Se $Z \sim N(0,1)$, então $Z^2 \sim \chi^2$, como provado por transformação de variáveis aleatórias.

Se $W \sim \chi^2_k$, então sua função densidade de probabilidade é dada por

$$\begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2}) \cdot 2^{\frac{k}{2}}} \cdot w^{\frac{k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{1}{2}w}, & w > 0 \\ 0, cc \end{cases}$$

Sendo assim,

$$\begin{cases} E(W) = k \\ \text{Var}(W) = 2k \end{cases}$$

Se $Z_1, Z_{2,}, \dots, Z_N \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$, então

$$Z_1^2 + \dots + Z_n^2 \sim \chi^2_n$$

Prova por função característica

Se $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, então

$$\frac{(X_1 - \mu)^2 + \dots + (X_n - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$$

Se $X_1, \dots, X_n \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, então

$$\frac{(X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

Ademais, se $Y \sim \chi^2_\nu$, então

$$\frac{Y - \nu}{\sqrt{2\nu}} \overset{a}{\approx} N(0,1)$$

para $\nu > 30$