

ESTIMANDO A DURAÇÃO ESPERADA DE PASSEIOS ALEATÓRIOS

Eduardo Yukio Garrafa Ishihara
Gustavo Silva Garone

Prof.^a Dra. Elisabeti Kira

Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo
eduardoyukio.ishihara@usp.br

Objetivos

A Ruína do Jogador é um dos mais conhecidos modelos de passeio aleatório, um processo estocástico markoviano com espaço de estados enumerável e barreiras absorventes. Nele, dois jogadores apostam seu dinheiro a cada rodada e, com base em uma distribuição de probabilidades, ganham ou perdem valores diversos. Passeios desse tipo possuem grande utilidade na modelagem estatística e aplicações em algoritmos computacionais [1]. Por isso, seu comportamento já foi amplamente estudado em sua forma mais simples (unitário, uniforme e em meio não aleatório), em especial quanto a probabilidade de ruína ou vitória [5]. Esse trabalho tem como objetivo estudar o tempo esperado até a ruína para passeios mais complexos, propondo métodos de estimar essa duração e avaliando-os por vias computacionais, assim expandindo o conhecimento acerca de passeios desse tipo e algumas de suas variações.

Métodos

Iniciamos por uma estudo da literatura sobre a derivação analítica de passeios mais simples. Analisamos o cálculo da esperança e da variância da duração da Ruína do Jogador simples [2] na qual destacou-se o uso de sistemas de equações de diferenças finitas. Depois, desenvolvemos um primeiro estimador heurístico baseado numa analogia à velocidade média em Física, que funcionou para a maioria dos passeios não unitários. Definimos passeios não

unitpariso como aqueles em que os jogadores podem ganhar ou perder valores diferentes de R\$1,00 por rodada.

Uma vez que estes passeios não possuem resultado analítico (ou de difícil construção), avaliamos este estimador por simulações de Monte Carlo, com base em métodos propostos por Ritter [4], na linguagem de programação Python. Posteriormente, conforme utilizávamos regras de jogo que prolongavam muito as simulações e demandavam maior poder computacional, passamos a empregar a linguagem Julia, como recomendado por Godoy [3]. Refinamos o estimador para lidar com situações em que o empate entre os jogadores (não há troca de dinheiro na rodada) é possível.

Compreendidos os limites deste estimador,

Resultados

O primeiro estimador, proposto para casos não unitários, apresentou resultados muito próximos dos simulados, como exige a Figura 1.

O estimador proposto mostrou-se eficaz para o caso unidimensional em meio uniforme e foi adaptado com sucesso ao caso não uniforme. Em dimensões mais altas, constatou-se que a esperança do tempo de ruína só pode ser determinada numericamente, dada a explosão combinatória das equações envolvidas e, demonstrou crescimento linear conforme o número de dimensões aumenta a partir da 50^a dimensão. Para o passeio do foguete, foram obtidas expressões teóricas em meios uniforme, não uniforme, em meios aleatórios e não aleatórios.

Foi necessário o uso de computadores para obter valores numéricos dos casos aleatórios não uniformes, revelando que a complexidade cresce proporcionalmente ao número de estados possíveis. Em todos os casos, os estimadores se aproximaram dos valores simulados, embora apresentem maiores desvios quando a esperança da variável de transição se aproxima de zero ou quando o estado inicial está próximo das fronteiras.

Conclusões

O estudo demonstrou que o estimador proposto é uma ferramenta versátil para analisar a duração média da ruína do jogador em diferentes configurações, especialmente quando resultados teóricos são inviáveis. A extensão para o passeio do foguete mostrou que modelos alternativos podem ser tratados dentro do mesmo arcabouço metodológico. No entanto, a análise em altas dimensões e em meios aleatórios não uniformes permanece um desafio, reforçando a necessidade de abordagens computacionais e de futuros refinamentos do estimador.

Referências

- [1] *Markov Chain Monte Carlo Methods*, pages 260–265. Academic Press.
- [2] Jiří Anděl and Šárka Hudecová. Variance of the game duration in the gambler's ruin problem. 82(9):1750–1754.
- [3] William F. Godoy, Pedro Valero-Lara, T. Elise Dettling, Christian Trefftz, Ian Jorquera, Thomas Sheehy, Ross G. Miller, Marc Gonzalez-Tallada, Jeffrey S. Vetter, and Valentin Churavy. Evaluating performance and portability of high-level programming models: Julia, python/numba, and kokkos on exascale nodes. In *2023 IEEE International Parallel and Distributed Processing Symposium Workshops (IPDPSW)*, pages 373–382.
- [4] Frank E. Ritter, Michael J. Schoelles, Karen S. Quigley, and Laura Cousino Klein. Determining the number of simulation runs: Treating simulations as theories by not sampling

their behavior. In Ling Rothrock and S. Narayanan, editors, *Human-in-the-Loop Simulations: Methods and Practice*, pages 97–116. Springer.

- [5] S.M. Ross. *Introduction to Probability Models*. Academic Press.