Passeio Aleatório: Modelos, Aplicações e Simulação

Orientadora:

Eduardo Yukio G. Ishihara, ~~Gustavo S. Garone~~, Elisabeti Kira

Fevereiro 2025

1 Introdução

Evitar "X" na introdução.

Blaise Pascal propôs no século XVII o problema da Ruína do Jogador que, desde então, tem sido amplamente estudado por diversos pesquisadores. Em nossos estudos, visitamos uma revisão dos principais resultados conhecidos sobre o problema clássico e introduzimos uma nova abordagem. Consideramos um jogo entre dois jogadores, A e B, que começam com a e b reais, respectivamente. Definimos uma variável aleatória discreta X, que determina as regras de ganho e perda de dinheiro ~~dentro do jogo~~ Para cada jogador. O jogo termina quando um dos jogadores atinge um saldo de zero reais ou não pode honrar a quantia devida ao oponente.

Neste ~~estudo~~ projeto, ~~propomos um estimador para~~ estudamos a esperança da duração total do jogo, considerando dois cenários distintos: um em que X é fixo (caso homogêneo) e outro em que X varia conforme a fortuna atual dos jogadores (caso não homogêneo).

parágrafo

Para validar os resultados teóricos obtidos com o estimador, utilizamos algoritmos de simulações de Monte Carlo.

Explicar pq precisa estimar

~~Nesse relatório~~, apresentamos nosso progresso ~~com o estudo do caso fixo~~ até o momento.

2 ~~Discussão~~ Atividades desenvolvidas

evitar!

Inicialmente, realizamos uma revisão da literatura ~~existente~~ para identificar os principais resultados sobre o problema da Ruína do Jogador e suas variações. Encontramos publicações abordando até o quinto momento (centrado e não centrado) da duração do jogo, assim como variações que incluem possibilidade de empate, probabilidades de vitória assimétricas entre os jogadores, aumento no número de participantes e probabilidades de vitória não uniformes ao longo do jogo, um meio não uniforme.

que resultados?

2.1 Esperança da Duração do Jogo

iniciar aqui

É melhor definir "X" aqui

Com base nos resultados, utilizamos equações de diferenças finitas não homogêneas para reproduzir as formulações teóricas. Consideramos o problema da Ruína do Jogador clássico, com os jogadores A e B, que começam com a e b reais, respectivamente, de modo que a fortuna total em jogo seja $N = a + b$. Definimos p como a probabilidade do jogador A ganhar um real do jogador B, e $q = 1 - p$ T_a, como o número de rodadas até o fim do jogo se o jogador A começa com a reais e X_i, como o valor ganho ou perdido pelo jogador A na i-ésima rodada. Por fim, definimos ~~$q = 1 - p$~~ e $\mu_a = \mathbb{E}[T_a]$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_a] &= \mathbb{E}[T_a|X_1 = 1]\mathbb{P}(T_1 = 1) + \mathbb{E}[T_a|X_1 = -1]\mathbb{P}(T_1 = -1) \\
&= \mathbb{E}[T_a|X_1 = 1]\, p + \mathbb{E}[T_a|X_1 = -1]\, q \\
&= (\mathbb{E}[T_{a+1}] + 1)\, p + (\mathbb{E}[T_{a-1}] + 1)\, q \\
&= p\, \mathbb{E}[T_{a+1}] + q\, \mathbb{E}[T_{a-1}] + 1
\end{aligned}
$$

Portanto $$\cancel{\therefore}\, \mu_a = p\, \mu_{a+1} + q\, \mu_{a-1} + 1$$ aqui dizer que é eq. de dif. finita não homog.

