Fundamentos Matemáticos – Vetores

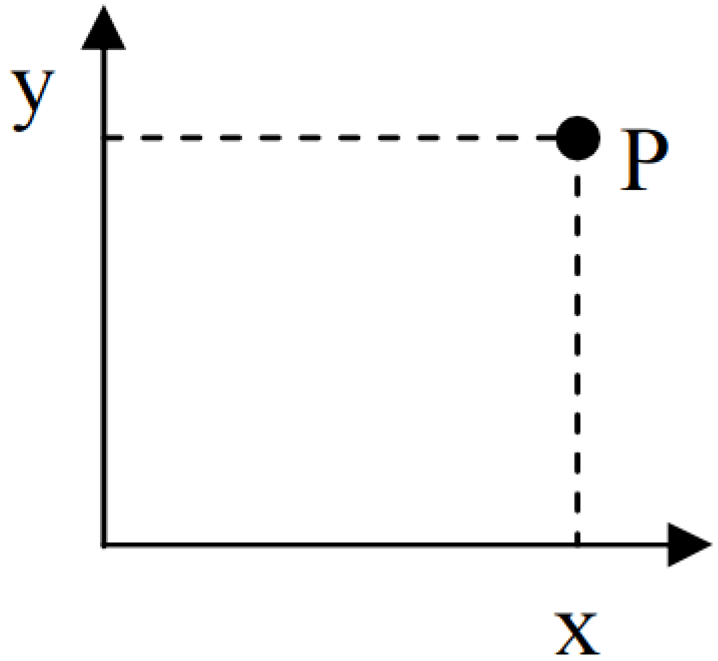
Prof. Guilherme Chagas Kurtz

Pontos

- Todo objeto, dentro de um ambiente, possui uma **localização**;
- Essa localização é dada por um **ponto no espaço**, que pode ser em duas dimensões (x,y) ou três dimensões (x,y,z);
- Desta forma, um ponto P pode ser representado por P = (x,y) ou P = (x,y,z).

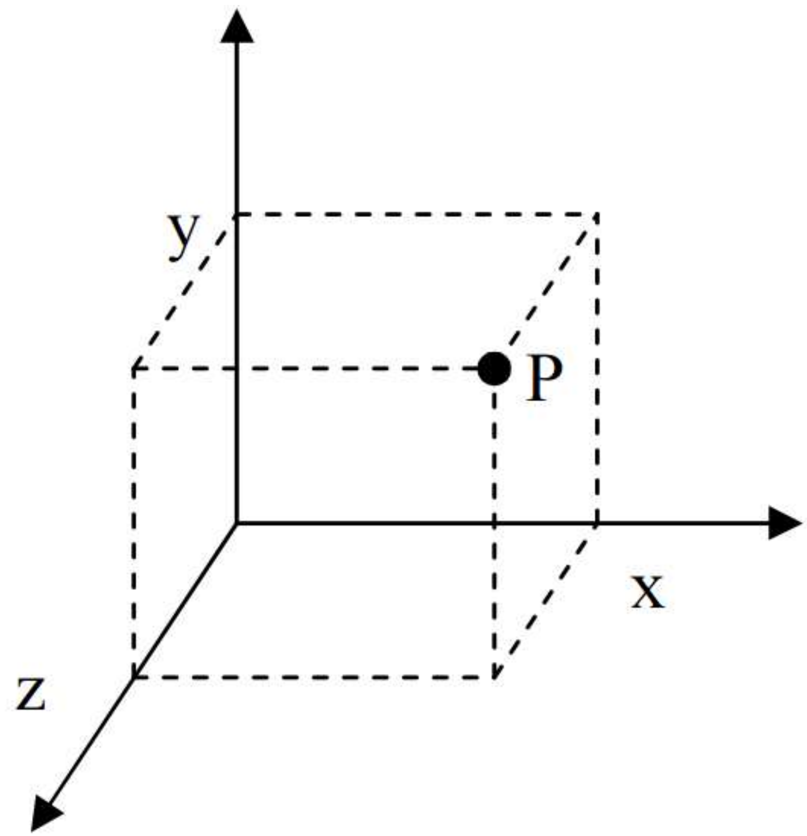
Pontos

- Ponto P no plano 2D:



Pontos

- Ponto P no espaço 3D:



Vetores

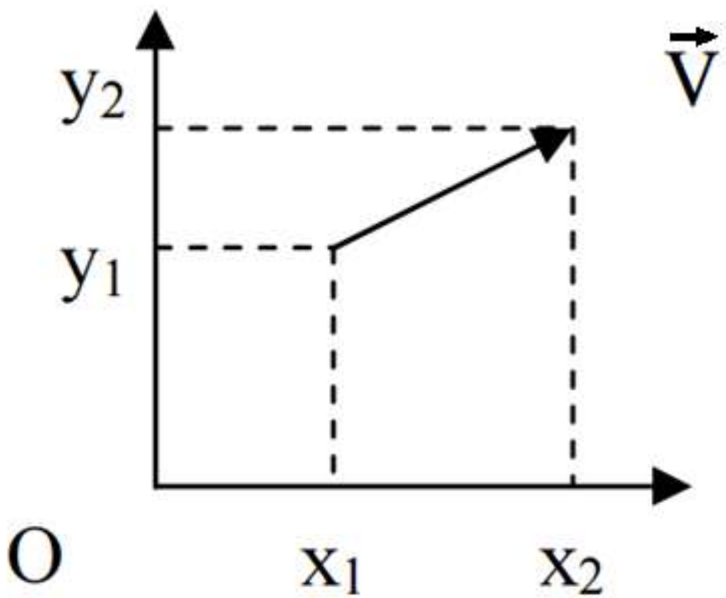
- Um vetor é um segmento de reta que possui um **tamanho** (ou módulo, comprimento, magnitude) e uma **direção**;

- Além disso, possui também um **ponto de origem** e um **ponto de destino;**

- Para simplificar a representação de vetores, geralmente considera-se que o **ponto de origem** de um vetor é a **origem de um sistema de coordenadas**;

- Um vetor também pode ser definido pela **diferença entre dois pontos**.

