

Estimating the duration of random walks

Eduardo Yukio Garrafa Ishihara Gustavo Silva Garone

Prof. Elisabeti Kira, Ph.D

Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo eduardoyukio.ishihara@usp.br

Objectives

A Ruína do Jogador é um passeio aleatório, um dos mais conhecidos modelos de processo estocástico Markoviano. Nele, um jogador aposta seu dinheiro a cada rodada e, com base em uma regra probabilística, ganha ou perde valores diversos. Modelos desse tipo possuem grande utilidade na modelagem estatística e aplicações em algoritmos computacionais [5]. Seu comportamento já foi amplamente estudado em sua forma mais simples - o jogador ganha R\$1,00 com probabilidade p e perde R\$1,00 com probabilidade 1 - p - em especial no que diz respeito à probabilidade de ruína ou vitória [4]. Esse trabalho tem como objetivo estudar o tempo esperado até a ruína para modelos mais complexos, propondo métodos de estimar essa duração e avaliando-os por vias computacionais, assim expandindo o conhecimento acerca desses processos e algumas de suas variações.

Materials and methods

Analisamos o cálculo da esperança e da variância da duração da Ruína do Jogador simples [1], na qual destacou-se o uso de sistemas de equações de diferenças finitas. Desenvolvemos um primeiro estimador heurístico baseado numa analogia à velocidade média em Física, que forneceu boas estimativas para a maioria dos passeios aleatórios, tanto os simples como aqueles em que os jogadores podem ganhar ou perder valores diferentes de $\rm R\$1,00$ por rodada. No caso do jogo honesto, isso é, quando o lucro

esperado em cada rodada é nulo, o estimador forneceu estimativas que desviaram significativamente dos valores calculados e simulados.

Para passeios com regras mais amplas que não possuem resultado analítico, avaliamos este estimador por simulações de Monte Carlo, com base em métodos propostos por Ritter [3], na linguagem de programação Python. Conforme considerávamos regras de jogo mais amplas e que prolongavam muito o tempo das simulações e demandavam maior poder computacional, passamos a empregar a linguagem Julia, como recomendado por Godoy [2]. Refinamos o estimador para lidar com situações de empate dentro da rodada.

Compreendidos os limites deste estimador para uma dimensão, estendemos nossos estudos para passeios em \mathbb{Z}^d . Resolvendo sistemas de equações computacionalmente por bibliotecas simbólicas, conseguimos resultados analíticos para passeios unitários e com diferentes regras probabilísticas. Novos estimadores foram propostos e analisados para passeios unitários ou não, os quais apresentaram boas estimativas quando o número de dimensões é suficientemente grande ou a regra probabilística do modelo não é patológica.

Results

The proposed estimator showed efficacy in predicting the duration of one-dimensional uniform walks, as depicted by Figure 1, and adapts successfully when the transition probability depends on the gambler's current fortune.



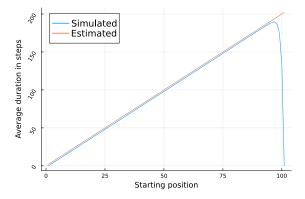


Figure 1: Comparing the estimator with 100.000 simulations per starting position

In higher dimensions the expected duration of the random walk must be obtained numerically due to the system of balance equations growing exponentially with the number of dimensions, rendering a closed form solution intractable. Still, a surprising result was revealed: once the dimensionality exceeds roughly the 100th dimension, the average time to game completion increases almost linearly with each additional dimension as shown in Figure 2.

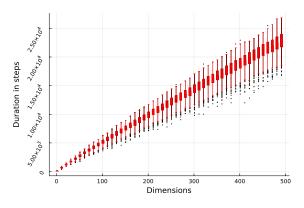


Figure 2: Simulated steps in 1.000 simulations em different dimensions.

In the particular model where the gambler cannot lose his money, we've obtained analytic expressions for the uniform, non-uniform, random and non-random variants. The complexity of the equations that describe the game's duration

grows proportionally to the state space's size. In all cases, the estimated values show great proximity to simulated ones, although greater discrepancies show when the game is close to fair - that is, when the gambler's expected earnings per round are close to 0 - or when the starting position is close to a boundary value.

Conclusions

The Gambler's Ruin is a classical math problem proposed almost four centuries ago. Through intuition, undergraduates can formulate fresh questions and hypothesis, explore them computationally, and finally developing rigorous mathematics. It is our hope that this work encourages other undergraduates to explore and reexplore classical math problems in search of solutions to modern day challenges.

The authors declare no conflict of interests. Eduardo Yukio conceived the theoretical framework behind the estimators and derived the paper's analytical results. Gustavo Garone provided computational support and implemented the simulations used for improving the estimators.

Acknowledgements

We would like to thank our advisor, Elisabeti Kira, for her patience, trust, and mentorship that enabled this project to be completed. We would also like to thank the University of São Paulo for financing our research through the Programa Unificado de Bolsas (PUB).

References

- [1] Jiří Anděl and Šárka Hudecová. Variance of the game duration in the gambler's ruin problem. 82(9):1750–1754.
- [2] William F. Godoy et al. Evaluating performance and portability of high-level programming models.
- [3] Frank E. Ritter et al. Determining the number of simulation runs. Springer.



- [4] S.M. Ross. *Introduction to Probability Models*. Academic Press.
- [5] S.M. Ross. *Markov Chain Monte Carlo Methods*. Academic Press.