Introdução à Probabilidade e Estatística

Probabilidade Condicional e Independência: Parte I

Carlos Trucíos
ctruciosm.github.io

Universidade Federal do ABC (UFABC)

Semana 4 - Aula 1

Motivação

Motivação

Se lançarmos aleatoriamente dois dados, qual é a probabilidade de obter um 8?

- Seja o evento A : A soma da face superior em ambos os dados é 8, então $A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$,
$$P(A) = \frac{5}{36}$$

Motivação

Se lançarmos aleatoriamente dois dados, qual é a probabilidade de obter um 8?

- Seja o evento A : A soma da face superior em ambos os dados é 8, então $A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$,

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

Se soubermos que o primeiro dado é um 3, qual a probailidade de obter um 8?

Motivação

Se lançarmos aleatoriamente dois dados, qual é a probabilidade de obter um 8?

- Seja o evento A : A soma da face superior em ambos os dados é 8, então $A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$,
$$P(A) = \frac{5}{36}$$

Se soubermos que o primeiro dado é um 3, qual a probailidade de obter um 8?

- $S = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$

Motivação

Se lançarmos aleatoriamente dois dados, qual é a probabilidade de obter um 8?

- Seja o evento A : A soma da face superior em ambos os dados é 8, então $A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$,

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

Se soubermos que o primeiro dado é um 3, qual a probailidade de obter um 8?

- $S = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$
- B : A soma da face superior em ambos os dados é 8

Motivação

Se lançarmos aleatoriamente dois dados, qual é a probabilidade de obter um 8?

- Seja o evento A : A soma da face superior em ambos os dados é 8, então $A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$,

$$P(A) = \frac{5}{36}$$

Se soubermos que o primeiro dado é um 3, qual a probailidade de obter um 8?

- $S = \{(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)\}$
- B : A soma da face superior em ambos os dados é 8
- $$P(B) = \frac{1}{6}$$

Motivação

Sejam A e B dois eventos tais que:

- A : A soma da face superior em ambos os dados é 8
- B : A face do primeiro dado é 3.

Motivação

Sejam A e B dois eventos tais que:

- A : A soma da face superior em ambos os dados é 8
- B : A face do primeiro dado é 3.

Queremos a probabilidade de A acontecer, dado que B acontece.

$$P(A|B)$$

Motivação

Sejam A e B dois eventos tais que:

- A : A soma da face superior em ambos os dados é 8
- B : A face do primeiro dado é 3.

Queremos a probabilidade de A acontecer, dado que B acontece.

$$P(A|B)$$

Intuitivamente

Nosso conhecimento sobre A é atualizado com nosso conhecimento sobre B.

Definição

Definição

Probabilidade Condicional

Sejam $A, B \subset S$, com $P(B) > 0$. Então a probabilidade condicional do evento A *dado* o evento B é dado por

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Definição

Probabilidade Condicional

Sejam $A, B \subset S$, com $P(B) > 0$. Então a probabilidade condicional do evento A *dado* o evento B é dado por

$$P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

Interpretação

A probabilidade condicional do evento A *dado* o evento B é a probabilidade do evento A no subespaço constituido pelo evento B.

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Pelo (A1), $P(A \cap B) \geq 0$ e $P(B) \geq 0$. Logo, $P(A|B) \geq 0$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Pelo (A1), $P(A \cap B) \geq 0$ e $P(B) \geq 0$. Logo, $P(A|B) \geq 0$
- $P(S|B) = \dfrac{P(SB)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Pelo (A1), $P(A \cap B) \geq 0$ e $P(B) \geq 0$. Logo, $P(A|B) \geq 0$
- $P(S|B) = \dfrac{P(SB)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$
- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \dfrac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_iB)}{P(B)} = \dfrac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_iB))}{P(B)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_iB)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Pelo (A1), $P(A \cap B) \geq 0$ e $P(B) \geq 0$. Logo, $P(A|B) \geq 0$
- $P(S|B) = \dfrac{P(SB)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$
- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \dfrac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i B)}{P(B)} = \dfrac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i B))}{P(B)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

