Cálculo Companheiro

Artur H. Tomita, Eduardo Yukio G. Ishihara, Gustavo S. Garone

2025-02-21

Índice

Calculo Companheiro

Propósito do Livro

Esse livro foi criado com inteção de fornecer um material acessível a estudantes da graduação para seus estudos de Cálculo introdutório (Cálculo I) e multivariado (Cáculo II).

Buscamos escrever esse livro com uma linguagem metematicamente mais acessível, usando de paralelos, exemplos e construções a partir de simplficiações para desenvolvermos a intuição matemática do leitor, ponto chave no desempenho de qualquer pessoa nas matérias de exatas. Temos como principal alvo alunos no primeiro ano da graduação nos cursos de exatas, quando são expostos pela primeira vez ao Cálculo, ou aos publicos de outros cursos que frequentam a matéria.

Esse livro é aberto para uso por toda a comunidade e possui pouco ou nenhum material de uso restrito ou de código fechado, conforme as recomendações da **unesco_recomendacao_2022** para a ciência aberta.

Como usar esse livro

Como esse livro foi pensado para servir de referência e suporte das matérias de cálculo, você pode não ver muita vantagem em ler o livro "de cabo a rabo", e sim em consultar o que você está com dificuldade ou não conseguiu assimilar muito bem em aula. Uma boa forma de usar esse livro é ler nosso capítulo sobre determinado assunto que você gostaria de estudar e então partir para material mais "pesado", como os livros de cálculo do Guidorizzi, Stewart, Apostol e afins.

Busque no sumário (ou, na versão online, a tabela de conteúdos à esquerda) pelo conteúdo desejado. Caso queira algo mais específico, como algum teorema específico ou conceito que não conseguiu encontrar pelos títulos dos capítulos, consulte o índice no fim do livro.

Quem Somos

Esse livro foi escrito pelos alunos do Bacharelado em Estatística do IME-USP, Gustavo S. Garone e Eduardo Yukio G. Ishihara Sob supervisão do Prof. Artur Hideyuki Tomita do departamento de matemática do IME-USP.

Você pode nos contatar via email em gustavo.garone arroba usp.br

Agradecimentos

Esse projeto foi parcialmente financiado pelo Programa Unificado de Bolsas da Universidade de São Paulo.

Prefácio

Resumo dos conteudos do livro, ou seja, um sumário.

Parte I

Bem-Vindo!

1 Introdução

1.1 Apresentação do material

Bom dia, boa tarde, boa noite e, para os desesperados, boa madrugada!

Este material de apoio aos estudo e preparação para as disciplinas de Cálculo I e II foi financiado pelo Programa Unificado de Bolsas como um projeto de ensino do Professor Dr. Artur Hideyuki Tomita e produzido pelos discentes Gustavo Silva Garone e Eduardo Yukio G. Ishihara, ambos do Instituto de Matemática e Estatística ( ). Por favor, sinta-se livre para enviar-nos um e-mail com correções, recomendações, elogios ou críticas. Este projeto está constantemente sendo produzido, mantido e corrigido, então ficaremos mais do que felizes em receber sua opinião.

Independentemente se este é o seu primeiro ano ou não da faculdade, muito provavelmente já ouviu atrocidades sobre ~~o terror dos cursos de exatas~~ Cálculo Diferencial e Integral. É exatamente por conta dessa mística construída ao redor de uma das disciplinas mais fundamentais para a matemática que nasce o projeto. Somos estudantes fazendo um material para estudantes (sob a supervisão de um professor), o que nos dá uma visão muito mais próxima da real experiência que você, leitor, provavelmente está passando agora. Buscamos o equilíbrio entre o rigor exigido pelo fazer matemático e a informalidade que gera interesse.

Para todos os tópicos, tentaremos apresentá-los seguindo uma sequência lógica e didática composta por uma introdução fundamentada na sua intuição, algumas aplicações reais do tópico para os diversos cursos, introdução à teoria, formalização da teoria, formalização dos exemplos, alguns exercícios de apoio e, por fim, soluções comentadas. Uma segunda característica notável no material é a divisão dos temas em "importantes" e "opcionais". Por mais que sejamos obrigados a dizer que todos os tópicos da matéria são igualmente importantes em sua íntegra, alguns terão menor aplicações e outros serão frequentemente requeridos em matérias futuras.

Finalmente, sempre que possível, apresentaremos interpretações alternativas aos conceitos debatidos em cada tópico. Por exemplo, no estudo do determinante de matrizes, trataremos os determinantes primeiro como uma construção algébrica, pois, apesar de abstrato, é mais direto e é o mínimo necessário para a sua aplicação, apesar de raso, e, em seguida, apresentaremos o determinante sob uma perspectiva geométrica, que é um primeiro contato com a algebra linear e as transformações lineares.

1.2 Estudando Matemática

Se você é do IME, este tópico provavelmente estendê-se-á a quase todas as outras matérias, mas, para os outros institutos, o estudo rigoros da matemática pode ser um tópico exótico até agora. Uma parte significativa dos docentes diria que as notas devem ser a menor preocupação do aluno e que o verdadeiro objetivo da disciplina é aprender o conteúdo e, se possível, divertir-se no processo, mas sabemos que tal realidade é muito distante para quase todos nós meros mortais.

1.2.1 A aquisição da Intuição

Aprender matemática ocorre por meio do entendimento dos processos e pelo desenvolvimento disto que podemos chamar de "intuição matemática". Considere o seguinte problema:

> Um laboratório de química contém tubos de ensaios idênticos e não identificados. Cada tubo de ensaio contém 5g ou 8g de um sal. Um estudante chegou ao laboratório e notou que 10 tubos estavam vazios e o seus conteúdos foram depositado em um becker. Após os devidos procedimentos, o estudante constatou que havia 59g do sal no becker. Quantos tubos de cada tipo foram usados?

Apesar de nunca ter visto este exato problema antes, não é difícil perceber que ele requer um sistema linear não homogêneo (tudo bem se você não compreende muito bem o que todas essas palavras querem dizer) e conclua que foram usados 7 tubos de 5g e 3 tubos de 8g. O seu primeiro passo para resolver o problema foi, muito provavelmente, lê-lo. Em seguida, sua intuição e sua experiência indicaram que a estrutura do problema assemelha-se aos problemas de sistemas lineares vistos anteriormente na sua vida. Então, você aplicou os valores corretos e atribuiu as variáveis corretas para montar e sistema e, por fim, resolveu-o utilizando o seu método favorito. Tudo isso ocorre sem que você tenha, necessariamente, notado. Essa é a "intuição matemática".

Alternativamente, algumas pessoas podem ter resolvido com um método alternativo de Cálculo Hipotético Universal Técnico Estimativo (CHUTE), mas saiba que também há muita intuição por trás disso! Teoricamente, havia infinitas possibilidades para serem "chutadas". Como sabemos que π não é a resposta? E, talvez, $(5.2, 8, 5, \sqrt{5}, 3)$? Chutar 7 tubos de 5g e 3 tubos de 8g não é tão óbvio (evitaremos essa palavra no decorrer do texto por motivos óbvios) quanto pode parecer, apesar do problema ser simples. Para chegar à resposta, a pessoa deve compreender algumas coisas:

- A resposta deve ser o número de tubos de 8g e o número de tubos de 5g (dois números ao todo)
- O número de tubos é um número natural (inteiro não negativo)
- 8 vezes o número de tubos de 8g mais 5 vezes o número de tubos de 5g é igual a 65g

Acredite ou não, você também chegou a todas essas conclusões sem nem pensar sobre! Parabéns, esse é o passo fundamental para a nossa jornada de aprender matemática, em especial Cálculo I e II!

1.2.2 A prática leva à perfeição

A próxima lição sobre o aprendizado da matemática pode soar repetitiva, mas gostaríamos de lembrar: apender matemática é um processo muito difícil de ser acelerado. Tentar aprender um conteúdo na noite antes da prova é como tentar pegar uma faca caindo: pode ser um feito sensacional ou uma épica tragédia! Apesar de defendermos o papel da intuição no fazer matemáico, não podemos estar limitados a ela e é daí que surge o rigor matemático. Quando formalizamos um conceito, ganhamos a capacidade de facilmente aplicar aquele método em situações semelhantes e conseguimos explorar até o extremo. É assim que muitas das áreas da matemática foram criadas (ou descobertas). Primeiro, você aprendeu a "tirar a raiz quadrada" de números quadrados perfeitos (1, 4, 9, 25...). Depois, estendeu o conceitos para outros números inteiros o que gerou o conjunto dos números irracionais (aqueles que não podem ser escritos como uma fração de inteiros). Por fim, pode ter estendido a raiz quadrada para os números negativos, o que gerou o conjuntos dos números imaginários (fique tranquilo, pois este não é um conteúdo obrigatório para cálculo, mas ainda assim preparamos uma sessão dedicada a eles).

Uma boa prática é dedicar uma hora de estudo para essa disciplina nos dias em que ela é oferecida, assim como para as outras matérias. Se possível, revise a matéria, faça exercícios indicados pelo professor ou os que escontrar neste material, estude em grupo e, acima de tudo, ajude seus colegas. Ensinar outra pessoa é uma das melhores maneiras de fixar e testa os seus conhecimentos, além de ajudar uma pessoa que provavelmente não entendeu o conteúdo tão rapidamente quanto você!

1.3 Hora de começarmos!

A você, que dedicou seu tempo a ler as dicas e os textos introdutórios, devemos agradecer, é você em quem investimos ~~muitas~~ horas na produção do material e esperamos que a sua experiência com cálculo deixe de ser a história de terror contada por muitos veteranos e torne-se uma agradável introdução ao fazer matemático!

Nos vemos nos próximos capítulos!

Parte II

Matemática Elementar

2 Funções Polinomiais

2.1 Introdução

Neste, capítulo, daremos início ao estudo de funções polinomiais, ou apenas polinômios daqui para frente. Funções polinomiais são um conjunto de funções muito bem definidas e simples, o que torna-as adequadas para modelar situações extremamente variadas. Ademais, funções polinomiais geralmente são as funções mais simples que podemos trabalhar em diversos contextos (desde cálculo a modelagem de dados), então serão as primeiras funções a efetivamente aprofundarmos!

Vamos ver alguns exemplos:

> 1- Um projétil foi atirado de um canhão de cima de uma plataforma. Um físico determinou que a altura do objeto, em função do tempo após o lançamento, pode ser descrita por $h(t) = 4.9t^2 + 100t + 8$
>
> 2- Após analisar o valor das ações de uma empresa, um economista determinou que a média móvel dos valores do ativo, em função do tempo, pode ser modelado por $v(t) = -0.0002t^3 + 31.664t^2 - 10^6 t + 2 \times 1010$
>
> 3- Uma bióloga, ao medir várias vezes o volume de oxigênio (em unidade desconhecida) produzido por uma população de algas, notou que a produção variava de acordo com a concentração de algas em seu aquário. A concentração variava de 0 gramas de algas por L a 100g de algas por litro. A biólogo notou que a produção era modelada pela função $p(c) = \frac{-5}{1000}(c^2 - 120c)$
>
> 4- Um triatleta precisa atravessar de um lado de um lago para o outro. Sua velocidade em terra é diferente da velocidade em água e a distância em terra é de 50m. Seu preparador físico modelou o problema e determinou que o tempo gasto para chegar ao destino, em função da distância percorrida em terra é dado pelo polinômio $t(d) = \frac{d^2}{20} - \frac{11d}{4} + 85$

Estes dois últimos exemplos utilizam um polinômio para modelar uma situação, mas é fácil perceber que o grande objetivo por trás dos experimentos é maximizar a produção de oxigênio e minimizar o tempo gasto. Tal classe de problemas recebe o nome de **Problemas de Otimização** e será tratado num capítulo a parte, pois o estudo rigoroso requer o uso de derivadas.

Por agora, ao tentarmos encontrar estes pontos de máximo e mínimo, vamos recorrer a um método mais rudimentar: olhar o gráfico.

Até agora, tivemos um contato inicial com os polinômios e apenas uma intuição do que eles são. Analisando os polinômios obtidos em cada exemplo, você deve ter notado algumas características comuns. Portanto, vamos dar início à formalização dessa intuição!

2.2 Anatomia de um polinômio de uma variável

Primeiro, vamos definir a parte mais fundamental de uma função: seu domínio e contradomínio. Polinômios são funções cujo domínio são os complexos e o contradomínio também são os complexos: $f(x) : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ (lê-se “f de x leva de complexos em complexos”).

A palavra “polinômio” vem da junção de “*poli*”, que vem do grego e significa “muitos” e “*nomen*”, que vem do latim e significa “nome”, ou, mais vulgarmente, “temo”. Em suma, polinômios são várias coisas! Vamos, agora, à definição de fato.

> Polinômios são expressões que podem ser construídas a partir de constantes e variáveis por meio de soma, subtração, multiplicação e exponenciação por inteiros não negativos.

