Introdução à Probabilidade e Estatística
Lista 2

Prof: Carlos Trucíos

1 de Dezembro de 2020

Questões

1. Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade

$$p_X(x) = \begin{cases} cx, & \text{se } x = 1,2,3,4,5 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   (a) Qual o valor de c?

   (b) Calcule $P(X \leq 3)$

   Solução

   (a) Sabemos que $\sum_{x=1}^{5} cx = 1$, então $c \times \frac{5 \times 6}{2} = 1$. Logo, $c = \frac{1}{15}$

   (b) $P(X \leq 3) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{1}{15} + \frac{2}{15} + \frac{3}{15} = \frac{6}{15}$

2. Uma moeda com probabilidade de cara $p = 0.48$ é lançada 10 vezes. Calcule a probabilidade de:

   (a) Obter 2 caras

   (b) Obter no máximo 5 caras

   (c) Obter no mínimo 7 caras

   Solução

   Seja X : número de caras em 10 lancamentos.
   $X \sim Binom(n = 10, p = 0.48)$.
   (a) $P(X = 2) = 0.055$
   dbinom(2,10, 0.48)
   (b) $P(X \leq 5) = 0.671$
   pbinom(5,10,0.48)
   (c) $P(X \geq 7) = 1 - P(X \leq 6) = 0.141$
   1-pbinom(6,10,0.48)

3. Seja X uma v.a. discreta com função de probabilidade

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{c}{x^2}, & \text{se } x = 1,2,3,\ldots \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Qual o valor de c?
   Solução
   Sabemos que $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{c}{x^2} = 1$, mas $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$, então $c \underbrace{\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}}_{\frac{\pi^2}{6}} = 1$. Logo, $c = \frac{6}{\pi^2}$

4. Uma empresa que produz componentes eletrônicos observa que o número médio de componentes que apresenam falha antes das 100 horas de funcionamento é de 8.

   - Qual é a probabilidade de que uma componente falhe antes das 25 horas?
   - Qual é a probabilidade de que falhem no máximo duas componentes em 50 horas?
   - Qual é a probabilidade de que falhem pelo menos 10 componentes em 125 horas?

   Solução
   Seja X : número de componentes eletrônicos que apresentam falha antes das H horas.
   $X \sim Pois(\lambda)$
   λ deve estar na mesma unidade de tempo/espaço que nossa v.a.
   Em média ocorem 8 falhas antes das 100 horas
   Ou seja; 4 falhas antes das 50 horas, 2 falhas antes das 25 horas e....10 falhas antes das 125 horas
   (a) $X \sim Pois(2)$, $P(X = 1) = 0.27$
   dpois(1, 2)
   (b) $X \sim Pois(4)$, $P(X \leq 2) = 0.24$
   ppois(2, 4)
   (c) $X \sim Pois(10)$, $P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 0.54$
   1- ppois(9, 10)

5. A mediana de uma v.a. contínua X e um número m tal que $P(X > m) = 0.5$ e $P(X < m) = 0.5$. Encontre a mediana de X se

   (a) $X \sim U[0, 4]$
   (b) $X \sim N(3, 2)$
   (c) $X \sim Exp(2)$

   Solução
   (a) $\int_0^m \frac{1}{4}dx = 0.5$, $\frac{x}{4}\Big|_0^m = \frac{m}{4} = 0.5$, então $m = 2$.
   (b)
   Primeira forma: Na distribuição Normal a media é igual à mediana, logo $m = 3$
   Segunda forma: O 50-ésimo percentil da $N(\mu, \sigma) = \mu + \underbrace{\Phi^{-1}(0.5)}_{qnorm(0.5)=0} \times \sigma = 3 + 0 \times 2 = 3$

   (c) $\int_0^m 2e^{-2x}dx = 0.5$, $1 - e^{-2m} = 0.5$, $m = \frac{ln(2)}{2}$

6. Seja X uma v.a com função densidade

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & \text{se } 0 < x < 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Qual a função densidade de $Y = 10 - X^3$?
   Solução
   Temos que $y = g(x) = 10 - x^3$ é decrescente em x e derivavel. Então podemos aplicar o método direto.

   Seja X uma v.a. contínua com densidade f_X. Seja $g(x)$ uma função (em x) estritamente crescente (ou decrescente) e derivável. Então, a função densidade da v.a. $Y = g(X)$ é dada por:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y))|\frac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y)|, & \text{se para algum } x, y = g(x) \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   $g^{-1}(y) = (10 - y)^{1/3}$,
   $\Big|\frac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y)\Big| = \frac{1}{3(10 - y)^{2/3}}$,
   $f_X(g^{-1}(y)) = \frac{(10 - y)^{1/3}}{2}$,

   Logo, $f_X(g^{-1}(y))\Big|\frac{\partial}{\partial y}g^{-1}(y)\Big| = \frac{1}{6(10 - y)^{1/3}}$ (Para que valores de y?)

$0 < x < 2$
$0 < (10 - y)^{1/3} < 2$
$0 < 10 - y < 8$
$-8 < y - 10 < 0$
$2 < y < 10$

7. Seja X uma v.a com distribuição desconhecida mas com $E(X) = 5$ e $V(X) = 4$. Utilize o Teorema Central do Limite para obter a distribuição de $\bar{X}$ (para um n suficientemente grande)

Solução
Como não temos mais informação vamos assumir que $\bar{X}$ é formado por n v.as iid.
Pelo TCL iid, como $E(X) = 5$ e $V(X) = 4$, então

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \times 5}{\sqrt{n \times 4}} \sim N(0,1)$$

, logo

$$\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n \times 5}{n}}{\frac{\sqrt{n \times 4}}{n}} \sim N(0,1)$$

. Então

$$\sqrt{n}\frac{\left(\bar{X} - 5\right)}{2} \sim N(0,1)$$