Representação de Vetores

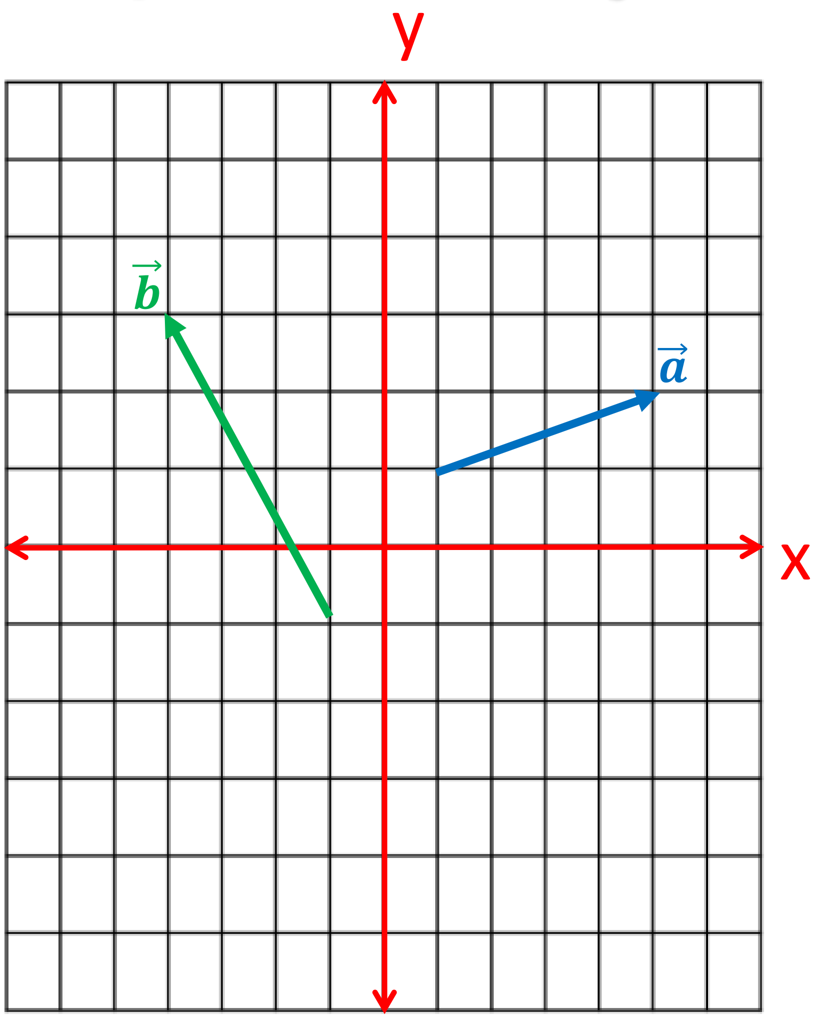


- Para representar simbolicamente um vetor, geralmente utilizamos uma letra com uma seta em cima $\vec{v}$ ou simplesmente $\boldsymbol{v}$, em negrito;

- Para especificar um vetor $\vec{v}$, em duas dimensões, basta definirmos o mesmo através do quanto ele se desloca em **x** e em **y**.

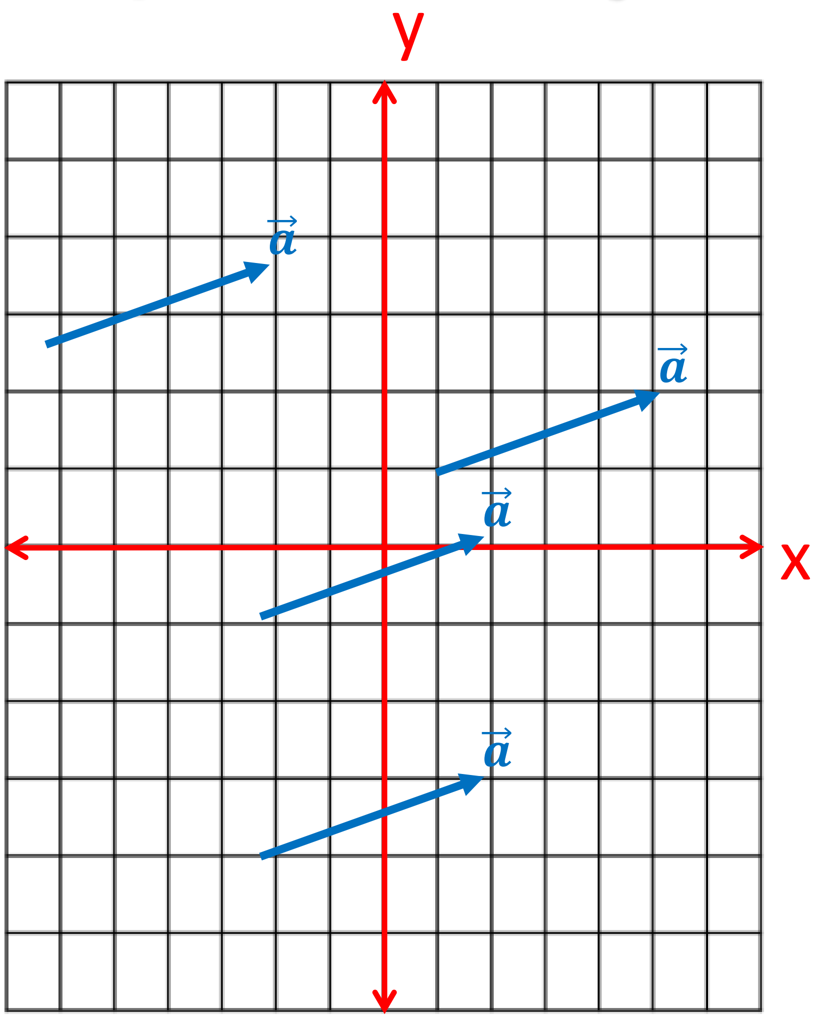
- Neste caso, o vetor $\vec{v}$ da figura ao lado pode ser especificado por **<x2-x1,y2-y1>**

Representação de Vetores



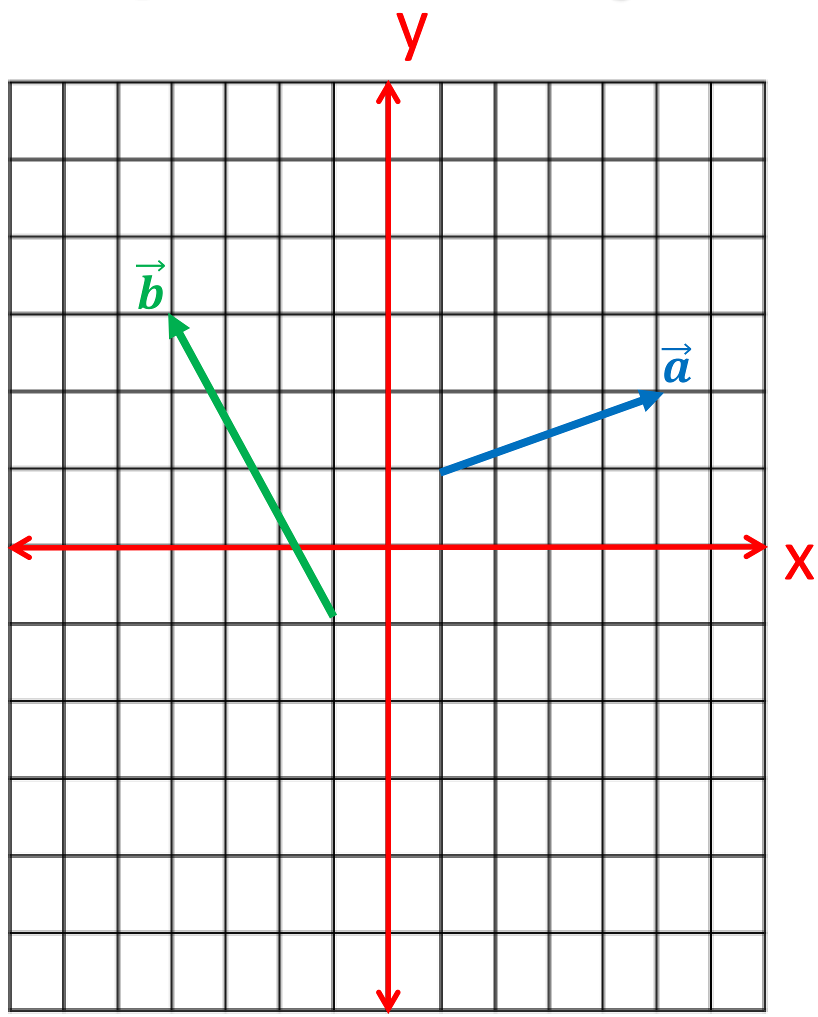
- $\vec{a} = < 4, 1 >$
- $\vec{b} = < -3, 4 >$