Ou seja, de forma genérica, um polinômio de x é da forma

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Apesar de não explicitados, perceba que $a_1 x = a_1 x^1$ e $a_0 = a_0 x^0 = a_0 \times 1$.

Note que todos os termos a_i são números e os expoentes também são números. É importante garantir tal fato, pois pode gerar problemas ao definirmos o grau do polinômio e ao verificarmos outras propriedades, um x no expoente gera uma função exponencial, não uma polinomial!

Todavia, como nem tudo na matemática são flores, polinômios nem sempre terão a cara de polinômios. Veja os exemplos abaixo:

$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, com $x \neq 1$

$f(x) = \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)} = x - 1$

Portanto, $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, com $x \neq 1$ é um polinômio.

$f(x) = tg(arctg(5x^2 - \pi))$

$f(x) = tg(arctg(5x^2 - \pi))) = 5x^2 - \pi$

Portanto, $f(x) = tg(arctg(5x^2 - \pi))$ é um polinômio.

No exemplo acima, tome muito cuidado ao manipular funções trigonométricas. $tg(arctg(f(x)) = f(x)$, mas $arctg(tg(f(x))$ nem sempre é igual a $f(x)$. Isso ocorre por conta dos domínios das funções e onde podem ser invertidas, mas tal assunto é tratado em outro capítulo.

$f(x) = e^{ln(5x^{-1})}$

$f(x) = e^{ln(5x^{-1})} = 5x^{-1}$

Portanto, $f(x) = e^{ln(5x^{-1})}$ não é um polinômio, pois o x tem um expoente negativo, ou seja, não é positivo nem nulo.

Determinar se uma função é polinomial trata-se, portanto, de verificar se aquela função pode ser reescrita como uma soma de potências de x multiplicadas por uma constante. Neste momento, trataremos apenas de polinômios com quantidade finita de termos. O uso de polinômios com infinitos termos, apesar de parecer pouco intuitivo, é uma técnica muito usada para aproximar funções genéricas por um polinômio, o que tem aplicações nas mais diversas áreas, sobretudo na computação.

2.2.1 Grau de um polinômio

O grau de um polinômio, notado $gr(P)$ ou $grau(P)$, refere-se ao maior expoente da variável. Genericamente, temos que o grau de um polinômio é n tal que $a_n \neq 0$. Ou seja, o maior número ao qual x está sendo elevado, quando trata-se de um polinômio em x e a constante não é 0.

Particularmente, alguns polinômios de grau pequeno recebem alguns nomes especiais.

Grau do Polinômio	Nome do Polinômio
0	Constante
1	Linear
2	Quadrático
3	Cúbico

Um polinômio constante é, simplesmente, um número, ou seja, $p(x) = a_0$ e seu gráfico é uma linha horizontal que intercepta o eixo y no ponto $(0, a_0)$.

Um polinômio linear é da forma $p(x) = a_1x + a_0$. Ele intercepta o eixo y no ponto $(0, a_0)$. Seu gráfico é uma reta não paralela a nenhum dos eixos.

Um polinômio quadrático é da forma $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Você já deve imaginar onde ele intercepta o eixo y. O gráfico de um polinômio quadrático é uma parábola.

Um polinômio cúbico é da forma $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$. Mais uma vez, não é difícil inferir onde ele intercepta o eixo y. Seu gráfico pode variar de acordo com os parâmetros, mas geralmente forma uma letra “n” e explode para infinito positivo e infinito negativo em cada uma das suas extremidades.

Polinômios de grau superior não recebem nomes especiais, pois são menos frequentemente trabalhados em aula e não têm propriedades facilmente generalizadas, como é o caso da parábola e a reta.

2.2.2 Raízes de um Polinômio

Encontrar as raízes de um polinômio nada mais é do que encontrar os pontos em que $p(x) = 0$, ou seja, quando o polinômio intercepta o eixo x.

Encontrar as raízes de um polinômio é um processo cujo trabalho cresce exponencialmente de acordo com o grau do polinômio, por isso traremos algumas técnicas algorítmicas para encontrar as raízes, fórmulas e intuições. No futuro, com o Teorema do Valor Intermediário, o processo de encontrar as raízes de um polinômio pode tornar-se mais fácil (e bonito), mas nunca trivial!

2.2.2.1 Para polinômios de grau 0:

Um polinômio de grau 0 pode ter zero raízes ou infinitas raízes! Quando $a_0 = 0$, o polinômio coincide com o eixo x em todos os pontos, portanto todos os pontos são raízes e há infinitos sobre sobre o eixo x. Quando $a_0 \neq 0$, o polinômio é paralelo ao eixo$x$ e não coincidente, portanto $p(x)$ nunca é igual a 0, ou seja, não há nenhuma raiz.

2.2.2.2 Para polinômios de grau 1:

$p(x) = a_1 x + a_0 = 0 \Leftrightarrow a_1 x = -a_0 \Leftrightarrow x = -\frac{a_0}{a_1}$ A única raiz de um polinômio de grau 1 é $x = -\frac{a_0}{a_1}$

2.2.2.3 Para polinômios de grau 2:

Para achar as raízes de um polinômio de grau 2, temos uma fórmula muito conhecida por nós brasileiros: a fórmula de Bhaskara, que não foi descoberta por Bhaskara. Segue aqui uma demonstração da fórmula:

$$
\begin{aligned}
p(x) &= a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{a_2x^2 + a_1x + a_0}{a_2} = \frac{0}{a^2} \\
&\Leftrightarrow x^2 + \frac{a_1x}{a_2} + \frac{a_0}{a_2} = 0 \\
&\Leftrightarrow x^2 + \frac{a_1x}{a_2} = -\frac{a_0}{a_2} \\
&\Leftrightarrow x^2 + \frac{a_1x}{a_2} + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = -\frac{a_0}{a_2} + \left(\frac{a_1}{2a_2}\right)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + \frac{a_1x}{a_2} + \frac{{a_1}^2}{4{a_2}^2} = -\frac{a_0}{a_2} + \frac{{a_1}^2}{4{a_2}^2}
\end{aligned}
$$

Trata-se de um produto notável!

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = -\frac{a_0}{a_2} + \frac{{a_1}^2}{4{a_2}^2} \\
&\Leftrightarrow \left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2 = \frac{{a_1}^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2}{4{a_2}^2} \\
&\Leftrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{a_1}{2a_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{{a_1}^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2}{4{a_2}^2}} \\
&\Leftrightarrow x + \frac{a_1}{2a_2} = \pm\sqrt{\frac{{a_1}^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2}{4{a_2}^2}} \\
&\Leftrightarrow x + \frac{a_1}{2a_2} = \pm\frac{\sqrt{{a_1}^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2}}{\sqrt{4{a_2}^2}} \\
&\Leftrightarrow x + \frac{a_1}{2a_2} = \pm\frac{\sqrt{{a_1}^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2}}{2a_2} \\
&\Leftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{{a_1}^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2}}{2a_2} - \frac{a_1}{2a_2} \\
&\Leftrightarrow x = \frac{-a_1 \pm \sqrt{{a_1}^2 - 4 \cdot a_0 \cdot a_2}}{2a_2}
\end{aligned}
$$

$p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 = ax^2 + bx + c$

Renomeamos as variáveis acima apenas para facilitar a sua identificação dos termos em relação ao padrão usado no ensino médio. Portanto, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}$

Tomando $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

Da fórmula, segue que, quando $\Delta > 0$, o polinômio tem duas raízes reais, quando $\Delta = 0$, o polinômio só tem uma raiz distinta, quando $\Delta < 0$, o polinômio não tem nenhuma raiz real.

Por agora, preste muita atenção quando dizemos "o polinômio só tem uma raiz distinta" e "o polinômio não tem nenhuma raiz real", pois em breve tais fatos não nos impedirão de fazer mais contas!

2.2.3 Para polinômios de grau maior que 2:

Existe um ramo da matemática que nasceu do estudo das raízes de um polinômio. Desta área, trazemos a você, leitor, um resultado muito triste: não existe uma fórmula para as raízes de um polinômio de grau 5 ou superior. Todavia, para grau 3 e 4 há fórmulas explicitadas a partir dos coeficientes do polinômio. Para a alegria de todos, tais fórmulas são muito grandes para trazermos nesse material ou para você encontrar uma aplicação para elas.

Mas o que fazer se eu precisar achar as raízes de um polinômio de grau 3 ou maior?

Não se preocupe, a próxima seção dedicar-se-á exclusivamente a métodos alternativos para achar a raiz sem o uso de fórmulas como as anteriores.

3 Matrizes

Uma matriz $m \times n$ (lemos: "m por n") tem m linhas, na horizontal, e n colunas, na vertical. Também é comum usarmos $i \times j$, para indicar o tamanho ou **Ordem** da matriz.

Para indicar os elementos de uma matriz $M_{m\times n}$, usamos a mesma letra que indicamos a matriz, mas em caixa baixa. Ou seja, na matriz M indicada abaixo, o elemento $m_{2,3}$ é o elemento dessa matriz que está na 2ª linha e 3ª coluna. Para indicar uma coluna ou linha genérica, utilizamos o termo "fileira".

$$M_{m\times n} = \begin{bmatrix} m_{1,1} & m_{1,2} & \dots & m_{1,n} \\ m_{2,1} & m_{2,2} & \dots & m_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m,1} & m_{m,2} & \dots & m_{m_n} \end{bmatrix}$$

3.1 Igualdade de Matrizes

Duas matrizes são ditas iguais se, e somente se, elas têm os mesmo tamanho e todos os elementos correspondentes são iguais.

$$A_{m\times n} = B_{o\times p} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{1,1} = b_{1,1} \\ a_{2,1} = b_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,n} = b_{m,n} \\ m = o \\ n = p \end{cases}$$

Alternatimente, é possível expressar a afirmação acima com uma notação matemática mais formal. Nos capítulos iniciais deste livro, oferecemos mais de uma notação para acostumar o leitor à escrita matemática, mas, em capítulos futuros, exibiremos exclusivamente a notação formal. Veja o exemplo:

$$A_{m,n} = B_{o,p} \Leftrightarrow m = o \text{ e } n = p \text{ e para todo } i \in [1, m], j \in [1, n], a_{i,j} = b_{i,j}$$

Lê-se: "A matriz A, m por n, é igual à matriz B, o por p, se, e somente se, m é igual a o e n é igual a p e, para todo elemento i pertencente ao conjuntno de 1 a m e todo j pertencente ao conjunto de 1 a n, o elemento $a\ i, j$ é igual ao elemento $b\ i, j$.

3.2 Matriz Quadrada

Uma matriz é dita quadrada se, e somento se, o número de linhas é igual ao número de colunas. $A_{m,n}$ é quadrada $\Leftrightarrow m = n$

Nas matrizes quadradas, há elementos que chamamos de diagonal principal e diagonal secundária. A diagonal principal é aquela que corre de $1, 1$ até m, n, enquanto a secundária é aquela que corre de $1, n$ até $m, 1$

3.3 Matriz Nula

Uma matriz é dita nula se, e somente se, todos os seus elementos são iguais a zero. Alternativamente, A é nula $\Leftrightarrow \forall a \in A,\ a = 0$ (lê-se: "A é nula se, e somente se, para todo elemento a pertencente à matriz A, tal elemento é igual a 0."). Como notação de uma matriz nula, utilizamos o próprio algarismo 0, mas com o índice correspondente ao tamanho da matriz.

$$0_{3\times 2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{2} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}\right\} 3$$

Por mais que seja possível diferenciar a matriz nula do número 0 por conta do índice, recomendamos que sempre atentem-se a que tipo de objeto matemática estamos trabalhando. Posteriormente, quando trabalharmos com vetores e espaços vetoriais, encontraremos mais um objeto cuja notação é 0. Sempre que possível, reforçaremos ou explicitaremos qual objeto estamos lidando, mas tal diferenciação não estará presente na maioria dos materiais que encontrará durante sua jornada acadêmica.

3.4 Matriz Identidade

Uma matriz identidade é uma matriz quadrada com 1's em sua diagonal e 0's como outros elementos. É comum chamarmos a matriz identidade de ordem n, ou seja, com n linhas e n colunas, de I_n:

$$I_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 1_{(a_{n,n})} \end{bmatrix}$$

Esse nome, "identidade", fará mais sentido quando discutirmos multiplicação de matrizes.

