Modelos de Regressão e Previsão

Análise de regressão com dados de séries temporais II

Prof. Carlos Trucíos
carlos.trucios@facc.ufrj.br
ctruciosm.github.io

Faculdade de Administração e Ciências Contábeis
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Aula 13

Introdução

Introdução

- **HST1**: $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \cdots + \beta_k x_{tk} + u_t$, $t = 1, \ldots, n$
- **HST2**: Não existe colinearidade perfeita entre as variáveis independêntes e nenhuma das variáveis independentes é constante.
- **HST3**: $E(u_t|X) = 0$, $t = 1, \ldots, n$
- **HST4**: Homocedasticidade, $V(u_t|X) = V(u_t) = \sigma^2$, $t = 1, \ldots, n$
- **HST5**: $Corr(u_t, u_s|X) = 0$, $\forall t \neq s$
- **HST6**: Os erros u_t são independentes de X e $u_t \sim N(0, \sigma^2)$

Na última aula vimos que sob HST1–HST6 podemos incluir séries temporais num contexto de análise de regressão e ainda termos que $\hat{\beta}$ é BLUE e podemos fazer inferência como usual.

Introdução

- Contudo, algumas das hipóteses HST1–HSTT5 são irreais (em especial HST3 e HST5) e podem não ser verificadas na prática, invalidando assim as propriedades do $\hat{\beta}$

Introdução

- Contudo, algumas das hipóteses HST1–HSTT5 são irreais (em especial HST3 e HST5) e podem não ser verificadas na prática, invalidando assim as propriedades do $\hat{\beta}$
- Em amostras grandes, podemos relaxar algumas hipóteses e ainda assim garantir algumas propriedades de $\hat{\beta}$.

Introdução

- Contudo, algumas das hipóteses HST1–HSTT5 são irreais (em especial HST3 e HST5) e podem não ser verificadas na prática, invalidando assim as propriedades do $\hat{\beta}$
- Em amostras grandes, podemos relaxar algumas hipóteses e ainda assim garantir algumas propriedades de $\hat{\beta}$.
- Começaremos estudando dois conceitos necessários para aplicar as aproximações em amostras grandes com dados de séries temporais: **processo de covariância estacionária** e **séries fracamente dependentes**.

Conceitos básicos

Conceitos básicos

Processo de covariância estacionária

Um proceso estocástico $\{x_t\}_{t\geq 1}$ com $E(x_t^2) < \infty$ tem covariância estacionária se

- $E(x_t) = \mu, \quad \forall t$
- $V(x_t) = \sigma^2, \quad \forall t$
- $Cov(x_t, x_{t+h})$ depende somente de h e não de t.

Conceitos básicos

Processo de covariância estacionária

Um proceso estocástico $\{x_t\}_{t\geq 1}$ com $E(x_t^2) < \infty$ tem covariância estacionária se

- $E(x_t) = \mu, \quad \forall t$
- $V(x_t) = \sigma^2, \quad \forall t$
- $Cov(x_t, x_{t+h})$ depende somente de h e não de t.

- A média e a variância são constantes ao longo do tempo
- Como a covariância depende somente de h, a correlação $Cor(x_t, x_{t+h})$ também depende somente de h.
- HST3 – HST5 implicam que o erro é estacionário (média e variância constantes)

Conceitos básicos

Dependencia fraca

Uma série temporal com covariância estacionária é fracamente dependente se a $Cor(x_t, x_{t+h}) \approx 0$ rapidamente quando $h \to \infty$

- Dependência fraca é um conceito importante na análise de regressão pois ela substituirá a hipóteses de amostragem aleatoria e então conseguirmos resultados assintóticos [Não veremos isso nessa disciplina].

Séries temporais com covariância estacionária e fracamente dependentes são ideais para serem usadas num contexto de análise de regressão.

