Cálculo de una Variable: Evaluación Continua 2

1.- Use el criterio de la primera derivada para determinar:

a) El máximo y mínimo local de $f(x) = (x+3)^2 e^{-x}$

Resolución:

Derivamos:

$f(x) = (x+3)^2 e^{-x}$

$f'(x) = d[(x+3)^2]e^{-x} + (x+3)^2 d[e^{-x}]$

$f'(x) = 2(x+3)e^{-x} - (x+3)^2 e^{-x}$

Igualamos a 0 la Derivada para Hallar los Puntos Críticos:

$f'(x) = 0$

$2(x+3)e^{-x} - (x+3)^2 e^{-x} = 0$

$e^{-x}[2(x+3) - (x+3)^2] = 0$

Se tendría que $e^{-x} = 0 \vee 2(x+3) - (x+3)^2 = 0$, pero como $e^{-x} > 0$, entonces:

$2(x+3) - (x+3)^2 = 0$

$(x+3)[2 - (x+3)] = 0$

$(x+3)(2 - x - 3) = 0$

$(x+3)(-x-1) = 0$

$-(x+3)(x+1) = 0$

$x = -3 \vee x = -1$

Tenemos los puntos críticos: $x = -3 \wedge x = -1$, los cuales pueden representar un máximo local, un mínimo local o un punto de inflexión, para ello, tenemos los siguientes intervalos: $]-\infty; -3[,]-3; -1[$ y $]-1; +\infty[$, para determinar los si dichos puntos críticos son de tipo máximo local, mínimo local o punto de inflexión, entonces evaluamos la derivada en algún valor arbitrario dentro de los 3 intervalos hallados e interpretamos los resultados:

En $]-\infty; -3[$:

Evaluamos el valor -5 en la derivada:

$f'(x) = 2(x+3)e^{-x} - (x+3)^2 e^{-x}$

$f'(-5) = 2(-5+3)e^{-(-5)} - (-5+3)^2 e^{-(-5)}$

$f'(-5) = 2(-2)e^5 - (-2)^2e^5 = -4e^5 - 4e^5 = -8e^5 < 0$

Notamos que $f'(-5) < 0$.

En $]-3; -1[$:

Evaluamos el valor -2 en la derivada:

$f'(x) = 2(x+3)e^{-x} - (x+3)^2e^{-x}$

$f'(-2) = 2(-2+3)e^{-(-2)} - (-2+3)^2e^{-(-2)}$

$f'(-2) = 2(1)e^2 - (1)^2e^2 = 2e^2 - e^2 = e^2 > 0$

Notamos que $f'(-2) > 0$.

En $]-1; +\infty[$:

Evaluamos 0 en la derivada:

$f'(x) = 2(x+3)e^{-x} - (x+3)^2e^{-x}$

$f'(0) = 2(0+3)e^{-(0)} - (0+3)^2e^{-(0)}$

$f'(0) = 2(3)e^0 - (3)^2e^0$

$f'(0) = 2(3) - (3)^2 = 6 - 81 = -75 < 0$

Notamos que $f'(0) < 0$.

Hacemos interpretación de los Resultados:

1) El punto crítico -3 está entre los intervalos $]-\infty; -3[$ y $]-3; -1[$, por los resultados anteriores, la derivada pasa de valores negativos a positivos. En consecuencia, -3 es la **abscisa** del **mínimo local.**
   $f(-3) = (-3+3)^2e^{-(-3)} = (0)^2e^3 = 0$
   En consecuencia, $(-3; 0)$ es un **mínimo local.**
2) El punto crítico -1 está entre los intervalos $]-3; -1[$ y $]-1; +\infty[$, por los resultados anteriores, notamos que la derivada pasa de valores positivos a negativos. En consecuencia, -1 es la **abscisa** del **máximo local.**
   $f(-1) = (-1+3)^2e^{-(-1)} = (2)^2e^1 = 4e$
   En consecuencia, $(-1; 4e)$ es un **máximo local.**

Respuesta: $(-3; 0)$ es el **mínimo local** y $(-1; 4e)$ es el **máximo local.**

b) Las intersecciones con los ejes coordenados del gráfico de f.

