Em teoria de probabilidades, conhecemos a medida de probabilidade, logo, fazemos descrições probabilísticas.

$$(\Omega, \mathscr{A}, P) \xrightarrow{\text{X}} (\mathbb{R}, \mathscr{B}, P_X)$$

Na prática, contudo, não conhecemos a medida P.

Abordagem Clássica

Definimos então uma família de medidas de probabilidades que possivelmente descrevem o comportamento aleatório dos dados.

O *Modelo Estatístico* é definido pela trinca

$$(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$$

em que Ω é o espaço amostral (evento certo), $\mathscr{A}$ é a Probabilidade > Sigma álgebra, uma família de subconjuntos ou eventos em Ω e $\mathscr{P}$ é uma família de medidas de probabilidade que possivelmente descrevem o comportamento aleatório dos dados ou eventos sobre investigação.

Modelo Estatístico Paramétrico

Se $\mathscr{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$, em que $\Theta \subseteq \mathbb{R}^P$ e $p \in \mathbb{N}$, então dizemos que $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ é um modelo estatístico ***Paramétrico*.

Caso não exista $\Theta \subseteq \mathbb{R}^P$ fixo, então dizemos que o modelo é não-paramétrico.
Obs: Θ é o espaço paramétrico e θ é o vetor de parâmetros. θ Não* é variável aleatória, apenas indexa as medidas de probabilidade.

Exemplos

Exemplo de Bernoulli

Considere um Ensaio de Bernoulli

$$\Omega = \{S, F\}, \mathscr{A} = 2^\Omega$$

Temos algum conhecimento prévio que sugere que as probabilidades de sucesso podem ser $0.1, 0.5, 0.9$

Nesse caso,

$$\mathscr{P} = \{P_1, P_2, P_3\}$$

em que

$$\begin{cases} P_1(\{S\}) = 0.1;\ P_1(\{F\}) = 0.9;\ P_1(\Omega) = 1 \\ P_2(\{S\}) = 0.5;\ P_2(\{F\}) = 0.5;\ P_2(\Omega) = 1 \\ P_3(\{S\}) = 0.9;\ P_3(\{F\}) = 0.1;\ P_3(\Omega) = 1 \end{cases}$$

Observe que

$$\mathscr{P} = \{P_\theta : \theta \in \Theta\}$$

em que $\Theta = \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{R}$
Portanto, $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ é um modelo paramétrico.

Exemplo de Exponencial

Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, \omega = \text{S} \\ 0, c.\,c. \end{cases}$$

$$E_\theta(X) = \sum_{x=0}^{1} x P_\theta(X = x)$$

$$\begin{cases} \theta = 1 \Rightarrow E_1(X) = 0.1 \\ \theta = 2 \Rightarrow E_2(X) = 0.5 \\ \theta = 3 \Rightarrow E_3(X) = 0.9 \end{cases}$$

Seja $\Omega = (0, \infty)$ e $\mathscr{A}$ uma sigma-álgebra de Ω (Sigma-Álgebra de Borel)
Ω representa o tempo até a ocorrência de um evento (uma reclamação, por exemplo)
Temos conhecimento prévio de que as funções densidade de probabilidade que possivelmente descrevem esse evento são:

$$f_1(\omega) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1\omega}, \omega > 0 \\ 0, c.\,c. \end{cases}$$

$$f_2(\omega) = \begin{cases} 2\mathrm{e}^{-2\omega}, \omega > 0 \\ 0, c.\,c. \end{cases}$$

$$f_3(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\omega}, \omega > 0 \\ 0, c.\,c. \end{cases}$$

$$f_4(\omega) = \begin{cases} \frac{1}{10}\mathrm{e}^{-\frac{1}{10}\omega}, \omega > 0 \\ 0, c.\,c. \end{cases}$$

e Ps,

$$P_1(A) = \int_A f_1(\omega)d\omega$$
$$P_2(A) = \int_A f_2(\omega)d\omega$$
$$P_3(A) = \int_A f_3(\omega)d\omega$$
$$P_4(A) = \int_A f_4(\omega)d\omega$$

Dessa forma,

$$P_\theta = \int_A f_\theta(\omega)d\omega, \omega \in \Omega$$

e $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$
Seja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$X(\omega) = \omega$$

Note que

$$E_\theta(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_\theta(x)dx, \theta \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$E_\theta(X) = \begin{cases} 1,\ \theta = 1 \\ \frac{1}{2},\ \theta = 2 \\ 2,\ \theta = 3 \\ 10,\ \theta = 4 \end{cases}$$

Principais Modelos Estatísticos

Modelo Estatístico de Bernoulli

Dizemos que X é uma variável aleatória com modelo de Bernoulli se, e somente se,

$$P_\theta(X = x) = \begin{cases} \theta^x \cdot (1-\theta)^{1-x}, x \in \{0, 1\} \\ 0, x \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

em que $\theta \in \Theta$ e $\Theta = (0, 1) \subseteq \mathbb{R}$
O parâmetro é a probabilidade de sucesso

$$\begin{cases} E_\theta(X) = \theta \\ \mathrm{Var}_\theta(X) = \theta(1-\theta) \\ P_\theta(X = 1) = \theta, P_\theta(X = 0) = 1 - \theta \end{cases}$$