Processos MA(1) e AR(1)

Processos MA(1) e AR(1)

Processo de Média Móvel de ordem um: MA(1)

Seja a série temporal x_t que segue o seguinte processo

$$x_t = e_t + \alpha e_{t-1} \quad t = 1, 2, \ldots$$

em que $e_t \sim D(0, \sigma^2)$

- $E(x_t) = 0$
- $V(x_t) = (1 + \alpha^2)\sigma^2$
- $Cov(x_t, x_{t+1}) = \alpha\sigma^2$
- $Corr(x_t, x_{t+1}) = \dfrac{\alpha}{1 + \alpha^2}$
- $Corr(x_t, x_{t+h}) = 0 \; \forall \; h \geq 2$

Processos MA(1) e AR(1)

Processo Autorregressivo de ordem um: AR(1)

Seja a série temporal x_t que segue o seguinte processo

$$x_t = \rho x_{t-1} + e_t \quad t = 1, 2, \dots$$

em que $e_t \sim D(0, \sigma^2)$

- $E(x_t) = 0$
- $V(x_t) = \dfrac{\sigma^2}{1-\rho^2}$ $(|\rho| < 1)$
- $Cov(x_t, x_{t+h}) = \rho^h V(x_t) \ \forall \ h \geq 1$
- $Corr(x_t, x_{t+h}) = \rho^h$

Processos MA(1) e AR(1)

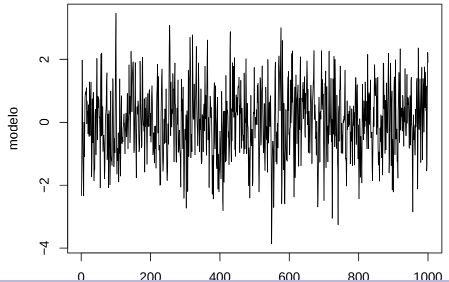
- Processos MA(1) e AR(1)[1] são bastante utilizados em séries temporais
- Podemos utilizar a função de autocorrelação para identifica-los
- Lembre-se que:

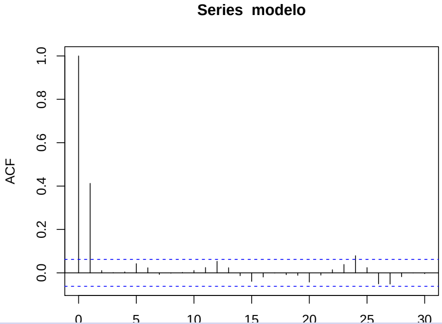
MA(1)	AR(1)
$Corr(x_t, x_{t+1}) = \dfrac{\alpha}{1+\alpha^2}$	$Corr(x_t, x_{t+h}) = \rho^h$
$Corr(x_t, x_{t+h}) = 0,\ h \geq 2$	-

[1] Em geral MA(q) e AR(p)

MA(1): função de autocorrelação

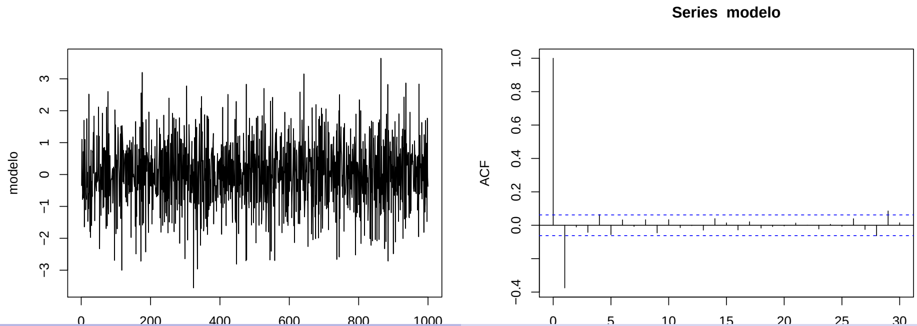
```
modelo = arima.sim(n = 1000, list(ma = 0.5))
par(mfrow = c(1,2))
ts.plot(modelo)
acf(modelo)
```