Probabilidade Condicional é Probabilidade

Probabilidade Condicional é realmente uma probabilidade:

- $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Pelo (A1), $P(A \cap B) \geq 0$ e $P(B) \geq 0$. Logo, $P(A|B) \geq 0$
- $P(S|B) = \dfrac{P(SB)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1$
- $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \dfrac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i B)}{P(B)} = \dfrac{P(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i B))}{P(B)} = \dfrac{\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|B)$

Probabilidade condicional satisfaz os 3 axiomas de Kolmogorov

Exemplos

Suponha que de todos os individuos que compram um celular pela internet:

- 60% incluem uma capinha protetora no carrinho de compras,
- 40% incluem um fone de ouvido e
- 30% incluem ambos (capinha e fone).

Se selecionarmos um individuo aleatoriamente, qual é a probabilidade do individuo ter comprado um fone de ouvido se soubermos que comprou uma capinha?

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Sejam os eventos:

- A : comprar fone
- B : comprar capinha

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Sejam os eventos:

- A : comprar fone
- B : comprar capinha

Queremos $P(A|B)$,

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Sejam os eventos:

- A : comprar fone
- B : comprar capinha

Queremos $P(A|B)$,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.6} = 1/2$$

Exemplos

Temos que: 60% incluem uma capinha, 40% incluem um fone e 30% incluem ambos.

Sejam os eventos:

- A : comprar fone
- B : comprar capinha

Queremos $P(A|B)$,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.6} = 1/2$$

De forma analoga, $P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. Joao extrai uma carta aleatoriamente e sem reposição e seleciona uma carta vermelha (qual a probabilidade disso acontecer?). Se joão extrair novamente uma carta, qual é a probabilidade de que nessa nova extração a carta seja também vermelha?

- Seja A : extrair uma carta vermelha na primeira extração, $P(A) = \frac{4}{5}$

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. Joao extrai uma carta aleatoriamente e sem reposição e seleciona uma carta vermelha (qual a probabilidade disso acontecer?). Se joão extrair novamente uma carta, qual é a probabilidade de que nessa nova extração a carta seja também vermelha?

- Seja A : extrair uma carta vermelha na primeira extração, $P(A) = \frac{4}{5}$
- Seja B : extrair uma carta vermelha na segunda extração

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. Joao extrai uma carta aleatoriamente e sem reposição e seleciona uma carta vermelha (qual a probabilidade disso acontecer?). Se joão extrair novamente uma carta, qual é a probabilidade de que nessa nova extração a carta seja também vermelha?

- Seja A : extrair uma carta vermelha na primeira extração, $P(A) = \frac{4}{5}$
- Seja B : extrair uma carta vermelha na segunda extração
- De forma intuitiva: $P(B|A) = \frac{3}{4}$

Exemplos

Uma urna tem 1 carta azul e 4 cartas vermelhas. Joao extrai uma carta aleatoriamente e sem reposição e seleciona uma carta vermelha (qual a probabilidade disso acontecer?). Se joão extrair novamente uma carta, qual é a probabilidade de que nessa nova extração a carta seja também vermelha?

- Seja A : extrair uma carta vermelha na primeira extração, $P(A) = \frac{4}{5}$
- Seja B : extrair uma carta vermelha na segunda extração
- De forma intuitiva: $P(B|A) = \frac{3}{4}$
- Usando a definição:

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{4 \times 3 \times 3!}{5!}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Propriedades

Probabilidade condicional satisfaz os axiomas de Kolmogorov (i.e. é Probabilidade). Consequentemente, todas as propriedades validas para probabilidade são também validas para Probabilidade Condicional.

- $0 \leq P(A|B) \leq 1$

Propriedades

Probabilidade condicional satisfaz os axiomas de Kolmogorov (i.e. é Probabilidade). Consequentemente, todas as propriedades validas para probabilidade são também validas para Probabilidade Condicional.

