

## ESTIMANDO A DURAÇÃO ESPERADA DE PASSEIOS ALEATÓRIOS

Eduardo Yukio Garrafa Ishihara  
Gustavo Silva Garone

Prof.<sup>a</sup> Dra. Elisabeti Kira

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo  
eduardoyukio.ishihara@usp.br

### Objetivos

A Ruína do Jogador é um dos mais conhecidos modelos de passeio aleatório, um processo estocástico markoviano com espaço de estados enumerável e barreiras absorventes. Nele, dois jogadores apostam seu dinheiro a cada rodada e, com base em uma distribuição de probabilidades, ganham ou perdem valores diversos. Passeios desse tipo possuem grande utilidade na modelagem estatística e aplicações em algoritmos computacionais [5]. Por isso, seu comportamento já foi amplamente estudado em sua forma mais simples (unitário, uniforme e em meio não aleatório), em especial quanto a probabilidade de ruína ou vitória [4]. Esse trabalho tem como objetivo estudar o tempo esperado até a ruína para passeios mais complexos, propondo métodos de estimar essa duração e avaliando-os por vias computacionais, assim expandindo o conhecimento acerca de passeios desse tipo e algumas de suas variações.

### Métodos

Iniciamos por uma estudo da literatura sobre a derivação analítica de passeios mais simples. Analisamos o cálculo da esperança e da variância da duração da Ruína do Jogador simples [1] na qual destacou-se o uso de sistemas de equações de diferenças finitas. Depois, desenvolvemos um primeiro estimador heurístico baseado numa analogia à velocidade média em Física, que funcionou para a maioria dos passeios não unitários. Definimos passeios não

unitários como aqueles em que os jogadores podem ganhar ou perder valores diferentes de R\$1,00 por rodada.

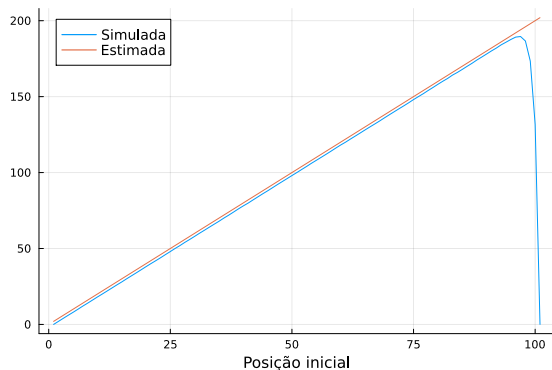
Uma vez que estes passeios não possuem resultado analítico (ou de difícil construção), avaliamos este estimador por simulações de Monte Carlo, com base em métodos propostos por Ritter [3], na linguagem de programação Python. Posteriormente, conforme utilizávamos regras de jogo que prolongavam muito as simulações e demandavam maior poder computacional, passamos a empregar a linguagem Julia, como recomendado por Godoy [2]. Refinamos o estimador para lidar com situações em que o empate entre os jogadores (não há troca de dinheiro na rodada) é possível.

Compreendidos os limites deste estimador, estendemos nossos estudos para passeios em  $\mathbb{Z}^d$ , como jogos com mais tipos de moeda. Resolvendo sistemas de equações computacionalmente por bibliotecas simbólicas, conseguimos resultados analíticos para passeios unitários, mas não necessariamente uniformes ou não aleatórios. Novos estimadores foram pensados e analisados para passeios não unitários, também em dimensões superiores e em meio não uniforme.

### Resultados

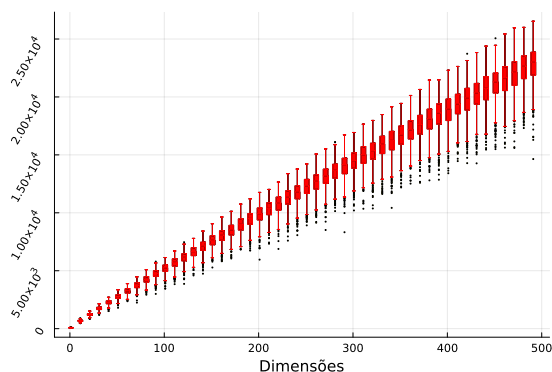
O estimador proposto mostrou-se eficaz para o caso unidimensional em meio uniforme, como mostra a Figura 1, e foi adaptado com sucesso ao caso não uniforme.

Figura 1: Comparação do estimador com 100.000 simulações por posição inicial



Em dimensões mais altas, constatou-se que a duração esperada do passeio só pode ser determinada numericamente, dada a explosão combinatória das equações envolvidas e, surpreendentemente, demonstrou crescimento linear conforme o número de dimensões aumenta a partir da 100<sup>a</sup> dimensão, como consta a Figura 2.

Figura 2: Passos simulados até fim do jogo com 1000 simulações em diversas dimensões.



Para o "passeio do foguete", em que o jogador não pode perder dinheiro, foram obtidas expressões teóricas em meios uniforme, não uniforme, em meios aleatórios e não aleatórios. Foi revelado que a complexidade cresce proporcionalmente ao número de estados possíveis. Em todos os casos, os estimadores se aproximaram

dos valores simulados, embora apresentem maiores desvios quando a esperança da variável de transição se aproxima de zero, o que denominamos jogos com pouco movimento assintótico esperado, ou quando o estado inicial está próximo das fronteiras.

## Conclusões

A Ruína do Jogador é um problema clássico de quase quatro séculos atrás. Ainda assim, mesmo munidos apenas da intuição, é possível para alunos da graduação explorarem novas perguntas e hipóteses, testá-las com ajuda dos recursos computacionais hoje abundantes para finalmente formalizá-las com rigor matemático. Esperamos que esse trabalho incentive outros alunos da graduação a explorar e reexplorar por si clássicos problemas matemáticos em busca de soluções para problemas modernos.

## Agradecimentos

Agradecemos, primeiramente, à Professora Elisabeti Kira pela confiança, pela compreensão e pelos ensinamentos ao orientar-nos durante a produção desse artigo e à Universidade de São Paulo (USP) pelo apoio financeiro concedido por meio do Programa Unificado de Bolsas.

## Referências

- [1] Jiří Anděl and Šárka Hudecová. Variance of the game duration in the gambler's ruin problem. 82(9):1750–1754.
- [2] William F. Godoy et al. Evaluating performance and portability of high-level programming models.
- [3] Frank E. Ritter et al. Determining the number of simulation runs. Springer.
- [4] S.M. Ross. *Introduction to Probability Models*. Academic Press.
- [5] S.M. Ross. *Markov Chain Monte Carlo Methods*. Academic Press.