3.5 Soma e Subtração de Matrizes

Para somar ou subtrair matrizes, basta realizar a operação elemento por elemento, obtendo uma nova matriz:

$$A_{i\times j} + B_{i\times j} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,j} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i,1} & b_{i,2} & \dots & b_{i,j} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,j}+b_{1,j} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & a_{2,j}+b_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1}+b_{i,1} & a_{i,2}+b_{i,2} & \dots & a_{i,j}+b_{i,j} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, podemos nos perguntar o que aconteceria se tentássemos somar uma matriz 3×3 por uma 2×2. Pode parecer intuitivo pensar que essa soma poderia ser feita, deixando a linha 3 e coluna 3 da primeira matriz intacta, mas esse pensamento está incorreto. **Aviso**: *Podemos apenas somar e subtraír matrizes de mesma ordem.*

3.6 Multiplicação de matrizes por escalar

Chamamos de escalar um número (normalmente real, comumente chamado de λ) que multiplica um vetor ou matriz. Para multiplicar uma matriz por um escalar, multiplicamos todos seus elementos por ele, um a um, idependentemente da sua ordem. Isso recebe o nome de produto por escalar.

$$\lambda\ M_{m\times n} = \lambda \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{1,1} & \lambda a_{1,2} & \dots & \lambda a_{1,n} \\ \lambda a_{2,1} & \lambda a_{2,2} & \dots & \lambda a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \lambda a_{m,2} & \dots & \lambda a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Atenção: Você pode já ter ouvido sobre **Produto Escalar**. Isso **não** é o produto de uma matriz por um escalar, mas sim uma operação distinta que estudaremos em algebra linear.

Produto Escalar: Operação entre duas matrizes (vetores) que nos dá um escalar *Produto POR Escalar*: Operação que acabamos de estudar entre matriz e um escalar que nos dá uma matriz. Conforme dito anteriormente, compreender que tipo de objetos matemáticos estamos trabalhando e quais operações podemos efetuar com eles é fundamental para o estúdo do cálculo.

3.7 Multiplicação de Matrizes

Para multiplicarmos duas matrizes, é necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz. Por esse e outros motivos, dizemos que a multiplicação de matrizes *não é comutativa*, ou seja, multiplicar uma matriz M por uma matriz N pode nos dar uma matriz resultante diferente do que se multiplicarmos N por M, caso essa multiplicação seja se quer possível!

$$M_{i\times j} \times N_{j\times k}, j = j \Rightarrow \checkmark$$
$$M_{i\times j} \times B_{k\times j}, j \neq k \Rightarrow$$
$$N_{j\times k} \times M_{i\times j}. k \neq i \Rightarrow$$

Vamos analisar como a operação é feita, e então nos ficará claro o porquê dessa regra existir.

Considere as seguintes matrizes:

$$A_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Sabemos que podemos multiplicá-las com A como primeira matriz $A_{2\times 3} \times B_{3\times 1}, 3 = 3 \Rightarrow \checkmark$, mas não como segunda matriz: $B_{3\times 1} \times A_{2\times 3}, 1 \neq 2 \Rightarrow$. Iremos então realizar a primeira operação descrita da seguinte maneira:

Definição. Para multiplicar matrizes, somaremos cada linha da primeira multiplicada por um elemento equivalente de cada coluna:

$$\begin{aligned} & A \times B \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 9 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 50 \\ 122 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

É importante que você se familiarize com o "pareamento" feito entre as linhas da primeira matriz com as linhas da segunda. Você pode agora estar se perguntando o que aconteceria caso houvesse mais de uma coluna na segunda matriz. A resposta pode ser bastante intuitiva para você: a matriz resultante terá mais uma coluna.

$$
\begin{aligned}
&C \times D \\
&= \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} g & h \\ i & j \\ k & l \end{bmatrix} \\
\\
&= \begin{bmatrix} a \cdot g + b \cdot i + c \cdot k & a \cdot h + b \cdot j + c \cdot k \\ d \cdot g + e \cdot i + f \cdot k & d \cdot h + e \cdot j + f \cdot k \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Note que o número de linhas da matriz resultate da multiplicação entre matrizes é sempre igual ao número de linhas da primeira matriz e o de colunas igual ao da segunda. Ou seja, *Para multiplicarmos, os números de "dentro" devem ser iguais, e a matriz resultante terá dimensões iguais aos números de "fora"*:

$$M_{3\times 2} \times N_{2\times 4} \overset{2=2}{=} H_{3\times 4}$$

E onde a matriz identidade entra no jogo?

Para qualquer matriz $M_{i\times j}$,

$$I_i \times M_{i\times j} = M_{i\times j} = M_{i\times j} \times I_j$$

Prove!

A multiplicação de matrizes, por mais que simples, é extremamente poderosa e é a base por trás de importantes conceitos matemáticos. Um deles é a inversão de matriz, que você verá adiante.

3.8 Determinantes

Deteminantes são computações especiais realizadas em matrizes quadradas. Os determinantes possuem interpretações muito interessantes, sobretudo na geometria e são amplamente aplicados no estuda da álgbera linear, mas, por hora, apenas aprenderemos como calculá-los, especialmente até matrizes de ordem 3 e apresentaremos superficialmente métodos para calcular determinantes de ordem superior. Limitaremos o estudo aprofundado à ordem 3, pois o trabalho para calcular o determinante de matrizes de ordem maior do que 3 cresce exponencialmente e dificilmente será pedido ao aluno para fazer essas contas. Como diz a Profa. Dra. Mary Lilian, "Quem sabe teoria não faz conta".

O determinante de uma matriz de ordem 1 é, simplesmente, o valor nela contido:

$$\det A_{1\times 1} = \left|3\right| = 3$$

onde || representa o determinante, e não o módulo, da matriz com único elemento 3.

E para matrizes de maior ordem?

Seja

$$M_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular o determinante de M, $\det M, \det(M), |M|$, multiplicando a diagonal principal e subtraindo do produto da outra diagonal:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (2 \cdot 3) = -2$$

E quais seriam as "diagonais" de uma matriz de ordem 3?

Seja

$$N_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Podemos calcular seu determinante com algumas técnicas. A mais comum forma de lembramos desse método é a chamada *Fórmula de Leibniz para Determinantes*. Assim como nas matrizes de ordem 2, iremos somar os produtos das "diagonais principais" (esquerda para direita) e subtrair os produtos das "diagonais secundárias" (direita para esquerda). Para visualizarmos tais diagonais "escondidas" na matriz, usaremos a *Regra de Sarrus*: copiar as primeiras duas colunas à direita da matriz:

$$\begin{aligned} |N_{3\times 3}| &= \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}\right| \\ &= (1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8) \\ &- (2 \cdot 4 \cdot 9 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 3 \cdot 5 \cdot 7) \\ &= 225 - 225 = 0 \end{aligned}$$

Algumas versões da Regra de Sarrus copiam as duas primeiras linhas da matriz abaixo da matriz e efetuam um cálculo semelhante: somam as "diagonais principais" e subtraem as "diagonais secundárias". Teste os dois métodos e verifique se há diferença dos resultados e quais são as diferenças no procedimento!

Existem outras formas de calcular determinantes. Para os leitores interesados, recomendamos que busquem a resolução de determinantes pelo *Teorema de Laplace*, também conhecido como expansão de cofatores. Esse é um poderoso teorema nos permite calcular determinantes de matrizes de ordem maior do que 3, além de também poder aplicado na matriz 3x3 para (algumas vezes) cálculos mais simples. A desvantagem deste método é que calcular o determinante cresce exponencialmente conforme a ordem da matriz cresce. Um segundo método para calcular o determinante de matrizes quadradas é conhecido como *Regra de Chió*. Trata-se de um algoritmo que, em cada execução, diminui em um a ordem de uma matriz quadrada. Assim como o método anterior, este também apresenta um crescimento exponencial do trabalho necessário para calcular o determinante de matrizes de ordens superiores.

3.8.1 Propriedados dos determinantes

As propriedades listadas abaixo, apesar de serem válidas para todos os casos, não foram separadas em teoremas, lemas, corolários ou cossequências. Para demonstrações e separações mais rigorosas, recomendamos um livro de álgebra linear. Todas as propriedades listadas abaixo podem ser verificadas calculando o determinante por meio de um dos métodos listados anteriormente. Note que verificar uma propriedade não é equivalente a prová-la, mas é interessante testar antes de adotá-las cegamente.

1ª propriedade - Fila Nula Se todos os elementos de uma fila de uma matriz forem iguais a 0, então o determinante dessa matriz também será igual a 0. Exemplos:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 0$$

$$B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \\ 20 & 7 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow \det(B) = 0$$

2ª propriedade - Troca de Filas Paralelas Trocar duas linhas ou duas colunas inverte o sinal do determinante. Exemplo:

$$A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -6$$

Trocando a primeira com a segunda linha:

$$A'_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A') = 6$$

3ª propriedade - Multiplicação por Escalar Multiplicar uma das filas de uma matriz por um escalar também multiplica o determinante por esse mesmo escalar. Consequentemente, $\det(\lambda M_{n,n}) = \lambda^n \det(M_{n,n})$. Exemplos:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -5$$

Multiplicando-se a primeira coluna de A por 5:

$$A'_{3\times3} = \begin{bmatrix} 10 & 3 & 1 \\ 20 & 2 & -3 \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A') = -25$$

Multiplicando-se a matriz A por 2:

$$2 \cdot A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \det(2 \cdot A) = 2^3 \cdot \det(A) = -40$$

4ª propriedade - Combinação Linear Multiplicar uma fileira por um escalar e somá-la a outra fileira não altera o determinante. Note que, tomando-se λ negativo, é possível extender essa propriedade para a subtração. Exemplo:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 14$$

Multiplicando-se a primeira linha por -2 e somando-a à terceira linha:

$$A'_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -8 & -7 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A') = \det(A) = 14$$

5ª propriedade - Proporcionalidade de Filas Se uma fila pode ser escrita como combinação linear de outras filas paralelas, o determinante é igual a 0. Note que é simples demonstrar essa propriedade, pois se uma fila é combinação linear de outras filas paralelas, basta tomar o oposto dessa combinação linear para produzir uma fila nula. Particularmente, se duas filas são iguais ou proporcionais, é simples verificar que o determinante é igual a 0. Exemplo:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -10 & 8 & 2 \\ 10 & -3 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 0$$

Note que a primeira coluna é igual à primeira fileira multiplicada por -5: $-5 = 1 \cdot -5$, $-10 = 2 \cdot -5$, $10 = -2 \cdot -5$.

6ª propriedade - Determinante do Produto Sejam A e B matrizes quadradas de mesma ordem (e portanto multiplicáveis), $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$. Exemplo:

$$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A) = 10$$

$$B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \det(B) = 6$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B) = 10 \cdot 6 = 60$$

7ª propriedade - Matriz triangular Uma matriz quadrada é dita triangular se, e somente se, todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal são iguais a 0. Neste caso, o determinante é igual ao produto de todos os elementos da diagonal principal. Exemplo:

$$A_{4\times 4} = \begin{bmatrix} -3 & 9 & \pi & 2 \\ 0 & -2 & 7 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 2 & \ln(5) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = -3 \cdot -2 \cdot 2 \cdot 1 = 12$$

3.9 Inversão de matrizes

Dizemos que uma matriz quadrada $M_{n\times n}$ é inversível se existe uma outra matriz, N, tal que:

$$M \times N = N \times M = I_n$$

3.9.1 Escalonamento

Uma das formas de chegamos na matriz inversa é considerarmos os seguinte: N pode ser escrita como o produto de outras matrizes.

$$\begin{cases} M \times N = N \times M = I_n \\ N = A \times B \end{cases} \Rightarrow M \times (A \times B) = (A \times B) \times M = I_n$$

Note que os parênteses aqui são desnecessários: por mais que a multiplicação de matrizes não seja comutativa, ela é associativa! (Recomendamos que prove essa propriedade).

Sabemos também que, pela propriedade da matriz identidade,

$$A \times B = A \times B \times I_n = I_n \times A \times B$$

Com esse recurso, podemos chegar na matriz inversa através de operações mais simples partindo de uma matriz como a identidade!

Antes de prosseguirmos, note uma interessante propriedade: *Uma matriz é inversível se, e somente se, seu determinante for diferente de* 0. A razão disso não ficará clara agora, mas leitores interessados podem se referir à Seção **??** - Material Adicional.

Para utilizarmos a técnica do escalonamento, precisaremos primeiro definir 3 operações que nos serão de grande ajuda neste processo. O porquê dessas operações serem válidas nos ficará mais claro quando discutirmos sistemas lineares posteriormente neste livro.

Operação 1. No escalonamento, podemos trocar linhas da matriz de lugar.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{\text{Operação 1}}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Operação 2. No escalonamento, podemos multiplicar qualquer linha por um número real $\lambda \neq 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{\text{Operação 2: } -1 \cdot \text{I}}{\rightarrow} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Operação 3. No escalonamento, podemos somar linhas e substituílas pelo valor da soma

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \overset{\text{Operação 3: I + II -> II}}{\rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Note que essas operações alteram a matriz, mas podem ser utilizadas no escalonamento, uma vez que podem ser traduzidas como multiplicações por outras matrizes e, como discutimos, podemos descontruir a matriz inversa como o produto de outras matrizes ($N = (A \times B)$)

Curiosidade: Um exemplo de uma matriz que, quando muliplicamos, realiza uma dessas operações (no caso, a 1), é a seguinte:

Seja

$$V = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

então a matriz que troca as linhas I e II de lugar pode ser descrita como

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tente resolver o produto

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

e verifique o resultado!

Você consegue encontrar outras matrizes que realizam as outras operações? Dica: todas essas matrizes são próximas da matriz identidade.

