

# Um Estimador para a Duração do Jogo da Ruína do Jogador

Orientando: Eduardo Yukio Garrafa Ishihara  
Orientadora: Elisabeti Kira

Março 2025

## 1 Introdução

Blaise Pascal propôs, no século XVII, um problema que viria a ser adaptado no problema da Ruína do Jogador atualmente conhecido (EDWARDS, 1983). No Jogo Simples da Ruína do Jogador, dois jogadores,  $A$  e  $B$  começam com  $a$  e  $b$  reais respectivamente e lançam uma moeda, não necessariamente equilibrada, para determinar o vencedor da rodada. Este, por sua vez, recebe 1 real do perdedor. O jogo termina quando um dos jogadores atinge um saldo de zero reais ou não pode honrar a quantia devida ao oponente.

Neste projeto, realizado em conjunto com Gustavo Silva Garone, estudamos os principais resultados conhecidos sobre o problema clássico, propomos novas regras de ganho e perda para o jogo. a esperança da duração do jogo clássico e com regras distintas. Consideramos os cenários em que as regras do jogo são fixadas durante toda a sua duração (caso homogêneo) e o cenário em que as regras variam de acordo com a fortuna dos jogadores (caso não homogêneo).

Ademais, propusemos um estimador para a duração médio do jogo simples e do jogo com regras de ganho e perda alternativas. Para validar os resultados obtidos com o estimador, utilizamos os resultados probabilísticos, quando disponíveis e, dada a dificuldade em obter resultados analíticos para casos além do simples, utilizamos algoritmos de simulações de Monte Carlo. Aqui, trazemos os resultados obtidos até o momento.

## 2 Atividades Desenvolvidas

Inicialmente, identificamos os principais resultados sobre o problema da Ruína do Jogador e suas variações. Encontramos publicações abordando até o quinto momento (centrado e não centrado) da duração do jogo (CHAYES, 2020), assim como variações de regras que incluem possibilidade de empate (ANDÉL; HUDECOVÁ, 2012).

### 2.1 O Jogo Simples

Consideramos o problema da Ruína do Jogador com as regras mais básicas, essencialmente um passeio aleatório simples sobre  $\mathbb{Z}$ . Sejam  $A$  e  $B$  jogadores que começam com  $a$  e  $b$  reais, respectivamente, de modo que a fortuna total em jogo seja  $N = a + b$ . Definimos  $p$  como a probabilidade do jogador  $A$  ganhar um real do jogador  $B$ ,  $q = 1 - p$ , como a probabilidade do jogador  $B$  ganhar um real do jogador  $A$ .

Definimos a variável aleatória  $X_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}^+$ , para descrever a quantia ganha pelo jogador  $A$  na  $i$ -ésima rodada, a qual chamaremos de “regra”. Podemos considerar  $X_i$ ,  $i \in \mathbb{Z}^+$ , independentes e com mesma distribuição de  $X$  dada por

$$X = \begin{cases} +1 & \mathbb{P}(X = +1) = p \\ -1 & \mathbb{P}(X = -1) = q \end{cases}$$

Adicionalmente, definimos  $T_{X,a,N}$ , como o número de rodadas até o fim do jogo dado que as regras são descritas por  $X$ , o jogador  $A$  começa com  $a$  reais e o jogo termina quando  $A$  chega a 0 ou  $N$  reais. Definimos  $\mu_{X,a,N} = \mathbb{E}[T_{X,a,N}]$ , ou seja, é o número esperado de rodadas que durará o jogo dado que as regras são descritas por  $X$ , o jogador  $A$  começou com  $a$  reais e o jogo termina quando  $A$  chega a 0 ou  $N$  reais.