Representação de Vetores



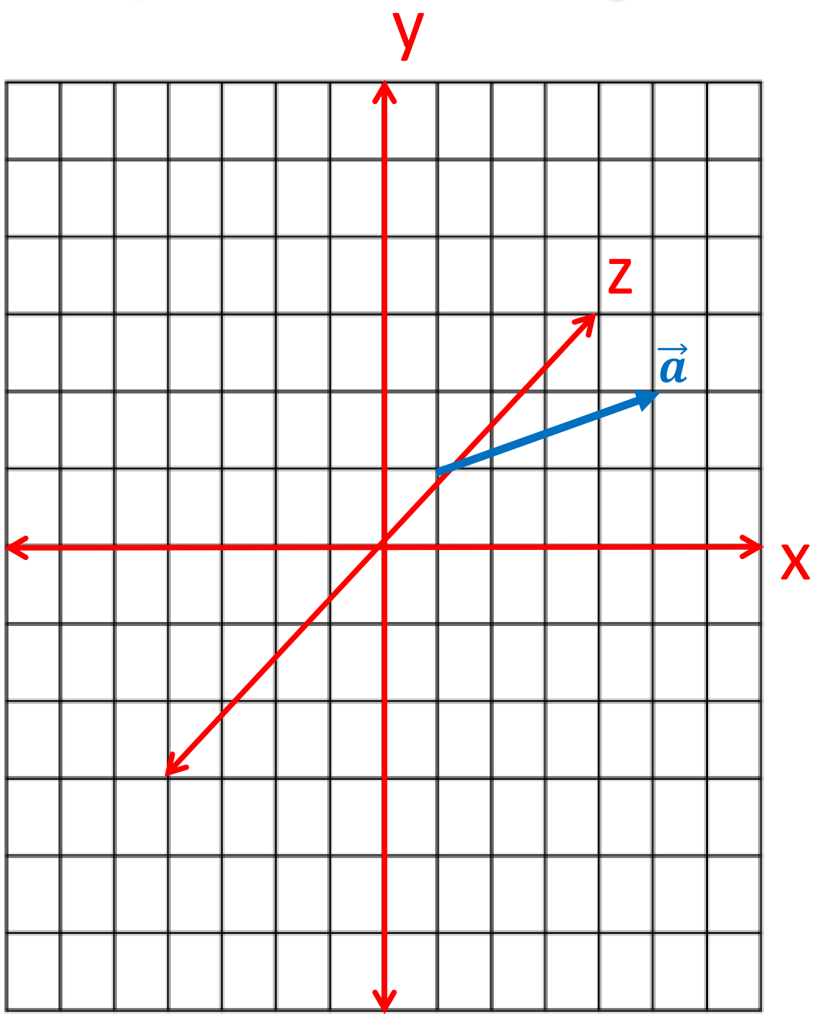
- $\vec{a} = < 4, 1 >$
  - Note que o a especificação do vetor $\vec{a}$ define somente sua **magnitude** e **direção**, ou seja, todos os vetores ao lado representam o vetor $\vec{a}$, pois todos tem a mesma **direção** e **magnitude**;

Representação de Vetores



- Uma outra notação de vetores em Álgebra Linear é através de um **vetor-coluna**, tal como:
- $\vec{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$
- $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$

Representação de Vetores



- O mesmo vale para 3 dimensões:
- $\vec{a} =< 4, 1, 0 > ou \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Adição de vetores

- A adição de dois vetores tem como resposta um novo vetor;

- Dados os seguintes vetores: $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

- Para realizar a soma de dois vetores, basta somarmos as mesmas partes/componentes de cada um:

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 + (-3) \\ 1 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

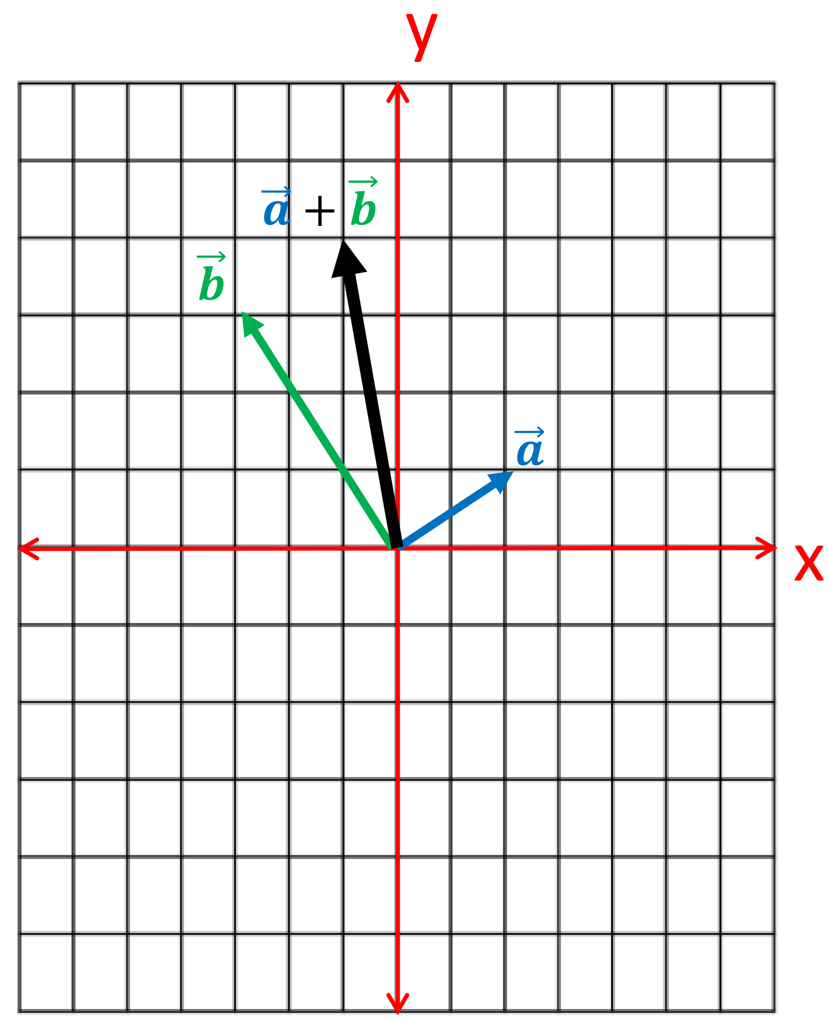
Adição de vetores

- Representação gráfica:

