

Inversão de matrizes

- Uma matriz $m \times n$ tem m linhas e n colunas.
- uma matriz é quadrada se $m = n$.
- (mesmo número de linhas e colunas).

Multiplicação de matrizes

Para multiplicar uma matriz $m \times n$ e uma matriz $k \times p$, precisamos que o número de colunas da matriz m seja igual ao número de linhas da segunda matriz.

Ou seja, tem que ser $m \times n$ e $n \times p$ ($n = k$).

Ex:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

é uma 2×3 para um 3×1
i gôias

termos resultados numa
matriz 2×1 .

The diagram shows the multiplication of two matrices. On the left, a 2x3 matrix is shown with its first row labeled "1ª linha" and second row "2ª linha". Its columns are labeled "1º", "2º", and "3º". To its right is a 3x1 matrix with elements 7, 8, and 9, labeled "1ª coluna". An equals sign follows. To the right of the equals sign is a 2x1 matrix with elements $1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9$ and $4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9$, labeled "Posição linha 1" and "Posição linha 2". A green box labeled "Posição linha 1" is placed over the first element of the resulting matrix.

Ex:

esta matriz tem 2 linhas

The diagram shows the multiplication of two matrices. On the left, a 2x3 matrix is shown with its first row labeled "1ª" and second row "2ª". To its right is a 3x2 matrix with columns labeled "a" and "b". An equals sign follows. To the right of the equals sign is a 2x2 matrix with elements $a+d+0$, $b+e+0$, $a+f+0$, and $b+h+0$. A red arrow points from the text "esta matriz tem 2 linhas" to the first row of the 2x3 matrix.

The diagram shows the step-by-step calculation of the product matrix. It starts with the matrices $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} a & b \\ a & e \\ g & h \end{bmatrix}$. An equals sign follows. Below it is a 2x2 matrix with elements $a+d+0$, $b+e+0$, $a+f+0$, and $b+h+0$. Another equals sign follows. Below that is a 2x2 matrix with elements d , a , g , and h .

The final result of the matrix multiplication is a 2x2 matrix with elements d , a , g , and h .

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a + \beta d + 0g & \alpha b + \beta e + 0h \\ 0 + d + 0 & 0 + e + 0 \\ 0 + 0 + g & 0 + 0 + h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a + \beta d & \alpha b + \beta e \\ 0 & 0 \\ g & h \end{bmatrix}$$

9) Lembre-se que é linha da matriz original + $\beta \cdot 2^{\text{a}}$ -linha da matriz original.

Assim, fazemos o cálculo da multiplicação de matrizes "próximas" da identidade.

- A matriz quadrada em que as entradas na diagonal principal são 1 e as outras são 0 é a matriz identidade.

I_n .

$$\text{Ex: } I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Claramente se M é uma matriz $m \times n$ então

$$I_m \times M = M$$

$$\text{e } M \times I_n = M.$$

Se M é uma matriz quadrada $n \times n$, dizemos que M é inversível se a matriz N $n \times n$ tal que

$$MN = NM = I_n.$$

- As matrizes utilizadas no escalonamento são inversíveis.
- Podemos chegar de M a I_n utilizando escalonamento. Se o processo for

Seja N_1, \dots, N_k matrizes tho

$$M = I_n M$$

$$N_i M = N_i I_n M$$

$$N_2 N_1 M = N_2 N_1 I_n M$$

⋮

$$I_n = N_k \dots N_1 M = N_k \dots N_1 N_1 I_n M$$

exalonamento

inversa
da matriz
 M .

OBS: Para $N_k \dots N_1 I_n$ ser a inversa

próximo vamos dar a fórmula

$$I_n = M \cdot (N_k \dots N_1 I_n), \text{ mas é só} \\ \text{ocorr.}$$

- Se $M K = L M = I_n$

então $K = L$. De fato,

$$K = K \cdot I_n = K \cdot M \cdot L = I_n \cdot L = L$$

OBS: Podemos escalonar
muitas as colunas nesse
modo as matrizes de escalonamento

$\mathcal{J}_n = M \cdot N_1 \cdots N_k = M \cdot \underbrace{I_n \cdot N_1 \cdots N_k}_{\text{inversa}}$

Note que para chegar à
inversa nos podemos misturar
escalonamentos de linhas e
colunas.

- Uma matriz quadrada $n \times n$
é inversível se e somente se
seu determinante é $\neq 0$.

Exemplo: inverta a

matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Vamos verificar o determinante
Para saber se a função é inversível.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 2 - (2 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 5)$$
$$= 12 + 60 + 8 - (8 + 18 + 10)$$
$$= \cancel{12} + \cancel{60} + \cancel{8} - \cancel{8} - \cancel{18} - \cancel{10}$$
$$= -15 + 50 = 35 \neq 0$$

Como o determinante é ≠ 0,
a matriz é inversível.