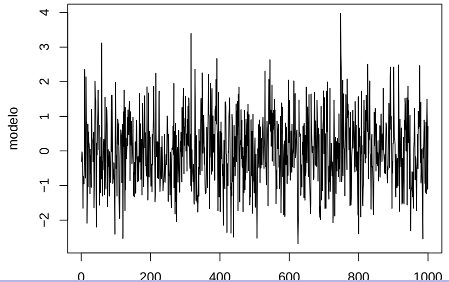
MA(1): função de autocorrelação

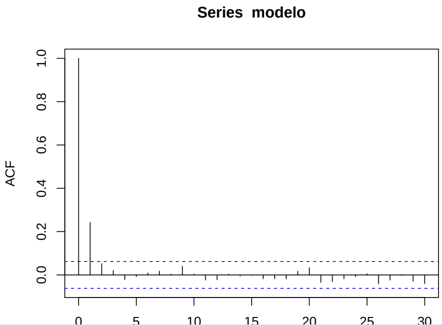
```
modelo = arima.sim(n = 1000, list(ma = -0.5))
par(mfrow = c(1,2))
ts.plot(modelo)
acf(modelo)
```



MA(1): função de autocorrelação

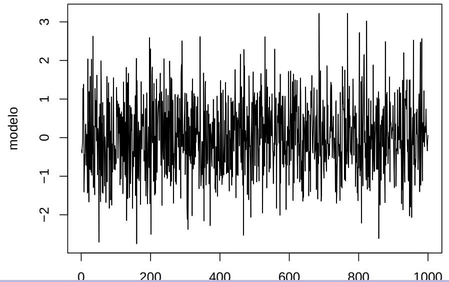
```
modelo = arima.sim(n = 1000, list(ma = 0.2))
par(mfrow = c(1,2))
ts.plot(modelo)
acf(modelo)
```

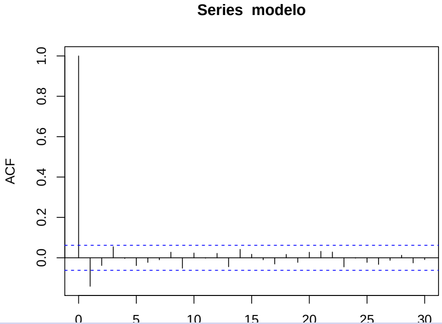




MA(1): função de autocorrelação

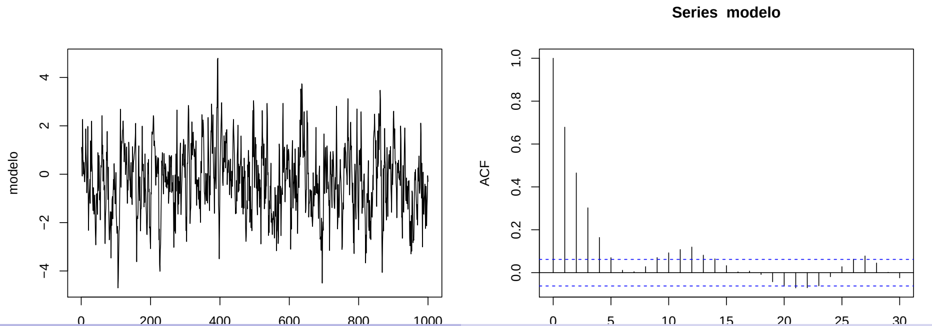
```
modelo = arima.sim(n = 1000, list(ma = -0.15))
par(mfrow = c(1,2))
ts.plot(modelo)
acf(modelo)
```