Vamos partir para um exemplo de como inverter uma matriz.

Seja

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Encorajamos o leitor a verificar que o determinante dessa matriz é diferente de 0, ou seja, é inversível.

Usaremos uma técnica de escalonamento que consiste em comparar nossa matriz original com a matriz identidade de mesma ordem, buscando transformá-la na matriz identidade matriz e catalogando nossas mudanças na segunda matriz que então se revelará como inversa.

Lembre-se: nosso objetivo é agora transformar a matriz original na matriz identidade, ou seja, zerar todos os elementos que não sejam os da diagonal principal e tornar os elementos dessa 1.

Nossa estratégia será a seguinte: zerar todos os elementos fora da diagonal principal, coluna por coluna, e então transformar os elementos da diagonal principal em 1 através da operação 2.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{-2\cdot I} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{I+II->II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -6 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{I+III->III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} -4 & -12 & -8 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ Zeramos a primeira coluna!

$$\xrightarrow{-\frac{1}{4}\cdot I} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{5\cdot I+3\cdot II->I} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 13 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -15 & 3 & -6 & 3 & 0 \\ 0 & -10 & -5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{3}II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 13 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & -5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-2\cdot II+III->III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 13 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$ Zeramos a segunda coluna!

$$\xrightarrow{7\cdot I+13\cdot III->I} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 35 & 0 & 0 & -7 & -5 & 13 \\ 0 & 10 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -91 & 0 & -26 & 13 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{13}\cdot III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 35 & 0 & 0 & -7 & -5 & 13 \\ 0 & 10 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-7\cdot II+2\cdot III->II} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 35 & 0 & 0 & -7 & -5 & 13 \\ 0 & -70 & 0 & -28 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -14 & 0 & -4 & 2 \end{array}\right]$$

Podemos agora transformar os elementos da diagonal em 1.

$$\xrightarrow{\frac{1}{35}\cdot I,-\frac{1}{70}\cdot II,-\frac{1}{14}\cdot III} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{7}{35} & -\frac{5}{35} & \frac{13}{35} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{35} & -\frac{5}{35} & -\frac{1}{35} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

Portanto, finalmente, a matriz inversa de M é

$$N = \begin{bmatrix} -\frac{7}{35} & -\frac{5}{35} & \frac{13}{35} \\ \frac{14}{35} & -\frac{5}{35} & -\frac{1}{35} \\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Caso esteja com muita vontade de fazer conta, o leitor pode verificar que $M \times N = I = N \times M$.

Nota: Detalhamos demasiadamente as operações sendo feitas durante o processo de escalonamento. Quando estiver mais confiante, poderá realizar diversas operações ao mesmo tempo, como, por exemplo, ao invés de $-1 \cdot I + II- > II, -1 * I$, poderia simplesmente fazer $I - II- > II$, uma vez que são equivalentes.

Leitores atentos podem ter percebido certo padrão em nossa estratégia de escalonamento, e isso não é coincidência: estamos usando uma forma do *Algoritmo ou Método de Gauss-Jordan*, conforme **sekhon_systems_2020**.

Apenas enunciaremos o algoritmo aqui, mas recomendamos que leitores interessados busquem mais sobre sua demonstração e interessante origem.

Método de Gauss-Jordan

1. Troque as linhas para obter um elemento não-nulo na posição 1,1 da matriz pela operação 1;
2. Use a operação 2 para transformar o elemento 1,1 em 1;
3. Use as operações 2 e 3 para transformar todos os outros elementos da coluna em 0;
4. Use a operação 1 para obter um elemento não nulo na posição 2,2 da matriz;
5. Repita a partir do 2 até a matriz estar escalonada, alterando o passo 4 para a posição 3,3, 4,4 e assim por diante.

8ª propridade dos determinantes - Matriz Inversa $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$
Exemplo:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 30$$

$$A_{3\times3}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{15} & \frac{-1}{3} & \frac{4}{15} \\ \frac{1}{15} & \frac{-1}{6} & \frac{-4}{15} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{30}$$

3.10 Transposição de matrizes

Transpor uma matriz nada mais é, conforme **hartman_matrix_2021**, nada mais que inverter suas colunas e linhas. Mostraremos alguns exemplos dessa inversão e então ressaltaremos alguns fatos interessantes sobre a transposição e suas propriedades.

Seja

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Então a transposta de A, A^t é

$$\begin{bmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{bmatrix}$$

Note que apenas "invertemos" as matrizes e as colunas. Aqui vai então nosso primeiro fato interessante.

Inverter uma matriz quadrada é apenas espelhar sua diagonal:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 9 & 2 & 4 \\ 8 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 8 \\ 5 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Um outro fato interessante: uma matriz é chamada de *simétrica* se ela é igual à sua transposta.

Verifique se a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é simétrica.

Iremos agora enunciar algumas *Propriedades da Transposição*:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(\lambda A)^t = \lambda A^t$
3. $(AB)^t = B^t A^t$ Por que invertemos a ordem?
4. $(A \pm B)^t = A^t \pm B^t$
5. $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

Encorajamos o leitor a tentar provar, ou pelo menos fornecer um exemplo, para cada uma dessas propriedades.

9ª propriedade dos determinantes - Determinante da Transposta Seja A^t a transposta da matriz A. $\det(A^t) = \det(A)$. Exemplo:

$$A_{3\times3} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A) = 30$$

$$A^t_{3\times3} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \det(A^t) = \det(A) = 30$$

3.11 Material adicional

Para os curiosos, este vídeos sobre Multiplicação de Matrizes, este sobre Determinantes e este sobre Matrizes Inversas e a Identidade do canal no YouTube 3blue1brown (em inglês, com legendas em português) te darão uma intuição sobre o que estamos fazendo de fato quando multiplicamos matrizes.

Parte III

Introdução ao Cálculo

4 Limites

Limites são importantes!

4.1 Teorema do Confronto

oi teorema do confronto

5 Teorema de Weierstrass

6 Mínimos e Máximos

Veremos primeiro nesse capítulo uma retomada do que aprendemos quando falamos do Teorema de Weierstrass, então exploraremos com mais formalidade o que são mínimos e máximos e algumas técnicas para encontrá-los.

6.1 Valor de mínimo/máximo e ponto de mínimo/máximo

Chamamos de valor máximo ou simplesmente máximo de uma função $f : A \to B$, o valor $f(x)$ tal que $f(x) \geq f(a)$ para todo a no domínio A da função, ou seja, o maior que uma função pode atingir!

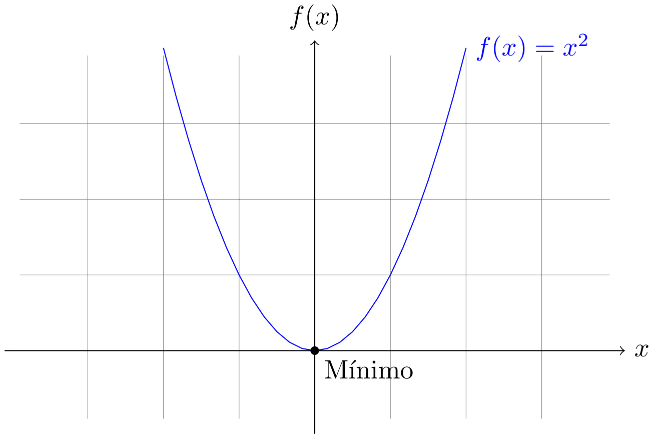
O mesmo se aplica para o mínimo: $f(x)$ é chamado de valor mínimo se $f(x) \leq f(a)$ para todo a no domínio.

Nesses casos, como $f(x)$ é chamado de valor de máximo/mínimo, x é chamado de ponto de máximo/mínimo.

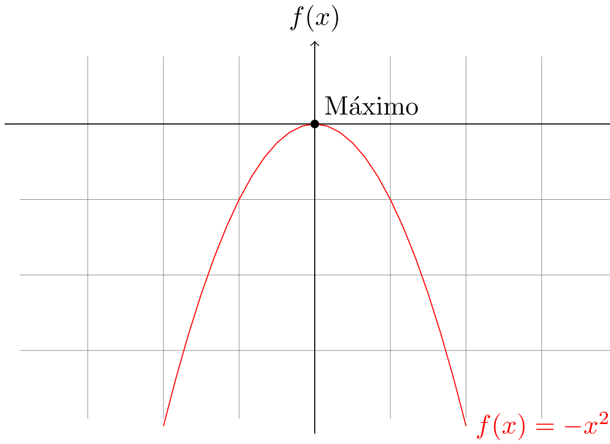
Também podemos considerar, ao invés de mínimos e máximos de toda a função, mínimos e máximos locais.

6.2 Condições para existência de um máximo e mínimo

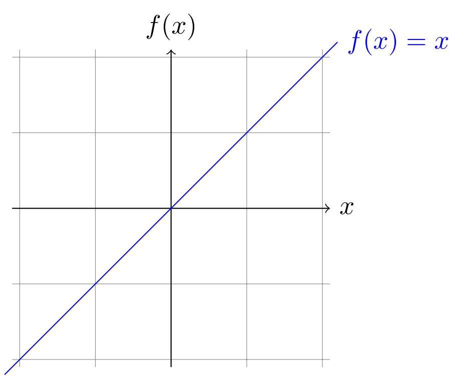
Algumas funções possuem mínimo global, mas não máximo, como a clássica parábola $f(x) = x^2$.



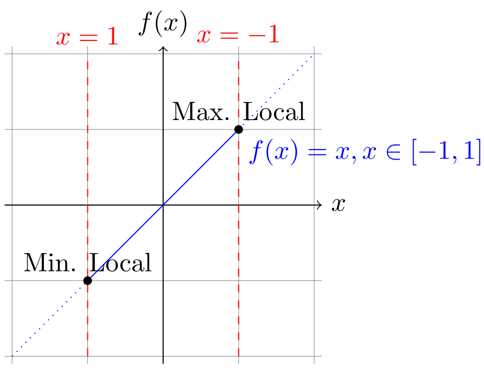
Outras, por sua vez, possuem máximo, mas não mínimo, como o gêmeo do mal dessa última função: $g(x) = -x^2$.



Outras funções, por sua vez, não gostam de se limitar: $h(x) = x$ não possuí máximo ou mínimo.



Se você está bem iterado com nosso capítulo sobre o Teorema de Weierstrass do cálculo univariado, você prontamente se lembra que, para uma função garantidamente possuir máximo e mínimo, basta que seu domínio seja *limitado* (ou seja, não vá para mais ou menos infinito) e *fechado*. Uma consequência disso é que, caso escolhamos olhar para uma função qualquer em um intervalo fechado de seu domínio, conseguiremos encontrar pontos de *máximo e mínimo locais*. Vamos tomar nossa última função, $f(x) = x$ como exemplo limitando-a ao intervalo $[-1, 1]$

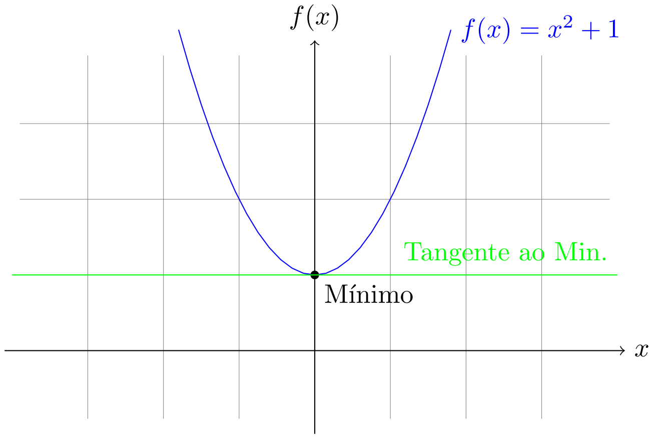


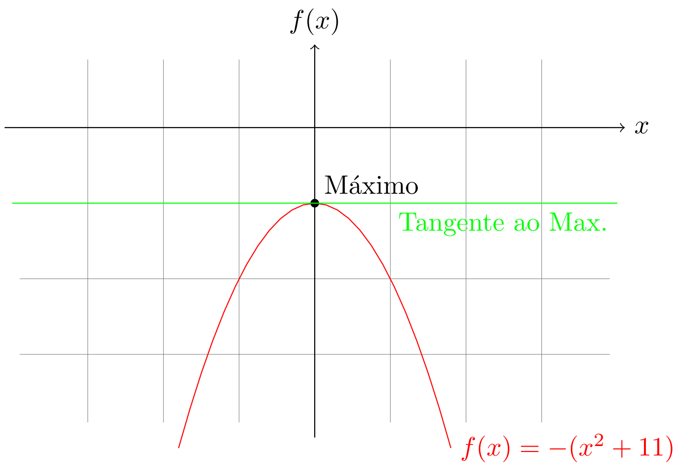
Temos uma visualização do Teorema de Weierstrass: toda função fechada e limitada possuí ponto de máximo e mínimo.

6.3 Técnicas para encontrar máximos e mínimos

Vamos nos lembrar da aplicação do Teorema de Weierstrass que vimos anteriormente para encontrar máximos e mínimos.