Resolución:

Para la intersección de f con el Eje y:

$f(x) = (x+3)^2 e^{-x}$

$f(0) = (0+3)^2 e^{-(0)} = (3)^2 e^0 = 9$

En consecuencia, Intersección con el Eje y: $(0; 9)$.

Para la intersección de f con el Eje x:

$f(x) = 0$

$(x+3)^2 e^{-x} = 0$

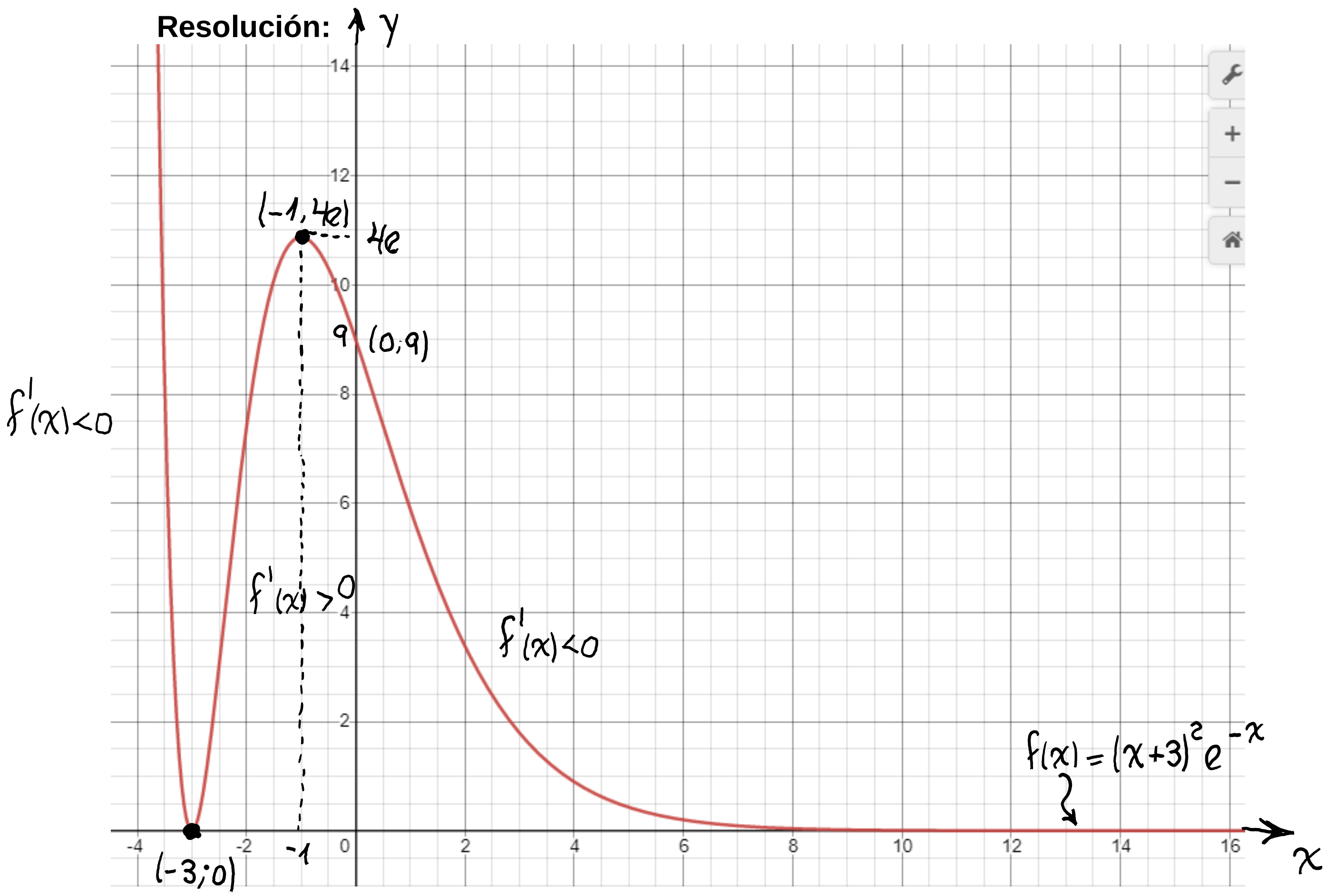
Se tendría que $(x+3)^2 = 0 \vee e^{-x} = 0$, pero como $e^{-x} > 0$, entonces:

$(x+3)^2 = 0 \rightarrow x = -3$

En consecuencia, Intersección con el Eje x: $(-3; 0)$.

c) Trace un gráfico para f.