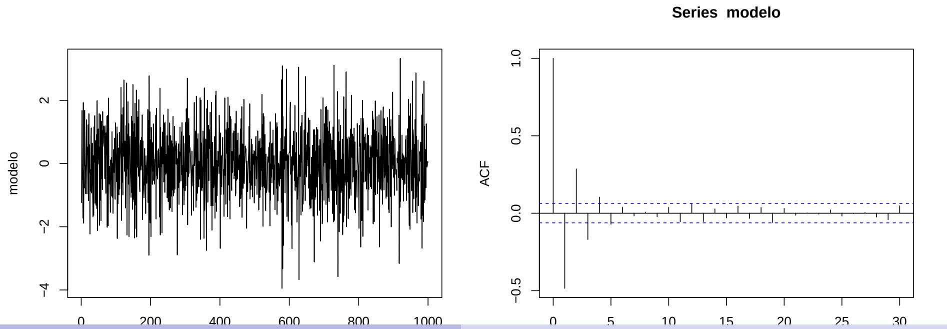
AR(1)

```
modelo = arima.sim(n = 1000, list(ar = 0.7))
par(mfrow = c(1,2))
ts.plot(modelo)
acf(modelo)
```



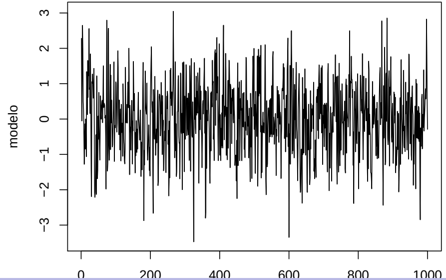
AR(1)

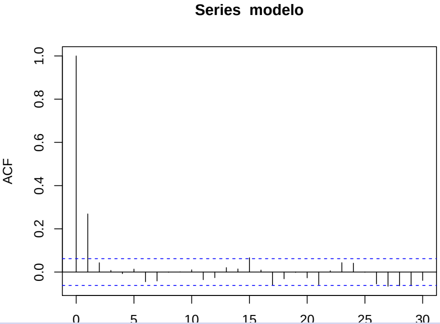
```
modelo = arima.sim(n = 1000, list(ar = -0.5))
par(mfrow = c(1,2))
ts.plot(modelo)
acf(modelo)
```



AR(1)

```
modelo = arima.sim(n = 1000, list(ar = 0.3))
par(mfrow = c(1,2))
ts.plot(modelo)
acf(modelo)
```





Propriedades de MQO em amostras grandes

Propriedades de MQO em amostras grandes

- HST1*: HST1 + $\{(X_t, y_t) \quad t = 1, 2, \ldots\}$ é estacionária e fracamente dependênte.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t,1} + \ldots + \beta_k x_{t,k} + u$$

mas dessa vez $x_{t,j}$ pode incluir defasagens da variável dependente.

Propriedades de MQO em amostras grandes

- HST1*: HST1 + $\{(X_t, y_t) \quad t = 1, 2, \ldots\}$ é estacionária e fracamente dependênte.
$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t,1} + \ldots + \beta_k x_{t,k} + u$$
mas dessa vez $x_{t,j}$ pode incluir defasagens da variável dependente.
- HST2*: HST2 (colinearidade imperfeita)

Propriedades de MQO em amostras grandes

- HST1*: HST1 + $\{(X_t, y_t) \quad t = 1, 2, \ldots\}$ é estacionária e fracamente dependênte.
$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t,1} + \ldots + \beta_k x_{t,k} + u$$
mas dessa vez $x_{t,j}$ pode incluir defasagens da variável dependente.
- HST2*: HST2 (colinearidade imperfeita)
- HST3*: $E(u_t|X_t) = 0$ (mais fraca que HST3: $E(u_t|X) = 0$)

Propriedades de MQO em amostras grandes

- HST1*: HST1 + $\{(X_t, y_t) \quad t = 1, 2, \ldots\}$ é estacionária e fracamente dependênte.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t,1} + \ldots + \beta_k x_{t,k} + u$$

  mas dessa vez $x_{t,j}$ pode incluir defasagens da variável dependente.
- HST2*: HST2 (colinearidade imperfeita)
- HST3*: $E(u_t|X_t) = 0$ (mais fraca que HST3: $E(u_t|X) = 0$)
- HST4*: $V(u_t|X_t) = \sigma^2$ (mais fraca que HST4: $V(u_t|X) = \sigma^2$)