Vamos então fazer os
exercícios. Para facilitar
verifique o que foi feito i num
índice a operações a serem

Malizada.

manter eralinha

linha da matrigeant.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{2}(\text{1}-\text{2})} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 100 \\ 0 & 5 & 1 & 2-10 \\ 0 & -10 & -5 & -40 \end{array} \right]$$

zerar

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -10 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

zurück

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & 5 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Zeile } 3 \times (-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Zeile } 3 \rightarrow \text{Zeile } 3 + \text{Zeile } 1 \times 2} \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array} \right]$$

5①-3②

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 13 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\text{Zeile } 3 \rightarrow \text{Zeile } 3 + \text{Zeile } 1 \times 1} \left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 0 & 13 & -1 \\ 0 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array} \right]$$

$$5[1 \ 3 \ 2] - 3[0 \ 5 \ -1]$$

$$= [5 \ 15 \ 10] + [0 \ -15 \ 3]$$

$$= [5 \ 0 \ 13]$$

$$5[1 \ 0 \ 0] - 3[2 \ -1 \ 0]$$

$$= [5 \ 0 \ 0] + [-6 \ 3 \ 0]$$

$$= [-1 \ 3 \ 0]$$

$$2[0 \ 5 \ -1] + [0 \ -10 \ -5]$$

$$= [0 \ 10 \ -2] + [0 \ -10 \ -5]$$

$$= [0 \ 0 \ -7]$$

$$2[2 \ -1 \ 0] + [-4 \ 0 \ 1]$$

$$= [4 \ -2 \ 0] + [-4 \ 0 \ 1]$$

$$= [0 \ -2 \ 1]$$

zero

$$2 \left[\begin{array}{ccc} 5 & 0 & 13 \\ 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 7 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

①+13③ ②-③

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 35 & 0 & 0 & -7 & -5 & 13 \\ 0 & 35 & 0 & 14 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -2 & 1 \end{array} \right]$$

$$7[5 \ 0 \ 13] + 13[0 \ 0 \ -7]$$

$$= [35 \ 0 \ 7 \cdot 13] + [0 \ 0 \ -7 \cdot 13]$$

$$= [35 \ 0 \ 0]$$

$$7[-1 \ 3 \ 0] + 13[0 \ -2 \ 1]$$

$$= [-7 \ 21 \ 0] + [0 \ -26 \ 13]$$

$$= [-7 \ -5 \ 13]$$

$$7[0 \ 5 \ -1] - [0 \ 0 \ -7]$$

$$= [0 \ 35 \ -7] + [0 \ 0 \ 7]$$

$$= [0 \ 35 \ 0]$$

$$7[2 \ -1 \ 0] - [0 \ -2 \ 1]$$

$$= [14 \ -7 \ 0] + [0 \ 2 \ -1]$$

$$= [14 \ -5 \ -1]$$

$$x \text{ NOLAN PG 1}$$

$$\begin{bmatrix} -7 & -5 & 13 \\ 14 & -5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \frac{1}{35}(1) \\ \frac{1}{35}(2) \\ -\frac{1}{7}(3) \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -7 & -5 & 13 \\ \frac{1}{35} & \frac{1}{35} & \frac{1}{35} \\ \frac{14}{35} & -\frac{5}{35} & -\frac{1}{35} \\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{35} & -\frac{5}{35} & \frac{13}{35} \\ \frac{14}{35} & -\frac{5}{35} & -\frac{1}{35} \\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Confundida se

$$M^{-1} \cdot M = I_n$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{35} & \frac{5}{35} & \frac{13}{35} \\ \frac{19}{35} & -\frac{5}{35} & -\frac{1}{35} \\ 0 & \frac{2}{35} & -\frac{1}{35} \end{bmatrix}$$

(11)

$$-\frac{7}{35} + \frac{42}{35} + 0 = \frac{35}{35} \Rightarrow 1$$

(12)

$$-\frac{5}{35} - \frac{15}{35} + \frac{4}{7} =$$

$$\frac{1}{35} - \frac{15}{35} + \frac{20}{35} = 0 \quad \checkmark$$

(1,3)

$$\frac{13}{35} - \frac{3}{35} - \frac{2}{35} = \frac{13 - 3 - 10}{35} = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{35} & \frac{5}{35} & \frac{13}{35} \\ \frac{14}{35} & -\frac{5}{35} & \frac{-1}{35} \\ 0 & \frac{2}{35} & -\frac{1}{35} \end{bmatrix}$$

$$(2,1) - \frac{14}{35} + \frac{14}{35} + 0 = 0 \quad \checkmark$$

$$(2,2) - \frac{10}{35} - \frac{5}{35} + \frac{10}{35} - \frac{10 \cdot 5 + 50}{35} = \frac{-35}{35} = 1 \quad \checkmark$$

$$(2,3) \quad \frac{2}{35} - \frac{1}{35} - \frac{5}{7} = \frac{26-1-25}{35} \\ = 0 \checkmark$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc} -\frac{7}{35} & \frac{5}{35} & \frac{13}{35} \\ \frac{19}{35} & -\frac{5}{35} & -\frac{1}{35} \\ 0 & \frac{2}{35} & -\frac{1}{35} \end{array} \right]$$

$$(3,1) \quad -\frac{18}{35} + \frac{28}{35} + 0 = 0 \checkmark$$

$$(3,2) \quad \frac{12}{35} - \frac{10}{35} + \frac{6}{7} = \frac{-30+30}{35}$$

$$(3,3) \quad \frac{52}{35} - \frac{2}{35} - \frac{3}{7} = \frac{50-15}{35} = \frac{35}{35} = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ A & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{35} & \frac{5}{35} & \frac{12}{35} \\ \frac{14}{35} & -\frac{5}{35} & \frac{2}{35} \\ 0 & \frac{2}{35} & -\frac{1}{35} \end{bmatrix} = I_3$$

✓

