Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey

Modelación y automatización (Gpo 304)

Reporte Final

Reto: Modelación Matemática de un sistema Masa-Amortiguador-Resorte

Profesor

Antonio Ramón Xicoténcatl Favela Contreras

Equipo

Gustavo Angel Hidalgo Romero | A00835599

José Aguilar Dávila | A01369827

Sofía Cavazos Chavoya | A00837980

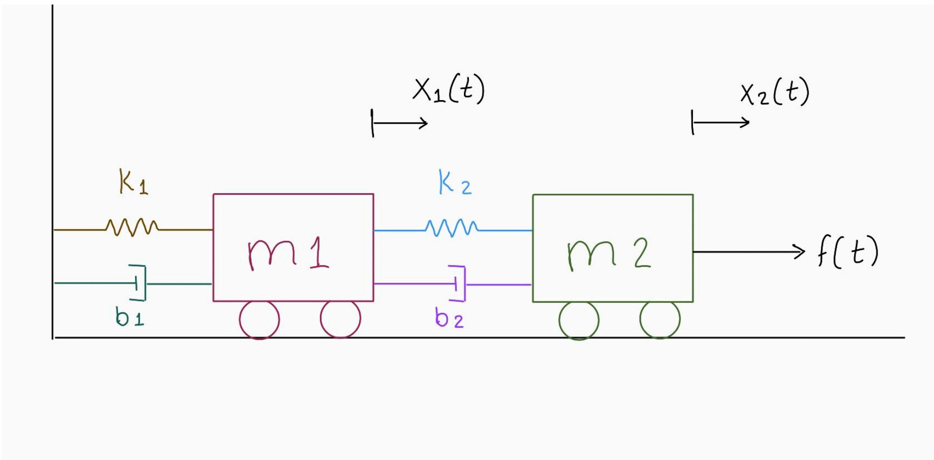
Monterrey, Nuevo León

16 de junio, 2024

Índice

Descripción y Objetivo de la Situación Problema

Nuestra situación problema consiste en analizar un sistema mecánico masa-amortiguador-resorte, como el de una suspensión de un vehículo terrestre o el de dos masas interconectadas, que presentan movimientos transitorios y de régimen permanente a partir de una fuerza externa aplicada al sistema, como se muestra en la figura siguiente:



El objetivo de esta situación es obtener el modelo matemático en su función de transferencia y el espacio de estados del sistema mecánico que emula el comportamiento del sistema masa-amortiguador-resorte que se nos presentó. Además, complementaremos con una simulación en matlab para cada modelo de función de transferencia y sus modelos equivalentes en el espacio de estados en la cuál podremos obtener las salidas del sistema y graficar con respecto al tiempo para una señal de entrada escalón de fuerza de magnitud 10.

Durante el desarrollo de esta situación problema estaremos apoyándonos en las siguientes preguntas detonantes que nos ayudarán a profundizar más en la situación y nos ayudarán a analizarla de forma adecuada para poder desarrollarla.

Preguntas detonantes

- **¿Qué consideraciones (fenómenos físicos involucrados, entradas y salidas del sistema, definición de variables de estado) debo realizar para obtener el modelo en el espacio de estados del sistema mecánico ?**
  - ***Fenómenos físicos involucrados:***

    Las principales consideraciones físicas que debemos de tener en cuenta para esta situación problema y para un sistema de más a resorte en general son:

- **Rigidez:** La rigidez de un resorte la podemos modelar como la relación lineal entre la fuerza aplicada para provocar en un bloque un desplazamiento. En el caso donde el comportamiento del sistema es lineal el estiramiento o compresión es proporcional a la fuerza aplicada y la podemos ver representada en la siguiente ecuación ($F = k * x$) donde "k" es una constante.
- **Amortiguamiento:** Representa cierto tipo de fuerzas las cuales se experimentan cuando se empuja un objeto a través de un fluido o en contra de las fuerzas de fricción. La podemos modelar con la siguiente ecuación ($F = c * v$) o en forma diferencial ($F = c * \frac{dx}{dt}$) donde "c" representa la constante de amortiguamiento. Entre más grande sea el valor de "c" mayor es la fuerza de amortiguamiento.
- **Inercia:** La inercia es la resistencia que en este caso nuestros bloques tienen a la aceleración. Mientras la masa sea más grande tendrá una mayor dificultad para incrementar el cambio de la velocidad con respecto al tiempo y por ende la fuerza que se le tendrá que aplicar será mayor. Lo podemos observar con la siguiente fórmula ($F = m * a$)
- **Segunda ley de Newton:** La aceleración de un objeto es directamente proporcional a la fuerza que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa.
- **Ley de Hooke:** Establece que el alargamiento que experimenta un cuerpo es directamente proporcional al módulo de fuerza que se le esté aplicando siempre y cuando este no presente deformaciones permanentes.

