Fundamentos Matemáticos – Matrizes

Prof. Guilherme Chagas Kurtz

Matrizes

- Definição: Uma matriz A *n* x *m* é uma tabela retangular de elementos com *n* linhas e *m* colunas, e que possui a seguinte notação:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Onde a_{ij} representa o elemento da i-ésima linha e j-ésima coluna;
  - Cada elemento pode armazenar informações referentes números, funções ou expressões numéricas;
  - Na maioria das linguagens, os índices começam em 0 ao invés de 1;

Matrizes

- Todas as **transformações geométricas** podem ser representadas na forma de **equações.**
- O problema é que manipulações de objetos gráficos normalmente envolvem **muitas operações de aritmética simples**.
- As matrizes são muito usadas nessas manipulações porque **são mais fáceis de usar** e entender do que as equações algébricas, o que explica por que programadores e engenheiros as usam extensivamente;

Matrizes

- Matrizes são **semelhantes** ao modelo organizacional da **memória dos computadores**;
- Isso facilita o trabalho dos programadores, pois possibilita uma **maior velocidade** para aplicações críticas como jogos e aplicações em realidade virtual.
- É devido a esse fato que os computadores com "**facilidades vetoriais**" (placas de vídeo) têm sido muito usados junto a aplicações de computação gráfica.

Matrizes

- Devido ao **padrão de coordenadas** usualmente adotado para representação de pontos no plano (x,y) e no espaço tridimensional (x,y,z), pode ser conveniente manipular esses pontos em matrizes quadradas de 2×2 ou 3×3 elementos.

- Através de matrizes e de sua **multiplicação**, podemos representar todas **as transformações lineares 2D e 3D**.

- Várias transformações podem ser combinadas resultando em uma única matriz denominada **matriz de transformação**.

Operações com matrizes

- **Matriz transposta**:
  - Dada uma matriz A, a transposta de A, denotada por A^T, é uma matriz que se obtém pela troca de linhas por colunas da matriz A:
    - Ex:
    - $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, $\quad \boldsymbol{A^T} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 8 & 4 & 7 \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Múltiplo escalar**:
  - Dada uma matriz **A** e um escalar **α**, o múltiplo escalar de **α** por **A**, denotado **αA**, é obtido pela multiplicação de cada elemento de **A** por **α**:
    - Ex:
    - $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$ **e α=3,** $\qquad$ $\boldsymbol{\alpha A} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 24 \\ 18 & 0 & 12 \\ 3 & 15 & 21 \end{bmatrix}$
  - Se **α=–1**, o múltiplo escalar é denominado **negativo de A**, denotado por **–A;**

Operações com matrizes

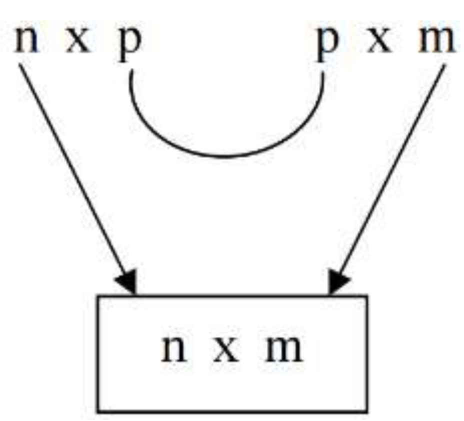
- **Soma e subtração de matrizes**:
  - A soma de duas matrizes A e B com mesmas dimensões é uma matriz C = A + B, obtida pela soma dos seus respectivos elementos:
    - $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
  - A diferença de duas matrizes A e B de mesmas dimensões é dada por C = A – B, também obtida pela diferença dos seus elementos:
    - $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$
  - Ex:
    - $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} \end{bmatrix}$ **e B**$= \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{11} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes**:
  - A multiplicação de duas matrizes, denotado por AB, de uma matriz A (n x p) por uma matriz B (p x m) resulta em uma matriz C (n x m), em que:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, m \text{ e } j = 1, 2, \dots, n$$

  - Pela definição, duas matrizes podem ser multiplicadas somente se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda:



Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes**:
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$ **e B** $= \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_{\mathbf{00}} & \boldsymbol{c}_{\mathbf{01}} \\ \boldsymbol{c}_{\mathbf{10}} & \boldsymbol{c}_{\mathbf{11}} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes**:
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$ **e B** $= \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} \boxed{\mathbf{1} \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{2}} \\ \mathbf{4} \quad \mathbf{7} \quad \mathbf{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{5} \end{matrix}} & \begin{matrix} \mathbf{8} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{9} \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{c_{00}} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes**:
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ **e B** $= \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 2} \\ 4 \quad 7 \quad 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5} & c_{01} \\ c_{10} & c_{11} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes**:
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ **e** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 3 \quad 2} \\ 4 \quad 7 \quad 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & \boxed{\begin{matrix} 8 \\ 1 \\ 9 \end{matrix}} \\ 3 & \\ 5 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5 & \boxed{c_{01}} \\ c_{10} & c_{11} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes**:
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $\boldsymbol{A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}}$ **e** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $$\boldsymbol{\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{c_{10}}{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5} & \underset{c_{11}}{\boxed{1 \cdot 8 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 9}} \end{bmatrix}}$$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes**:
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$ **e** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5} & \mathbf{1 \cdot 8 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 9} \\ \boxed{c_{10}} & c_{11} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes**:
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$ **e** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5} & \mathbf{1 \cdot 8 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 9} \\ \boxed{\mathbf{4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 5}} & \boldsymbol{c}_{\mathbf{11}} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes**:
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$ **e** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5} & \mathbf{1 \cdot 8 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 9} \\ \mathbf{4 \cdot 2 + 7 \cdot 3 + 6 \cdot 5} & \boxed{\boldsymbol{c_{11}}} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes**:
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix}$ **e** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 3\cdot 3 + 2\cdot 5 & 1\cdot 8 + 3\cdot 1 + 2\cdot 9 \\ 4\cdot 2 + 7\cdot 3 + 6\cdot 5 & \boxed{4\cdot 8 + 7\cdot 1 + 6\cdot 9} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes**:
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$ **e B** $= \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{2+9+10} & \mathbf{8+3+18} \\ \mathbf{8+21+30} & \mathbf{32+7+54} \end{bmatrix}$

Operações com matrizes

- **Produto de duas matrizes**:
  - Ex: Multiplicação das seguintes matrizes:
    - $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix}$ **e** $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix}$
    - Como A é 2x3 e B é 3x2, a multiplicação é possível, e o resultado é uma matriz C 2x2:
    - $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{7} & \mathbf{6} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{8} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{21} & \mathbf{29} \\ \mathbf{59} & \mathbf{93} \end{bmatrix}$

Propriedades

- $AB \neq BA$ (não comutativa)
- $(\alpha A)B = \alpha(AB)$ (associativa)
- $(AB)C = A(BC)$ (associativa)
- $(AB)^T = A^T B^T$ (propriedade utilizada na concatenação de matrizes de transformação
- $(A+B)^T = A^T + B^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(\alpha A)^T = A^T$

Matriz Diagonal

- Uma **matriz** é **diagonal** quando é quadrada e quando todos os elementos fora da diagonal principal são zeros.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Matriz Identidade

- Uma **matriz identidade**, denotada por I, é uma matriz diagonal, cujos elementos da diagonal principal são todos iguais a 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz Inversa

- Uma matriz **M** ***n x n*** é inversível caso exista uma matriz, denotada por M^{-1}, de modo que:

- $M \cdot M^{-1} = M^{-1} \cdot M = I$

- Assim, a matriz M^{-1} é denominada inversa de M;

- Uma matriz é chamada **singular** caso não seja inversível;
  - Teorema: Uma matriz M é inversível se e somente se M^T é inversível.

Matriz ortogonal

- Uma matriz quadrada M é ortogonal se $M \cdot M^T = I$;
- Portanto, se M é ortogonal então $M^{-1} = M^T$;
- Propriedades:
  - Caso M seja ortogonal, seu determinante será igual a 1 ou –1;
  - Caso A e B sejam matrizes ortogonais, $C = A \cdot B$ também é ortogonal;
  - Se A é ortogonal, A^{-1} também é ortogonal;
- Matriz **ortonormal**:
  - Uma matriz é dita é dita ortonormal se o comprimento de cada linha ou coluna, somados como vetores, tem comprimento 1 (normalizado).
  - Esses vetores também são mutuamente ortogonais (formam um ângulo de 90º cada – perpendiculares).

Determinante

- O determinante de uma matriz quadrada é uma **função matricial** que associa a matriz a um **escalar**;

- O determinante de uma matriz **A** *m x n*, denotado por **det A**, é dado por:

$$\det A = \sum a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij}$$

  - Em que M, denominado **menor** da matriz A, é o determinante da matriz formada pela eliminação da linha *i* e coluna *j* de **A.**

Determinante

- Ex:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{1}(-\mathbf{1})^{\mathbf{1}+\mathbf{1}} \begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{vmatrix} + \mathbf{2}(-\mathbf{1})^{\mathbf{1}+\mathbf{2}} \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{9} \end{vmatrix} + \mathbf{4}(-\mathbf{1})^{\mathbf{1}+\mathbf{3}} \begin{vmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{5} \\ \mathbf{7} & \mathbf{8} \end{vmatrix}$$

Determinante

- Para matrizes 2x2, o determinante é dado por:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{vmatrix} = \boldsymbol{ad - bc}$$

- Para matrizes 3x3, podemos utilizar o seguinte algoritmo:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix} = \boldsymbol{aei + bfg + cdh - gec - dbi - ahf}$$