### 2.1.1 Cálculo Teórico da Esperança

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_{X,a,N}] &= \mathbb{E}[T_{X,a,N}|X_1 = 1]\mathbb{P}(X_1 = 1) + \mathbb{E}[T_{X,a,N}|X_1 = -1]\mathbb{P}(X_1 = -1) \\
&= \mathbb{E}[T_{X,a,N}|X_1 = 1] p + \mathbb{E}[T_{X,a,N}|X_1 = -1] q \\
&= (\mathbb{E}[T_{X,a+1,N}] + 1) p + (\mathbb{E}[T_{X,a-1,N}] + 1) q \\
&= p \mathbb{E}[T_{X,a+1,N}] + q \mathbb{E}[T_{X,a-1,N}] + 1
\end{aligned}$$

$$\mu_{X,a,N} = p (\mu_{X,a+1,N}) + q (\mu_{X,a-1,N}) + 1$$

Trata-se, portanto, de uma equação de diferenças finitas não homogênea, cuja solução é a esperança desejada.

Tomemos  $\mu_{X,a,N} = \lambda^a$  e, temporariamente, desconsideraremos a constante 1 na equação de diferenças finitas.

$$\begin{aligned}
\lambda^a &= p \lambda^{a+1} + q \lambda^{a-1} \\
\Rightarrow p \lambda^2 - \lambda + q &= 0 \\
\Rightarrow \lambda_1 &= \frac{q}{p}; \lambda_2 = 1
\end{aligned}$$

Para  $\frac{p}{q} = 1$  :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

Temos a seguinte equação característica:

$$\mu_{X,a,N} = \alpha + \beta a + \gamma a^2$$

Tomemos  $\mu_{X,a,N} = \gamma a^2$ . Juntando as equações:

$$\begin{aligned}
\gamma a^2 &= \frac{1}{2} \gamma (a-1)^2 + \frac{1}{2} \gamma (a+1)^2 + 1 \\
\Rightarrow 2\gamma a^2 &= \gamma a^2 - 2\gamma a + \gamma + \gamma a^2 + 2\gamma a + \gamma + 2 \\
\Rightarrow \gamma &= -1
\end{aligned}$$

Aplicando as seguintes condições de fronteira:

$$\begin{cases} \mu_{X,0,N} = 0 \\ \mu_{X,N,N} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \begin{cases} \mu_{X,0,N} = 0 = \alpha + \beta 0 + \gamma 0^2 \\ \mu_{X,N,N} = 0 = \alpha + \beta N + \gamma N^2 \end{cases} \\
\Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = N \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\therefore \mu_{X,a,N} = Na - a^2 = a(N - a)$$

Para  $\frac{p}{q} \neq 1$  : Temos a seguinte equação característica:

$$\mu_{X,a,N} = \alpha \lambda_1^a + \beta \lambda_2^a + \gamma a$$

Tomemos  $\mu_{X,a,N} = \gamma a$ :

$$\begin{aligned}
\gamma a &= p \gamma (a+1) + q \gamma (a-1) + 1 \\
\Rightarrow \gamma &= \frac{1}{q-p}
\end{aligned}$$

Substituindo e usando as fronteiras:

$$\begin{aligned}
\mu_{X,a,N} &= \alpha \left(\frac{q}{p}\right)^a + \beta + \frac{a}{q-p} \\
\Rightarrow \begin{cases} \mu_{X,0,N} = 0 \\ \mu_{X,N,N} = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow \begin{cases} \mu_{X,0,N} = 0 = \alpha \left(\frac{q}{p}\right)^0 + \beta + \frac{0}{q-p} \\ \mu_{X,N,N} = 0 = \alpha \left(\frac{q}{p}\right)^N + \beta + \frac{N}{q-p} \end{cases} \\
\Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{N}{p-q} \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \\ \beta = -\frac{N}{p-q} \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_{X,a,N} &= \frac{N}{p-q} \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \left(\frac{q}{p}\right)^a - \frac{N}{p-q} \frac{1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} + \frac{a}{q-p} \\
&= \frac{a}{q-p} - \frac{N}{q-p} \left( \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \right)
\end{aligned}$$

$$\mu_{X,a,N} = \mathbb{E}[T_{X,a,N}] = \begin{cases} a(N-a) & \text{se } p = q = 1/2, \\ \frac{a}{q-p} - \frac{N}{q-p} \left( \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^a}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} \right) & \text{se } p \neq q \end{cases}$$

O resultado final é o mesmo que o obtido por outros métodos (STERN, 1975).