Propriedades de MQO em amostras grandes

- HST1*: HST1 + $\{(X_t, y_t) \quad t = 1, 2, \ldots\}$ é estacionária e fracamente dependênte.
$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t,1} + \ldots + \beta_k x_{t,k} + u$$
mas dessa vez $x_{t,j}$ pode incluir defasagens da variável dependente.
- HST2*: HST2 (colinearidade imperfeita)
- HST3*: $E(u_t|X_t) = 0$ (mais fraca que HST3: $E(u_t|X) = 0$)
- HST4*: $V(u_t|X_t) = \sigma^2$ (mais fraca que HST4: $V(u_t|X) = \sigma^2$)
- HST5*: $E(u_t u_s|X_t X_s) = 0 \; \forall \; t \neq s$

Propriedades de MQO em amostras grandes

Consistência

Sob HST1–HST3,

$$plim_{n\to\infty}\hat{\beta} = \beta$$

Normalidade assintótica do MQO

Sob agumas HST1–HST5, quando $n \to \infty$,

$$\frac{\hat{\beta} - \beta}{V(\hat{\beta})} \sim N(0, 1)$$

Não estacionariedade e não fracamente dependentes

Não Estacionariedade e não fracamente dependentes

Muitas séries temporais são não estacionárias e não são fracamente dependêntes

Não Estacionariedade e não fracamente dependentes

Muitas séries temporais são não estacionárias e não são fracamente dependêntes

- Utilizar MQO não é uma boa opção

Não Estacionariedade e não fracamente dependentes

Muitas séries temporais são não estacionárias e não são fracamente dependêntes

- Utilizar MQO não é uma boa opção
- Podemos utilizar transformações para eliminar esse problema.

Não Estacionariedade e não fracamente dependentes

Muitas séries temporais são não estacionárias e não são fracamente dependêntes

- Utilizar MQO não é uma boa opção
- Podemos utilizar transformações para eliminar esse problema.
- Geralmente fazer uma diferenciação $x_t - x_{t-1}$ resolve o problema[2]

[2] $\log(x_t) - \log(x_{t-1})$ também é frequentemente utilizado.

Não Estacionariedade e não fracamente dependentes

Muitas séries temporais são não estacionárias e não são fracamente dependêntes

- Utilizar MQO não é uma boa opção
- Podemos utilizar transformações para eliminar esse problema.
- Geralmente fazer uma diferenciação $x_t - x_{t-1}$ resolve o problema[2]

[2] $\log(x_t) - \log(x_{t-1})$ também é frequentemente utilizado.

Não Estacionariedade e não fracamente dependentes

Muitas séries temporais são não estacionárias e não são fracamente dependêntes

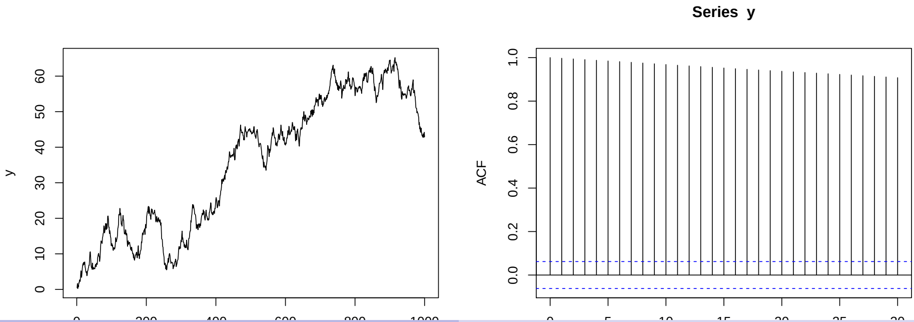
- Utilizar MQO não é uma boa opção
- Podemos utilizar transformações para eliminar esse problema.
- Geralmente fazer uma diferenciação $x_t - x_{t-1}$ resolve o problema[2]

Mas como vamos identificar se precisamos ou não diferenciar?
Função de autocorrelação

[2] $\log(x_t) - \log(x_{t-1})$ também é frequentemente utilizado.