Tomemos $\mu_a = \lambda^a$ e, temporariamente, desconsideraremos a constante 1 na equação de diferenças finitas.

$$
\begin{aligned}
&\lambda^a = p\, \lambda^{a+1} + q\, \lambda^{a-1} \\
\Rightarrow\ & p\, \lambda^2 - \lambda + q = 0 \\
\Rightarrow\ & \lambda_1 = \frac{q}{p};\ \lambda_2 = 1
\end{aligned}
$$

Para $\frac{p}{q} = 1$:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Temos a seguinte equação característica:

$$\mu_a = \alpha + \beta a + \gamma a^2$$

Tomemos $\mu_a = \gamma a^2$. Juntando as equações:

$$
\begin{aligned}
&\gamma a^2 = \frac{1}{2}\gamma(a-1)^2 + \frac{1}{2}\gamma(a+1)^2 + 1 \\
\Rightarrow\ & 2\gamma a^2 = \gamma a^2 - 2\gamma a + \gamma + \gamma a^2 + 2\gamma a + \gamma + 2 \\
\Rightarrow\ & \gamma = -1
\end{aligned}
$$

Aplicando as seguintes condições de fronteira:

$$
\begin{cases}
\mu_0 = 0 \\
\mu_N = 0
\end{cases}
$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_0 = 0 = \alpha + \beta 0 + \gamma 0^2 \\ \mu_N = 0 = \alpha + \beta N + \gamma N^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = N \end{cases}$$

$$\therefore \mu_a = Na - a^2 = a(N-a)$$

Para $\frac{p}{q} \neq 1$: Temos a seguinte equação característica:

$$\mu_a = \alpha\lambda_1^a + \beta\lambda_2^a + \gamma a$$

Tomemos $\mu_a = \gamma a$:

$$\gamma a = p\,\gamma(a+1) + q\,\gamma(a-1) + 1$$
$$\Rightarrow \gamma = \frac{1}{q-p}$$

Substituindo e usando as fronteiras:

$$\mu_a = \alpha\left(\frac{q}{p}\right)^a + \beta + \frac{a}{q-p}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_0 = 0 \\ \mu_N = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_0 = 0 = \alpha\left(\frac{q}{p}\right)^0 + \beta + \frac{0}{q-p} \\ \mu_N = 0 = \alpha\left(\frac{q}{p}\right)^N + \beta + \frac{N}{q-p} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{N}{p-q}\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \\ \beta = -\frac{N}{p-q}\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \end{cases}$$

$$\mu_a = \frac{N}{p-q}\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}\left(\frac{q}{p}\right)^a - \frac{N}{p-q}\frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} + \frac{a}{q-p}$$
$$= \frac{a}{q-p} - \frac{N}{q-p}\left(\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\right)$$

$$\mu_a = E(T_a) = \begin{cases} a(N-a) & \textbf{se } p = q = 1/2, \\ \frac{a}{q-p} - \frac{N}{q-p}\left(\frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^a}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}\right) & \textbf{se } p \neq q \end{cases}$$

mencionar que é o mesmo resultado obtido por outro método (citar livro S. Ross)

Consideramos duas situações. A primeira é o (passeio aleat. simples) cuja

2.2 O Estimador

~~O~~ caso mais fundamental ~~do problema e um caso com empates podem ter as suas~~ regras é descritas como:

$$X = \begin{cases} 1 & \mathbb{P}(X=1) = p \\ -1 & \mathbb{P}(X=-1) = q \end{cases}$$

a segunda situação é quando pode haver empate, nesse caso a regra é

$$X' = \begin{cases} 1 & \mathbb{P}(X=1) = p_0 \\ -1 & \mathbb{P}(X=-1) = p_1 \\ 0 & \mathbb{P}(X=0) = 1 - p_0 - p_1 \end{cases}$$

Definimos o seguinte estimador rudimentar da duração do jogo quando $q \neq p$:

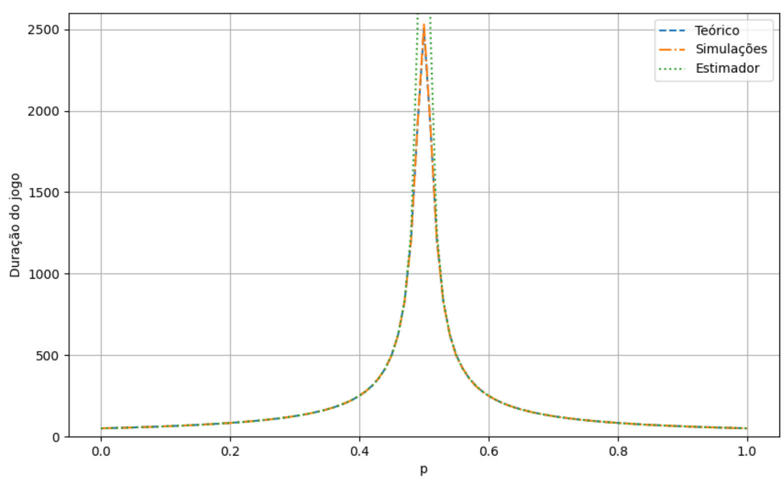
$$\widehat{E}(T_a) = \begin{cases} \frac{N-a}{p-q}, & \textbf{se } p > q \\ \frac{a}{q-p}, & \textbf{se } p < q \end{cases}$$