### 2.1.2 Estimador da Duração Média do Jogo Simples

Ainda que a esperança da duração do jogo simples possa ser descrita por uma expressão analítica, buscamos uma primeira intuição de um estimador para a duração do passeio simples exclusivamente para dar os passos iniciais em direção ao estudo de jogos com regras distintas. Retome que  $X_i$  descreve o resultado da  $i$ -ésima rodada, mas também pode ser interpretado como a movimentação de um ponto sobre a reta dos inteiros.  $\mathbb{E}[X]$  descreve, portanto, “o movimento médio” do ponto, é a tendência de movimento. Quando  $\mathbb{E}[X] > 0$ , a partícula tende à direita, ou o jogador  $A$  tende à riqueza. Quando  $\mathbb{E}[X] < 0$ , a partícula tende à esquerda, ou o jogador  $A$  tende à ruína.

Em cada rodada, interpretando-se  $\mathbb{E}[X]$  como o deslocamento médio do ponto num intervalo de tempo, tem-se que se trata de um paralelo com o conceito físico de “velocidade”. Ainda sob tal analogia,  $\mathbb{E}[T_{X,a,N}]$  pode ser interpretado como o “tempo médio” que a partícula leva para chegar a 0 ou a  $N$ . Ademais,  $a$  ou  $N - a$  são a “distância” a ser percorrida, é o espaço entre o ponto inicial da partícula e as fronteiras. Por fim, da física, emprestamos a seguinte equação da velocidade média:

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v}$$

Substituindo os termos pelos “paralelos” construídos com os elementos do Problema da Ruína do Jogador, propomos o seguinte estimador para a duração média do jogo com regras  $X$ , começo com  $a$  reais e  $N$  reais em aposta:

$$\widehat{\mathbb{E}}[T_{X,a,N}] = \begin{cases} \frac{N-a}{\mathbb{E}[X]} & \text{se } \mathbb{E}[X] > 0 \\ \left| \frac{a}{\mathbb{E}[X]} \right| & \text{se } \mathbb{E}[X] < 0 \end{cases} \quad (1)$$

Diferenciamos em casos, pois quando a tendência é negativa, a distância a ser percorrida é  $a - 0 = a$ . Quando a tendência é positiva, por sua vez, a partícula começa em  $a$  e o destino é  $N$ , daí temos que a

“distância” é  $N - a$ . Quando  $\mathbb{E}[X] = 0$ , a partícula não tem tendência. Sob a interpretação de movimento, é como se ela estivesse parada, por isso o estimador não é definido sob essa circunstância. Ademais, note que a interpretação física força o jogo a deixar de assumir valores inteiros, o que gera um pequeno desvio do valor verdadeiro.

Embora tenhamos os resultados analíticos, Garone desenvolveu um algoritmo para realizar as simulações de Monte Carlo desse modelo. Para cada ponto dos gráficos aqui apresentados, foram realizadas 10.000 simulações do problema da ruína do jogador sob os parâmetros adequados e utilizamos a média aritmética de todas elas. As simulações foram feitas utilizando a linguagem de programação *Julia*, pois o primeiro protótipo de algoritmo, feito em *Python*, consumia muito tempo para realizar as simulações desejadas (GARONE, 2025).

Abaixo, apresentamos os resultados do estimador para o jogo simples. Primeiro, variamos a probabilidade de vitória do jogador  $A$  em cada rodada e, em seguida, variamos a quantia inicial do jogador  $A$ .

