Em cálculo de uma variável, dividimos o domínio em dois pedaços os partes $\{x : x < a\}$ e $\{x : x > a\}$ para definir o limite à esquerda e o limite à direita.

Há outras formas de se dividir o domínio para ajudar o cálculo do limite.

Ex: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}x, & x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} \sqrt{2}x = \sqrt{2}a$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{R}}} x^2 = a^2$$

Dividimos o domínio em dois pedaços e agora temos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \iff \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{Q}}} f(x) = L = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}} f(x)$$

Para que a igualdade à direita exista necessitamos que $\sqrt{2}a = a^2$. assim, a igualdade vale p/ $a = 0$ e $a = \sqrt{2}$.

Logo $\lim_{x \to a} f(x)$ existe somente para $a = 0$ e $a = \sqrt{2}$.

Para $a=0$ $f(0)=0.\sqrt{2}=0=\lim_{x\to 0} f(x)$

Para $a=\sqrt{2}$ $f(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^2=2=\lim_{x\to\sqrt{2}} f(x)$

assim a função é contínua em 0 e em $\sqrt{2}$.

Vamos agora fazer um exemplo em que devemos dividir o domínio.

Ex 1. $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^6}{x^4+y^8}$$

Vamos dividir o domínio. Para isto vamos buscar um $\alpha>0$ para quebrar o domínio.

1) $|x|\leq |y|^\alpha$

$$0\leq \left|\frac{x^3y^6}{x^4+y^8}\right| = \frac{|x|^3|y|^6}{x^4+y^8} \leq \frac{|y|^{3\alpha}|y|^6}{x^4+y^8} = \frac{|y|^{6+3\alpha}}{x^4+y^8}$$

Se $6+3\alpha>8$ temos

$$= \underbrace{|y|^{6+3\alpha-8}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{|y|^8}{x^4+y^8}}_{\text{limitada}}$$

assim se $6+3\alpha>8$, pelo teorema do confronto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\leq|y|^\alpha}} \left|\frac{x^3y^6}{x^4+y^8}\right| = 0 \text{ e } \therefore \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\leq|y|^\alpha}} \frac{x^3y^6}{x^4+y^8} = 0$$

2) $|x| \geq |y|^\alpha \iff |y| \leq |x|^{1/\alpha}$

$$0 \leq \left|\frac{x^3 y^6}{x^4+y^8}\right| = \frac{|x|^3|y|^6}{x^4+y^8} \leq \frac{|x|^3|x|^{6/\alpha}}{x^4+y^8}$$

Se $3+\frac{6}{\alpha} > 4$ então

$$\leq \frac{|x|^{3+\frac{6}{\alpha}}}{x^4+y^8} = \underbrace{|x|^{3+\frac{6}{\alpha}-4}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{|x|^4}{x^4+y^8}}_{\text{limitado}}$$

Para $3+\frac{6}{\alpha} > 4$ temos pelo teorema do confronto

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ |x|\geq|y|^\alpha}} \left|\frac{x^3y^6}{x^4+y^8}\right| = 0. \text{ Logo}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ |x|\geq|y|^\alpha}} \frac{x^3y^6}{x^4+y^8} = 0.$$

$$6+3\alpha-8>0$$
$$\iff 3\alpha > 2$$
$$\iff \alpha > \frac{2}{3}$$

$$3+\frac{6}{\alpha} > 4 \iff \frac{6}{\alpha} > 1$$
$$\iff \alpha < 6$$

Para termos os dois limits,
basta considerar α
com $\frac{2}{3} < \alpha < 6$. Podemos tomar $\alpha = 1$.

Então

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\leq|y|}} \frac{x^3y^6}{x^4+y^8} = 0$$

e

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\geq|y|}} \frac{x^3y^6}{x^4+y^8} = 0$$

assim $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^6}{x^4+y^8} = 0$

Ex 2- $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^4+y^8}$ Vamos tentar encontrar $\alpha > 0$.