- $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$

Propriedades

Probabilidade condicional satisfaz os axiomas de Kolmogorov (i.e. é Probabilidade). Consequentemente, todas as propriedades validas para probabilidade são também validas para Probabilidade Condicional.

- $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$

Propriedades

Probabilidade condicional satisfaz os axiomas de Kolmogorov (i.e. é Probabilidade). Consequentemente, todas as propriedades validas para probabilidade são também validas para Probabilidade Condicional.

- $0 \leq P(A|B) \leq 1$
- $P(A^c|B) = 1 - P(A|B)$
- $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cap B|C)$
- $\ldots$

Três Teoremas

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Teorema 1: Regra da Multiplicação.

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Teorema 1: Regra da Multiplicação.

- (a) Sejam os eventos A e B. Então

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Teorema 1: Regra da Multiplicação.

- (a) Sejam os eventos A e B. Então

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Regra da Multiplicação

Muitas vezes estamos interessados em probabilidades do tipo $P(A \cap B)$. Se tivermos $P(A)$ e $P(B|A)$, a probabilidade desejada é facilmente obtida.

Teorema 1: Regra da Multiplicação.

- (a) Sejam os eventos A e B. Então

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

- (b) Sejam os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Então

$$P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_2A_1) \ldots P(A_n|A_{n-1} \ldots A_1)$$

Regra da Multiplicação: Prova

(a) decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

Regra da Multiplicação: Prova

(a) decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

Regra da Multiplicação: Prova

(a) decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- Para 2 eventos é valida (parte a)

Regra da Multiplicação: Prova

(a) decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- Para 2 eventos é valida (parte a)
- Supomos que vale para n,
  $P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_{n-1} \ldots A_1)$

Regra da Multiplicação: Prova

(a) decorre da definição.

$$P(B|A) = P(B \cap A)/P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$$

(b) (Por indução)

- Para 2 eventos é valida (parte a)
- Supomos que vale para n,
  $P(A_1A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1) \ldots P(A_n|A_{n-1} \ldots A_1)$
- Vamos provar para $n+1$,

$$P(A_1 \ldots A_nA_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_1 \ldots A_n)P(A_1 \ldots A_n) =$$

$$P(A_{n+1}|A_n \ldots A_1)P(A_n|A_{n-1} \ldots A_1) \ldots P(A_1)$$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro de Campinas precisam de sangue tipo O+. Quatro individuos (que não conhecem seu tipo sanguineo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três individuos tenham que ser testador para a obtencão do tipo de sangue desejado?

- Sejam os eventos A_i : o i-ésimo individuo não é O+.

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro de Campinas precisam de sangue tipo O+. Quatro individuos (que não conhecem seu tipo sanguineo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três individuos tenham que ser testador para a obtencão do tipo de sangue desejado?

- Sejam os eventos A_i : o i-ésimo individuo não é O$+$.
- $P(A_1) = \frac{3}{4}$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro de Campinas precisam de sangue tipo O+. Quatro individuos (que não conhecem seu tipo sanguineo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três individuos tenham que ser testador para a obtencão do tipo de sangue desejado?

- Sejam os eventos A_i : o i-ésimo individuo não é O+.
- $P(A_1) = \frac{3}{4}$
- $P(A_2|A_1) = \frac{2}{3}$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No Hemocentro de Campinas precisam de sangue tipo O+. Quatro individuos (que não conhecem seu tipo sanguineo mas sabem que um deles tem o tipo de sangue desejado), resolvem doar sangue. Se os doadores são selecionado aleatoriamente, qual é a probabilidade de que pelos menos três individuos tenham que ser testador para a obtencão do tipo de sangue desejado?