Resolución:



2.- Se desea construir un almacén con un volumen de 100 metros cúbicos que tenga techo plano y base rectangular cuyo ancho sea tres cuartas partes de su longitud. El costo por metro cuadrado de los materiales es de 36 dólares para el piso, 54 dólares para los lados, 27 dólares para el techo. ¿Qué dimensiones minimizan el costo?

Resolución:

Datos:

Longitud o Largo: x

Ancho: $\frac{3}{4}x$

Altura: h

Volumen: $100\mathrm{m}^3$

Costo por m^2 de los materiales:

Para el piso: 36 dólares.

Para los lados: 54 dólares.

Para el techo: 27 dólares.

Consigna: Sea $c(x,h)$ la función coste de construir un almacén de x metros de largo, $\frac{3}{4}x$ metros de ancho y h metros de altura, hallar $c_{\mathrm{mín}}(x,h)$.

Solución:

Como:

$$V = 100$$

$$(x)\left(\frac{3}{4}x\right)(h) = 100$$

$$\frac{3}{4}x^2h = 100$$

$$h = \frac{(4)100}{3x^2}$$

$$h = \frac{400}{3x^2}$$

Entonces:

$$c(x,h) = 36(x)\left(\frac{3}{4}x\right) + 54(2)\left(\frac{3}{4}x + x\right)(h) + 27(x)\left(\frac{3}{4}x\right)$$

$c(x,h) = 36(x)\left(\frac{3}{4}x\right) + 54(2)\left(\frac{3}{4}x + x\right)(h) + 27(x)\left(\frac{3}{4}x\right)$

Como $h = \frac{400}{3x^2}$, entonces:

$c(x) = 36(x)\left(\frac{3}{4}x\right) + 54(2)\left(\frac{3}{4}x + x\right)\left(\frac{400}{3x^2}\right) + 27(x)\left(\frac{3}{4}x\right)$

$c(x) = (36+27)(x)\left(\frac{3}{4}x\right) + (108)\left(\frac{7}{4}x\right)\left(\frac{400}{3x^2}\right), x \neq 0$

$c(x) = (36+27)(x)\left(\frac{3}{4}x\right) + (108)\left(\frac{7}{4}x\right)\left(\frac{400}{3x^2}\right)$

$c(x) = 63\left(\frac{3}{4}x^2\right) + \frac{25200}{x}$

$c(x) = \frac{189}{4}x^2 + \frac{25200}{x} = \frac{189}{4}(x^2) + 25200(x^{-1})$

Derivamos para aplicar el Criterio de la Primera Derivada:

$c'(x) = \frac{189}{4}(2x) + 25200(-x^{-2})$

$c'(x) = \frac{189}{2}x - \frac{25200}{x^2}$

Igualamos la Derivada a Cero para determinar los Puntos Críticos de la Función:

$c'(x) = 0$

$\frac{189x}{2} - \frac{25200}{x^2} = 0$

$\frac{189x(x^2) - 2(25200)}{2x^2} = 0$

$2x^2 \neq 0$

$x \neq 0$

No se va a considerar $x = 0$ como Punto Crítico porque la Función $c(x)$ **no** es **continua** en $x = 0$.

