

Cálculo Companheiro

Artur H. Tomita, Eduardo Yukio G. Ishihara, Gustavo S. Garone

2024-12-09

Índice

Calculo Companheiro

Propósito do Livro

Esse livro foi criado com intenção de fornecer um material acessível a estudantes da graduação para seus estudos de Cálculo introdutório (Cálculo I) e multivariado (Cálculo II).

Buscamos escrever esse livro com uma linguagem matematicamente mais acessível, usando de paralelos, exemplos e construções a partir de simplificações para desenvolvermos a intuição matemática do leitor, ponto chave no desempenho de qualquer pessoa nas matérias de exatas. Temos como principal alvo alunos no primeiro ano da graduação nos cursos de exatas, quando são expostos pela primeira vez ao Cálculo, ou aos públicos de outros cursos que frequentam a matéria.

Esse livro é aberto para uso por toda a comunidade e possui pouco ou nenhum material de uso restrito ou de código fechado, conforme as recomendações da **unesco_recomendacao_2022** para a ciência aberta.

Como usar esse livro

Como esse livro foi pensado para servir de referência e suporte das matérias de cálculo, você pode não ver muita vantagem em ler o livro “de cabo a rabo”, e sim em consultar o que você está com dificuldade ou não conseguiu assimilar muito bem em aula. Uma boa forma de usar esse livro é ler nosso capítulo sobre determinado assunto que você gostaria de estudar e então partir para material mais “pesado”, como os livros de cálculo do Guidorizzi, Stewart, Apostol e afins.

Busque no sumário (ou, na versão online, a tabela de conteúdos à esquerda) pelo conteúdo desejado. Caso queira algo mais específico, como algum teorema específico ou conceito que não conseguiu encontrar pelos títulos dos capítulos, consulte o índice no fim do livro.

Quem Somos

Esse livro foi escrito pelos alunos do Bacharelado em Estatística do IME-USP, Gustavo S. Garone e Eduardo Yukio G. Ishihara Sob supervisão do [Prof. Artur Hideyuki Tomita](#) do departamento de matemática do IME-USP.

Você pode nos contatar via email em gustavo.garone@usp.br

Agradecimentos

Esse projeto foi parcialmente financiado pelo [Programa Unificado de Bolsas](#) da Universidade de São Paulo.

Prefácio

Resumo dos conteúdos do livro, ou seja, um sumário.

Parte I

Bem-Vindo!

1 Introdução

1.1 Apresentação do material

Bom dia, boa tarde, boa noite e, para os desesperados, boa madrugada!

Este material de apoio aos estudo e preparação para as disciplinas de Cálculo I e II foi financiado pelo [Programa Unificado de Bolsas](#) como um projeto de ensino do [Professor Dr. Artur Hideyuki Tomita](#) e produzido pelos discentes [Gustavo Silva Garone](#) e [Eduardo Yukio G. Ishihara](#), ambos do Instituto de Matemática e Estatística (). Por favor, sinta-se livre para enviar-nos um e-mail com correções, recomendações, elogios ou críticas. Este projeto está constantemente sendo produzido, mantido e corrigido, então ficaremos mais do que felizes em receber sua opinião.

Independentemente se este é o seu primeiro ano ou não da faculdade, muito provavelmente já ouviu atrocidades sobre ~~o terror dos cursos de exatas~~ Cálculo Diferencial e Integral. É exatamente por conta dessa mística construída ao redor de uma das disciplinas mais fundamentais para a matemática que nasce o projeto. Somos estudantes fazendo um material para estudantes (sob a supervisão de um professor), o que nos dá uma visão muito mais próxima da real experiência que você, leitor, provavelmente está passando agora. Buscamos o equilíbrio entre o rigor exigido pelo fazer matemático e a informalidade que gera interesse.