- Sejam os eventos A_i : o i-ésimo individuo não é O+.
- $P(A_1) = \frac{3}{4}$
- $P(A_2|A_1) = \frac{2}{3}$
- $P(\text{Testar pelo menos 3 individuos}) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2|A_1) = \frac{3}{4}\frac{2}{3} = 0.5$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No exemplo anterior. Qual é a probabilidade do Terceiro ser O+?

- Seja o evento B : O terceiro individuo é O$+$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No exemplo anterior. Qual é a probabilidade do Terceiro ser O+?

- Seja o evento B : O terceiro individuo é O+
- $P(B) = P(B \cap A_2 \cap A_1) = P(B|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No exemplo anterior. Qual é a probabilidade do Terceiro ser O+?

- Seja o evento B : O terceiro individuo é O+
- $P(B) = P(B \cap A_2 \cap A_1) = P(B|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Regra da Multiplicação: Exemplo

No exemplo anterior. Qual é a probabilidade do Terceiro ser O+?

- Seja o evento B : O terceiro individuo é O+
- $P(B) = P(B \cap A_2 \cap A_1) = P(B|A_2 \cap A_1)P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Dica

Quando o experimento consistir em uma sequencia de diversas etapas, pode ser útil apresentarlo em um diagrama de árvore

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas, 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

- Sejam os eventos A_i : a i-ésima extração é vermelha

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas, 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

- Sejam os eventos A_i : a i-ésima extração é vermelha
- $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1)$

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas, 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

- Sejam os eventos A_i : a i-ésima extração é vermelha
- $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1)$
- $P(A_1) = \frac{3}{10} = 0.3$

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas, 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

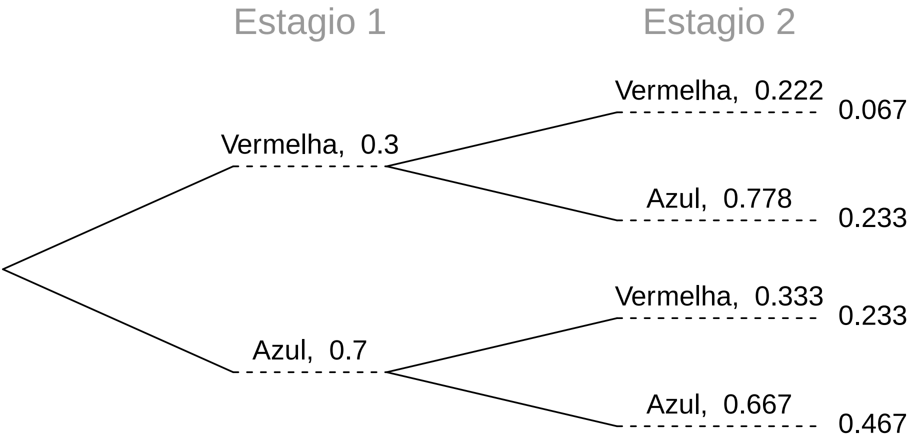
- Sejam os eventos A_i : a i-ésima extração é vermelha
- $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1)$
- $P(A_1) = \frac{3}{10} = 0.3$
- $P(A_2^c|A_1) = \frac{7}{9} = 0.778$

Regra da Multiplicação: Exemplo

Em uma urna temos 10 bolas, 3 vermelhas e 7 azuis. Se extrairmos 2 bolas aleatoriamente e sem reposição, qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração e uma bola vermelha na primeira extração?

- Sejam os eventos A_i : a i-ésima extração é vermelha
- $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1)$
- $P(A_1) = \dfrac{3}{10} = 0.3$
- $P(A_2^c|A_1) = \dfrac{7}{9} = 0.778$
- $P(A_1 \cap A_2^c) = P(A_1)P(A_2^c|A_1) = \dfrac{3}{10}\dfrac{7}{9} = 0.233$

Regra da Multiplicação: Exemplo



Teorema da Probabilidade Total

Teorema 2: Teorema da Probabilidade Total

Sejam os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ que formam uma partição[a] de S. Então, para quaquer evento B,

$$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + \ldots + P(B|A_n) = \sum_{i}^{n} P(B|A_i)P(A_i)$$

[a] Os eventos formam uma partição se são disjuntos ($A_i \cap A_j = \varnothing$) e exaustivos ($\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$) simultaneamente.

