

## Estimando a duração de passeios aleatórios

Eduardo Yukio Garrafa Ishihara  
Gustavo Silva Garone

Prof<sup>a</sup>. Dra. Elisabeti Kira

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo

eduardoyukio.ishihara@usp.br

### Objetivos

A Ruína do Jogador é um passeio aleatório, um dos mais conhecidos modelos de processo estocástico markoviano. Nele, um jogador aposta seu dinheiro a cada rodada e, com base em uma regra probabilística, ganha ou perde valores diversos. Modelos desse tipo possuem grande utilidade na modelagem estatística e aplicações em algoritmos computacionais [5]. Seu comportamento já foi amplamente estudado em sua forma mais simples - o jogador ganha R\$1,00 com probabilidade  $p$  e perde R\$1,00 com probabilidade  $1 - p$  - em especial no que diz respeito à probabilidade de ruína ou vitória [4]. Esse trabalho tem como objetivo estudar o tempo esperado até a ruína para modelos mais complexos, propondo métodos de estimar essa duração e avaliando-os por vias computacionais, assim expandindo o conhecimento acerca desses processos e algumas de suas variações.

### Métodos e Procedimentos

Analisamos o cálculo da esperança e da variância da duração da Ruína do Jogador simples [1], na qual destacou-se o uso de sistemas de equações de diferenças finitas. Desenvolvemos um primeiro estimador heurístico baseado numa analogia à velocidade média em Física, que forneceu boas estimativas para a maioria dos passeios aleatórios, tanto os simples como aqueles em que os jogadores podem ganhar ou perder valores diferentes de R\$1,00 por rodada. No caso do jogo honesto, isso é, quando o lucro esperado em cada rodada é nulo, o estimador forneceu estimativas que desviaram significati-

vamente dos valores calculados e simulados.

Para passeios com regras mais amplas que não possuem resultado analítico, avaliamos este estimador por simulações de Monte Carlo, com base em métodos propostos por Ritter [3], na linguagem de programação Python. Conforme considerávamos regras de jogo mais amplas e que prolongavam muito o tempo das simulações e demandavam maior poder computacional, passamos a empregar a linguagem Julia, como recomendado por Godoy [2]. Refinamos o estimador para lidar com situações de empate dentro da rodada.

Compreendidos os limites deste estimador para uma dimensão, estendemos nossos estudos para passeios em  $\mathbb{Z}^d$ . Resolvendo sistemas de equações computacionalmente por bibliotecas simbólicas, conseguimos resultados analíticos para passeios unitários e com diferentes regras probabilísticas. Novos estimadores foram propostos e analisados tanto para passeios simples quanto para mais complexos. Computação paralela possibilitou a simulação de passeios de alta dimensionalidade.

### Resultados

O estimador proposto mostrou-se eficaz para o caso unidimensional, como mostra a Figura 1, e foi adaptado com sucesso ao caso em que a regra probabilística depende da fortuna atual do jogador.

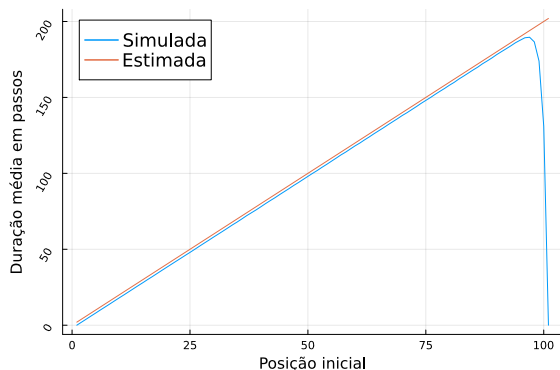


Figura 1: Comparação do estimador com 100 000 simulações por posição inicial

Em dimensões mais altas, constatou-se que a duração esperada do passeio só pode ser determinada por métodos numéricos, dado o crescimento exponencial das equações envolvidas com a dimensão. Surpreendentemente, observou-se crescimento linear do tempo médio de duração do jogo conforme o número de dimensões aumenta acima de  $d = 100$ , como ilustra a Figura 2.

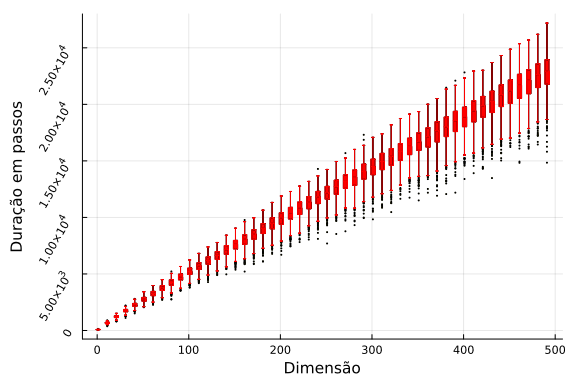


Figura 2: Duração do jogo para 1 000 simulações em função da dimensão.

Para o caso particular do modelo em que o jogador não pode perder dinheiro, foram obtidas expressões teóricas em meios aleatório e não aleatório. Foi observado que a complexidade das equações que descrevem o tempo médio de duração do jogo cresce proporcionalmente ao tamanho do espaço de estados. Em todos os casos, os estimadores se aproximaram dos valores

simulados, embora apresentem maiores desvios quando o jogo é aproximadamente honesto, ou quando o estado inicial está próximo das fronteiras.

## Conclusões

A Ruína do Jogador é um problema clássico, proposto há quase quatro séculos. Ainda assim, munidos apenas da intuição, é possível para alunos da graduação explorarem novas perguntas e hipóteses, verificá-las com ajuda dos recursos computacionais, hoje abundantes, para finalmente formalizá-las com rigor matemático. Esperamos que esse trabalho incentive outros alunos da graduação a explorarem e reexplorarem por si problemas matemáticos clássicos em busca de soluções para problemas modernos.

Não há conflitos de interesse a serem declarados. Eduardo Yukio desenvolveu a teoria por trás dos estimadores e obteve os resultados analíticos. Gustavo Garone forneceu suporte computacional e desenvolveu os algoritmos de simulação.

## Agradecimentos

Agradecemos, primeiramente, à Professora Elisabeti Kira pela confiança, pela compreensão e pelos ensinamentos ao orientar-nos durante a produção desse artigo e à Universidade de São Paulo pelo apoio financeiro concedido por meio do Programa Unificado de Bolsas (PUB).

## Referências

- [1] Jiří Anděl and Šárka Hudecová. Variance of the game duration in the gambler's ruin problem. 82(9):1750–1754.
- [2] William F. Godoy et al. Evaluating performance and portability of high-level programming models.
- [3] Frank E. Ritter et al. Determining the number of simulation runs. Springer.
- [4] S.M. Ross. *Introduction to Probability Models*. Academic Press.
- [5] S.M. Ross. *Markov Chain Monte Carlo Methods*. Academic Press.