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{b} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix}$

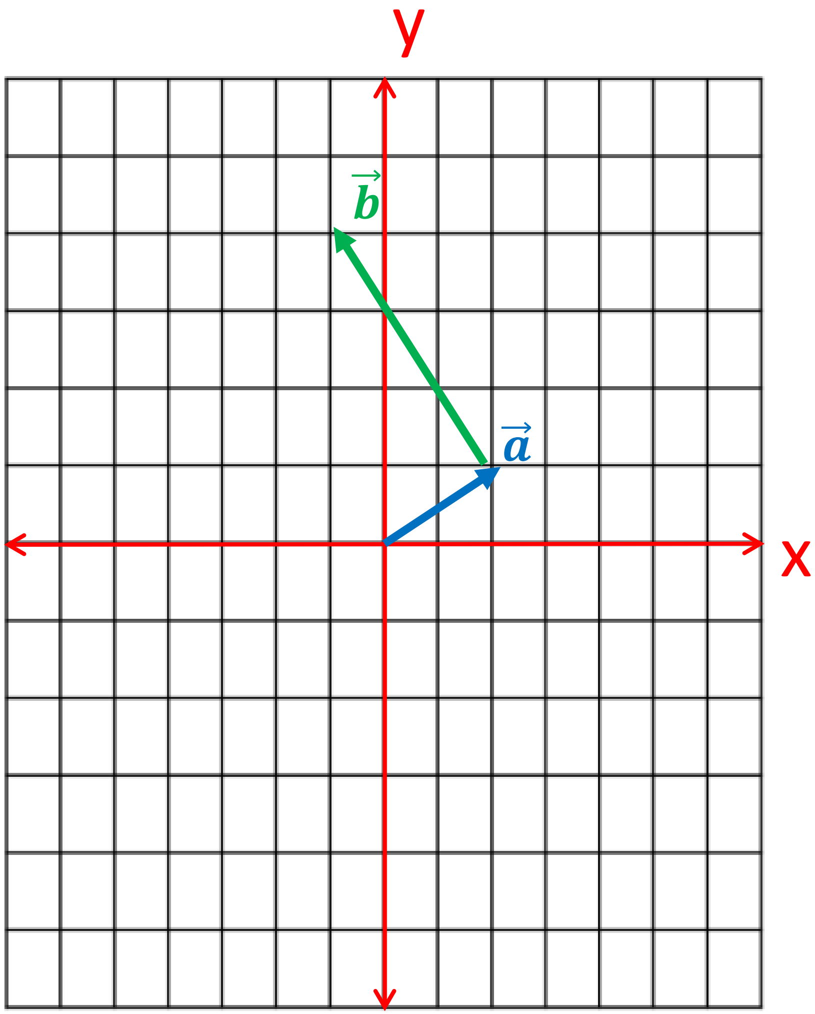
$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 + (-3) \\ 1 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$



Adição de vetores

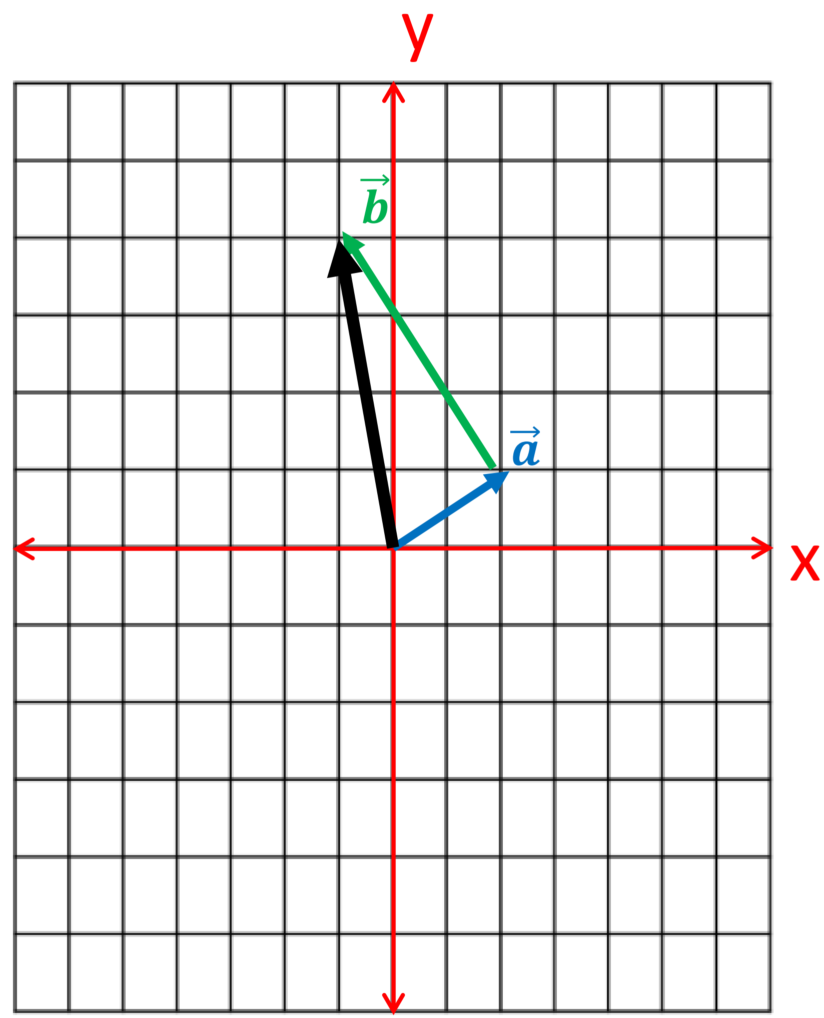
- Significado:
  - A soma de vetores significa o deslocamento ocorrido ao “percorrer” ambos os vetores;

  - Se colocarmos a cauda do vetor $\vec{b}$ no final do vetor $\vec{a}$, qual será o vetor resultante?