Primeiro, podemos perceber que, nos pontos de máximo e mínimo, quando existem, se traçarmos uma reta tangente a estes teremos quase sempre uma reta horizontal/perpendicular ao eixo x (Verifique o último caso em que limitamos a função identidade: isso nem sempre vale!).





Podemos visualizar isso de forma analítica através da seguinte proposição:

Proposição Seja $f : A \to B$ uma função diferenciável. Se $f(x)$ é ponto de máximo ou mínimo, $f'(x) = 0$

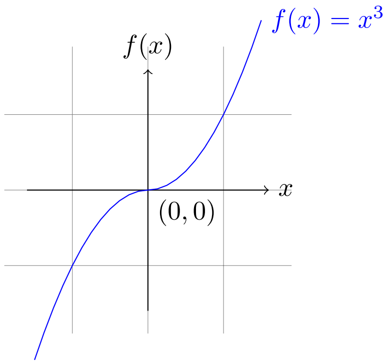
Precisamos tomar atenção com a ordem dessa implicação! Um ponto de máximo ou mínimo de uma função diferenciável implica que a derivada dessa função neste ponto, se existe, é sempre 0. Contudo, um ponto com derivada 0 não necessariamente é ponto de máximo ou mínimo! Dos gráficos acima, vimos que $(0, 0)$ é o ponto de mínimo e máximo das funções x^2 e $-x^2$, respectivamente. Vamos conferir suas derivadas:

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \therefore f'(0) = 0 \checkmark$$
$$f(x) = -x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x \therefore f'(0) = 0 \checkmark$$

Mas podemos encontrar derivadas com valor 0 em determinados pontos que não são de máximo ou mínimo!

$$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 \therefore f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

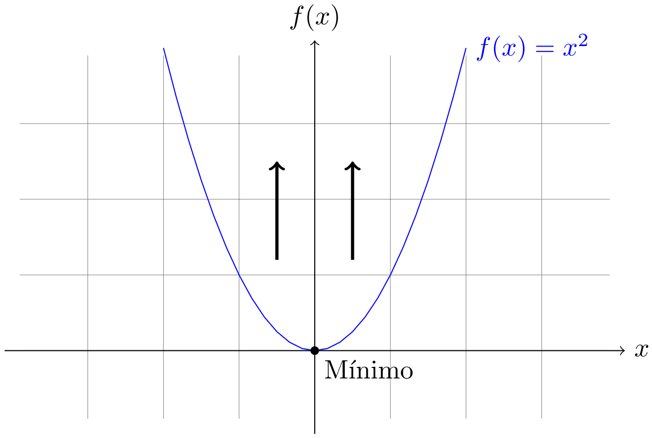
Vamos visualizar o gráfico dessa função e conferir se $(0,0)$ é ponto de máximo ou mínimo:



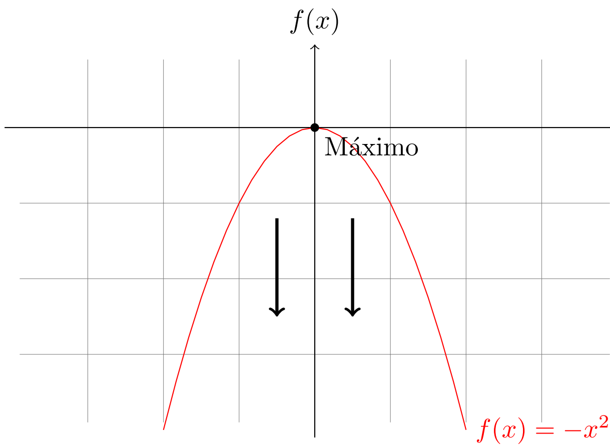
A derivada no ponto $x = 0$ é, de fato, 0 (note que a tangente é o próprio eixo x), contudo, esse ponto não é mínimo nem máximo da função que, por sua vez, não apresenta nenhum valor de máximo ou mínimo global.

Com isso em mente, precisaremos de mais informações para deduzirmos se um desses pontos é ponto de máximo, mínimo ou nenhum dos dois se formos analisar apenas as derivadas, sem o auxílio de gráficos.

Voltando para nossas parábolas, caso derivarmos novamente a primeira função, $f(x) = x^2$, teremos $f'(x) = 2x$ e $f''(x) = 2$ um valor sempre positivo. Se você se lembra da interpretação das derivadas, isso significa que, analisando a primeira derivada, a função é decrescente no intervalo $(-\infty, 0)$ e crescente no intervalo $(0, \infty)$. Da cada segunda derivada, sempre positiva, temos que a taxa de variação em si é sempre crescente (quando decresce, decresce cada vez mais rápido e quando cresce, cresce cada vez mais rápido). Dessa forma, como no ponto $(0,0)$ nossa primeira derivada é 0, a função passa de decrescente para crescente e, pela segunda derivada, a concavidade dessa parábola está para cima. Por isso, esse ponto é o ponto de mínimo da função.



Com a mesma lógica, usando a segunda derivada da função $f(x) = -2x^2, f''(x) = -2$, temos que a concavidade de nossa parábola está para baixo.



Complementando esses conceitos, a segunda derivada no ponto $(0, 0)$ da nossa função problemática, $f(x) = x^4$, ainda é 0: $f''(x) = 6x \Rightarrow f''(0) = 0$, o que não nos permite concluir se $(0, 0)$ é ponto de máximo, mínimo ou nenhum.

Portanto, podemos construir uma tabela para analisarmos máximos e mínimos

Função	$f'(0)$	$f''(0)$	$(0,0)$
$f(x) = x^2$	0	$> 0\ \forall x$	Mínimo
$f(x) = -x^2$	0	$< 0\ \forall x$	Máximo
$f(x) = x^3$	0	$\in \mathbb{R}$	Inconclusivo

Parte IV

Aplicações do Cálculo

Parte V

Álgebra Linear

7 Espaços Vetoriais

Neste curso, poderemos contentarmo-nos com a intuição de que *"espaço vetorial"* é simplesmente o espaço onde habitam os elementos com que faremos as nossas contas. Cada um desses elementos do espaço vetorial receberá um nome especial: *"vetor"*. Muito provavelmente, você deve recordar-se dos vetores como aquelas "setinhas" que usávamos nas aulas de física para representar as forças atuando sobre um corpo. Por sorte, compreender os vetores como uma "setinha" ainda é uma interpretação geométrica muito funcional para a maior parte do curso!

7.1 Exemplos de espaços vetoriais

1. O exemplo mais fundamental são os vetores usados pela física para representar forças
2. Uma rede de supermercados possui cinco filiais. Cada filial registra, a cada dia, o saldo ao final do dia de cada uma das suas três caixas registradores na forma de uma lista ($caixa_1$, $caixa_2$, $caixa_3$)
3. A velocidade de um cometa em relação ao planeta Terra
4. A velocidade de quatro cometas em relação ao planeta Terra ($cometa_1$, $cometa_2$, $cometa_3$, $cometa_4$)

7.2 Formalizando o espaço vetorial e seus elementos

Para os mais interessados, vamos começar fornecendo os critérios fundamentais para um conjunto ser chamado de espaço vetorial. Não é fundamental decorar as propriedades, leia apenas se você tiver interesse em compreender melhor o tópico.

Um conjunto não vazio V é um espaço-vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ (um objeto matemático em que as operações $+, -, \times, \div$ funcionam como nós conhecemos) se, em seus elementos, denominados vetores, estiverem definidas a soma de vetores, a multiplicação por escalar e valerem as seguintes oito propriedades:

Para a Adição:

(A1) $u + v = v + u, \forall u, v \in V$ (propriedade comutativa)

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w), \forall u, v, w \in V$ (propriedade associativa)

(A3) existe um vetor v, chamado “vetor nulo” e denotado 0, tal que $0+v = v, \forall v \in V$ (elemento neutro da soma)

(A4) a cada vetor $v \in V$, existe um vetor em V, denotado por $-v$, tal que $v + (-v) = 0$ (existência do oposto)

Para a Multiplicação por escalar (número real na maioria dos casos):

(M1) $(\alpha\beta) \cdot v = \alpha(\beta \cdot v), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$ (propriedade associativa)

(M2) $1 \cdot v = v, \forall v \in V$ (elemento neutro da multiplicação)

(M3) $\alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v, \forall \alpha \in \mathbb{K}$ e $\forall u, v \in V$

(M4) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot u + \beta \cdot u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ e $\forall v \in V$

Dessa extensa definição, basta tirar a seguinte interpretação: chamamos de vetor cada um dos elementos pertencentes ao conjunto em que estamos definindo o espaço vetorial. Podemos somar os vetores, podemos multiplicar os vetores por um escalar (número real) e aquelas velhas propriedades que aprendemos na escola ainda valem: a ordem dos elementos não afeta a soma nem a multiplicação, podemos usar parênteses para alterar a ordem das operações e vale a propriedade distributiva.

Durante os cursos de cálculo, veremos o espaço vetorial diversas vezes, mas trabalharemos sempre com múltiplos do conjunto dos reais ($\mathbb{R}$).

7.3 Vetores aplicados a Cálculo

Ainda que seja ótimo desenvolvermos um certo rigor com a matemática, nem sempre é necessário e pode gerar mais confusões do que entendimentos. Desse ponto em diante, traremos o conteúdo de vetores e o espaço vetorial da maneiras mais sucinta possível!

Considere o espaço R^2. Nossa melhor maneira de representá-lo é por meio do plano cartesiano. Cada ponto no plano cartesiano é representado por uma dupla (x, y). Por convenção, adotamos que o primeiro elemento é sempre a coordenada x e o segundo elemento é a coordenada y. Fixe, agora, um ponto qualquer no plano, por exemplo $(3, 4)$ e construa uma seta que liga o ponto à origem $(0, 0)$. Essa seta que acabamos de criar é a representação gráfica do vetor $(3, 4)$. Note que o vetor e o ponto têm a mesma notação, isso ocorre, pois são conceitos muito próximos e com muitas interações.

Durante seus estudos, você também pode ver os vetores representados como $[x, y]$. Ou até mesmo verticalmente:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Uma outra maneira de interpretar vetores é enxergando-os como uma matriz de dimensão 1×2 ou 2×1, respectivamente. Chamamos de vetor linha linha e vetor coluna, ainda que sejam, conceitualmente, objetos muito próximos.

Ao utilizar vetores, é muito comum separar os seus elementos por uma vírgula ou apenas separá-los com um espaçamento maior. Durante seus estudos, opte por uma notação e tome cuidado para não confundir a vírgula usada para separar os elementos com a vírgula usada para expressar casas decimais! Para evitar a confusão, sugerimos que você adote o ponto (.) como separador decimal ou use o ponto e vírgula (;) para separar os elementos do vetor.

7.4 Somando Vetores

A soma de vetores é uma operação extremamente simples, mas segue algumas pequenas regras: só é possível somar vetores de mesmo tamanho (comprimento) e cada elemento do vetor resultante é igual à soma dos correspondes. Acompanhe os exemplos:

1. $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2 \quad , \quad y_1 + y_2)$
2. $(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2 \quad , \quad y_1 - y_2)$
3. $(0, 5) + (2, 4) = (2, 9)$
4. $(0, 5) - (2, 4) = (-2, 1)$
5. $(\pi, e) + (1, 2) = (\pi + 1, e + 2)$
6. $(\pi, e) - (1, 2) = (\pi - 1, e - 2)$
7. $[1, 3] + [4, -6] = [5, -3]$
8. $[1, 3] - [4, -6] = [-3, 9]$
9. $$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$
10. $$\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

7.5 Multiplicando Vetores

A multiplicação de vetores é uma operação muito simples e intuitiva. Atente-se que só é possível multiplicar um vetor por um escalar (geralmente um número real). Para efetuar a operação, basta multiplicar cada um dos elementos do vetor pelo escalar. Lembre-se que dividir por um número é equivalente a multiplicar pelo inverso: $x \div 5 = x \times \frac{1}{5}$ e que a multiplicação é comutativa, ou seja, podemos inverter a ordem dos termos. Veja os exemplos:

1. $\lambda \times (x, y) = (x, y) \times \lambda = (x \times \lambda, y \times \lambda)$
2. $(x, y) \div \lambda = (x, y) \times \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \times (x, y) = (\frac{x}{\lambda}, \frac{y}{\lambda})$

3. $(2,5) \times 3 = (6,15)$
4. $(2,5) \div 3 = (\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$
5. $7(0,8) = (0,56)$
6. $[10,20] \div 5 = [2,4]$
7. $$\begin{bmatrix} 144 \\ 96 \end{bmatrix} \div 12 = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}$$
8. $$\begin{bmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{17}{6} \end{bmatrix} \times \frac{3}{8} = \begin{bmatrix} \frac{15}{56} \\ \frac{17}{16} \end{bmatrix}$$

Note que não é possível dividir um escalar por um vetor e tampouco é possível multiplicar ou dividir vetores entre si!