Para todos os tópicos, tentaremos apresentá-los seguindo uma sequência lógica e didática composta por uma introdução fundamentada na sua intuição, algumas aplicações reais do tópico para os diversos cursos, introdução à teoria, formalização da teoria, formalização dos exemplos, alguns exercícios de apoio e, por fim, soluções comentadas. Uma segunda característica notável no material é a divisão dos temas em “importantes” e “opcionais”. Por mais que sejamos obrigados a dizer que todos os tópicos da matéria são igualmente importantes em sua íntegra, alguns terão menor aplicações e outros serão frequentemente requeridos em matérias futuras.

Finalmente, sempre que possível, apresentaremos interpretações alternativas aos conceitos debatidos em cada tópico. Por exemplo, no estudo do determinante de matrizes, trataremos os determinantes primeiro como uma construção algébrica, pois, apesar de abstrato, é mais direto e é o mínimo necessário para a sua aplicação, apesar de raso, e, em seguida, apresentaremos o determinante sob uma perspectiva geométrica, que é um primeiro contato com a álgebra linear e as transformações lineares.

1.2 Estudando Matemática

Se você é do IME, este tópico provavelmente estendê-se-á a quase todas as outras matérias, mas, para os outros institutos, o estudo rigoroso da matemática pode ser um tópico exótico até agora. Uma parte significativa dos docentes diria que as notas devem ser a menor preocupação do aluno e que o verdadeiro objetivo da disciplina é aprender o conteúdo e, se possível, divertir-se no processo, mas sabemos que tal realidade é muito distante para quase todos nós meros mortais.

1.2.1 A aquisição da Intuição

Aprender matemática ocorre por meio do entendimento dos processos e pelo desenvolvimento disto que podemos chamar de “intuição matemática”. Considere o seguinte problema:

Um laboratório de química contém tubos de ensaios idênticos e não identificados. Cada tubo de ensaio contém 5g ou 8g de um sal. Um estudante chegou ao laboratório e notou que 10 tubos estavam vazios e o seus conteúdos foram depositado em um becker. Após os devidos procedimentos, o estudante constatou que havia 59g do sal no becker. Quantos tubos de cada tipo foram usados?

Apesar de nunca ter visto este exato problema antes, não é difícil perceber que ele requer um sistema linear não homogêneo (tudo bem se você não compreende muito bem o que todas essas palavras querem dizer) e conclua que foram usados 7 tubos de 5g e 3 tubos de 8g. O seu primeiro passo para resolver o problema foi, muito provavelmente, lê-lo. Em seguida, sua intuição e sua experiência indicaram que a estrutura do problema assemelha-se aos problemas de sistemas lineares vistos anteriormente na sua vida. Então, você aplicou os valores corretos e atribuiu as variáveis corretas para montar o sistema e, por fim, resolveu-o utilizando o seu método favorito. Tudo isso ocorre sem que você tenha, necessariamente, notado. Essa é a “intuição matemática”.

Alternativamente, algumas pessoas podem ter resolvido com um método alternativo de Cálculo Hipotético Universal Técnico Estimativo (CHUTE), mas saiba que também há muita intuição por trás disso! Teoricamente, havia infinitas possibilidades para serem “chutadas”. Como sabemos que π não é a resposta? E, talvez, $(5.2, 8, 5, \sqrt{5}, 3)$? Chutar 7 tubos de 5g e 3 tubos de 8g não é tão óbvio (evitaremos essa palavra no decorrer do texto por motivos óbvios) quanto pode parecer, apesar do problema ser simples. Para chegar à resposta, a pessoa deve compreender algumas coisas:

- A resposta deve ser o número de tubos de 8g e o número de tubos de 5g (dois números ao todo)
- O número de tubos é um número natural (inteiro não negativo)
- 8 vezes o número de tubos de 8g mais 5 vezes o número de tubos de 5g é igual a 65g

Acredite ou não, você também chegou a todas essas conclusões sem nem pensar sobre! Parabéns, esse é o passo fundamental para a nossa jornada de aprender matemática, em especial Cálculo I e II!