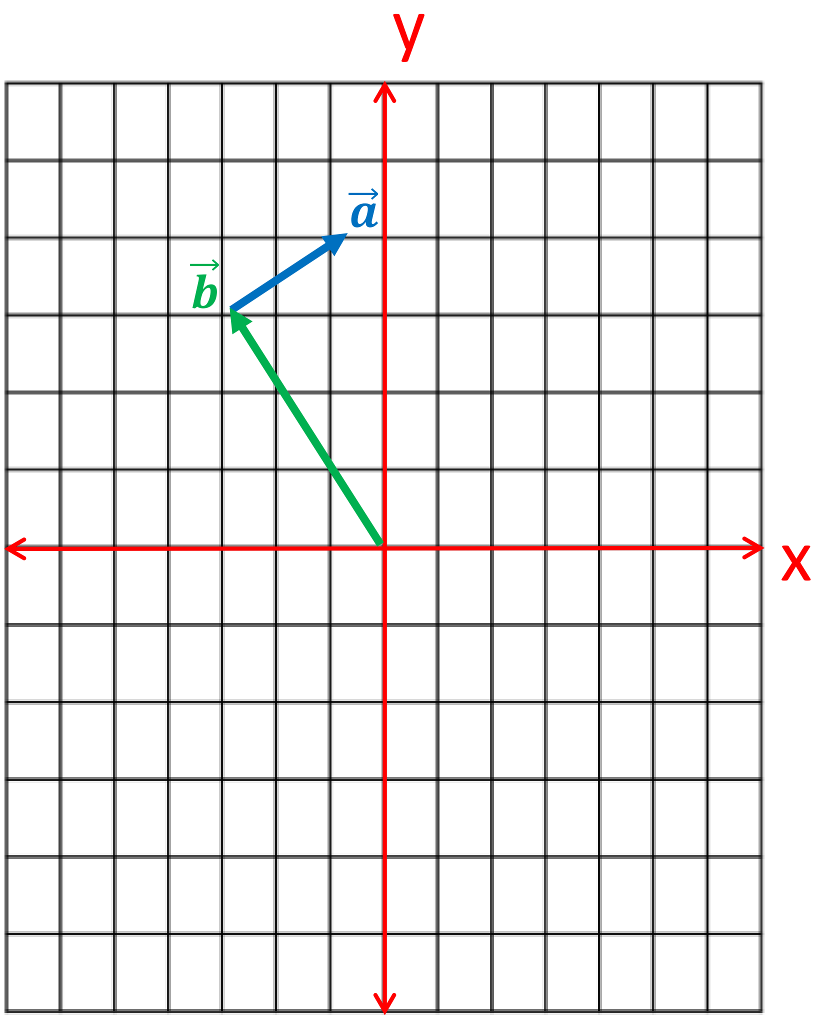
Adição de vetores

- Significado:
  - A soma de vetores significa o deslocamento ocorrido ao "percorrer" ambos os vetores;
  - Se colocarmos a cauda do vetor $\vec{b}$ no final do vetor $\vec{a}$, qual será o vetor resultante?
    - **R**: o vetor resultante da soma dos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$



Adição de vetores

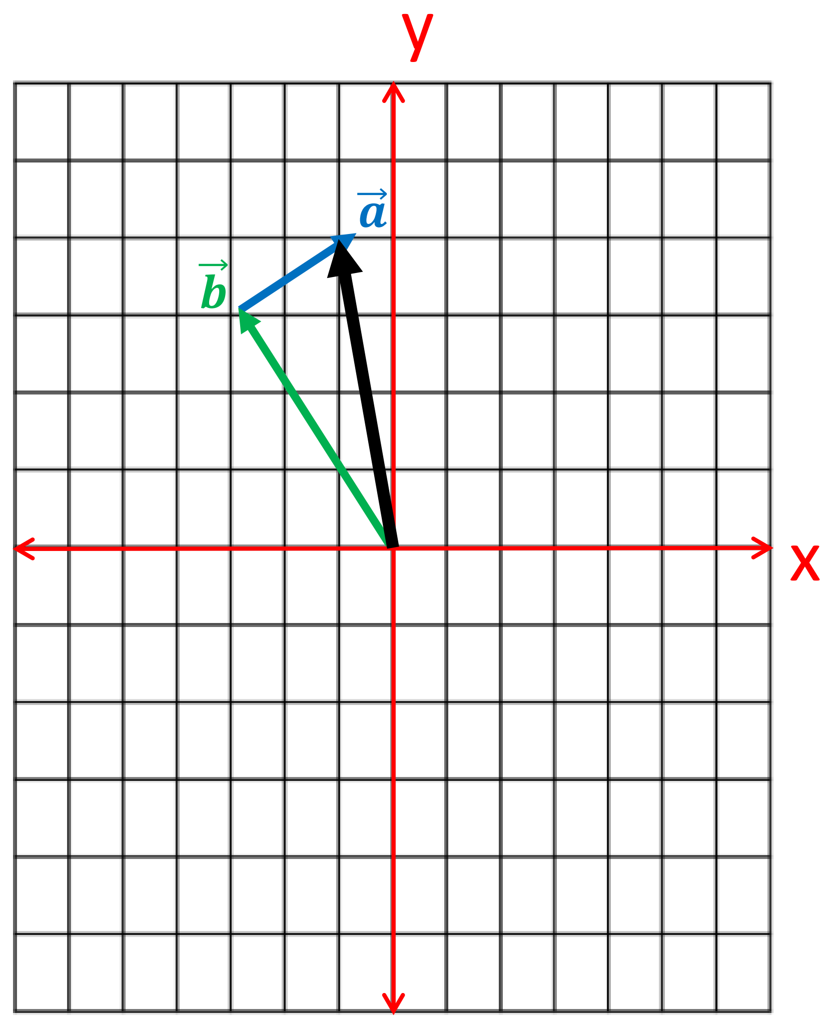
- Significado:
  - E se colocarmos o vetor $\vec{a}$ no final do vetor $\vec{b}$, qual será o vetor resultante?



Adição de vetores

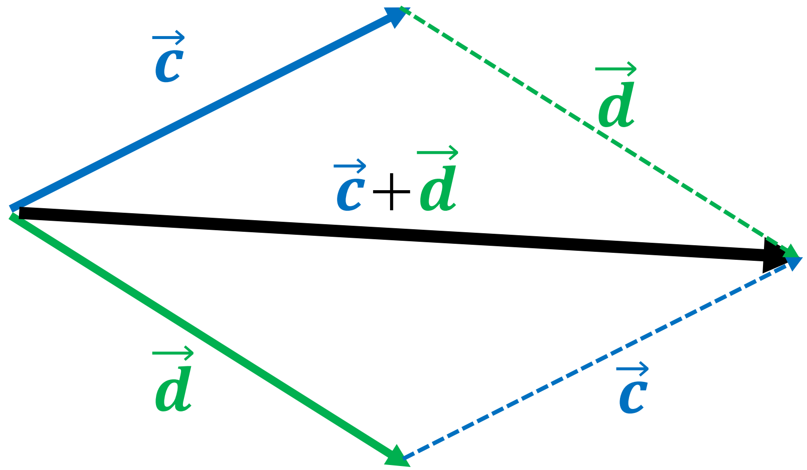
- Significado:
  - E se colocarmos o vetor $\vec{a}$ no final do vetor $\vec{b}$, qual será o vetor resultante?
    - **R**: o mesmo vetor resultante da soma de $\vec{a}$ e $\vec{b}$!
  - Isso significa que:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$



Adição de vetores

- Também podemos obter a soma de dois vetores pela **regra do paralelogramo**:



Multiplicação de vetor por escalar

- Para realizar a multiplicação de um vetor por um escalar, basta multiplicarmos todos os elementos do vetor pelo escalar;

- Dado o vetor: $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $x = 3$, qual o resultado de $x.\vec{a}$?