**Gráfico 1: Tempo médio do jogo simples ( $X$ ) com  $N = 100$ ,  $a = 50$  e  $p$  variando de 0.01 a 0.99 com incremento de 0.01. Comparação dos valores teóricos, simulados e estimados**

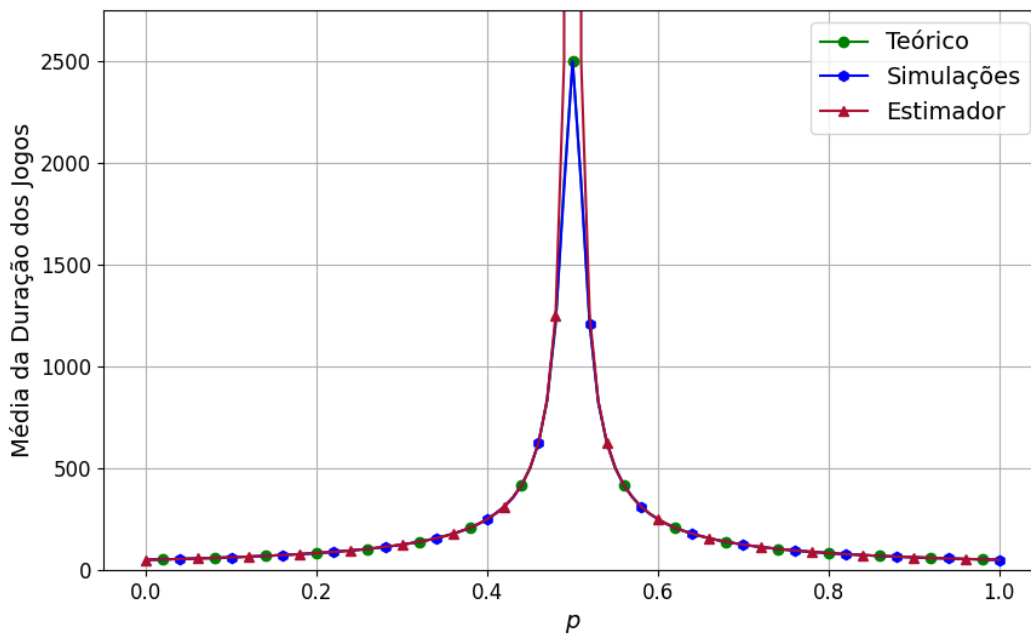
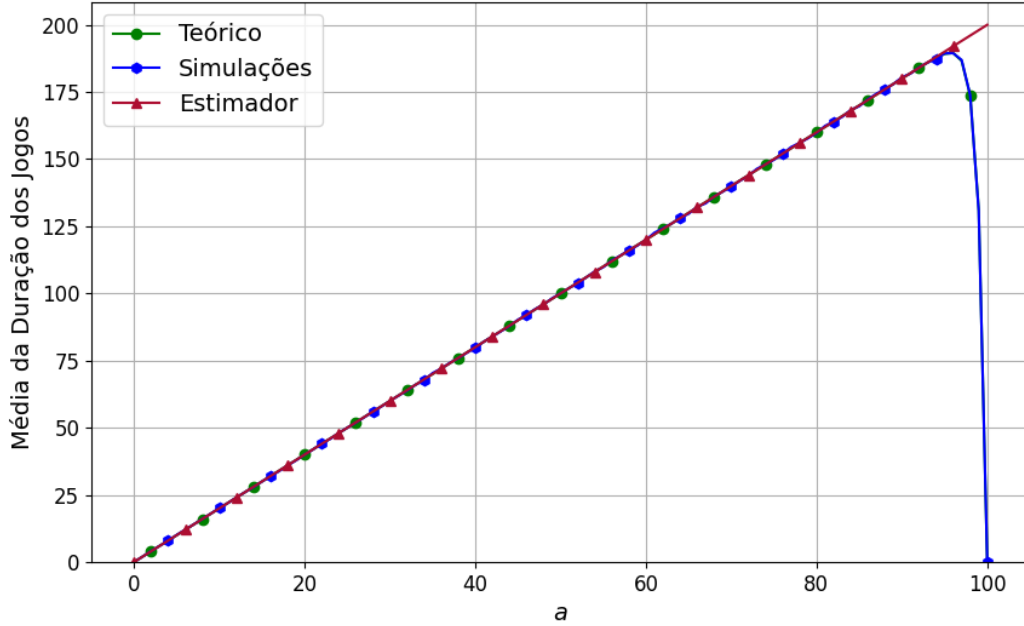