1) $|x| \leq |y|^\alpha$

$$0 \leq \left|\frac{x^3y^3}{x^4+y^8}\right| = \frac{|x|^3|y|^3}{x^4+y^8} \leq \frac{|y|^{3\alpha}|y|^3}{x^4+y^8}$$

Se $3\alpha+3>8$

$$= \underbrace{\underbrace{|y|^{3\alpha+3-8}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{|y|^8}{x^4+y^8}}_{\text{limitado}}}_{\to 0}$$

Se $3\alpha+3>8$ então pelo teorema do confronto temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\le|y|^\alpha}} \left|\frac{x^3y^3}{x^4+y^8}\right| = 0 \text{, logo}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\le|y|^\alpha}} \frac{x^3y^3}{x^4+y^8} = 0.$$

2) $|x|\ge|y|^\alpha \iff |y|\le|x|^{\frac{1}{\alpha}}$

$$0\le \left|\frac{x^3y^3}{x^4+y^8}\right| = \frac{|x|^3|y|^3}{x^4+y^8} \le \frac{|x|^3|x|^{\frac{3}{\alpha}}}{x^4+y^8}$$

Se $3+\frac{3}{\alpha}>4$ temos

$$= \underbrace{\underbrace{|x|^{3+\frac{3}{\alpha}-4}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{|x|^4}{x^4+y^8}}_{\text{limitado}}}_{\to 0}$$

assim se $3+\frac{3}{\alpha}>4$ então

Pelo teorema do confronto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ |x|\geq|y|^\alpha}} \frac{x^3y^3}{x^4+y^4}=0.$$

$$3\alpha+3>8$$
$$\Leftrightarrow 3\alpha>5$$
$$\Leftrightarrow \alpha>\frac{5}{3}$$

$$3+\frac{3}{\alpha}>4$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{\alpha}>1$$
$$\Leftrightarrow \alpha<3$$

como $\frac{5}{3}<3$

Podemos fixar α tal que

$$\frac{5}{3}<\alpha<3.$$

Por exemplo $\alpha=2$.

assim

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\leq|y|^2}} \frac{x^3y^3}{x^4+y^8} = 0$$

$$\text{e} \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\geq|y|^2}} \frac{x^3y^3}{x^4+y^8} = 0$$

$$\text{e} \therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^4+y^8} = 0.$$

<u>Ex3</u>. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^4+y^8}$

1) $|x|\leq|y|^{\alpha}$

$$0\leq\left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^8}\right| = \frac{|x|^3|y|^2}{x^4+y^8} \leq \frac{|y|^{3\alpha}|y|^2}{x^4+y^8}$$

Se $3\alpha+2>8$

$$\leq \underbrace{|y|^{3\alpha+2-8}}_{\to 0}\ \underbrace{\frac{|y|^8}{x^4+y^8}}_{\text{limitado}} \to 0$$

Para $3\alpha+2>8$, pelo teorema

do confronto, temos

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\leq|y|^{\alpha}}} \left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^8}\right| = 0 \text{ , logo}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\leq|y|^{\alpha}}} \frac{x^3y^2}{x^4+y^8} = 0 .$$

2) $|x|\geq|y|^{\alpha} \Leftrightarrow |y|\leq|x|^{\frac{1}{\alpha}}$

$$0\leq\left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^8}\right| = \frac{|x|^3|y|^2}{x^4+y^8} \leq \frac{|x|^3|x|^{\frac{2}{\alpha}}}{x^4+y^8}$$

Se $3+\frac{2}{\alpha}>4$

$$\leq \underbrace{\underbrace{|x|^{3+\frac{2}{\alpha}-4}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{|x|^4}{x^4+y^8}}_{\text{limitado}}}_{\to 0}$$

Para $3+\frac{2}{\alpha}>4$ temos pelo teor do confronto,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\geq|y|^{\alpha}}} \left|\frac{x^3y^2}{x^4+y^8}\right| = 0 . \text{ Logo } \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ |x|\geq|y|^{\alpha}}} \frac{x^3y^2}{x^4+y^8} = 0 .$$

$3\alpha + 2 > 8 \iff$

$3\alpha > 6 \iff$

$\alpha > 2$

$3 + \frac{2}{\alpha} > 4 \iff$

$\frac{2}{\alpha} > 1 \iff$

$\alpha < 2.$

assim não existe α
tal que $2 < \alpha < 2.$

Logo não podemos usar
o que foi feito acima para
concluir que o limite existe.
Vemos que as duas desigualdades
falham para $\alpha = 2.$
assim vamos usar $x = y^2.$