Multiplicação de vetor por escalar

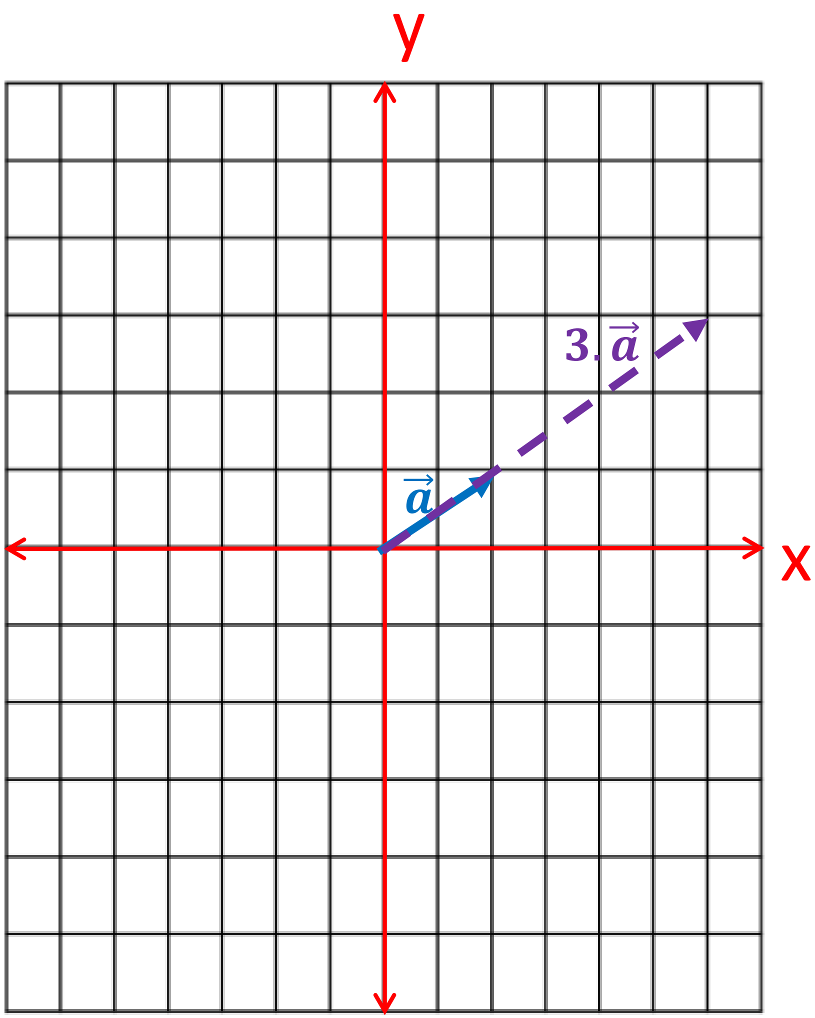
- Para realizar a multiplicação de um vetor por um escalar, basta multiplicarmos todos os elementos do vetor pelo escalar;

- Dado o vetor: $\vec{\boldsymbol{a}} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$ e $\boldsymbol{x} = \mathbf{3}$, qual o resultado de $\boldsymbol{x}.\vec{\boldsymbol{a}}$?

$$\boldsymbol{x}.\vec{\boldsymbol{a}} = \mathbf{3}.\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{6} \\ \mathbf{3} \end{bmatrix}$$

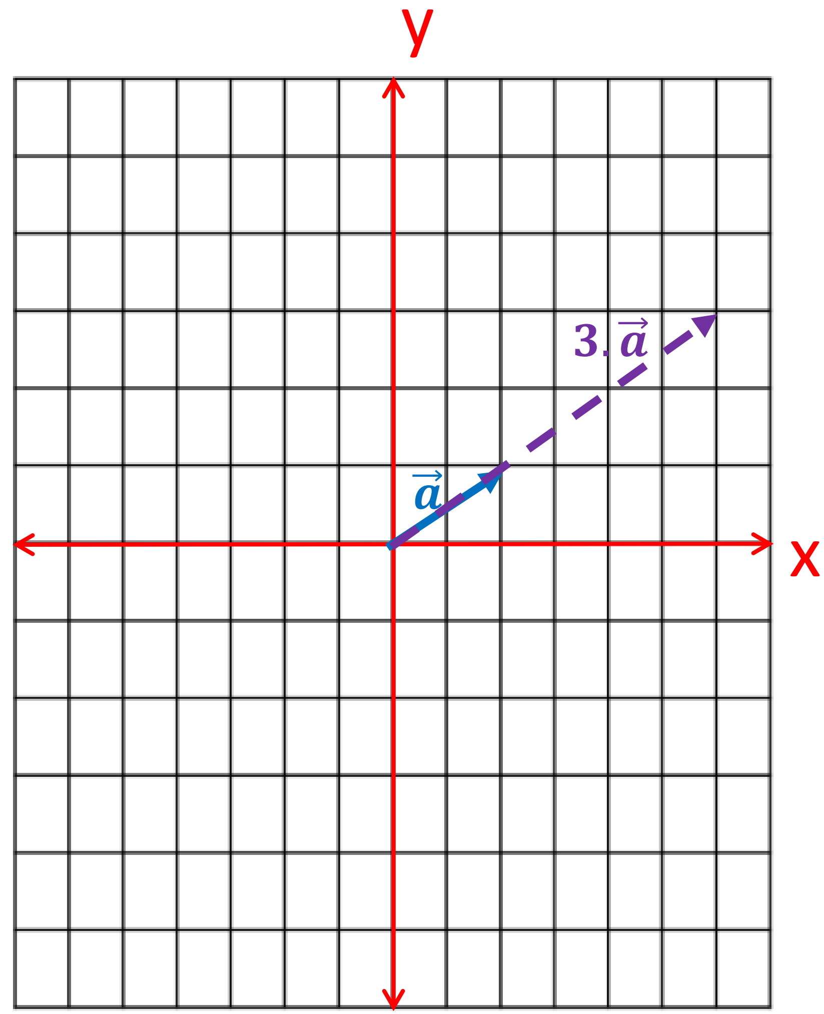
Multiplicação de vetor por escalar

- Significado:
  - $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $3.\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$



Multiplicação de vetor por escalar

- Significado:
  - $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $3.\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$



- Ou seja, o vetor teve sua **magnitude** multiplicada por 3, mas manteve sua **direção!**