○ ***Entradas y salidas del sistema***

Como entrada del sistema, se considera la función f(t), en donde es una fuerza externa aplicada al sistema masa-resorte-amortiguador. Por el otro lado, el desplazamiento que recibe el sistema masa-resorte-amortiguador es considerada nuestra salida del sistema. Sabiendo esto, podemos determinar nuestra función de transferencia como la relación entre la fuerza de entrada (f(t)) y el desplazamiento de salida (x(t)).

$$F = m * a + F_k + F_b = m * \frac{d^2x}{dt^2} + k * x + c * \frac{dx}{dt}$$

En donde:

$F = fuerza\, externa$

$m = masa$

$a = aceleración$

$F_k = fuerza\, del\, resorte$

$F_b = fuerza\, del\, amortiguador$

- ***Definición de variables de estado***

  Las variables de estado son la representación moderna que se tiene para describir el comportamiento de los sistemas dinámicos.

- **¿Qué variables de estado del sistema mecánico se podrían monitorear con el modelo en el espacio de estados?**
  - Desplazamiento
  - Velocidad
  - Aceleración

Ecuaciones planteadas

1- $m_1 \frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} =- k_1(x_1) - b_1(\dot{x}_1) - k_2(x_1 - x_2) - b_2(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$

2- $m_2 \frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} =- k_2(x_2 - x_1) - b_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + f(t)$

Transformarlas a Laplace

$m_1 s^2 x_1(s) =- k_1(x_1(s)) - b_1(x_1(s)s) - k_2(x_1(s) - x_2(s)) - b_2(sx_1(s) - sx_2(s))$

$$m_1s^2x_1(s)+k_1(x_1(s))+b_1(x_1(s)s)+k_2(x_1(s)-x_2(s))+b_2(sx_1(s)-sx_2(s))=0$$

$$m_2s^2x_2(s)=-k_2(x_2(s)-x_1(s))-b_2(sx_2(s)-sx_1(s))+F(s)$$

$$m_2s^2x_2(s)+k_2(x_2(s)-x_1(s))+b_2(sx_2(s)-sx_1(s))=F(s)$$

Procedimiento

Para $\frac{x_2(s)}{F(s)}$

Se iguala de la ecuación 1 en términos de x2

$$m_1s^2x_1(s)+k_1x_1(s)+b_1sx_1(s)+k_2x_1(s)-k_2x_2(s)+b_2sx_1(s)-b_2sx_2(s))=0$$

$$x_1(s)(m_1s^2+k_1+b_1s+k_2+b_2s)-k_2x_2(s)-b_2sx_2(s)=0$$

$$x_1(s)=\frac{k_2x_2(s)+b_2sx_2(s)}{(m_1s^2+k_1+b_1s+k_2+b_2s)}$$

Luego se reemplaza en la ecuación 2

$$m_2s^2x_2(s)+k_2(x_2(s)-\frac{k_2x_2(s)+b_2sx_2(s)}{(m_1s^2+k_1+b_1s+k_2+b_2s)})+b_2(sx_2(s)-s\frac{k_2x_2(s)+b_2sx_2(s)}{(m_1s^2+k_1+b_1s+k_2+b_2s)})=F(s)$$

$$m_2s^2x_2(s)+k_2x_2(s)-k_2\frac{k_2x_2(s)+b_2sx_2(s)}{(m_1s^2+k_1+b_1s+k_2+b_2s)})+b_2sx_2(s)-b_2s\frac{k_2x_2(s)+b_2sx_2(s)}{(m_1s^2+k_1+b_1s+k_2+b_2s)})=F(s)$$

