

Aproximações para a duração de passeios aleatórios

Orientando: Gustavo Silva Garone

Orientadora: Elisabeti Kira

17 de agosto de 2025

Resumen

Inspirados na física, propusemos aproximações para a duração de passeios aleatórios diversos, em especial, os de difícil derivação analítica. Para testar as aproximações, utilizamos simulações de Monte Carlo na linguagem Julia. Analisamos o desempenho desta linguagem comparando-a com a linguagem Python. Com modelos (passeios) mais sofisticados, utilizamos recursos computacionais para solução de sistemas lineares na construção de novas aproximações. Descrevemos o uso de paralelismo e de outras ferramentas. Exibimos e analisamos os resultados obtidos.

1. Introdução

Neste artigo, estudaremos a duração de passeios aleatórios e suas aproximações. Temos como objetivo descrever modelos de passeios como a “Ruína do Jogador” de Pascal, discutido em EDWARDS (1983), genericamente.

2. Modelando paseios aleatórios

Definição 2.1 (Modelo discreto). Sejam \mathbf{V} um produto cartesiano em \mathbb{Z}^d de d vetores de dimensões d_1, d_2, \dots, d_d da forma $v_j = (0, 1, 2, \dots, d_j)$, $j = 1, 2, \dots, d$, a em \mathbb{Z}^d um vetor d -dimensional e $\mathbb{X} = \{X_v\}_{v \in \mathbf{V}}$ um produto cartesiano de dimensão igual a \mathbf{V} composto por vetores aleatórios de dimensão d em (Ω, \mathcal{F}, P) . A ênupla $(\mathbf{V}, a, \mathbb{X})$ define um passeio aleatório $J(\mathbf{V}, a, \mathbb{X})$ descrito pela sequência $\{X_{S_0,1}, X_{S_1,2}, \dots, X_{S_{t-1},t}\} = \{X_{v,i}\}_{i \geq 1}$. Definem-se $S_n = a + \sum_{i=1}^n X_{v,i}$ as posições do passeio no instante i baseado no início a e $X_{v,i}$ as “regras do jogo” na posição $v = (v_1, v_2, \dots, v_d)$ e instante i . Seja $\tau = \min\{i : \exists j \in S_i \leq 0 \vee \exists k \in S_i \geq d_j, j = 1, 2, \dots, d\}$ a regra de parada do passeio.

Observación 2.1. Em especial, se $X_{v,i} = X_{v',i}$ para todo $v \neq v'$, dizemos que o passeio está em meio uniforme (uniforme no espaço). Analogamente, se $X_{v,i} = X_{v,i'}$ para todo $i \neq i'$, dizemos que o passeio é uniforme no tempo.

Simplificaremos casos em meio uniforme escrevendo simplesmente X_i . Não trataremos de casos não uniformes no tempo neste artigo.

Para ajudar no entendimento deste modelo admitivelmente complexo, oferecemos um exemplo:

Ejemplo 2.1 (Ruína do Jogador bidimensional). Considere um jogador apostando em um casino no lançamento de duas moedas honestas. A primeira moeda define se apostará seus dólares ou seus euros. A segunda moeda decide se ganhará ou perderá a jogada. No caso de derrota, deverá deixar um dólar ou um euro com o casino, enquanto ganha essa quantidade no caso de sucesso em sua aposta. Terminará o jogo quando atingir cem dólares ou cem euros, ou caso vá à ruína (seu saldo chegue em zero em alguma das moedas). O jogador começa com 50 dólares e 25 euros.

Podemos modelar esse jogo no modelo da Definição 2.1, utilizando da simplificação do Remark 2.1. Tome $\mathbf{V} = (v_1, v_2)$ com $v_1 = v_2 = (0, 1, \dots, 100)$, $a = (50, 25)$ e

$$R = \begin{cases} (-1, 0), & 0.25 \\ (0, -1), & 0.25 \\ (1, 0), & 0.25 \\ (0, 1), & 0.25. \end{cases}$$

Após 5 jogadas, o jogo tomou o seguinte percurso:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{V}, a, \mathbf{x}) &= \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\} \\ &= \{(1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, 1), (-1, 0)\}. \end{aligned}$$

Conforme a regra de parada τ , o jogo encerrar-se-á assim que um elemento de S_n , isto é, uma moeda (dólar ou euro) chegar em zero ou cem. No Ejemplo 2.1, é fácil ver que o jogo ainda não acabou, pois $S_5 = (24, 52)$.

Estamos interessados na duração esperada do jogo, ou seja, queremos encontrar $E(\tau)$. Abordaremos técnicas analíticas, computacionais e estimativas para este valor no restante deste artigo.

3. Referências

EDWARDS, A. W. F. [Pascal's Problem: The 'Gambler's Ruin'](#). **International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique**, v. 51, n. 1, p. 73-79, 1983.