Multiplicação de vetor por escalar

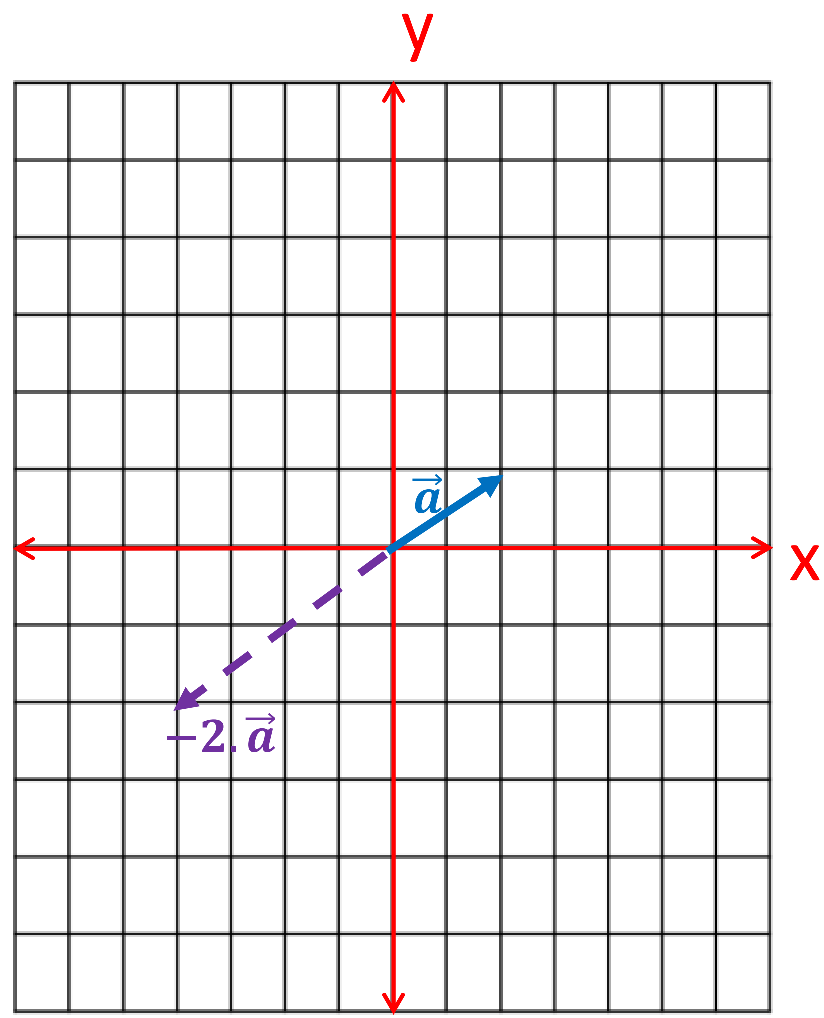
- Mas e se multiplicarmos $\vec{a}$ por -2?

$$-2.\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\-2\end{bmatrix}$$

Multiplicação de vetor por escalar

- Significado:
  - $\vec{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$
  - $-2.\vec{a} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

- Ou seja, o vetor teve sua **magnitude** multiplicada por 2, e como o escalar era **negativo, inverteu** sua **direção!**



Magnitude de um vetor

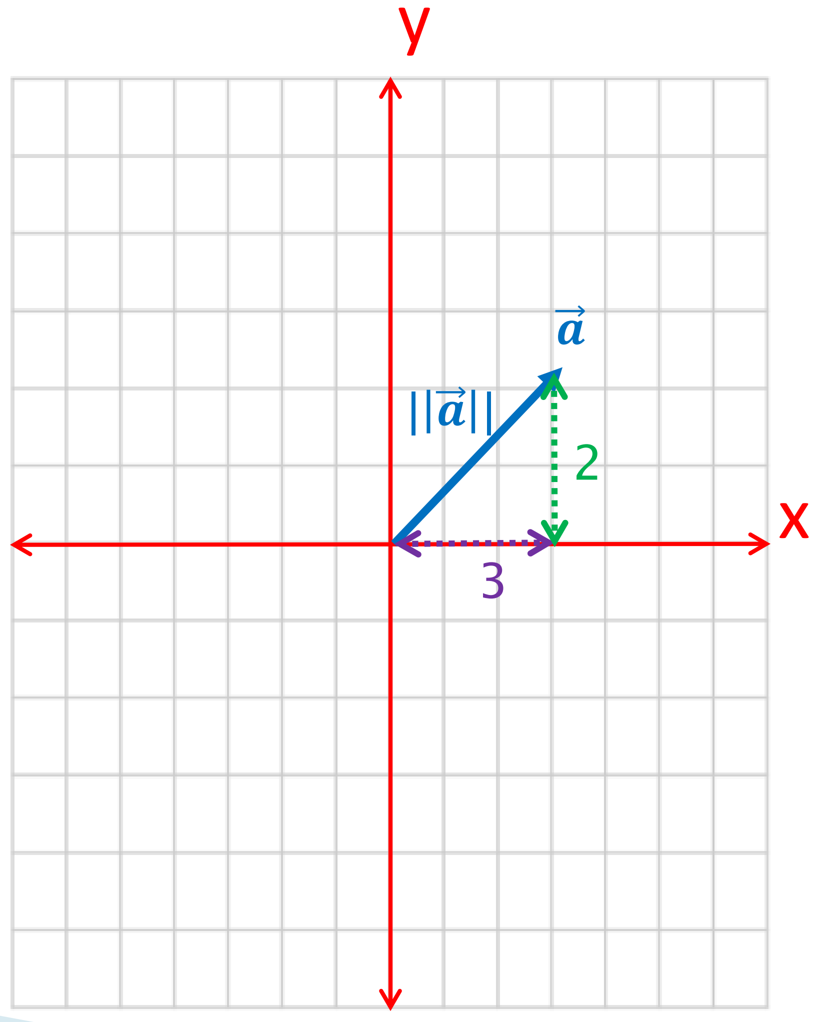
- A magnitude de um vetor $\vec{v}$ (módulo, norma ou comprimento), definido por $||\vec{v}||$ ou $|\vec{v}|$, é definida pela seguinte equação:

$$|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} V_i^2}$$

- A magnitude define a distância desde a origem do vetor até sua extremidade;

Magnitude de um vetor

- A origem da equação vem do teorema de Pitágoras.
  - $|\vec{a}|^2 = 3^2 + 2^2$
  - $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 4}$
  - $|\vec{a}| = \sqrt{13}$



Magnitude de um vetor

- Ex.1: Calcular a magnitude do vetor bidimensional $\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$:

$$|\vec{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} = 2.23$$

- Ex.2: Calcular a magnitude do vetor tridimensional $\vec{\boldsymbol{u}} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{2} \end{bmatrix}$:

$$|\vec{\boldsymbol{u}}| = \sqrt{3^2 + 7^2 + 2^2} = \sqrt{62} = 7.89$$

Vetor unitário/normalizado

- Um vetor é dito unitário ou **normalizado** quando sua magnitude é unitária, ou seja, é **igual a 1**.