Gráfico 2: Tempo médio do jogo simples ( $X$ ) com  $N = 100$ ,  $p = 0.25$  e  $a$  variando de 1 a 100 com incremento de 1. Comparação dos valores teóricos, simulados e estimados



Note que, conforme previsto, o estimador apresenta um desvio significativo conforme  $\mathbb{E}[X]$  aproxima-se de 0, isso é, conforme  $p$  aproxima-se de 0.5. Analiticamente, temos que tal fato deve-se à divisão por um número muito próximo de 0. Mais discussões sobre tal problema estarão presentes na seção final.

## 2.2 O Jogo com Novas Regras

Na literatura, todos os casos analisados até então determinam que os jogadores recebem ou perdem exclusivamente a quantia de 1 real. Propomos, portanto, uma alternativa ao Jogo Clássico. Neste modelo, em cada rodada, os jogadores podem ganhar ou perder uma quantia não necessariamente limitada a 1 real.

Como exemplo, trazemos o jogo em que, em cada rodada, o jogador  $A$  ganha 3 reais com probabilidade  $p$ , 2 reais com probabilidade  $0.8 - p$  e perde 3 reais com probabilidade 0.2. Ou ainda, com a notação de variável aleatória:

$$Y = \begin{cases} +3 & \mathbb{P}(Y = +3) = p \\ +2 & \mathbb{P}(Y = +2) = 0.8 - p \\ -3 & \mathbb{P}(Y = -3) = 0.2 \end{cases}$$

### 2.2.1 Estimador da Duração Média do Jogo com Regras Alternativas

Para o caso de Jogos com Regras Alternativas, o mesmo estimador pode ser usado para produzir estimativas da duração média do jogo sob regras alternativas. O estimador mostra-se particularmente necessário, pois Uma solução analítica para tais casos é especialmente difícil, o que ocorre pelo fato de tornar-se necessário encontrar soluções de equações polinomiais de graus significativamente altos e os sistemas não lineares a serem resolvidos tornam-se exponencialmente mais trabalhosos.

Temos, então, que  $\mathbb{E}[Y] = p + 1$ . Uma vez que  $p \in [0, 1]$ ,  $\mathbb{E}[Y] > 0$ . Interpreta-se que tal jogo favorece o jogador  $A$  para qualquer  $p$  escolhida. Ademais, como  $\mathbb{E}[Y] \neq 0$ , nenhum valor de  $p$  gerará uma diferença significativa por conta da “tendência de ficar parado”. Derivado de (1), tem-se, portanto, o seguinte estimador para a duração média do jogo com regras  $Y$ , começo com  $a$  reais e  $N$  reais em aposta:

$$\widehat{\mathbb{E}}[T_{Y,a,N}] = \frac{N - a}{\mathbb{E}[Y]} \quad (2)$$

Abaixo, trazemos os resultados do estimador para o jogo definido nessa seção. Primeiro, variamos a probabilidade de vitória do jogador  $A$  em cada rodada e, em seguida, variamos a quantia inicial do jogador  $A$ .