7.6 Produto Interno

Nessa seção, introduziremos uma nova operação entre dois vetores: o produto interno. Em um curso de álgebra linear, tal operação pode ser definida de diversas maneiras diferentes, mas restringiremo-nos ao "produto interno usual", que é assim definido:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1 \times x_2 + y_1 \times y_2$$

Note que o produto interno é uma operação que recebe dois vetores de mesmo tamanho e resulta em um número. Tal operação possui outras notações e nomes, como "produto escalar", mas trata-se do mesmo processo.

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle$$

A notação $\langle a, b \rangle$ é comumente usada na física, mas não é raro ver matemáticos usando-as também.

Veja alguns exemplos: 1. $(2,4) \cdot (3,7) = 6 + 28 = 34$ 2. $(4,2) \cdot (4,2) = 16 + 4 = 20$ 3. $(0,21) \cdot (13,0) = 0 + 0 = 0$ 4. $\langle (4,8), (3,2) \rangle = 12 + 24 = 36$

7.6.1 Norma de um Vetor

Ainda considerando o produto interno, vamos definir uma segunda operação com um vetor: a norma. A norma de um vetor nada mais é do que a raiz quadrado do produto interno do vetor com ele mesmo, usamos $||a||$ para representar a norma de um vetor.

$$||a|| = \sqrt{a \cdot a} = \sqrt{\langle a, a \rangle}$$

Geometricamente, entende-se a norma de um vetor como o seu “comprimento”. Usando a nossa primeira intuição de vetores como uma seta ligando a origem a um ponto, desenhe o vetor $(3,4)$ e calcule seu comprimento usando o Teorema de Pitágoras. Em seguida, calcule a norma do vetor. Se todas as contas estiverem corretas, você deve ter concluído que tanto a norma quando o comprimento do vetor são 5.

Você deve estar familiarizado com o operador $|a|$, que é o módulo de a. Matematicamente, define-se o módulo de um número como $|a| = \sqrt{a^2}$. Note que essa definição é apenas a norma de um vetor de tamanho um, ou seja, calcular o módulo de um número nada mais é do que calcular o seu “tamanho”, ou o quão longe está da origem.

Acompanhe alguns exemplos do cálculo de uma norma:

1. $||(x,y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. $||(5,12)|| = \sqrt{25 + 144} = 13$
3. $||(24,7)|| = \sqrt{576 + 49} = 25$
4. $||(7,5)|| = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$

7.6.2 Vetores Perpendiculares

Uma característica particularmente útil do produto interno é que ele é capaz de nos revelar quando dois vetores são ortogonais. Ainda que não sejam equivalentes, pode-se considerar ortogonalidade como um sinônimo de perpendicularidade, ou seja, quando o produto interno de dois vetores é 0, eles “formam um ângulo de 90° entre si”.

Para testar tal propriedade, desenhe no plano cartesiano os vetores $(3,0)$ e $(0,5)$ e calcule o produto interno entre eles. Repita o mesmo processo, num novo plano, com os vetores $(-3,4)$ e $(8,-6)$. Você consegue encontrar mais um vetor que seja ortogonal ao vetor $(-3,4)$? Pegue o vetor que você encontrou e divida-o pela sua norma. Você deve ter chegado em $(\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$ ou $(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$.

7.6.3 Versores

Durante o estudo do Cálculo, é muito comum que as formulações utilizem versores ao invés dos usuais vetores. Por sorte, todo o conteúdo vistos até agora nesse capítulo nos permite compreender facilmente o que é um versor!

Define-se o versos como um vetor unitário que tem mesma direção e sentido que outro vetor.

Ou seja, um versor de um vetor é uma versão daquele mesmo vetor, mas com norma igual a 1.

Utilizaremos $\hat{a}$ para denotar um versor.

$$\hat{a} = \frac{a}{||a||}$$

Alguns exemplos de versores:

1. $a = (6, 8) \rightarrow \hat{a} = \frac{(6,8)}{||(6,8)||} = \frac{(6,8)}{10} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$
2. $a = (4, 2) \rightarrow \hat{a} = \frac{(4,2)}{||(4,2)||} = \frac{(4,2)}{\sqrt{20}} = (\frac{4}{\sqrt{20}}, \frac{2}{\sqrt{20}}) = (\frac{\sqrt{20}}{5}, \frac{\sqrt{20}}{10})$

Em um plano cartesiano, desenhe o vetor $(-6, 8)$, calcule sua norma, desenhe o seu versos e, por fim, desenhe um círculo de raio 1 centrado na origem. Você verá uma das muitas belezas dos vetores. Tente repetir este processo com outros vetores, todos terão a mesma propriedade que você acabou de visualizar. Tente provar esse resultado!

Parte VI

Cálculo Multivariado

8 Curvas

Um dos principais objetos matemáticos no estudo de cálculo são as *curvas*, funções contínuas que mapeiam intervalos dos números reais para espaços vetoriais, como $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3, \ldots, \mathbb{R}^n$, ou seja, para um intervalo I, dos reais, uma curva é tal que $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$. Dessa forma, seu domínio é o próprio intervalo I, seu contradomínio é $\mathbb{R}^n$ e sua imagem é o conjunto $\{\gamma(t) \in \mathbb{R}^n : t \in I\}$. Essa imagem, também chamada de trajetória de γ, é o lugar geométrico descrito como o resultado dessa função conforme t varia por seu domínio.

um exemplo de uma simples curva parametrizada por t:

$$\gamma(t) = (t, -t) \Rightarrow \gamma(1) = (1, -1); \gamma(0) = (0, 0).$$

$$\text{Imagem}\gamma = \text{Im}\gamma = \text{ reta de equações paramétricas } \begin{cases} x = t \\ y = -t \end{cases}$$

Dessa forma, vimos que curvas podem ser coisas muito simples, como a reta acima, ou figuras mais complexas, como parábolas $\gamma(t) = (t, t^2 + t + 1)$, circunferências $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$ ou até espirais, como nosso DNA, $\gamma(t) = (t, \cos(t), \sin(t))$ (note que esse é 3d! podemos escolher qualquer dimensão para nossas curvas).

8.1 Domínio de uma curva

Ao criarmos curvas, precisamos nos atentar ao seu domínio. Uma curva parametrizada por t deve ter seus ts num intervalo que faça sentido para sua forma. Por exemplo, em uma curva como $\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = (-t, \sqrt{(}2))$, t só pode assumir valores positivos por seu contradomínio ser um vetor de números reais ($\mathbb{R}^2$) e não os números complexos $\mathbb{C}$. Dessa forma, podemos descrever o domínio de γ como $\mathbb{R}^+$, os números reais positivos.

As vezes precisamos ser ainda mais precisos. Considere a curva $\gamma : I \to \mathbb{R}^2, \gamma(t) = \left(t^2, \frac{1}{t-2}\right)$. Com algum cuidado, percebemos rapidamente que essa função não estaria definida para $t = 2$ (por quê?). Sendo assim, seu domínio, I, pode ser descrito como $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, ou seja, todo o conjunto de números reais *exceto* o número 2.

8.2 Operações numa curva

Curvas comportam-se similarmente à funções que conhecemos. Podemos multiplicá-los por valores reais

$$\lambda \in \mathbb{R}, (\lambda\gamma)(t) = \lambda\gamma(t)$$

Podemos somá-las

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \gamma_1(t) + \gamma_2(t);$$

Podemos multiplicá-las por funções com contradomínio nos reais e de mesmo domínio, (chamadas funções escalares, $f : I \to \mathbb{R}$, são as funções que conhecemos e trabalhamos em cáculo univariado).

$$(f\gamma)(t) = f(t)\gamma(t)$$

Podemos também obter o *produto escalar* entre duas curvas como vimos em nosso estudo de espaços vetoriais

$$(\gamma_1 \cdot \gamma_2)(t) = \gamma_1(t) \cdot \gamma_2(t)$$

Exercício Dado as curvas $gamma_1 = (t, 7 - t), \gamma_2 = \left(\frac{t}{3}, t^2\right)$, a função escalar $f(t) = \mathrm{e}^t$ e uma constante real $\lambda = 2\pi$, verifique as propriedades acima. Você consegue esboçar os gráficos da imagem de γ_1 e γ_2?

8.3 Continuidade e limites de curvas

Ao tomarmos um limite de uma curva num ponto a, $\lim_{t\to a} \gamma(t)$, pode ser avaliado como o limite de cada componente do vetor da imagem. Ou seja, para uma curva como $\gamma(t) = \left(\frac{\operatorname{sen}(t)}{t}, \frac{1}{\ln t}\right)$ temos

$$\lim_{t\to 0} \gamma(t) = \left(\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}, \lim_{t\to 0} \frac{1}{\ln t}\right) = (1, 0)$$

Dessa forma, assim como as funções univariadas que estamos acostumados, uma curva é contínua em determinado ponto se existe o limite dela nesse ponto.

8.4 Derivadas e integrais

Para os atenciosos, reconhecer que podemos tirar o limite de uma curva em determinado ponto já soa um sinal. Podemos encontrar as derivadas? Vamos tentar aplicar a definição da derivada univariada em a de uma curva $\gamma(t) = (t^2, t)$

$$'' \lim_{t \to a} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t - a}$$

Chamando os componentes de $\gamma(t)$ de $f_1(t)$ e $f_2(t)$, podemos aplicar o que vimos anteriormente dos limites para passar a derivada "para o lado de dentro"

$$\lim_{t \to a} \frac{\gamma(t) - \gamma(a)}{t - a} = \left(\lim_{t \to a} \frac{f_1(t) - f_1(a)}{t - a}, \lim_{t \to a} \frac{f_2(t) - f_2(a}{t - a} \right) = (2a, 1)$$

Concluímos que $\gamma(t)' = (f_1(t)', f_2(t)')$.

Com o mesmo raciocínio, podemos integrar curvas

$$\int_a^b \gamma(t)dt = \left(\int_a^b f_1(t)dt, \int_a^b f_2(t)dt \right)$$

8.4.1 Comprimento de curvas

$$L(\gamma) = \int_b^a \|\gamma'(t)\| dt$$

9 Limites de mais de uma variável

Quando estudamos os limites no cálculo univariado, vimos a importância deste conceito para além de seu papel fundamental na construção formal do cáculo. Isto é, estudamos como são importantes no estudo do mundo natural, como na física e química, e até mesmo nas humanidades, como na economia.

Entretanto, poucas coisas na realidade comportam-se apenas com uma única variável. Por isso, precisamos estender o conceito de limites para funções multivariadas, e esse será o objetivo desse capítulo.

9.1 Outras formas de dividirmos o domínio

No cálculo de uma variável, costumamos dividir o domínio em duas partes, “à esquerda” com $\{x : x < a\}$ e “à direita” com $\{x : x > a\}$. Contudo, poderíamos também dividir o domínio de outras formas. Vamos trabalhar um exemplo

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}x, x \in \mathbb{Q} \\ x^2, x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Nota: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ significa o conjunto que contém todos os números reais que não são racionais

podemos expressar os limites de x se aproximando de um valor arbitrário a como

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} \sqrt{2}x = \sqrt{2}a$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} x^2 = a^2$$

Dividindo o domínio em pedaços, temos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}} f(x) = L = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}}$$

Para que a igualdade à direita exista, necessitamos que $\sqrt{2}a = a^2$. Assim, a iguldade vale para $a = 0$ e $a = \sqrt{2}$. Logo, $\lim_{x\to a} f(x)$ existe somente para $a = 0$ e $a = \sqrt{2}$! Isso significa que a função é contínua apenas em 0 (onde assume o valor de 0) e em $\sqrt{2}$ (onde assume o valor de 2).

