Aproximações para a duração média de passeios aleatórios

Orientando: Gustavo Silva Garone

Orientadora: Elisabeti Kira

19 de agosto de 2025

Resumo

Inspirados na física, propusemos aproximações para a duração de passeios aleatórios diversos, em especial, os de difícil derivação analítica. Para testar as aproximações, utilizamos simulações de Monte Carlo na linguagem Julia. Analisamos o desempenho desta linguagem comparando-a com a linguagem Python. Com modelos (passeios) mais sofisticados, utilizamos recursos computacionais para solução de sistemas lineares na construção de novas aproximações. Descrevemos o uso de paralelismo e de outras ferramentas. Exibimos e analisamos os resultados obtidos.

1 Introdução

Neste artigo, estudaremos a duração de passeios aleatórios e suas aproximações. Temos como objetivo descrever modeleos de passeios como a "Ruína do Jogador" de Pascal, discutido em EDWARDS (1983), genericamente.

2 Modelando paseios aleatórios

Definição 2.1 (Modelo discreto)**.** Sejam $\boldsymbol{V}$ um produto cartesiano em $\mathbb{Z}^d$ de d vetores de dimensões $d_1, d_2, \dots d_d$ da forma $v_j = (0, 1, 2, \dots, d_j)$, $j = 1, 2, \dots d$, a em $\mathbb{Z}^d$ um vetor d-dimensional e $\mathbb{X} = \{X_v\}_{\forall v \in \boldsymbol{V}}$ um produto cartesiano de dimensão igual a $\boldsymbol{V}$ composto por vetores aleatórios de dimensão d em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. A ênupla $(\boldsymbol{V}, a, \mathbb{X})$ define um passeio aleatório $J(\boldsymbol{V}, a, \mathbb{X})$ descrito pela sequência $\{X_{S_0,1}, X_{S_1,2}, \dots X_{S_{t-1},t}\} = \{X_{v,i}\} i \geq 1$. Definem-se $S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_{\cdot,i}$ as posições do passeio no instante i baseado no início a e $X_{v,i}$ as "regras do jogo" na posição $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ e instante i. Seja $\tau = \min\{i : \exists j \in S_i \leq 0 \vee \exists k \in S_i \geq d_j,\ j = 1, 2, \dots, d\}$ a regra de parada do passeio.

Comentário 2.1. Em especial, se $X_{v,i} = X_{v',i}$ para todo $v \neq v'$, dizemos que o passeio está em meio uniforme (uniforme no espaço). Analogamente, se $X_{v,i} = X_{v,i'}$ para todo $i \neq i'$, dizemos que o passeio é uniforme no tempo.

Simplificaremos casos em meio uniforme escrevendo simplesmente X_i. Não trateremos de casos não uniformes no tempo neste artigo.

Para ajudar no entendimento deste modelo , oferecemos um exemplo:

Exemplo 2.1 (Ruína do Jogador bidimensional)**.** Considere um jogador apostando em um casino no lançamento de duas moedas honestas. A primeira moeda define se apostará seus dólares ou seus euros. A segunda moeda decide se ganhará ou perderá a jogada. No caso de derrota, deverá deixar um dólar ou um euro com o casino, enquanto ganha essa quantidade no caso de sucesso em sua aposta. Terminará o jogo quando atingir cem dólares ou cem euros, ou caso vá à ruína (seu saldo chegue em zero em alguma das moedas). O jogador começa com 50 dólares e 25 euros.

Podemos modelar esse jogo no modelo da Definição 2.1, utilizando da simplificação do Remark 2.1. Tome $\boldsymbol{V} = (v_1, v_2)$ com $v_1 = v_2 = (0, 1, \ldots, 100)$, $a = (50, 25)$ e

$$X = \begin{cases} (-1, 0), & 0.25 \\ (0, -1), & 0.25 \\ (1, 0), & 0.25 \\ (0, 1), & 0.25. \end{cases}$$

Note que é o mesmo para todo tempo i e todo estado v enquanto o jogo durar.

Após 5 jogadas, o jogo tomou o seguinte percurso:

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{V}, a, \boldsymbol{x}) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \\ &= \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, 1), (-1, 0)\}. \end{aligned}$$

Conforme a regra de parada τ, o jogo encerrar-se-á assim que um elemento de S_n - isto é, uma moeda (dólar ou euro) - chegar em zero ou cem. No Exemplo 2.1, é fácil ver que o jogo ainda não acabou, pois $S_5 = (49, 27)$.

Estamos interessados na duração esperada do jogo, ou seja, queremos encontrar $E(\tau)$. Abordaremos técnicas analíticas, computacionais e estimativas para este valor no restante deste artigo.

3 Aproximando durações de passeios aleatórios

Uma pergunta natural quando se discute aproximações é quanto sua utilidade. Se possível, é mais desejável utilizar resultados obtidos analiticamente, como, no exemplo da Ruína do Jogador clássica, os desenvolvidos em STERN (1975). Conforme os passeios (e os modelos) complicam-se, pode não ser possível, ou ser muito difícil, obter uma derivação analítica de $E(\tau)$.

Nos cenários em que não é prático o desenvolvimento analítico, soluções computacionais são buscadas. Estas soluções podem fornecer resultados teóricos corretos, como na solução de sistemas lineares extensos que abordaremos na [SESSÃO AQUI], ou aproximações pelo método de Monte Carlo, como aborda HARRISON (2010).

Ainda assim, a simulação também traz desvantagens. Como descrito em RITTER et al. (2011), um número considerável de simulações é necessário para garantir acurácia dos dados e estabilidade. Além disso, com modelos mais complexos, justamente os usados na resolução de problemas reais, estes problemas se agravam. Diante disso, vê-se justificável a busca de estimadores eficientes para a duração esperada de passeios aleatórios diversos.

3.1 Ruína do Jogador e variações

Na Ruína do Jogador,

4 Referências

EDWARDS, A. W. F. Pascal's Problem: The 'Gambler's Ruin'. **International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique**, v. 51, n. 1, p. 73–79, 1983.

HARRISON, R. L. Introduction To Monte Carlo Simulation. **AIP conference proceedings**, v. 1204, p. 17–21, 5 jan. 2010.

RITTER, F. E. et al. Determining the Number of Simulation Runs: Treating Simulations as Theories by Not Sampling Their Behavior. Em: ROTHROCK, L.; NARAYANAN, S. (Eds.). **Human-in-the-Loop Simulations: Methods and Practice**. London: Springer, 2011. p. 97–116.

STERN, F. Conditional Expectation of the Duration in the Classical Ruin Problem. **Mathematics Magazine**, v. 48, n. 4, p. 200–203, 1 set. 1975.