Modelo Estatístico Binomial

Dizemos que X é uma variável aleatória com modelo binomial se, e somente se,

$$P_\theta(X=x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \cdot \theta^x \cdot (1-\theta)^{n-x}, x \in \{0,1,\dots,n\} \\ 0, x \notin \{0,1,\dots,n\} \end{cases}$$

em que n é conhecido e fixado previamente, θ é a probabilidade de sucesso (parâmetro do modelo) e $\Theta = (0,1)$ é o espaço paramétrico

$$\begin{cases} E_\theta(X) = n\theta \\ \mathrm{Var}_\theta(X) = n\theta(1-\theta) \\ P_\theta(X=0) = (1-\theta)^n, \dots, P_\theta(X=n) = \theta^n \end{cases}$$

Modelo Estatístico Geométrico

Dizemos que X é uma variável aleatória com modelo estatístico geométrico se, e somente se,

$$P_\theta(X=x) = \begin{cases} \theta(1-\theta)^{x-1}, x \in \{1,\dots\} \\ 0, x \notin \{1,\dots\} \end{cases}$$

em que θ é o parâmetro do modelo (probabilidade de sucesso) e $\Theta = (0,1)$ é o espaço paramétrico

$$\begin{cases} E_\theta(X) = \frac{1}{\theta} \\ \mathrm{Var}_\theta(X) = \frac{1-\theta}{\theta^2} \end{cases}$$

Modelo de Poisson

Dizemos que X é uma variável aleatória com modelo estatístico Poisson, se, e somente se,

$$P_\theta(X=x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\theta} \cdot \frac{\theta^x}{x!}, x \in \{0,1,\dots\} \\ 0, x \notin \{0,1,\dots\} \end{cases}$$

em que θ é a taxa média de ocorrência do evento (parâmetro do modelo) e $\Theta = (0,\infty)$, o espaço paramétrico.

$$\begin{cases} E_\theta(X) = \theta \\ \mathrm{Var}_\theta(X) = \theta \end{cases}$$

Modelo Multinomial

Dizemos que X é um Vetor Aleatório com modelo estatístico Multinomial se, e somente se a função de probabilidade é

$$P_\theta(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1!x_2!\dots x_k!} \cdot \theta_1^{x_1} \cdot, \cdots, \cdot \theta_k^{x_n} & x_1 + \cdots + x_k = n \\ 0, c.c \end{cases}$$

em que $\theta_1 + \cdots + \theta_k = 1$ e $0 \leq \theta_i \leq 1$, $\forall i = 1, 2, \dots, k$,
$\Theta = \{(\theta_1, , \dots, \theta_k) \in \mathbb{R}^k : 0 \leq \theta_i \leq 1, i = 1, \dots, k, \theta_1 + \cdots + \theta_k = 1\}$

$$\begin{cases} E_\theta(X_i) = n\theta_i \\ \text{Var}_\theta(X_i) = n\theta i(1 - \theta_i) \\ \text{Cov}(X_i X_j) = -n\theta_i\theta_j \end{cases}$$

Esse modelo tem aplicação em modelos de linguagem como o ChatGPT. (k como tamanho do vocabulário, $n = 1$, $\theta_1 =$ probabilidade de escolher o primeiro elemento do vocabulário e assim por diante.)

Modelo Uniforme contínuo

Dizemos que X é uma variável aleatória contínua com modelo estatístico Uniforme em $(\theta_1, \theta_2), \theta_2 > \theta_1$, se, e somente se, a sua Função Densidade de Probabilidade

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta_2 - \theta_1}, x \in (\theta_1, \theta_2) \\ 0, c. c. \end{cases}$$

em que $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ vetor, $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^2 : \theta_2 > \theta_1\}$

$$\begin{cases} E_\theta(X) = \frac{b+a}{2} \\ \text{Var}_\theta(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases}$$

$$X \sim U(\theta_1, \theta_2), \theta = (\theta_1, \theta_2) \text{ Vetor de Parâmetros}$$

Modelo Exponencial

Dizemos que X é uma variável aleatória contínua com modelo estatístico Exponencial se, e somente se, a sua Função Densidade de Probabilidade é dada por

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta e^{-\theta x}, x > 0 \\ 0, c. c. \end{cases}$$

em que $\theta > 0, \Theta = \{\theta \in \mathbb{R} : \theta > 0\}$

$$\begin{cases} E_\theta(X) = \frac{1}{\theta} \\ \text{Var}_\theta(X) = \frac{1}{\theta^2} \end{cases}$$

$$X \sim \text{Exp}(\theta), \theta > 0$$

Modelo Normal

Dizemos que X é uma variável aleatória contínua com modelo estatístico normal com média μ e variância σ^2 se, e somente se, a sua Função Densidade de Probabilidade é dada por

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, x \in \mathbb{R}$$

em que $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \{(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+\}$

$$\begin{cases} E_\theta(X) = \mu \\ \mathrm{Var}_\theta(X) = \sigma^2 \end{cases}$$

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \theta = (\mu, \sigma^2) \text{ Vetor de Parâmetros}$$