Essa técnica de dividir o domínio é muito importante para calcularmos limites de várias variáveis. Vamos fazer um exemplo

9.1.1 Calculando limites com duas variáveis

Temos uma função simpels, $f(x) = \frac{x^3y^6}{x^4+y^8}$. Note que essa função só existe quando x e y são *ambos* diferentes de 0. Mas, se quisermos descobrir o que acontece na região do $\mathbb{R}^2$ próxima do ponto $(0,0)$, podemos calcular o seguinte limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^6}{x^4+y^8}$$

Vamos utilizar a técnica anterior e dividir o domínio. Para isso, precisamos buscar uma relação entre $|x|$ e $|y|$. Tentaremos encontrar $\alpha > 0$ tal que $|x| \leq |y|^\alpha$ e $|x| \geq |y|^\alpha \Leftrightarrow |y| \leq |x|^{\frac{1}{\alpha}}$

9.1.1.1 Exemplo 1

1. $|x| \leq |y|^\alpha$

$$0 \leq \left|\frac{x^3y^6}{x^4+y^8}\right| = \frac{|x|^3|y|^6}{x^4+y^8} \leq \frac{|y|^{3\alpha}|y|^6}{x^4+y^8} = \frac{|y|^{6+3\alpha}}{x^4+y^8}$$

Se $6 + 3\alpha > 8$, temos

$$\cancelto{0}{|y|^{6+3\alpha-8}} \cdot \underbrace{\frac{|y|^8}{x^4+y^8}}_{\text{Limitado}}$$

Assim, se $6 + 3\alpha > 8$, pelo teorema do confronto

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\leq|y|^\alpha}} \left|\frac{x^3y^6}{x^4+y^8}\right| = 0$$

Portanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\leq|y|^{\alpha}}} \frac{x^3y^6}{x^4+y^8} = 0$$

2. $|x| \geq |y|^{\alpha} \Leftrightarrow |y| \leq |x|^{\frac{1}{\alpha}}$

$$0 \leq \left|\frac{x^3y^6}{x^4+y^8}\right| = \frac{|x|^3|y|^6}{x^4+y^8} \leq \frac{|x|^3|x|^{\frac{6}{\alpha}}}{x^4+y^8}$$

Se $3+\frac{6}{\alpha} > 4$, então

$$\leq \frac{|x|^{3\frac{6}{\alpha}}}{x^4+y^8} = \cancelto{0}{|x|^{3+\frac{6}{\alpha}-4}} \cdot \underbrace{\frac{|x|^4}{x^4+y^8}}_{\text{Limitado}}$$

Para $3+\frac{6}{\alpha} > 4$ temos pelo teorema do confronto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\geq|y|^{\alpha}}} \left|\frac{x^3y^6}{x^4+y^8}\right| = 0$$

Portanto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\geq|y|^{\alpha}}} \frac{x^3y^6}{x^4+y^8} = 0$$

Vamos analisar esse número α. Sabemos pelo ponto 1. que $6+3\alpha-8>0$ e pelo ponto 2. que $3+\frac{6}{\alpha}-4>0$.

1. $$\begin{aligned} &6+3\alpha-8>0\\ &\Leftrightarrow 3\alpha>2\\ &\Leftrightarrow \alpha>\frac{2}{3}\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &3+\frac{6}{\alpha}>4\\ &\Leftrightarrow \frac{6}{\alpha}>1\\ &\Leftrightarrow \alpha<6\end{aligned}$$

Dessa forma, para termos os dois limites nessa repartição, vasta considerar α com $\frac{2}{3}<\alpha<6$. Podemos, por exempo, tomar $\alpha=1$. Com isso,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\le|y|}} \frac{x^3y^6}{x^4+y^8} = 0 = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\ge|y|}} \frac{x^3y^6}{x^4+y^8}$$

Assim, calculamos nosso limite após dividí-lo em relação ao módulo de x e y e obtermos um mesmo valor $L = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^6}{x^4+y^8} = 0$$

9.1.1.2 Exemplo 2

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^4+y^8}$$

Tentaremos novamente dividir o domínio através de uma relação entre o módulo de x e o módulo de y. Isto é, vamos tentar encontrar $\alpha > 0$ tal que $|x| \le |y|^\alpha$ e $|x| \ge |y|^\alpha$

1. $|x| \le |y|^\alpha$

$$0 \le \left|\frac{x^3y^3}{x^4+y^8}\right| \le \frac{|y|^{3\alpha}|y|^3}{x^4+y^8}$$

Se $3\alpha + 3 > 8$

$$= \cancelto{0}{|y|^{3\alpha+3-8}} \cdot \underbrace{\frac{|y|^8}{x^4+y^8}}_{\text{Limitado}} = 0$$

Se $3\alpha + 3 > 8$, então pelo teorema do confronto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\le|y|^\alpha}} \left|\frac{x^3y^3}{x^4+y^8}\right| = 0$$

Logo,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\le|y|^\alpha}} \frac{x^3y^3}{x^4+y^8} = 0$$

2. $|x| \geq |y|^{\alpha}$, o que é equivalente a $|y| \leq |x|^{\frac{1}{\alpha}}$

$$0 \leq \left|\frac{x^3y^3}{x^4+y^8}\right| = \frac{|x|^3|y|^3}{x^4+y^8} \leq \frac{|x|^3|x|^{\frac{3}{\alpha}}}{x^4+y^8}$$

Se $3 + \frac{3}{\alpha} > 4$, temos

$$= \cancel{|x|^{3+\frac{3}{\alpha}-4}}^{\,0} \cdot \underbrace{\frac{|x|^4}{x^4+y^8}}_{\text{Limitado}} = 0$$

Assim, se $3 + \frac{3}{\alpha} > 4$, então pelo teorema do confronto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ |x| \geq |y|^{\alpha}}} \frac{x^3y^3}{x^4+y^8} = 0$$

1. $$\begin{aligned} &3 + 3\alpha - 8 > 0 \\ &\Leftrightarrow 3\alpha > 5 \\ &\Leftrightarrow \alpha > \frac{5}{3} \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} &3 + \frac{3}{\alpha} > 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{3}{\alpha} > 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha < 3 \end{aligned}$$

Como $3 > \frac{5}{3}$, podemos fixar um α tal que

$$\frac{5}{3} < \alpha < 3$$

Vamos usar, por exemplo, $\alpha = 2$. Assim,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ |x| \leq |y|^{2}}} \frac{x^3y^3}{x^4+y^8} = 0 = \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ |x| \geq |y|^{2}}} \frac{x^3y^3}{x^4+y^8}$$

9.1.1.3 Exemplo 3

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^4+y^8}$$

1. $|x| \leq |y|^\alpha$

$$0 \leq \left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^8}\right| = \frac{|x|^3|y|^2}{x^4+y^8} \leq \frac{|y|^{3\alpha}|y|^2}{x^4+y^8}$$

Se $3\alpha+2>8$,

$$\leq \cancelto{0}{|y|^{3\alpha+2-8}} \underbrace{\frac{|y|^8}{x^4+y^8}}_{\text{Limitado}} = 0$$

Para $3\alpha+2>8$, pelo teorema do confronto, temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\|x|\leq|y|^\alpha}} \left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^8}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\|x|\leq|y|^\alpha}} \frac{x^3y^2}{x^4+y^8} = 0$$

2. $|x| \geq |y|^\alpha \Leftrightarrow |y| \leq |x|^{\frac{1}{\alpha}}$

$$0 \leq \left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^8}\right| = \frac{|x|^3|y|^2}{x^4+y^8} \leq \frac{|x|^3|x|^{\frac{2}{\alpha}}}{x^4+y^8}$$

Se $3+\frac{2}{\alpha}>4$,

$$\leq \cancelto{0}{|x|^{3+\frac{2}{\alpha}-4}} \underbrace{\frac{|x|^4}{x^4+y^8}}_{\text{Limitado}} = 0$$

Para $3+\frac{2}{\alpha}$ temos pelo teorema do confronto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\|x|\geq|y|^\alpha}} \left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^8}\right| = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\|x|\geq|y|^\alpha}} \frac{x^3y^2}{x^4+y^8} = 0$$

1. $$\begin{aligned} &3\alpha + 2 > 8 \\ &\Leftrightarrow 3\alpha > 6 \\ &\Leftrightarrow \alpha > 2 \end{aligned}$$ 2. $$\begin{aligned} &3 + \frac{2}{\alpha} > 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{\alpha} > 1 \\ &\Leftrightarrow \alpha < 2 \end{aligned}$$

Como não existe um número α tal que $2 < \alpha < 2$, não podemos usar essa estratégia para concluir se o limite existe e falhamos em satisfazer as desigualdades para $\alpha = 2$

Vamos tentar outra estratégia usando $x = y^2$, parametrizando uma curva $\gamma(t) = (t^2, t) \Rightarrow \gamma(0) = (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} f \circ \gamma(t) = \lim_{t\to 0} \frac{t^6 t^2}{t^8 + t^8} = \lim_{t\to 0} \frac{t^8}{2t^8} = \frac{1}{2}$$

Vamos testar outra curva e conferir se temos um resultado único entre elas $\phi(t) = (0, t) \Rightarrow \phi(0) = (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} f \circ \phi(t) = \lim_{t\to 0} \frac{0^3 t^2}{0^4 + t^8} = 0$$

Como $\lim_{t\to 0} f \circ \gamma(t) \neq \lim_{t\to 0} f \circ \phi(t)$, segue que esse $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

Note que essa estratégia é útil para demonstrar que certos limites não existem, mas caso o limite exista, teríamos que testar infinitas curvas para provar sua existência?

9.1.1.4 Exemplo 4

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y^2}{x - y}$$

Neste exemplo temos que o denominador zera num conjunto que se acumula em (0,0). Assim para mostrar que o limite não existe, vamos nos aproximar rapidamente do conjunto $\{(x,y) : x - y = 0\}$. Para que o denominador vá para 0 mais rápido do que o numerador.

Uma parametrização desse conjunto pode ser dada por (t,t). Como não queremos "andar" sobre $\{(x,y) : x - y = 0\}$, tomaremos $\gamma_n(t) = (t + t^n, t)$, assim o denominador vai rapido para 0 dependendo de n, pois $t + t^n - t = t^n$.

Para isto, $n > 0$, então

$$\lim_{t\to 0} f\circ\gamma_n(t) = \lim_{t\to 0}\frac{(t+t^n)^3t^2}{t+t^n-t}$$
$$\lim_{t\to 0}\frac{t^3(1+t^{n-3})t^2}{t^n}\lim_{t\to 0}\frac{t^5(1+t^{n-3})}{t^n}\lim_{t\to 0}\frac{(1+t^{n-3})}{t^{n-5}}$$

Pelo nuemrador, vemos que precisamos de $n \geq 3$. Pelo denominador, precisamos de $n \geq 5$.

$$\lim_{t\to 0} f\circ\gamma_5(t) = \lim_{t\to 0}\frac{1+t^2}{1} = 1$$

$$\lim_{t\to 0} f\circ\gamma_6(t) = \lim_{t\to 0}\frac{1+t^3}{t} = +\infty$$

assim, como esses limites são diferentes, não existe

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$$

Neste exercício, observamos um potencial ponto falho que abriria um caminho para mostrar que o limite não existe (nesse caso, o denominador), e utilizamos uma estratégia para encontrar curvas que demonstrassem isso.

9.1.1.5 Exemplo 5

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4y^9}{x^2-y^5} = f(x,y)$$

$(t^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{5}}), t > 0$ parametriza $\{(x,y) : x^2 - y^5 = 0, x > 0, y > 0\}$

Vamos usar $\gamma_n(t) = \left((t+t^n)^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{5}}\right), \gamma_n(0) = (0,0)$ novamente com a ideia de manter um denominador que fica pequeno dependendo de n atraveś de $((t+t^n)^{\frac{1}{2}})^2 - (t^{\frac{1}{5}})^5 = t + t^n - t = t^n$.

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} f\circ\gamma_n(t) &= \lim_{t\to 0}\frac{\left((t+t^n)^{\frac{1}{2}}\right)^4 (t^{\frac{1}{5}})^9}{t^n} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(t+t^n)^2 t^{\frac{9}{5}}}{t^n} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{t^2(1+t^{n-1})^2 t^{\frac{9}{5}}}{t^n} \\
&= \lim_{t\to 0}\frac{(1+t^{n-1})^2}{t^{n-2-\frac{9}{5}}}
\end{aligned}$$

Pelo numerador, precisamos de $n \geq 1$. pelo denominador, precisamos de $n \geq \frac{19}{5}$. Vamos usar $n = 4$,

$$\lim_{t \to 0^+} f \circ \gamma_4(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{(1+t^3)^2}{t^{4-\frac{19}{5}}} = +\infty$$

Vamos usar outra curva para verificar o limite: $\phi(t) = (t, 0) \Rightarrow \phi(0) = (0, 0)$

$$\lim_{t \to 0} f \circ \phi(t) = \lim_{t \to 0} \frac{t^4 0^9}{0^2 - t^5} = \lim_{t \to 0} \frac{0}{-t^5} = 0$$

Assim, $\lim_{t \to 0} f \circ \gamma_4(t) \neq \lim_{t \to 0} f \circ \phi(t)$.

Portanto, $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ não existe.

10 Derivadas em múltiplas dimensões

Quando tratamos de derivadas simples no cálculo univariado, estávamos, como o nome indica, sempre tratando de funções com uma variável. Isto é, a função estava sempre presa a um plano, e era fácil para nós encontrarmos a reta tangente a qualquer um de seus pontos, caso existisse, pela sua derivada.