1.2.2 A prática leva à perfeição

A próxima lição sobre o aprendizado da matemática pode soar repetitiva, mas gostaríamos de lembrar: aprender matemática é um processo muito difícil de ser acelerado. Tentar aprender um conteúdo na noite antes da prova é como tentar pegar uma faca caindo: pode ser um feito sensacional ou uma épica tragédia! Apesar de defendermos o papel da intuição no fazer matemático, não podemos estar limitados a ela e é daí que surge o rigor matemático. Quando formalizamos um conceito, ganhamos a capacidade de facilmente aplicar aquele método em situações semelhantes e conseguimos explorar até o extremo. É assim que muitas das áreas da matemática foram criadas (ou descobertas). Primeiro, você aprendeu a “tirar a raiz quadrada” de números quadrados perfeitos (1, 4, 9, 25...). Depois, estendeu o conceito para outros números inteiros o que gerou o conjunto dos números irracionais (aqueles que não podem ser escritos como uma fração de inteiros). Por fim, pode ter estendido a raiz quadrada para os números negativos, o que gerou o conjunto dos números imaginários (fique tranquilo, pois este não é um conteúdo obrigatório para cálculo, mas ainda assim preparamos uma sessão dedicada a eles).

Uma boa prática é dedicar uma hora de estudo para essa disciplina nos dias em que ela é oferecida, assim como para as outras matérias. Se possível, revise a matéria, faça exercícios indicados pelo professor ou os que encontrar neste material, estudo em grupo e, acima de tudo, ajude seus colegas. Ensinar outra pessoa é uma das melhores maneiras de fixar e testar os seus conhecimentos, além de ajudar uma pessoa que provavelmente não entendeu o conteúdo tão rapidamente quanto você!

1.3 Hora de começarmos!

A você, que dedicou seu tempo a ler as dicas e os textos introdutórios, devemos agradecer, é você a quem investimos muitas horas na produção do material e esperamos que a sua experiência com cálculo deixe de ser a história de terror contada por muitos veteranos e torne-se uma agradável introdução ao fazer matemático!

Nos vemos nos próximos capítulos!

Parte II

Matemática Elementar

2 Funções Polinomiais

2.1 Introdução

Neste, capítulo, daremos início ao estudo de funções polinomiais, ou apenas polinômios daqui para frente. Funções polinomiais são um conjunto de funções muito bem definidas e simples, o que torna-as adequadas para modelar situações extremamente variadas. Ademais, funções polinomiais geralmente são as funções mais simples que podemos trabalhar em diversos contextos (desde cálculo a modelagem de dados), então serão as primeiras funções a efetivamente aprofundarmos!

Vamos ver alguns exemplos:

1- Um projétil foi atirado de um canhão de cima de uma plataforma. Um físico determinou que a altura do objeto, em função do tempo após o lançamento, pode ser descrita por $h(t) = 4.9t^2 + 100t + 8$

2- Após analisar o valor das ações de uma empresa, um economista determinou que a [média móvel](#) dos valores do ativo, em função do tempo, pode ser modelado por $v(t) = -0.0002t^3 + 31.664t^2 - 10^6t + 2 \times 1010$

3- Uma bióloga, ao medir várias vezes o volume de oxigênio (em unidade desconhecida) produzido por uma população de algas, notou que a produção variava de acordo com a concentração de algas em seu aquário. A concentração variava de 0 gramas de algas por L a 100g de algas por litro. A biólogo notou que a produção era modelada pela função $p(c) = \frac{-5}{1000}(c^2 - 120c)$

4- Um triatleta precisa atravessar de um lado de um lago para o outro. Sua velocidade em terra é diferente da velocidade em água e a distância em terra é de 50m. Seu preparador físico modelou o problema e determinou que o tempo gasto para chegar ao destino, em função da distância percorrida em terra é dado pelo polinômio $t(d) = \frac{d^2}{20} - \frac{11d}{4} + 85$

Estes dois últimos exemplos utilizam um polinômio para modelar uma situação, mas é fácil perceber que o grande objetivo por trás dos experimentos é maximizar a produção de oxigênio e minimizar o tempo gasto. Tal classe de problemas recebe o nome de **Problemas de Otimização** e será tratado num capítulo a parte, pois o estudo rigoroso requer o uso de derivadas.