$189x(x^2) - 2(25200) = 0$

$189x^3 = 2(25200)$

$x^3 = \frac{2(25200)}{189}$

$x^3 = \frac{800}{3} \leftrightarrow \boxed{x^3 = f(a)}$

Aplicamos el Principio de Soluciones Notables para una Ecuación Cúbica:

$$x^3 = f(a) \rightarrow C.S. \in \left\{\sqrt[3]{f(a)}; \sqrt[3]{f(a)}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right); \sqrt[3]{f(a)}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\right\}$$

$$\therefore \boxed{x = \sqrt[3]{\frac{800}{3}}} \vee x = \sqrt[3]{\frac{800}{3}}\left(\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right) \vee x = \sqrt[3]{\frac{800}{3}}\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)$$

Tenemos el punto Crítico: $x = \sqrt[3]{\frac{800}{3}}$

A continuación, vamos a determinar si el Punto Crítico hallado representa un máximo local, mínimo local o un punto de inflexión a través del Criterio de la Segunda Derivada:

$$c'(x) = \frac{189}{2}x - \frac{25200}{x^2} = \frac{189}{2}(x) - 25200(x^{-2})$$

$$c''(x) = \frac{189}{2} + \frac{2(25200)}{x^3}$$

Evaluamos en el Punto Crítico:

$$c''(x) = \frac{189}{2} + \frac{2(25200)}{x^3}$$

$$c''\left(\sqrt[3]{\frac{800}{3}}\right) = \frac{189}{2} + \frac{2(25200)}{\left(\sqrt[3]{\frac{800}{3}}\right)^3} = \frac{567}{2} > 0$$

Como $c''\left(\sqrt[3]{\frac{800}{3}}\right) > 0$, entonces c tiene un **mínimo local** o **relativo** en $\left(\sqrt[3]{\frac{800}{3}}, c\left(\sqrt[3]{\frac{800}{3}}\right)\right)$. En consecuencia:

$$(x) = \frac{189}{4}\left(\sqrt[3]{\frac{800}{3}}\right)^2 + \frac{25200}{\left(\sqrt[3]{\frac{800}{3}}\right)} = 5872.66943 \ldots,$$

representa el **mínimo** costo posible para construir el almacén considerando que $x > 0$. En consecuencia:

Dimensiones:

Longitud o Largo: $x = \sqrt[3]{\frac{800}{3}} = 6.43659$ ... ≈ 6.437 metros.

Ancho: $\frac{3}{4}x = \frac{3}{4}\left(\sqrt[3]{\frac{800}{3}}\right) = 4.82744$ ... ≈ 4.827 metros.

Altura: $\frac{400}{3x^2} = \frac{400}{3\left(\sqrt[3]{\frac{800}{3}}\right)^2} = 3.21829$ ... ≈ 3.218 metros.

Estas dimensiones para el almacén minimizan el Costo.

Respuesta:

Dimensiones:

Longitud o Largo: 6.437 metros.

Ancho: 4.827 metros.

Altura: 3.218 metros.

Estas dimensiones para el almacén minimizan el Costo.

3.- Calcular:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

Resolución:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \left(\frac{1 + \tan 0}{1 + \operatorname{sen} 0}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} 0}} = 1^{\infty}$$

Sea:

$$L = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$$

$$\ln L = \ln \left[\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right]$$

$$\ln L = \lim_{x \to 0} \left\{\ln \left[\left(\frac{1 + \tan x}{1 + \operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\right]\right\}$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)}{\operatorname{sen} x}\right]$$

Aplicamos la Regla de L′Hopital:

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\left\{\frac{\left[\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)\right]'}{[\operatorname{sen} x]'}\right\}$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)'}{\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}}\right]}{\cos x}$$

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)'$$

Hallamos la derivada resaltada:

$$\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{d(\tan x+1)(\operatorname{sen} x+1)-(\tan x+1)d(\operatorname{sen} x+1)}{(\operatorname{sen} x+1)^2}$$

$$\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{(\sec^2 x)(\operatorname{sen} x+1)-(\tan x+1)(\cos x)}{(\operatorname{sen} x+1)^2}$$

$$\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)' = \frac{\sec^2 x}{\operatorname{sen} x+1}-\frac{\cos x\,(\tan x+1)}{(\operatorname{sen} x+1)^2}$$

