Inversão de matrizes

- Uma matriz $m \times n$ tem m linhas e n colunas.
- uma matriz é quadrada se $m = n$. (mesmo número de linhas e colunas).

Multiplicação de matrizes

Para multiplicar uma Matriz $m \times n$ e uma matriz $K \times p$, precisamos que o número de colunas da matriz da esquerda seja igual o número de linhas da segunda matriz.

Ou seja tem que ser $m \times n$ e $n \times p$ $(n = K)$.

Ex:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

é uma 2×3 por uma 3×1

iguais

tem como resultado uma matriz 2x1.

1ª linha · 1ª coluna · Posição linha 1 coluna 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7 + 2.8 + 3.9 \\ 4.7 + 5.8 + 6.9 \end{bmatrix}$$

2ª linha · Posição linha 2 coluna 1

Ex:

esta matriz troca linhas

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 + d + 0 & 0 + e + 0 \\ a + 0 + 0 & b + 0 + 0 \\ 0 + 0 + g & 0 + 0 + h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} d & e \\ a & b \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a + \beta d + 0g & \alpha b + \beta e + 0h \\ 0 + d + 0 & 0 + e + 0 \\ 0 + 0 + g & 0 + 0 + h \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha a + \beta d & \alpha b + \beta e \\ d & e \\ g & h \end{bmatrix}$$

a 1ª linha é α . 1ª linha da matriz original + β . 2ª linha da matriz original.

assim, fazer escalonamento é multiplicar por matrizes "próximas" da identidade.

— A matriz quadrada em que as entradas na diagonal principal são 1 e as outras são 0 é a matriz identidade I_n.

Ex: $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Claramente se M é uma matriz $m \times n$ então

$$I_m \times M = M$$

e $M \times I_n = M$.

Se M é uma matriz quadrada $n \times n$, dizemos que M é inversível se $\exists$ matriz N $n \times n$ tal que

$$MN = NM = I_n.$$

— As matrizes utilizadas no escalonamento são inversíveis.

— Podemos chegar de M a I_n utilizando escalonamento. Se o processo for

Sejam $N_1, \dots, N_k$ matrizes tais que

$$M = I_n M$$
$$N_1 M = N_1 I_n M$$
$$N_2 N_1 M = N_2 N_1 I_n M$$
$$\vdots$$
$$I_n = N_k \dots N_1 M = \underbrace{N_k \dots N_2 N_1 I_n}_{\text{inversa da matriz } M.} M$$

escalonamento

OBS: Para $N_k \dots N_1 I_n$ ser a inversa precisaríamos saber que $I_n = M.(N_k \dots N_1 I_n)$, mas isso ocorre.

- Se $MK = LM = I_n$ então $K = L$. De fato,

$$K = K.I_n = K.M.L = I_n.L = L$$

OBS: Podemos escalonar usando as colunas, nesse caso as matrizes de escalonamento são

$$I_n = M.N_1 \dots N_K = M.\underbrace{I_n.N_1 \dots N_K}_{\text{inversa.}}$$

Note que para chegar à inversa não podemos misturar escalonamento de linhas e colunas.

- Uma matriz quadrada $n \times n$ é inversível se e somente se seu determinante é $\neq 0$.

Exemplo: inverta a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Vamos verificar o determinante para saber se a função é inversível.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.1.3 + 3.5.4 + 2.2.2$$

$$-(2.1.4 + 2.3.3 + 1.2.5)$$

$$= 3 + 60 + 8 - (8 + 18 + 10)$$

$$= \cancel{3} + \cancel{60} + \cancel{8} - \cancel{8} - \cancel{18} - \cancel{10}$$

$$0 \qquad -15 \qquad 50$$

$$= -15 + 50 = 35 \neq 0$$

Como o determinante é $\neq 0$, a matriz é inversível.

Vamos então fazer o escalonamento. Para facilitar conferir o que foi feito iremos indicar a operação a ser escalonada.

$\neq 0$ manter essa linha

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & | & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim$$

zerar

linha da matriz ant.

$2①-②$

$③-4①$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & -5 & | & -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$2[1\ 3\ 2]-[2\ 1\ 5]$
$=[2\ 6\ 4]-[2\ 1\ 5]$
$=[0\ 5\ -1]$

$2[1\ 0\ 0]-[0\ 1\ 0]$
$=[2\ 0\ 0]-[0\ 1\ 0]$
$=[2\ -1\ 0]$

$[4\ 2\ 3]-4[1\ 3\ 2]$
$=[4\ 2\ 3]-[4\ 12\ 8]$
$=[0\ -10\ -5]$

$[0\ 0\ 1]-4[1\ 0\ 0]=$

$$[-4 \quad 0 \quad 1]$$

Zeran

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -10 & -5 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$\neq 0$

