

## ESTIMANDO A DURAÇÃO ESPERADA DE PASSEIOS ALEATÓRIOS

**Eduardo Yukio Garrafa Ishihara**  
**Gustavo Silva Garone**

**Prof.<sup>a</sup> Dra. Elisabeti Kira**

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo  
eduardoyukio.ishihara@usp.br

### Objetivos

A Ruína do Jogador é um dos mais conhecidos modelos de passeio aleatório, um processo estocástico markoviano com espaço de estados enumerável e barreiras absorventes. Nele, dois jogadores apostam seu dinheiro a cada rodada e, com base em uma distribuição de probabilidades, ganham ou perdem valores diversos. Por sua utilidade na modelagem estatística e aplicação em algoritmos computacionais, seu comportamento já foi amplamente estudado em sua forma mais simples (unitário, uniforme e em meio não aleatório), em especial quanto a probabilidade de ruína [1]. Esse trabalho tem como objetivo estudar o tempo esperado até a ruína para passeios mais complexos, propondo métodos de estimar essa duração e avaliando-os por vias computacionais.

### Métodos

Iniciamos por uma revisão da literatura na derivação analítica de passeios mais simples. Analisamos o cálculo da esperança e da variância da duração da Ruína do Jogador simples [?] na qual destacou-se o uso de sistemas de equações de diferenças finitas. Depois, desenvolvemos um primeiro estimador heurístico baseado em analogia à velocidade média em Física, que funcionou para a maioria dos passeios não unitários. Isto é, passeios em que os jogadores podem ganhar ou perder valores diferentes de R\$1 por rodada. Uma vez que estes passeios não possuem resultado analítico (ou

de difícil construção), avaliamos este estimador por simulações de Monte Carlo na linguagem de programação Python. Posteriormente, conforme utilizávamos regras de jogo que prolongavam muito as simulações e demandavam maior poder computacional, passamos a utilizar a linguagem Julia por sua velocidade. O estimador apresentou resultados muito próximos dos simulados, como exhibe a Figura 1.

Compreendidos os limites deste estimador,

### Resultados

O estimador proposto mostrou-se eficaz para o caso unidimensional em meio uniforme e foi adaptado com sucesso ao caso não uniforme. Em dimensões mais altas, constatou-se que a esperança do tempo de ruína só pode ser determinada numericamente, dada a explosão combinatória das equações envolvidas e, demonstrou crescimento linear conforme o número de dimensões aumenta a partir da 50ª dimensão. Para o passeio do foguete, foram obtidas expressões teóricas em meios uniforme, não uniforme, em meios aleatórios e não aleatórios. Foi necessário o uso de computadores para obter valores numéricos dos casos aleatórios não uniformes, revelando que a complexidade cresce proporcionalmente ao número de estados possíveis. Em todos os casos, os estimadores se aproximaram dos valores simulados, embora apresentem maiores desvios quando a esperança da variável de transição se aproxima de zero ou quando o estado inicial está próximo das fronteiras.

## **Conclusões**

O estudo demonstrou que o estimador proposto é uma ferramenta versátil para analisar a duração média da ruína do jogador em diferentes configurações, especialmente quando resultados teóricos são inviáveis. A extensão para o passeio do foguete mostrou que modelos alternativos podem ser tratados dentro do mesmo arcabouço metodológico. No entanto, a análise em altas dimensões e em meios aleatórios não uniformes permanece um desafio, reforçando a necessidade de abordagens computacionais e de futuros refinamentos do estimador.

## **Referências**

- [1] S.M. Ross. *Introduction to Probability Models*. Academic Press.