Se multiplicará los dos lados de la ecuación por ($m_1s^2+k_1+b_1s+k_2+b_2s$) entonces queda

$$m_1m_2s^4x_2(s)+k_1m_2s^2x_2(s)+b_1m_2s^3x_2(s)+k_2m_2s^2x_2(s)+b_2m_2s^3x_2(s)+\ldots..$$

$$m_1s^2k_2x_2(s)+k_1k_2x_2(s)+b_1sk_2x_2(s)+k_2^2x_2(s)+b_2sk_2x_2(s)-k_2^2x_2(s)-k_2b_2sx_2(s)+\ldots$$

$$+\ m_1s^3b_2x_2(s)\ +k_1b_2sx_2(s)+b_1b_2s^2x_2(s)+k_2b_2sx_2(s)+b_2^2s^2x_2(s)-k_2b_2sx_2(s)-b_2^2s^2x_2(s)$$

$$=F(s)(m_1s^2+k_1+b_1s+k_2+b_2s)$$

se agrupan y cancelan términos para despejar en $x_2(s)$

$$x_2(s)(m_1m_2s^4 + k_1m_2s^2 + b_1m_2s^3 + k_2m_2s^2 + b_2m_2s^3 + m_1s^2k_2 + k_1k_2 + b_1sk_2x_2(s) +..$$
$$+ k_2^2 + b_2sk_2 - k_2^2 - k_2b_2s + m_1s^3b_2 + k_1b_2s + b_1b_2s^2 + k_2b_2s + b_2^2s^2 - k_2b_2s - b_2^2s^2$$
$$= F(s)(m_1s^2 + k_1 + b_1s + k_2 + b_2s)$$

$$x_2(s)(m_1m_2s^4 + k_1m_2s^2 + b_1m_2s^3 + k_2m_2s^2 + b_2m_2s^3 + m_1s^2k_2 + k_1k_2 + b_1sk_2 +..$$
$$+ m_1s^3b_2 + k_1b_2s + b_1b_2s^2 = F(s)(m_1s^2 + k_1 + b_1s + k_2 + b_2s)$$

$$x_2(s)(m_1m_2s^4 + s^3(m_1b_2 + b_2m_2 + b_1m_2) + s^2(k_1m_2 + k_2m_2 + m_1k_2 + b_1b_2) + s(b_1k_2 + k_1b_2)$$

$$+ k_1k_2 =F(s)(m_1s^2 + k_1 + b_1s + k_2 + b_2s)$$

Ahora hacemos la función de transferencia $\frac{x_2(s)}{F(s)}$

$$\frac{x_2(s)}{F(s)} = \frac{m_1s^2+b_1s+b_2s+k_1+k_2}{m_1m_2s^4+s^3(m_1b_2+b_2m_2+b_1m_2)+s^2(k_1m_2+k_2m_2+ m_1k_2+b_1b_2)+s(b_1k_2+k_1b_2)+k_1k_2}$$

Para $\frac{x_1(s)}{F(s)}$

Sabemos que

$$\frac{x_1(s)}{F(s)} = \frac{x_2(s)}{F(s)} \bullet \frac{x_1(s)}{x_2(s)}$$

Para $\frac{x_1(s)}{x_2(s)}$

$$x_1(s) = \frac{k_2x_2(s)+b_2sx_2(s)}{(m_1s^2+k_1+b_1s+k_2x_1+b_2s)} \Rightarrow x_1(s) = \frac{x_2(s)(k_2+b_2s)}{(m_1s^2+k_1+b_1s+k_2+b_2s)} \Rightarrow \frac{x_1(s)}{x_2(s)} = \frac{k_2+b_2s}{m_1s^2+k_1+b_1s+k_2+b_2s}$$

