo anterior, tinhamos:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	0.140	0.175	0.220	0.260	0.155	0.025	0.015	0.005	0.005

- $E(X) = \sum_{x=1}^{9} xp(x) =$

Esperança: Exemplo

No exemplo anterior, tinhamos:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$p(x)$	0.140	0.175	0.220	0.260	0.155	0.025	0.015	0.005	0.005

- $E(X) = \sum_{x=1}^{9} xp(x) =$
- $1 \times 0.140 + 2 \times 0.175 + 3 \times 0.220 + \cdots + 9 \times 0.005 = 3.305$

Esperança: Propriedades

Propriedade

Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade $p(\cdot)$ e com valores x_i para i num conjunto de indices D. O valor esperado de qualquer função $h(X)$ é definido como

$$E(h(X)) = \sum_{i \in D} h(x_i)p(x_i)$$

Esperança: Propriedades

Propriedade

Seja X uma v.a. com $E(X) < \infty$. Se $Y = aX + b$ com a e b constantes, então

$$E(Y) = aE(X) + b$$

Esperança e Variância

Variância

Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade $p(x)$ e $E(X) = \mu$. A Variância de X, denotada por $V(X)$ é definida como

$$V(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_x (x - \mu)^2 p(x)$$

O desvio padrão (DP) é definido como $DP(X) = \sigma_X = \sqrt{V(X)}$

Variância: Propriedades

Propriedades

- $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

Variância: Propriedades

Propriedades

- $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$
- $V(aX + b) = a^2 V(X)$

Leituras recomendadas

Leituras recomendadas

- Jay Devore (3.1-3.3)
- DeGroot e Schervish (3.1)

Para praticar

- Lista 5 do gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/ipe/listas/