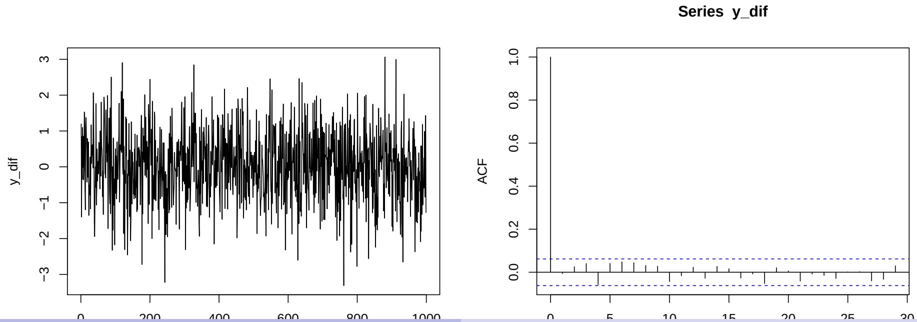
Não Estacionariedade e não fracamente dependentes

```r
y = cumsum(rnorm(1000)) # Passeio aleatorio
par(mfrow = c(1,2))
ts.plot(y)
acf(y)
```



Não Estacionariedade e não fracamente dependentes

```
y_dif = diff(y)
par(mfrow = c(1,2))
ts.plot(y_dif)
acf(y_dif)
```



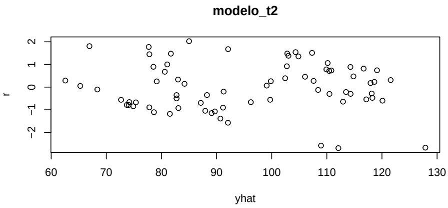
Exemplo

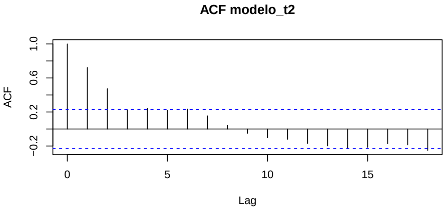
Na aula anterior tinhamos feito:

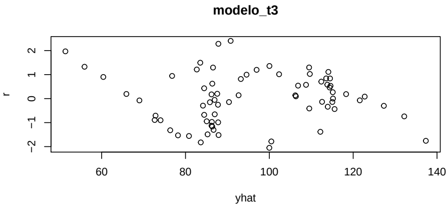
```
library(wooldridge)
modelo_t2 = lm(gfr ~ pe + ww2 + pill +
                 t + I(t^2), data = fertil3)
modelo_t3 = lm(gfr ~ pe + ww2 + pill +
                 t + I(t^2) + I(t^3), data = fertil3)
```

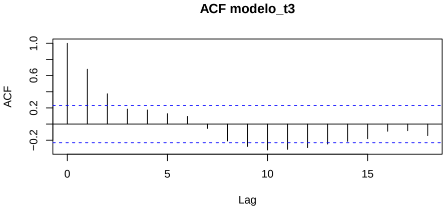
Mas será que esses modelos verificam as hipóteses?

Exemplo


modelo_t2
r
yhat
60
70
80
90
100
110
120
130
−2
−1
0
1
2


ACF modelo_t2
ACF
Lag
0
5
10
15
−0.2
0.2
0.6
1.0


modelo_t3
r
yhat
60
80
100
120
140
−2
−1
0
1
2


ACF modelo_t3
ACF
Lag
0
5
10
15
−0.2
0.2
0.6
1.0

Exemplo

Agora vamos fazer o modelo convertendo as variáveis para estacionárias e fracamente dependentes, modelaremos:

