O erro quadrático médio (EQM) do Estimador $T(X_1,\dots,X_n)$ com respeito a $g(\theta)$ é definido por

$$EQM(T, g(\theta)) = E_{\theta}((T(X_1, \dots, X_n) - g(\theta)^2)$$

Obs.:

Se $T(X_1,\ldots,X_n)$ for não viciado para g(heta), então $\mathrm{EQM}(T,g(heta))=\mathrm{Var}_{ heta}(T(X_1,\ldots,X_n))orall heta\in\Theta$

Propriedades do EQM

Seja $T(X_1,\ldots,X_n)$ um estimador para g(heta), seja $\mu_t=E_{ heta}(T(X_1,\ldots,X_n))$

$$\begin{split} & \mathrm{EQM}(T, g(\theta)) \\ &= E_{\theta}[(T(X_{1}, \ldots, X_{n}) - \mu_{t} + \mu_{t} - g(\theta))^{2}] \\ &= E_{\theta}[(T(X_{1}, \ldots, X_{n}) - \mu_{t}) + (\mu_{t} - g(\theta)))^{2}] \\ &= E_{\theta}[(T(X_{1}, \ldots, X_{n}) - \mu_{t})^{2} + 2(T(X_{1}, \ldots, X_{n}) - \mu_{t})(\mu_{t}g(\theta)) + (\mu_{t} - g(\theta))^{2}] \\ &= \underbrace{E_{\theta}[(T(X_{1}, \ldots, X_{n}) - \mu_{t})^{2}] + 2(\mu_{t} - g(\theta))}_{\mathrm{Var}_{\theta}(T(X_{1}, \ldots, X_{n}) - \mu_{t})^{2}} + (\mu_{t} - g(\theta))^{2} \\ &= \mathrm{Var}_{\theta}(T(X_{1}, \ldots, X_{n})) + (\mu_{t} - g(\theta))^{2} \end{split}$$

Portanto,

$$EQM(T, g(\theta)) = Var_{\theta}(T(X_1, \dots, X_n)) + (\mu_t - g(\theta))^2$$

Viés

Denotamos de viés de $T(X_1,\ldots,X_n)$ com respeito a g(heta) por

$$\mathrm{Vi\acute{e}s}(T,g(heta)) = E_{ heta}(T(X_1,\ldots,X_n)) - g(heta), orall heta \in \Theta$$

Dessa forma, temos que

$$\mathrm{EQM}(T,g(heta)) = \mathrm{Var}_{ heta}(T(X_1,\ldots,X_n)) + [\mathrm{Vi\acute{e}s}(T,g(heta))]^2$$

Exemplo

Seja (X_1,\ldots,X_n) uma amostra aleatória, ou seja, independentes e identicamente distribuídas (iid), de $X\sim \mathrm{Ber}(\theta)$ em que $\theta\in\Theta=(0,1)$. Calcule o viés e o EQM de \bar{X}_n com respeito a $g(\theta)=P_{\theta}(X=1)$

O estimador é, então, $T(X_1,\dots,X_n)=\bar{X}_n=rac{X_1+\dots+X_n}{n}$ para $g(heta)=P_{ heta}(X=1)= heta$ (pelo modelo de Bernoulli).

$$egin{align} E_{ heta}(ar{X}_n) &= E_{ heta}\left(rac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i
ight) = rac{1}{n}\sum_{i=1}^n E_{ heta}(X_i) \stackrel{id.dist.}{\Rightarrow} \ E_{ heta}(ar{X}_n) &= rac{1}{n}\sum_{i=1}^n E_{ heta}(X), orall heta \in \Theta \ &= rac{n}{n} heta = heta, orall heta \in \Theta \ \end{cases}$$

Portanto, $ar{X}_{ heta}$ é não enviesado para g(heta)= heta .

$$\Rightarrow \mathrm{Vi\acute{e}s}(ar{X}_n,g(heta)) = 0, orall heta \in \Theta$$

Para o EQM,

$$egin{aligned} \mathrm{EQM}(ar{X}_n,g(heta)) &= \mathrm{Var}_{ heta}(ar{X}_n) - 0^2 = \mathrm{Var}_{ heta}\left(rac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i
ight) = rac{1}{n^2}\mathrm{Var}_{ heta}\left(\sum_{i=1}^n X_i
ight) \ &\stackrel{\mathrm{ind. \ dist.}}{=} rac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}_{ heta}(X_i) \stackrel{\mathrm{ind. \ dist.}}{=} rac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathrm{Var}_{ heta}(X), orall heta \in \Theta \ &= rac{n heta(1- heta)}{n^2} = rac{ heta(1- heta)}{n^2}, orall heta \in \Theta \end{aligned}$$