Zeran

$$\begin{array}{c} 5①-3② \\ \\ 2②+③ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 13 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$5[1 \quad 3 \quad 2] - 3[0 \quad 5 \quad -1]$$

$$= [5 \quad 15 \quad 10] + [0 \quad -15 \quad 3]$$

$$= [5 \quad 0 \quad 13]$$

$$5[1 \quad 0 \quad 0] - 3[2 \quad -1 \quad 0]$$

$= [5 \ 0 \ 0] + [-6 \ \ 3 \ \ 0]$

$= [-1 \ 3 \ 0]$

$2[0 \ \ 5 \ -1] + [0 \ -10 \ -5]$

$= [0 \ 10 \ -2] + [0 \ -10 \ -5]$

$= [0 \ 0 \ -7]$

$2[2 \ \ -1 \ \ 0] + [-4 \ 0 \ 1]$

$= [4 \ -2 \ \ 0] + [-4 \ \ 0 \ \ 1]$

$= [0 \ \ -2 \ \ 1]$

zeran

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 13 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \quad \neq 0$$

$7(1) + 13(3)$

$7(2) - (3)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 35 & 0 & 0 & -7 & -5 & 13 \\ 0 & 35 & 0 & 14 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$7[5 \quad 0 \quad 13] + 13[0 \quad 0 \quad -7]$$
$$= [35 \quad 0 \quad 7\cdot 13] + [0 \quad 0 \quad -7\cdot 13]$$
$$= [35 \quad 0 \quad 0]$$

$$7[-1 \quad 3 \quad 0] + 13[0 \quad -2 \quad 1]$$
$$= [-7 \quad 21 \quad 0] + [0 \quad -26 \quad 13]$$
$$= [-7 \quad -5 \quad 13]$$

$$7[0 \quad 5 \quad -1] - [0 \quad 0 \quad -7]$$
$$= [0 \quad 35 \quad -7] + [0 \quad 0 \quad 7]$$
$$= [0 \quad 35 \quad 0]$$

$$7[2 \quad -1 \quad 0] - [0 \quad -2 \quad 1]$$
$$= [14 \quad -7 \quad 0] + [0 \quad 2 \quad -1]$$
$$= [14 \quad -5 \quad -1]$$

tracan pa 1

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 35 & 0 & 0 & -7 & -5 & 13 \\ 0 & 35 & 0 & 14 & -5 & 7 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \begin{array}{l} \frac{1}{35}(1) \\ \frac{1}{35}(2) \\ -\frac{1}{7}(3) \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-7}{35} & -\frac{5}{35} & \frac{13}{35} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{35} & \frac{-5}{35} & -\frac{1}{35} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{array}\right]$$

$\therefore$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-7}{35} & \frac{-5}{35} & \frac{13}{35} \\ \frac{14}{35} & \frac{-5}{35} & \frac{-1}{35} \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix}$$

conferindo se

$M^{-1} \cdot M = I_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{35} & -\frac{5}{35} & \frac{13}{35} \\ \frac{14}{35} & -\frac{5}{35} & -\frac{1}{35} \\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

(1,1)

$$-\frac{7}{35} + \frac{42}{35} + 0 = \frac{35}{35} = 1 \quad \checkmark$$

(1,2)

$$-\frac{5}{35} - \frac{15}{35} + \frac{4}{7} =$$

$$= \frac{-5-15+20}{35} = 0 \checkmark$$

$(1,3)$

$$\frac{13}{35} - \frac{3}{35} - \frac{2}{7} = \frac{13-3-10}{35} = 0 \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{35} & -\frac{5}{35} & \frac{13}{35} \\ \frac{14}{35} & -\frac{5}{35} & -\frac{1}{35} \\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

$(2,1)$ $-\frac{14}{35} + \frac{14}{35} + 0 = 0 \checkmark$

$(2,2)$ $-\frac{10}{35} - \frac{5}{35} + \frac{10}{7} = \frac{-10-5+50}{35} = \frac{35}{35} = 1 \checkmark$

$(2,3)\quad \frac{26}{35} - \frac{1}{35} - \frac{5}{7} = \frac{26-1-25}{35}$

$= 0$ ✓

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-7}{35} & \frac{-5}{35} & \frac{13}{35} \\ \frac{14}{35} & \frac{-5}{35} & \frac{-1}{35} \\ 0 & \frac{2}{7} & \frac{-1}{7} \end{bmatrix}$$

$(3,1)\quad \frac{-28}{35} + \frac{28}{35} + 0 = 0$ ✓

$(3,2)\quad \frac{-20}{35} - \frac{10}{35} + \frac{6}{7} = \frac{-30+30}{35}$

$= 0$ ✓

$(3,3)\quad \frac{52}{35} - \frac{2}{35} - \frac{3}{7} = \frac{50-15}{35} = \frac{35}{35} = 1$ ✓

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{7}{35} & -\frac{5}{35} & \frac{13}{35} \\ \frac{14}{35} & -\frac{5}{35} & -\frac{1}{35} \\ 0 & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \end{bmatrix} = I_3 \checkmark.$$