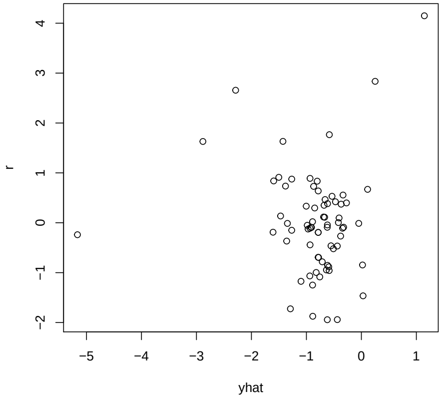
$$\Delta gfr = \beta_0 + \beta_1 \Delta pe + u$$

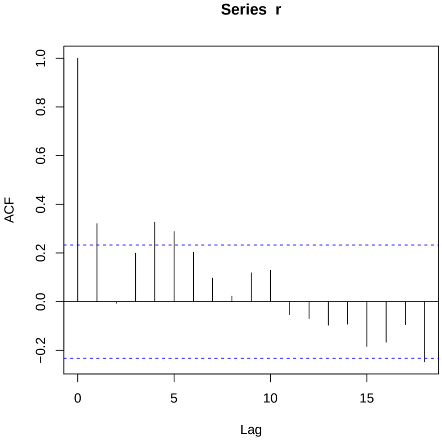
```
modelo = lm(cgfr~cpe, data = fertil3)
round(summary(modelo)$coef,4)
```

```
##              Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)   -0.7848     0.5020 -1.5632   0.1226
## cpe           -0.0427     0.0284 -1.5045   0.1370
```

```
summary(modelo)$adj.r.squared #0.01772896
```

Exemplo





Exemplo

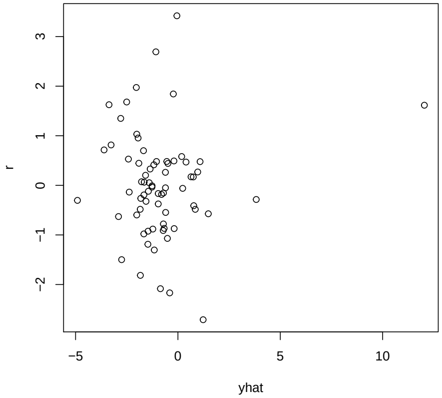
```
modelo = lm(cgfr~cpe + cpe_1 + cpe_2, data = fertil3)
round(summary(modelo)$coef,4)
```

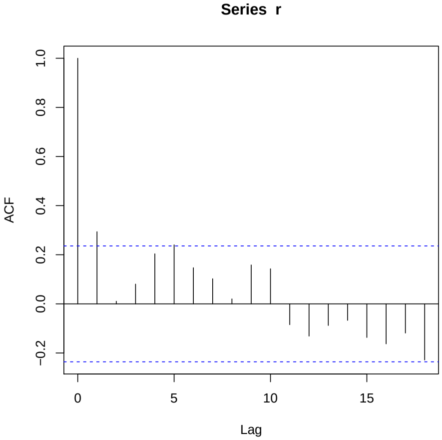
```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -0.9637     0.4678 -2.0602   0.0434
## cpe          -0.0362     0.0268 -1.3522   0.1810
## cpe_1        -0.0140     0.0276 -0.5070   0.6139
## cpe_2         0.1100     0.0269  4.0919   0.0001
```

```
summary(modelo)$adj.r.squared
```

```
## [1] 0.1970524
```

Exemplo





Exemplo

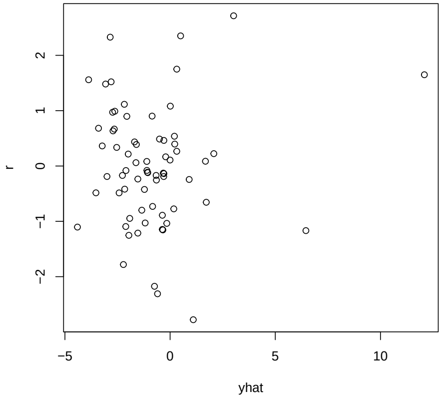
```
modelo = lm(cgfr~ cpe + cpe_1 + cpe_2 + ww2 + pill, data = fertil
round(summary(modelo)$coef,4)
```