Contudo, essas funções agora tem muito mais liberdade no cálculo multivariado. No espaço tridimensional que vivemos, por exemplo, as funções podem tomar formas muito além de simples curvas e retas num plano. Sendo assim, não podemos encontrar apenas uma reta tangente a algum ponto dessa função. Na verdade, se diferenciável, podemos encontrar *infinitas* retas tangentes num ponto, uma vez que, em funções desse tipo, pontos possuem um *plano tangente*:

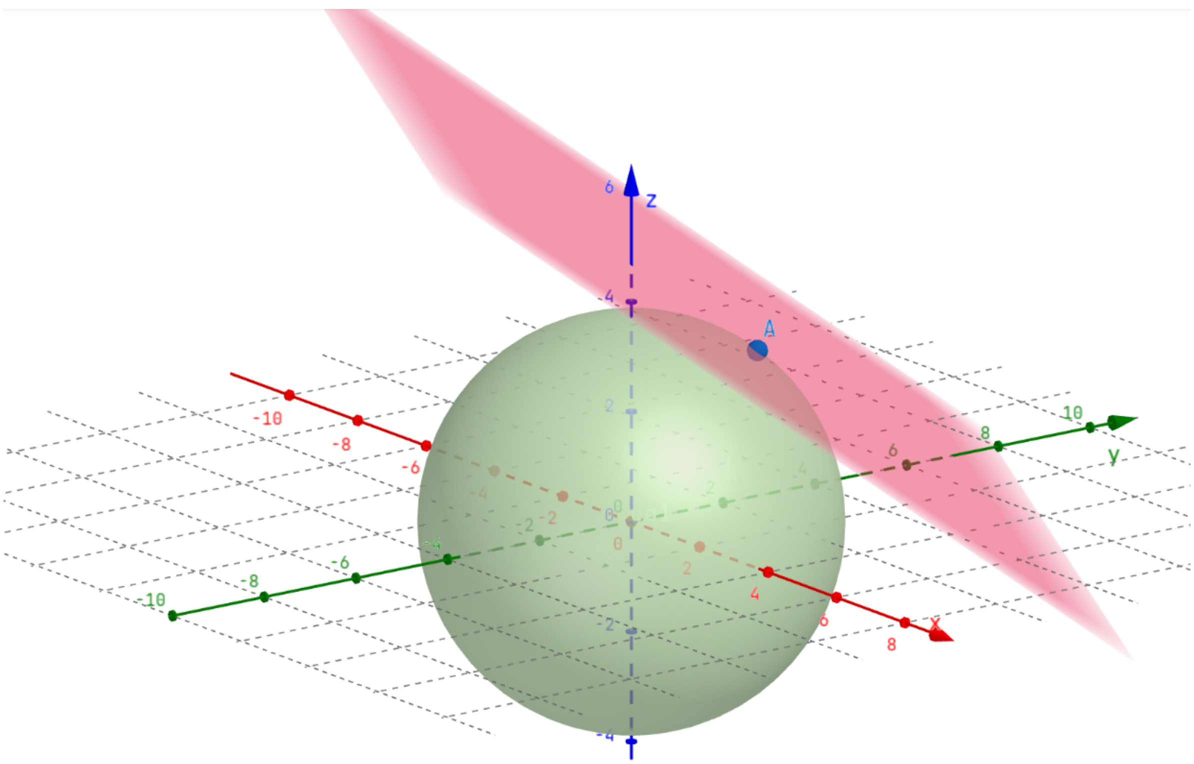


Figura 10.1: Plano tangente à esfera

Observe que o plano representa todas as retas tangentes ao ponto A.

Dessa forma, diferente de como pensamos no cálculo univariado, agora as derivadas não representam um coeficiente angular duma reta tangente, mas sim nos dão informações sobre o plano tangente ao ponto.

10.1 Derivadas Direcionais

Uma das formas de usar essa informação é através da *derivada direcional.* De maneira bem simples, como agora temos infinitas retas tangentes a um ponto, podemos escolher uma direção e observar a derivada das retas nessa direção. Isso nada mais é que analisar a derivada na direção do vetor diretor dessas retas.

Vamos nos lembrar da definição de derivada de uma função f num ponto x no cálculo univariado:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Essa definição se estende para mais dimensões ao escolhermos uma direção para avaliar essa derivada. Chamaremos essa direção de y, um vetor. Temos assim derivada duma função f na direção de y do *ponto* x

$$f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$

Temos quase a definição de nossa derivada parcial, mas ainda existe um problema na nossa fórmula acima: por mais que ela meça a taxa de variação de $\boldsymbol{x}$ na direção do vetor $\boldsymbol{y}$, ela não nos dá necessariamente, em termos de escala, uma boa medida.

Isso acontece pois o vetor $\boldsymbol{y}$ pode não ser unitário, ou seja, sua *norma*, $\|\boldsymbol{y}\|$ pode ser diferente de 1. Dessa forma, nos convém sempre normalizar o vetor que direciona esse tipo de derivada. Vamos chamar esse $\boldsymbol{y}$ normado de $\boldsymbol{v}$, também conhecido como *versor* de $\boldsymbol{y}$:

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{y}}{\|\boldsymbol{y}\|} \Rightarrow \|\boldsymbol{v}\| = 1$$

Com isso, temos a definição da derivada direcional de f no ponto $\boldsymbol{p}$ na direção do versor $\boldsymbol{v}$ de $\boldsymbol{y}$, denotada por $D_{\boldsymbol{v}}|_{\boldsymbol{p}}$

$$f'(\boldsymbol{p}; \boldsymbol{v}) = D_{\boldsymbol{v}}|_{\boldsymbol{p}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{h}$$

Vamos botá-la em prática!

10.1.1 Exercício - Derivada direcional

Calcule a derivada parcial de $f(x, y) = xy$ no ponto $\boldsymbol{p} = (2, 1)$ na direção do vetor $\boldsymbol{u} = (1, 1)$.

Primeiro note que o vetor $\boldsymbol{u}$ não possui norma 1: $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \neq 1$. Podemos norma-lo ao dividi-lo pelo valor que acabamos de calcular: $\boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Confira que esse novo vetor tem norma 1.

Podemos agora calcular $D_{\boldsymbol{u}}|_{\boldsymbol{p}}$.

$$\begin{aligned}
D_{\boldsymbol{u}}|_{\boldsymbol{p}} &= \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{p} + h\boldsymbol{v}) - f(\boldsymbol{p})}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f\left(2 + \frac{h}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - f(2, 1)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\left(2 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{h}{\sqrt{2}}\right) - 2 \cdot 1}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2 + \frac{3h}{\sqrt{2}} + \frac{h^2}{2} - 2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{3\sqrt{2}h + h^2}{2}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3\sqrt{2}h + h^2}{2h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{3\sqrt{2} + h}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

10.1.2 Derivadas parciais

O que aconteceria se derivássemos uma função na direção de um dos seus eixos? Por exemplo, com a função $f(x, y) = xy$, poderíamos derivá-la na direção de x ou y! Chamamos isso de *Derivada parcial*.

Vamos testar derivando essa função na direção de x no ponto $\boldsymbol{p} = x_0, y_0$ qualquer. Lembre-se que nesse caso x (por vezes chamado de $\vec{i}$) é o primeiro elemento da base canônica de $\mathbb{R}^2, \{(0, 1), (1, 0)\}$. Isto é, $x = (1, 0) \Rightarrow \|x\| = 1$

$$
\begin{aligned}
f'(\boldsymbol{p};x) = D_x\big|_{\boldsymbol{p}} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{p}+hx) - f(\boldsymbol{p})}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + 1\cdot h, y_0 + 0\cdot h) - f(x_0, y_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)\cdot(y_0) - x_0 y_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x_0 y_0 + y_0 h - x_0 y_0}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{y_0 h}{h} = \lim_{h\to 0} y_0 = y_0
\end{aligned}
$$

Usando os mesmos argumentos (verifique!), temos que

$$D_y\big|_{\boldsymbol{p}} = x_0$$

Derivadas parciais recebem este nome pois, como acabamos de verificar, derivamos uma das variáveis enquanto tratamos a outra como uma constante! Para celebrar sua importância, criamos uma notação especial para essas derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = D_y$$

Esse d estilizado, ∂, carinhosamente chamado de *del*, indica que estamos realizando uma derivação parcial. Dessa forma, podemos ler a primeira derivada como *derivada parcial de f em relação a x*.

Para nos poupar de calcularmos limites, como observamos, podemos na grande maioria dos casos calcular derivadas parciais simplesmente tratando as outras variáveis como constantes:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial(x-y)}{\partial y} &= -1 \\
\frac{\partial(x^2 y)}{\partial x} &= 2xy \\
\frac{\partial(e^{x^3+2y})}{\partial y} &= 2e^{x^3+2y}
\end{aligned}
$$

Essa é uma ferramente poderosa que será um pilar no nosso estudo de cálculo multivariado. Por exemplo, através dela construiremos a seguir uma ferramenta que, além de diversas outras funções, nos permite calcular derivadas direcionais sem sua definição por limites!

10.2 Diferenciabilidade

Assim como no cálculo univariado, nos é relevante saber se uma função é ou não diferenciável.

Da diferenciabilidade, temos que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável no ponto x_0 se e somente se existe a real tal que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = a \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - ah}{|a|} = 0$$

Estendendo para mais dimensões, como $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, temos a definição de diferenciabilidade para funções de duas variáveis:

f será diferenciável em (x_0, y_0) se e somente se existirem reais a, b tais que

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - ah - bk}{\|(h, k)\|}$$

Esses valores a e b são extremamente interessantes - São valores extremamente fáceis de encontrar! É fácil ver o porquê:

Vamos fixar o valor de k dentro do limite como 0:

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0) - ah}{\|(h, 0)\|} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} \\
&= a \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)
\end{aligned}$$

Ou seja, o valor de a é simplesmente a derivada parcial de f em relação a x e, analogamente, o de b a de f em relação a y, ambos calculados no ponto $\boldsymbol{p} = (x_0, y_0)$

Dessa forma, temos uma condição para diferenciabilidade de funções de várias variáveis:

Uma função f é diferenciável em um ponto $\boldsymbol{p}$ se, e somente se, admite derivadas parciais nesse ponto e o limite abaixo existe.

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \frac{f(\boldsymbol{p} + (h, k)) - f(\boldsymbol{p}) - D_x|\boldsymbol{p} - D_y|\boldsymbol{p}}{\|(h, k)\|}$$

Ainda assim, cacular esse limite é bem chato. Felizmente, manipulando esses limites (**guidorizzi_um_2018**) conseguimos um resultado muito útil:

10.2.1 Condição suficiente para diferenciabilidade

Para que uma função f seja diferenciável em um ponto $\boldsymbol{p}$, basta que admita derivadas parciais *contínuas* nesse ponto.

10.3 Gradiente

Conseguimos vários conceitos sobre as derivadas em mais dimensões. Observamos o que significa derivar em uma determinada direção, o que acontece quando derivamos na direção de um dos eixos e o que significa ser diferenciável. Mas, afinal, se temos uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, o que significa a "derivada da f" ou "f'"?

Quando dizemos "derivada da função f", normalmente nos referimos ao *gradiente* dessa função, um vetor que conteḿ as derivadas parciais dela no ponto. Por exemplo, o gradiente da função f no ponto (x, y) é dado por

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

Adaptando ao sistema de coordenadas $\hat{\imath}, \hat{\jmath}$, numa notação vetorial, teríamos que

$$\vec{\nabla} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath}$$

Nesse livro, optamos por não utilizar a notação vetorial, mas pode ser que você a encontre especialmente em cursos de física!

Na função simples $f(x, y) = x^2y^2$ teríamos, portanto, $\nabla f(x, y) = (2xy^2, 2x^2y)$.

Podemos interpretar o gradiente geometricamente como um vetor aplicado a um ponto $\boldsymbol{p}$. Acontece que, como veremos quando abordamos a regra da cadeia, esse é um vetor perpendicular ao ponto $\boldsymbol{p}$, ou, como chamado na física, normal à curva de nível nesse ponto.

Algo muito útil dessa propriedade é que, como é perpendicular ao ponto $\boldsymbol{p}$, é também perpendicular à reta tangente que passa por esse ponto. Com isso, temos a equação da reta tangente

$$\nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot [(x,y) - \boldsymbol{p}] = 0$$

Conseguimos estender isso para um plano tangente quando tratamos de três variáveis

$$\nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot [(x,y,z) - \boldsymbol{p}] = 0$$

E encontrar a reta normal à essa superfície de nível de $f(x, y, z)$

$$(x,y,z) = \boldsymbol{p} + \lambda \nabla f(\boldsymbol{p}), \lambda \in \mathbb{R}$$

Com esse recurso, conseguimos calcular quase qualquer derivada direcional através dessa relação:

$$f'(\boldsymbol{p};\boldsymbol{v}) = D_{\boldsymbol{v}}\big|_{\boldsymbol{p}} = \nabla f(\boldsymbol{p}) \cdot \boldsymbol{v}$$

Ou seja, o produto interno entre o gradiente de f calculado no ponto $\boldsymbol{p}$ e o versor da direção $\boldsymbol{v}$.

Vamos testar com um exempo que já fizemos quando calculamos a derivada direcional de $f(x,y) = xy$ no ponto $\boldsymbol{p} = (2,1)$ na direção de $\boldsymbol{u} = (1,1)$.

Lembrando que precisamos normalizar esse vetor!

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{u}}{\|\boldsymbol{u}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Calculando o gradiente, temos:

$$\nabla f(\boldsymbol{p}) = (1,2)$$

Finalmente,

$$D_{\boldsymbol{u}}\big|_{\boldsymbol{p}} = (1,2) \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

O que confere com nosso resultado anterior

11