Se hace cancelación de términos

$$\frac{x_1(s)}{F(s)} = \frac{m_1s^2+b_1s+b_2s+k_1+k_2}{m_1m_2s^4+s^3(m_1b_2+b_2m_2+b_1m_2)+s^2(k_1m_2+k_2m_2+m_1k_2+b_1b_2)+s(b_1k_2+k_1b_2)+k_1k_2} \bullet \frac{k_2+b_2s}{m_1s^2+k_1+b_1s+k_2+b_2s}$$

$$\frac{x_1(s)}{F(s)} = \frac{k_2+b_2s}{m_1m_2s^4+s^3(m_1b_2+b_2m_2+b_1m_2)+s^2(k_1m_2+k_2m_2+m_1k_2+b_1b_2)+s(b_1k_2+k_1b_2)+k_1k_2}$$

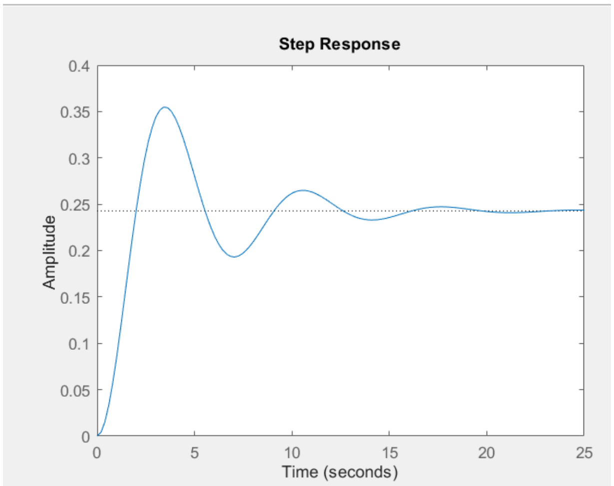
Caso 1:

M1=4 Kg, b1=10 N*s/m, k1=10 N/m, M2=5 Kg, b2=1 N*s/m, k2=7 N/m,

Funciones de transferencia y gráficas

$$\frac{x_2(s)}{F(s)}$$

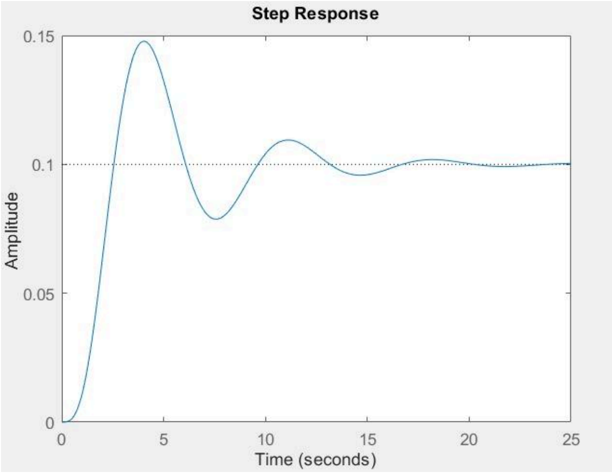
$$\frac{x_2(s)}{F(s)} = \frac{m_1s^2+k_1+b_1s+k_2+b_2s}{m_1m_2s^4+s^3(m_1b_2+b_2m_2+b_1m_2)+s^2(k_1m_2+k_2m_2+m_1k_2+b_1b_2)+s(b_1k_2+k_1b_2)+k_1k_2}$$




```
          4 s^2 + 11 s + 17
---------------------------------------
20 s^4 + 59 s^3 + 123 s^2 + 80 s + 70
```

$$\frac{x_1(s)}{F(s)}$$

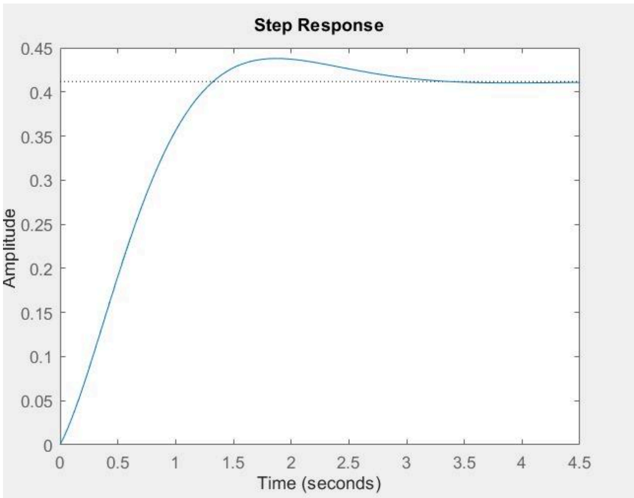
$$\frac{x_1(s)}{F(s)} = \frac{k_2+b_2s}{m_1m_2s^4+s^3(m_1b_2+b_2m_2+b_1m_2)+s^2(k_1m_2+k_2m_2+m_1k_2+b_1b_2)+s(b_1k_2+k_1b_2)+k_1k_2}$$




```
          s + 7
------------------------------------
20 s^4 + 59 s^3 + 123 s^2 + 80 s + 70
```