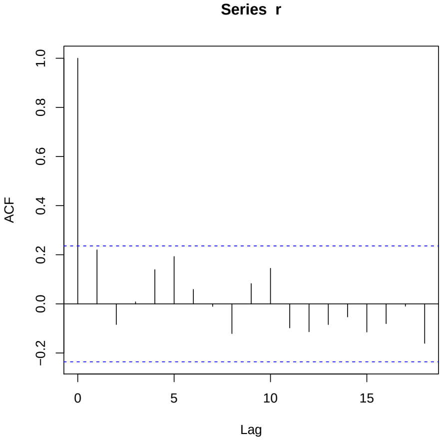
```
##             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
## (Intercept)  -0.6503     0.5818 -1.1177   0.2679
## cpe          -0.0752     0.0324 -2.3230   0.0234
## cpe_1        -0.0514     0.0332 -1.5495   0.1263
## cpe_2         0.0883     0.0280  3.1546   0.0025
## ww2           4.8392     2.8320  1.7088   0.0924
## pill         -1.6761     1.0048 -1.6682   0.1002
```

```
summary(modelo)$adj.r.squared
```

```
## [1] 0.239701
```

Exemplo





Conclussões

- Quando trabalhamos com séries temporais, o gráfico da função de autocorrelação é **fundamental**

Conclussões

- Quando trabalhamos com séries temporais, o gráfico da função de autocorrelação é **fundamental**
- Se as autocorrelações caem lentamente, indica que o processo não é estacionário e precisamos fazer diferenciação

Conclussões

- Quando trabalhamos com séries temporais, o gráfico da função de autocorrelação é **fundamental**
- Se as autocorrelações caem lentamente, indica que o processo não é estacionário e precisamos fazer diferenciação
- Outra alternativa se as séries foram estritamente positivas é $\log(x_t) - \log(x_{t-1})$

Conclussões

- Quando trabalhamos com séries temporais, o gráfico da função de autocorrelação é **fundamental**
- Se as autocorrelações caem lentamente, indica que o processo não é estacionário e precisamos fazer diferenciação
- Outra alternativa se as séries foram estritamente positivas é $\log(x_t) - \log(x_{t-1})$
- As séries *diferenciadas* são utilizadas nos modelos de regressão

Conclussões

- Quando trabalhamos com séries temporais, o gráfico da função de autocorrelação é **fundamental**
- Se as autocorrelações caem lentamente, indica que o processo não é estacionário e precisamos fazer diferenciação
- Outra alternativa se as séries foram estritamente positivas é $\log(x_t) - \log(x_{t-1})$
- As séries *diferenciadas* são utilizadas nos modelos de regressão
- A função de autocorrelação das séries diferenciadas podem evidenciar um processo AR(p) ou M(q) ou combinações de ambos.

Conclussões

- Quando trabalhamos com séries temporais, o gráfico da função de autocorrelação é **fundamental**
- Se as autocorrelações caem lentamente, indica que o processo não é estacionário e precisamos fazer diferenciação
- Outra alternativa se as séries foram estritamente positivas é $\log(x_t) - \log(x_{t-1})$
- As séries *diferenciadas* são utilizadas nos modelos de regressão
- A função de autocorrelação das séries diferenciadas podem evidenciar um processo AR(p) ou M(q) ou combinações de ambos.
- Difereciar séries temporais antes de utiliza-las no modelo de regressão tem também o beneficio de remover a tendência temporal linear (em lugar de incluir tendencia temporal no modelo, podemos diferencias as series com tendências obvias.)

Leituras recomendadas

Leituras recomendadas

- Wooldridge, Jeffrey M. *Introdução à Econometria: Uma abordagem moderna*. (2016). Cengage Learning. – **Cap 11**