$$f(x,y) = \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^8}$$

$\gamma_1(t) = (t^2, t)$

$\gamma_1(0) = (0,0)$

$$\lim_{t \to 0} f \circ \gamma_1(t) = \lim_{t \to 0} \frac{t^6 t^2}{t^8 + t^8} = \lim_{t \to 0} \frac{t^8}{2t^8} = \frac{1}{2}$$

$$\gamma_2(t) = (0,t)$$

$$\gamma_2(0) = (0,0)$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{0^3 t^2}{0^4 + t^8} = 0$$

como $\lim_{t\to 0} f\circ\gamma_1(t) \neq \lim_{t\to 0} f\circ\gamma_2(t)$,

segue que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

Ex. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x-y}$

Neste exemplo temos que o denominador zera num conjunto que se acumula (0,0). Assim para mostrar que o limite não existe, vamos nos aproximar rapidamente do conjunto $\{(x,y): x-y=0\}$ para que o denominador vá para 0 mais rápido do que o numerador.

Uma parametrização de $\{(x,y): x-y=0\}$ pode ser dada por (t,t).

Como não queremos "andar" sobre $\{(x,y): x-y=0\}$, tomaremos

$\gamma_n(t) = (t+t^n, t)$ (assim o denominador vai rápido para 0 dependendo de n), pois $t+t^n-t = t^n$.

Para isto $n>0$.

$$f(x,y) = \frac{x^3y^2}{x-y}$$

Então

$$\lim_{t\to0} f\circ\gamma_n(t) = \lim_{t\to0} \frac{(t+t^n)^3 t^2}{t+t^n-t}$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{t^3(1+t^{n-3})t^2}{t^n}$$

$$= \lim_{t\to0} \frac{t^5(1+t^{n-3})}{t^n}$$ Precisa de $n\geq3$

$$= \lim_{t\to0} \frac{(1+t^{n-3})}{t^{n-5}}$$ Precisa de $n\geq5$

$$\lim_{t\to0} f\circ\gamma_5(t) = \lim_{t\to0} \frac{1+t^2}{1} = 1$$

$t^2 \to 0$

$$\lim_{t\to 0^+} f\circ\gamma_6(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{\boxed{1+t^3}}{t} = +\infty$$

$$t^3 \to 0, \quad 1+t^3 \to 1, \quad t \to 0^+$$

assim $\lim_{t\to 0} f\circ\gamma_5(t) \neq \lim_{t\to 0} f\circ\gamma_6(t)$

$\therefore \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.

Ex.: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4 y^9}{x^2 - y^5} = f(x,y)$

$(t^{1/2}, t^{1/5})$, $t>0$ parametriza $\{(x,y): x^2 - y^5 = 0, x>0, y>0\}$.

Vamos usar $n>0$.

$\gamma_n(t) = ((t+t^n)^{1/2}, t^{1/5})$, $\gamma_n(0) = (0,0)$

(Novamente a ideia é ter denominador

$((t+t^n)^{1/2})^2 - (t^{1/5})^5 = t + t^n - t$

$= t^n$.

que fica pequeno dependendo de n.

$$\lim_{t\to 0} f\circ\gamma_n(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\left((t+t^n)^{1/2}\right)^4 \cdot \left(t^{1/5}\right)^9}{t^n}$$

visto acima.

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(t+t^n)^2\, t^{9/5}}{t^n}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^2\,(1+t^{n-1})^2\, t^{9/5}}{t^n}$$

precisa de $n \geq 1$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{(1+t^{n-1})^2}{t^{n-2-\frac{9}{5}}}$$

precisa de $n \geq \frac{19}{5}$

$2 + \frac{9}{5} = \frac{19}{5}$

Podemos então usar $n=4$,

$$\lim_{t\to 0^+} f\circ\gamma_4(t) = \lim_{t\to 0^+} \frac{(1+\underbrace{t^3}_{\to 0})^2}{t^{\underbrace{4-19/5}_{\to 0^+}}} = +\infty$$

$\to 1$

Usando $\sigma = (t, 0)$ temos $\sigma(0) = (0,0)$

$$\lim_{t\to 0} f\circ\sigma(t) = \lim_{t\to 0} \frac{\underbrace{t^4 \cdot 0^9}_{=0}}{0^2 - t^5} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{-t^5} = 0$$

assim, $\lim_{t\to 0} f\circ\gamma_4(t) \neq \lim_{t\to 0} f\circ\sigma(t)$

$\therefore \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ não existe.