Continuamos con la Resolución:

$$\ln L = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos 0}\right)\left(\frac{1+\tan 0}{1+\operatorname{sen} 0}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sec^2 x}{\operatorname{sen} x+1}-\frac{\cos x\,(\tan x+1)}{(\operatorname{sen} x+1)^2}\right)$$

$$\ln L = \left(\frac{1}{1}\right)\left(\frac{1+0}{1+0}\right)\left(\frac{\sec^2 0}{\operatorname{sen} 0+1}-\frac{\cos 0\,(\tan 0+1)}{(\operatorname{sen} 0+1)^2}\right)$$

$$\ln L = (1)(1)\left(\frac{(1)^2}{0+1}-\frac{(1)(0+1)}{(0+1)^2}\right)$$

$$\ln L = (1)(1)\left(\frac{1}{1}-\frac{(1)(1)}{(1)^2}\right)$$

$$\ln L = (1)(1)(1-1)$$

$$\ln L = (1)(1)(0)$$

$$\ln L = 0$$

$L = e^0$

$L = 1$

En consecuencia:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\operatorname{sen} x}\right)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = 1$$

Respuesta: 1

4. <u>El método de Newton:</u>

El método de Newton es un algoritmo para hallar aproximaciones de los ceros o raíces de una función real.

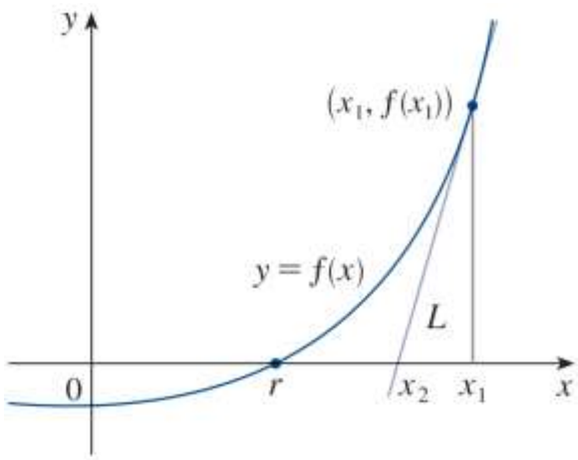
a) Hacer una presentación del método de Newton como una solución para hallar las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, detalle el fundamento matemático para hacer uso de:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \dots\dots\dots (1)$$

para determinar una sucesión de números o a partir de (1) que convergen a la raíz real. Como determinar x_n, el punto inicial?

Resolución:

La geometría del método de Newton se muestra en el siguiente gráfico:



Se desea resolver una ecuación de la forma $f(x) = 0$, por lo que las raíces de la ecuación corresponden a las intersecciones x de la gráfica de f. La raíz que se está tratando de encontrar está etiquetada con r en la figura. Se comienza con una primera aproximación x_1, que se obtiene por suposición, o de un trazo de la gráfica de f, o de una gráfica de f generada por computadora. Considere la recta tangente L a la curva $y = f(x)$ en el punto

$(x_1, f(x_1))$ y mire la intersección de L con el eje x (es decir, la raíz r que se está buscando). Dado que la tangente es una recta, se puede encontrar fácilmente su intersección con el eje x.

Para encontrar una fórmula para x_2 en términos de x_1, se recurre al hecho de que la pendiente de L es $f'(x_1)$; por lo que su ecuación es

$$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$$

Ya que la intersección de L con el eje x es x_2, se sabe que el punto $(x_2, 0)$ está en la línea, y entonces

$$0 - f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

Si $f'(x_1) \neq 0$, se puede resolver esta ecuación para x_2:

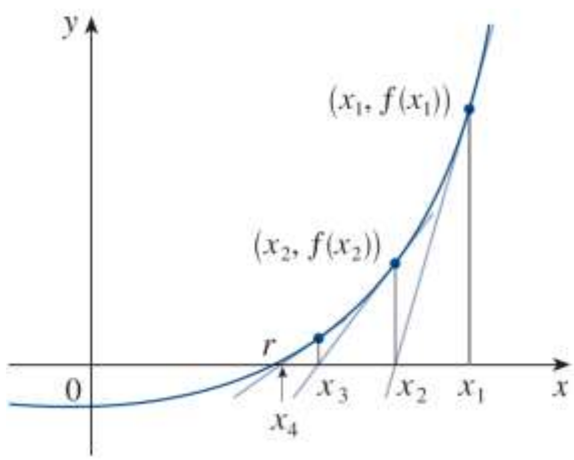
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Se utiliza x_2 como una segunda aproximación a r.