- Para muitas **transformações gráficas**, precisaremos transformar nossos vetores em **vetores unitários/normalizados**;

- Para transformar um vetor em unitário, basta dividir cada componente pela sua magnitude:

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = < \frac{V_x}{|\vec{v}|}, \frac{V_y}{|\vec{v}|}, \frac{V_z}{|\vec{v}|} >$$

Vetor unitário/normalizado

- Ex.1: Transformar o vetor $\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{4} \end{bmatrix}$ em unitário:

$$|\vec{\boldsymbol{v}}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\hat{v} = < \frac{3}{5}, \frac{4}{5} >$$

$$\hat{v} = < 0.6, 0.8 >$$

Propriedades

- Dados quaisquer dois escalares **a** e **b** e quaisquer três vetores **P**, **Q** e **R**, verifica-se as seguintes propriedades:
  - $P + Q = Q + P$
  - $(P + Q) + R = P + (Q + R)$
  - $(ab)P = a(bP)$
  - $a(P + Q) = aP + a\,Q$
  - $(a + b)P = aP + bP$
  - $|P| \geq 0$
  - $|P| = 0$ se e somente se $P = \langle 0, 0, ..., 0 \rangle$
  - $|aP| = |a|\;|P|$
  - $|P + Q| \leq |P| + |Q|$

Produto Escalar/ *Dot Product*

- O produto escalar entre dois vetores **P** e **Q** é definido pela **soma dos produtos de cada componente** destes vetores:

$$P.Q = \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i$$

- Em 3 dimensões, o produto escalar é:

$$P.Q = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

- E também pode ser expresso como produto de duas matrizes:

$$P^T.Q = [P_x \quad P_y \quad P_z] \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix}$$

Produto Escalar/ *Dot Product*

- Uma das propriedades mais importantes do produto escalar é:

$$P \cdot Q = |P| \cdot |Q| \cdot \cos\alpha \; (0 \leq \alpha \leq \pi)$$

- Logo, o cosseno ângulo entre dois vetores é dado por:

$$\cos\alpha = \frac{P \cdot Q}{|P| \cdot |Q|}$$

- Caso P e Q sejam unitários, |P| e |Q| valem 1, logo:

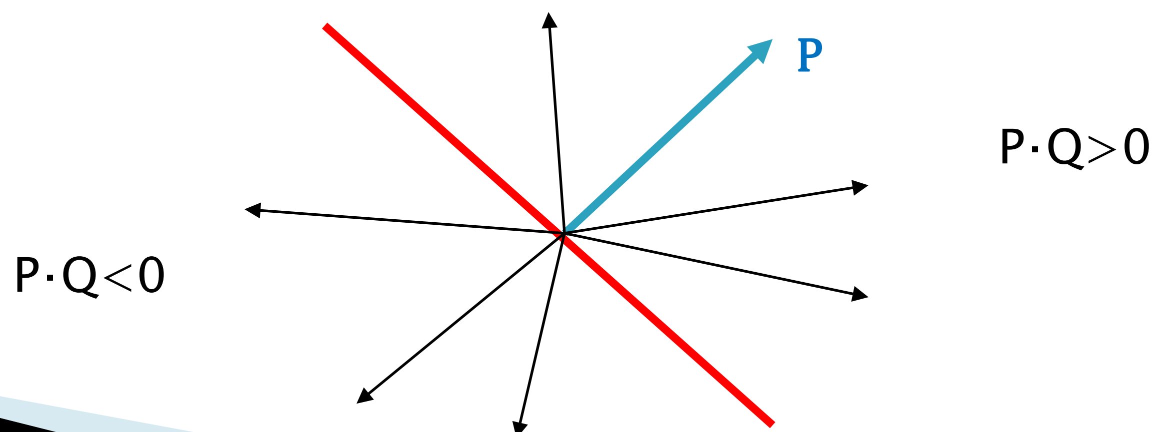
$$\cos\alpha = \frac{P \cdot Q}{1 \cdot 1} = P \cdot Q$$

$$\alpha = \cos^{-1}(P \cdot Q)$$

Isso será muito importante quanto trabalharmos com modelos de iluminação!

Propriedades

- Dados qualquer escalares a e quaisquer três vetores P, Q e R, verifica-se as seguintes propriedades:
  a) Dois vetores **P** e **Q** são perpendiculares se e somente se **P·Q** = **0**;
  b) **0·P** é sempre **0**;
  c) O sinal do produto entre **P** e **Q** nos diz quanto próximos dois vetores estão apontando na mesma direção:
     - Na figura abaixo, toma-se o plano passando pela origem e perpendicular a P;
     - Qualquer vetor que estiver do mesmo lado do plano de **P** produz um produto escalar positivo com **P**;
     - Qualquer vetor apontado para o lado oposto ao lado de **P** produz um produto escalar negativo com **P**;



Propriedades

d) $P \cdot Q = Q \cdot P$ (simetria)

e) $(aP) \cdot Q = a(P \cdot Q)$

f) $P \cdot (Q+R) = P \cdot Q + P \cdot R$

g) $P \cdot Q \leq |P| \cdot |Q|$

Produto Vetorial/ *Cross Product*

- O produto vetorial entre dois vetores **P** e **Q**, denotado por **P×Q** , produz um novo vetor que é perpendicular aos dois vetores **P** e **Q**.

- É utilizado para **encontrar vetores normais a superfícies**, bem como para definir trajetória de objetos.

- O produto vetorial de dois vetores tridimensionais P e Q é dado por:

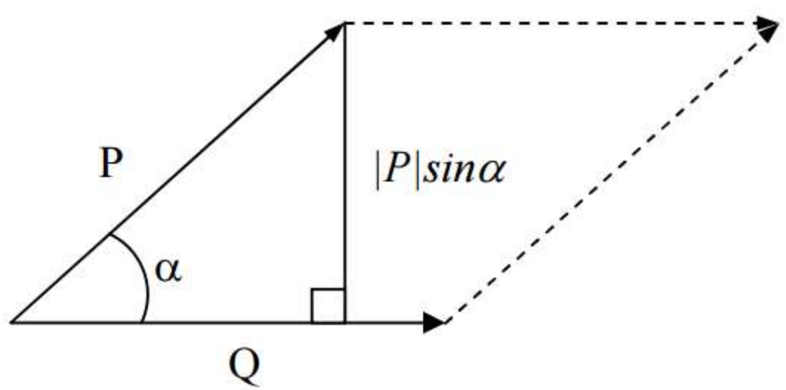
$$P \times Q = < P_y Q_z - P_z Q_y , P_z Q_x - P_x Q_z , P_x Q_y - P_y Q_x >$$

Propriedades

- Pela definição de produto escalar e vetorial:
  - $(P \times Q) \cdot P = 0$
  - $(P \times Q) \cdot Q = 0$

- O produto vetorial $P \times Q$ tem como resultado um vetor perpendicular ao plano definido por P e Q, cujo comprimento é dado por:
  - $|P \times Q| = |P||Q| sen\alpha$

- A magnitude de $P \times Q$ é dada pela área do paralelogramo, cujos lados são formados pelos vetores P e Q:



Propriedades

- O produto vetorial segue a **regra da mão direita**, conforme imagem abaixo
  - O indicador aponta na direção do vetor **a**;
  - A palma da mão (ou dedo médio) aponta na direção do vetor **b**;
  - O produto vetorial aponta na direção do polegar:.