teórico

Note que quando $p \to \frac{1}{2}$, $\widehat{E}(T_a) \to \pm\infty$. Abaixo, trazemos a comparação entre o estimador, o resultado ~~probabilístico~~ e as simulações computacionais para o jogo simples com $\boxed{a = 50,\ N = 100 \text{ e } p \text{ variando a cada caso.}}$

esperado comparação dos valores

Gráfico 1: ~~Comparação do~~ T tempo do jogo ~~teórico~~, simulado e estimado. com :



~~Fonte: Elaboração própria~~

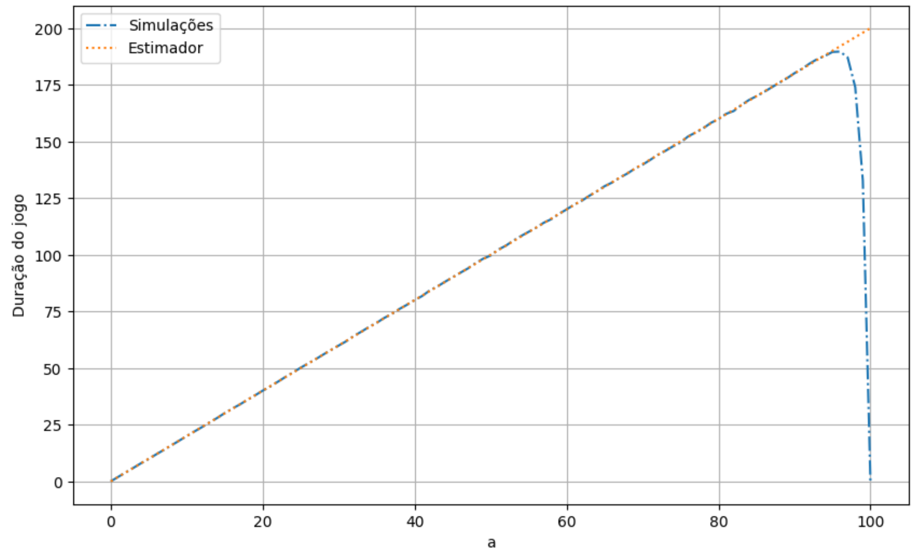
Abaixo, fixamos $p = 0.25$, $N = 100$ e variamos a de 0 a 100.

Comparação dos valores

com

esperado

Gráfico 2: **~~Comparação do~~ T tempo do jogo simulado e estimado.**



~~Fonte: Elaboração própria~~

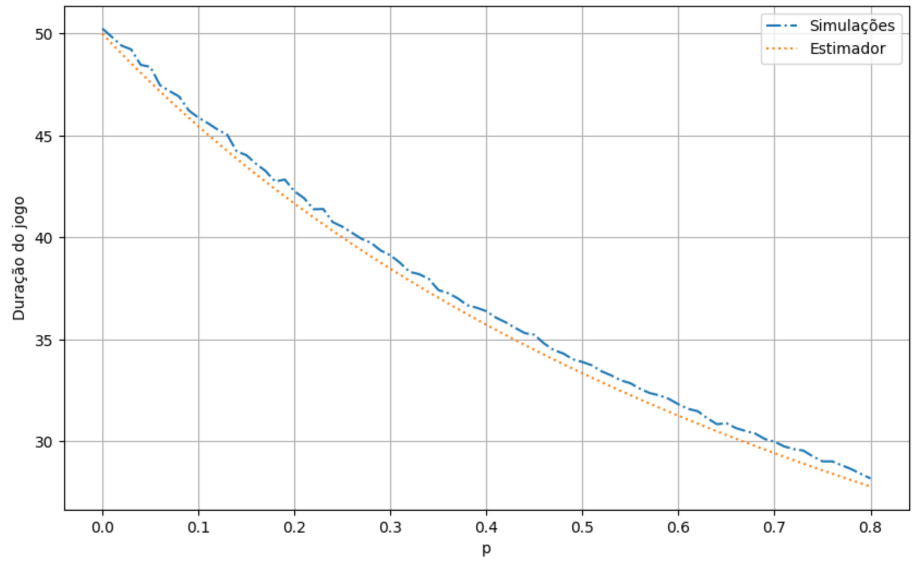
Posteriormente, adaptamos a fórmula de modo a permitir jogos com novas regras:

$$\widehat{E}(T_a) = \begin{cases} \frac{N-a}{E(X)} & \textbf{se } E(X) > 0 \\ \left|\frac{a}{E(X)}\right| & \textbf{se } E(X) < 0 \end{cases}$$

? Analogamente ao caso clássico, repetimos os processos para o caso com regras especiais conforme definido abaixo. Não incluímos os valores teóricos, pois não há nenhum registro de fórmula que contemple o caso. qual caso?

$$X = \begin{cases} 3 & \mathbb{P}(X = 3) = p \\ 2 & \mathbb{P}(X = 2) = 0.8 - p \\ -3 & \mathbb{P}(X = -3) = 0.2 \end{cases}$$

Gráfico 3: **Comparação do tempo do novo jogo simulado e estimado.**



~~Fonte: Elaboração própria~~

Com esse recurso, podemos expandir o estimador proposto acima para funcionar com jogos mais complexos. Testamos o estimador sob diferentes regras e, na maioria dos casos, mostrou forte concordância com os valores simulados. Isso destaca a vantagem do estimador: conseguimos estimar a duração de um jogo com regras diversas, o que, até onde pudemos acessar na literatura, não foi encontrado apenas com teoria das probabilidades.

? A fraqueza do estimador atualmente reside nas regras que levam a $\mathbb{E}(X)$ próximo de 0, uma vez que, conforme $\mathbb{E}[X] \to 0$, $\mathbb{E}[T] \to \pm\infty$.

3 Conclusão e Passos Seguintes

atenção

Os resultados obtidos indicam que o estimador proposto possui grande flexibilidade para diferentes configurações do jogo e mostra-se especialmente útil, pois as técnicas atuais não são capazes de fornecer um resultado teórico exato para as configurações de jogos propostas. Ademais, o estimador fornece estimativas mais precisas quando há maior circulação de dinheiro entre os jogadores. No entanto, observamos que o estimador tende a divergir rapidamente dos resultados simulados quando a esperança da variável aleatória que rege as regras do jogo aproxima-se de zero.

\$ X\$

Um segundo desafio identificado foi a complexidade computacional envolvida na simulação de jogos com muitas regras, isto é, quando a variável aleatória pode assumir um grande número de valores. Essa limitação impõe a necessidade de soluções mais eficientes para lidar com cenários de alta complexidade, o que será um obstáculo a ser superado no estudo do caso não homogêneo.

Um interessante caminho de abordagem que buscaremos explorar é a conexão entre passeios aleatórios e redes elétricas como descrito no livro de Snell. Desejamos descobrir se existem conexões entre o estimador proposto e fórmulas da física, além de outras abordagens para estudarmos passeios aleatórios, como fizemos com o emprego de equações de diferenças finitas.

4 Bibliografia → S.Rom

ANDĚL, J.; HUDECOVÁ, Š. Variance of the game duration in the gambler's ruin problem. {\it ~~**~~Statistics & Probability Letters~~**~~}, v. 82, n. 9, p. 1750–1754, 31 maio 2012.

EDWARDS, A. W. F. Pascal's Problem: The "Gambler's Ruin". {\it ~~**~~International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique~~**~~}, v. 51, n. 1, p. 73–79, 1983.

DOYLE, P. G.; J. LAURIE SNELL. {\it Random Walks and Electric Networks}. ? [s.l.] ~~**~~American Mathematical Soc.~~**~~, 1984.

CHAYES, V. et al. {\it Generalized Gambler's Ruin Problem}. ~~[s.l: s.n.]~~. Disponível em: ¡https://sites.math.rutgers.edu/ zeilberg/EM20/GamblersRuin.pdf . ?