Luego se repite este procedimiento con x_1 reemplazándola por la segunda aproximación x_2, utilizando a la recta tangente en $(x_2, f(x_2))$. Esto da una tercera aproximación:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Si se mantiene este proceso, se obtiene una sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ como se muestra en la siguiente figura:



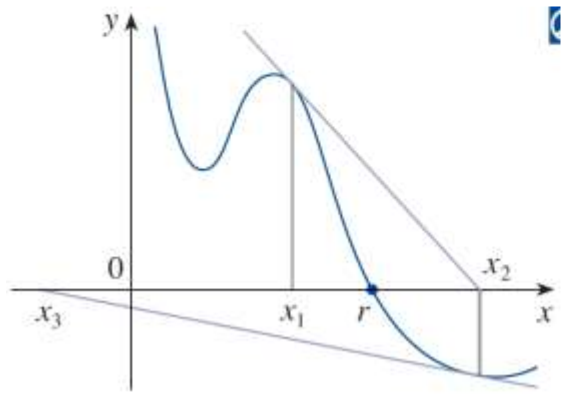
En general, si la enésima aproximación es x_n y $f'(x_n) \neq 0$, entonces la aproximación siguiente está dada por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Si los números x_n están más y más cercanos a r cuando n es muy grande, entonces se dice que la sucesión *converge* a r y se escribe:

$$\text{Lím}_{n\to\infty} x_n = r$$

Aunque la sucesión de aproximaciones converge a la raíz deseada para funciones de tipo que se muestra en la siguiente figura:



Puede ver que x_2 es una peor aproximación que x_1. Esto suele ser el caso cuando $f'(x_1)$ está cerca de 0. Incluso puede ocurrir que una aproximación (como x_3 en la figura anterior) esté fuera del dominio de f. Entonces, el método de Newton falla y se debe elegir una mejor aproximación inicial x_1.

Recuperado de: “Cálculo de una Variable, Trascendentes Tempranas” de James Stewart.

b) Calcular $\sqrt[6]{2}$ usando (1) hasta con ocho cifras decimales
Resolución:
Se puede interpretar la consigna como encontrar la solución real y positiva de la siguiente ecuación:

$$x^6 - 2 = 0$$

En consecuencia:
$f(x) = x^6 - 2$
$f'(x) = 6x^5$
Hallamos una posible Estimación:

$$x^6 - 2 = 0$$

Para $x = 1$:

$$(1)^6 - 2 = 1 - 2 = -1$$

Para $x = 2$:

$$(2)^6 - 2 = 64 - 2 = 62$$

En consecuencia, $x_1 = 1$.
Aplicamos la Fórmula Recursiva para hallar x_2:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{1+1} = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$x_2 = 1 - \frac{f(1)}{f'(1)}$$

Hallamos:

$f(x) = x^6 - 2$
$f(1) = (1)^6 - 2 = -1$
$f'(x) = 6x^5$
$f'(1) = 6(1)^5 = 6$
Por lo tanto:

$x_2 \approx 1 - \frac{-1}{6} \approx 1 + \frac{1}{6} \approx 1.16666666$

Seguimos Aplicando la Fórmula Recursiva para hallar x_3:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Hallamos:

$f(x) = x^6 - 2$
$f(1.16666666) \approx (1.16666666)^6 - 2 \approx 0.52162636$
$f'(x) = 6x^5$
$f'(1.16666666) \approx 6(1.16666666)^5 \approx 12.96836416$
Por lo tanto:

$x_3 \approx 1.16666666 - \frac{0.52162636}{12.96836416} \approx 1.12644368$

Seguimos Aplicando la Fórmula Recursiva para hallar x_4:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

Hallamos:

$f(x) = x^6 - 2$
$f(1.12644368) \approx (1.12644368)^6 - 2 \approx 0.04294604$
$f'(x) = 6x^5$
$f'(1.12644368) \approx 6(1.12644368)^5 \approx 10.88174799$
Por lo tanto:

$$x_4 \approx 1.12644368 - \frac{0.04294604}{10.88174799} \approx 1.12249707$$

Seguimos Aplicando la Fórmula Recursiva para hallar x_5:

$$x_5 = x_4 - \frac{f(x_4)}{f'(x_4)}$$

Hallamos:

$f(x) = x^6 - 2$
$f(1.12249707) \approx (1.12249707)^6 - 2 \approx 0.00037444$
$f'(x) = 6x^5$
$f'(1.12249707) \approx 6(1.12249707)^5 \approx 10.69245253$
Por lo tanto:
$x_5 \approx 1.12249707 - \frac{0.00037444}{10.69245253} \approx 1.12246205$
Seguimos Aplicando la Fórmula Recursiva para hallar x_6:

$$x_6 = x_5 - \frac{f(x_5)}{f'(x_5)}$$

Hallamos:

$f(x) = x^6 - 2$
$f(1.12246205) = (1.12246205)^6 - 2 \approx 0.00000002$
$f'(x) = 6x^5$
$f'(1.12246205) = 6(1.12246205)^5 \approx 10.69078469$
Por lo tanto:
$x_6 \approx 1.12246205 - \frac{0.00000002}{10.69078469} \approx 1.12246205$

Como x_5 y x_6 coinciden en ocho decimales, entonces:

$\sqrt[6]{2} \approx 1.12246205$

Respuesta: 1.12246205

c) La raíz de la ecuación $\cos x = x$, hasta seis cifras decimales, de igual manera usando (1).
Resolución:
Se tiene la siguiente Ecuación:
$\cos x = x$
$\cos x - x = 0$
En consecuencia:
$f(x) = \cos x - x$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$
Hallamos una posible Estimación:
Para $x = 1$:
$\cos 1 - 1 = -0.459697694$ ...
Para $x = \frac{3}{4}$:
$\cos \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -0.0183111311$ ...
En consecuencia:
$x_1 = \frac{3}{4}$
Aplicamos la Fórmula Recursiva para hallar x_2:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

Hallamos:
$f(x) = \cos x - x$
$f\left(\frac{3}{4}\right) \approx \cos\left(\frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}\right) \approx -0.0183111311$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$
$f'\left(\frac{3}{4}\right) \approx -\operatorname{sen}\left(\frac{3}{4}\right) - 1 \approx -1.68163876$
En consecuencia:

$$x_2 \approx \frac{3}{4} - \frac{(-0.0183111311)}{(-1.68163876)} \approx 0.73911114$$

Seguimos Aplicando la Fórmula Recursiva para hallar x_3:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

Hallamos:
$f(x) = \cos x - x$
$f(0.73911114) \approx \cos(0.73911114) - (0.73911114) \approx -0.0000435255$
$f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$
$f'(0.73911114) \approx -\operatorname{sen}(0.73911114) - 1 \approx -1.6736313$
En consecuencia:

$$x_3 = 0.73911114 - \frac{-0.0000435255}{-1.6736313} = 0.739085133$$

Seguimos Aplicando la Fórmula Recursiva para hallar x_4:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)}$$

Hallamos:

$f(x) = \cos x - x$

$$f(0.739085133) \approx \cos(0.739085133) - (0.739085133) \approx$$

$f'(x) = -\operatorname{sen} x - 1$

$f'(0.739085133) \approx -\operatorname{sen}(0.739085133) - 1 \approx -1.67361203$

En consecuencia:

$$x_4 \approx 0.739085133 - \frac{0.0000000003}{-1.67361203} \approx 0.739085133179253$$

Como x_3 y x_4 concuerdan con seis cifras decimales, entonces:

$$x \approx 0.739085$$

Respuesta: 0.739085

Referencias Bibliográficas:

- Goldstein, Larry J.; Lay, David C.; Schneider, David K. (1992): "Calculus and its Applications". 6th edition. Prentice Hall International Paperback Edition.
- Kudriavtsev, L. D. y otros (1992): "Problemas de análisis matemático. Integrales. Series". Mir Moscú.
- Stewart, James (2001): "Cálculo de una variable. Transcendentes tempranas". 4ª edición. Thomson.
- Zill, D. G. (1987): "Cálculo con Geometría analítica". Díaz de Santos.