Teorema da Probabilidade Total: Prova

- Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição de S

Teorema da Probabilidade Total: Prova

- Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição de S
- $B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n)}_{Disjuntos}$

Teorema da Probabilidade Total: Prova

- Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição de S
- $B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n)}_{Disjuntos}$
- (Pelo A3) $P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$

Teorema da Probabilidade Total: Prova

- Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição de S
- $B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n)}_{Disjuntos}$
- (Pelo A3) $P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n}(B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$
- (Pelo T1) $P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$

Teorema da Probabilidade Total: Prova

- Os eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ formam uma partição de S
- $B = \underbrace{(B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots (B \cap A_n)}_{Disjuntos}$
- (Pelo A3) $P(B) = P(\bigcup_{i=1}^{n} (B \cap A_i)) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i)$
- (Pelo T1) $P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$
- $P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i)$

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior. Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior. Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- A_1 : a bola da primeira extração é vermelha

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior. Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- A_1 : a bola da primeira extração é vermelha
- A_2 : a bola da primeira extração é Azul

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior. Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- A_1 : a bola da primeira extração é vermelha
- A_2 : a bola da primeira extração é Azul
- B : a bol da segunda extração é azul

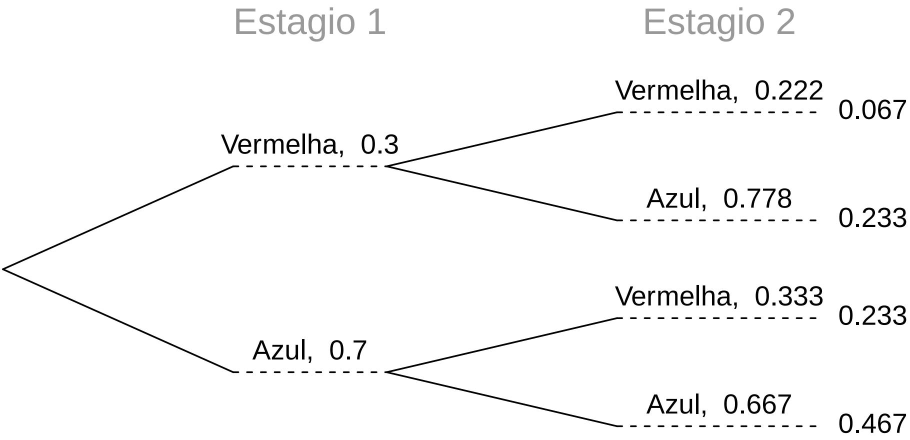
Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Voltando ao exemplo anterior. Qual é a probabilidade de obter uma bola azul na segunda extração?

Sejam os eventos:

- A_1 : a bola da primeira extração é vermelha
- A_2 : a bola da primeira extração é Azul
- B : a bol da segunda extração é azul
- $P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2)$

Teorema da Probabilidade Total: Exemplo



Teorema da Probabilidade Total: Exemplo

Teorema de Bayes

Teorema 3: Teorema de Bayes

Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ eventos que formam uma partição de S (i.e. são disjuntos e exaustivos) e seja B um evento qualquer com $P(B) > 0$. Então, $\forall i,\ i = 1, \ldots, n$.

$$P(A_i|B) = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i)P(A_i)}$$

Leituras recomendadas

Leituras recomendadas

- Ross Cap. 3 (3.1 à 3.3)
- DeGroot Cap 2 (2.1 e 2.2)
- Jay L. Devore (2018). Probabilidade e Estatística para engenharia e ciências (2.4)

Para praticar

- Resolver os exercícios correspondentes ao Cap 3 do Ross
- Lista 4 do gradmat.ufabc.edu.br/disciplinas/ipe/listas/