Gráfico 1: **Tempo médio do jogo alternativo ( $Y$ ) com  $N = 100$ ,  $a = 50$  e  $p$  variando de 0.01 a 0.8 com incremento de 0.01. Comparação dos valores teóricos, simulados e estimados**

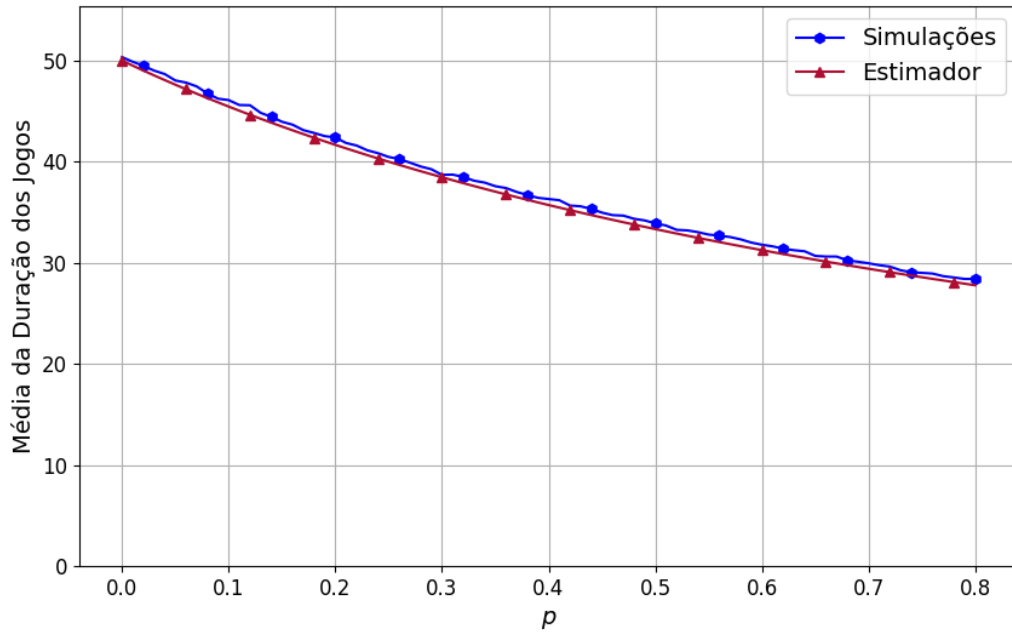
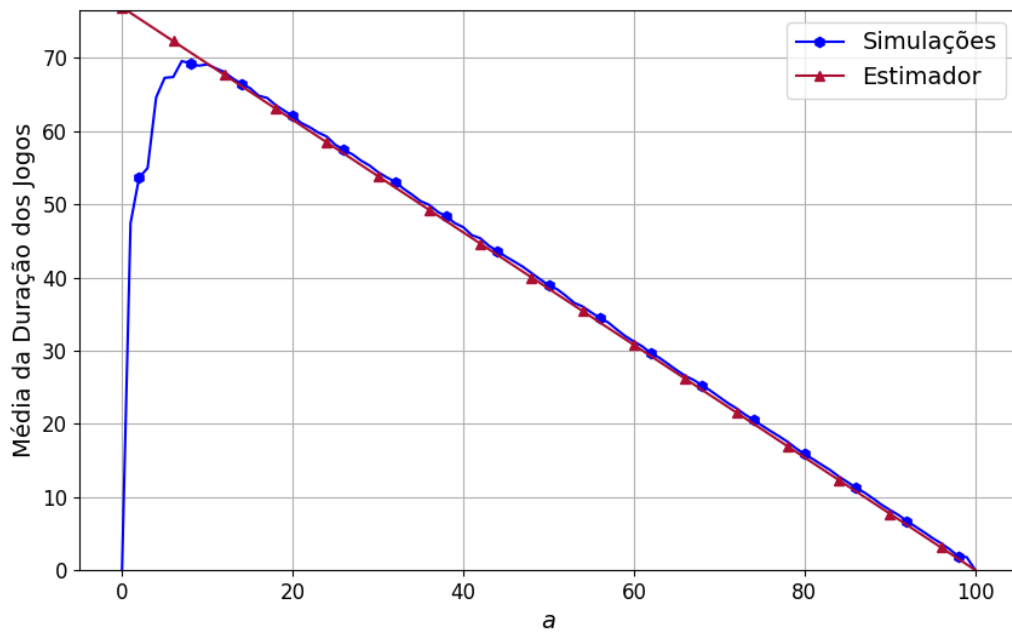


Gráfico 2: **Tempo médio do jogo alternativo ( $Y$ ) com  $N = 100$ ,  $p = 0.25$  e  $a$  variando de 1 a 100 com incremento de 1. Comparação dos valores teóricos, simulados e estimados**



Uma vez que, para todos os valores de  $p$  ou  $a$  abordados nos gráficos,  $\mathbb{E}[Y] \neq 0$ , não há desvio significativo provocado pela “falta de tendência de movimento” da partícula. Todavia, é evidente que, quando a fortuna inicial  $a$  é próxima de 0, o estimador desvia fortemente dos valores simulados. Tal fato ocorre, pois o estimador não é capaz de contemplar os casos em que o jogador vai à falência nas primeiras rodadas, o que contraria sua tendência de alcançar uma fortuna de  $N$  reais.

### 3 Conclusão e Passos Seguintes

Os resultados obtidos indicam que o estimador proposto possui grande flexibilidade para diferentes configurações do jogo e mostra-se especialmente útil, pois as técnicas atuais não são capazes de fornecer um resultado teórico exato para as configurações de jogos propostas. Ademais, o estimador fornece estimativas mais próximas do valor teórico ou simulado quando há maior circulação de dinheiro entre os jogadores. No entanto, observamos que o estimador tende a divergir fortemente dos resultados simulados quando a esperança da variável aleatória ( $X$  ou  $Y$ ) que rege as regras do jogo aproxima-se de zero ou quando  $a$  está próximo das fronteiras 0 e  $N$ .

Também foi identificado que a complexidade computacional envolvida na simulação de jogos com muitas regras é muito grande, isto é, quando  $Y$  pode assumir um grande número de valores. Esta limitação impõe a necessidade de soluções mais eficientes para lidar com cenários de alta complexidade, o que será um obstáculo a ser superado no estudo do caso não homogêneo.

Um interessante caminho de abordagem que buscaremos explorar é a conexão entre passeios aleatórios e redes elétricas como descrito por DOYLE & SNELL (1984). Desejamos descobrir se existem conexões entre o estimador proposto e fórmulas da física, além de outras abordagens para estudarmos passeios aleatórios, como fizemos com o emprego de equações de diferenças finitas.

Atualmente, estamos trabalhando em um estimador para quando  $\mathbb{E}[X]$  é próximo de 0 e em estimador para a duração média do jogo que sejam capazes de compensar os valores de  $a$  fronteiros, isso é, próximos de 0 ou  $N$ .

### 4 Bibliografia

EDWARDS, A. W. F. Pascal’s Problem: The ‘Gambler’s Ruin’. **International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique**, v. 51, n. 1, p. 73–79, 1983.

CHAYER, V. et al. **The Gambler’s Ruin Problem**. Disponível em: <https://sites.math.rutgers.edu/~zeilberg/EM20/GamblersRuin.pdf>. Acesso em: 08 fev. 2025.

ANDĚL, J.; HUDECOVÁ, Š. Variance of the game duration in the gambler’s ruin problem. **Statistics & Probability Letters**, v. 82, n. 9, p. 1750–1754, 2012.

STERN, F. Conditional Expectation of the Duration in the Classical Ruin Problem. **Mathematics Magazine**, v. 48, n. 4, p. 200–203, 1 set. 1975

GARONE, G. Avaliação de um estimador para a duração média do jogo da Ruína do Jogador por simulações de Monte Carlo. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2025.

DOYLE, P. G.; SNELL, J. L. (Eds.). **Random Walks and Electric Networks**. [s.l.] American Mathematical Soc., 1984.