$$\frac{x_1(s)}{x_2(s)}$$

$$\frac{x_1(s)}{x_2(s)} = \frac{k_2 + b_2 s}{m_1 s^2 + k_1 + b_1 s + k_2 + b_2 s}$$




```
      s + 7
------------------
4 s^2 + 11 s + 17
```

Espacios de Estado

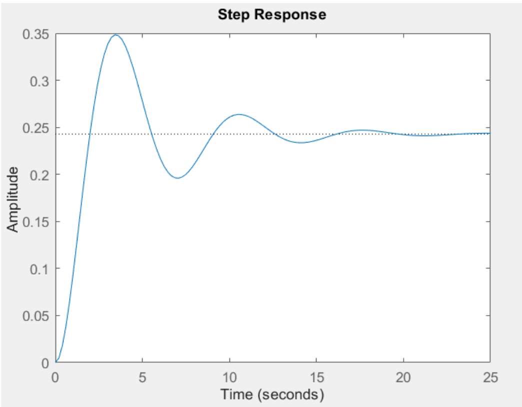
$$\frac{x_2(s)}{F(s)}$$

$$\frac{x_2(s)}{F(s)} = \frac{m_1 s^2 + k_1 + b_1 s + k_2 + b_2 s}{m_1 m_2 s^4 + s^3(m_1 b_2 + b_2 m_2 + b_1 m_2) + s^2(k_1 m_2 + k_2 m_2 + m_1 k_2 + b_1 b_2) + s(b_1 k_2 + k_1 b_2) + k_1 k_2}$$

$$m_1 m_2 \ddddot{y} + (\mathrm{m_1 b_2 + b_2 m_2 + b_1 m_2})\dddot{y} + (k_1 m_2 + k_2 m_2 + k_2 m_1 + b_1 b_2)\ddot{y} + (b_1 k_2 + b_2 k_1)\dot{y} + (k_1 k_2) y = m_1 \ddot{u} + (b_1 + b_2)\dot{u} + (\mathrm{k_1 + k_2}) u.$$

$$\begin{matrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dot{z}_3\\ \dot{z}_4\end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1k_2}{m_1m_2} & \frac{-(b_1k_2 + b_2k_1)}{m_1m_2} & \frac{-(k_1m_2 + k_2m_2 + k_2m_1 + b_1b_2)}{m_1m_2} & \frac{-(m_1b_2 + b_2m_2 + b_1m_2)}{m_1m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1m_2} & \frac{(b_1 + b_2)}{m_1m_2} & \frac{1}{m_2} & 0 \end{bmatrix} + [0]u$$



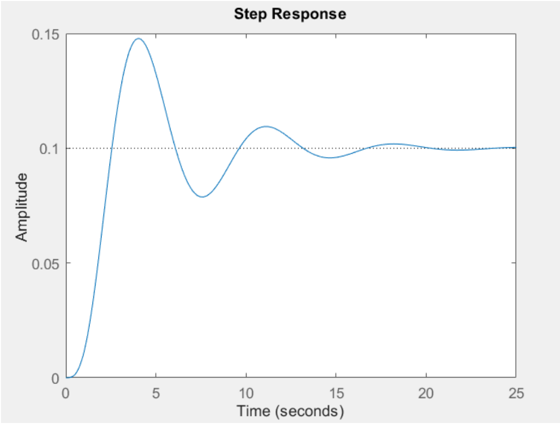
$$\frac{x_1(s)}{F(s)}$$

$$\frac{x_1(s)}{F(s)} = \frac{k_2+b_2s}{m_1m_2s^4+s^3(m_1b_2+b_2m_2+b_1m_2)+s^2(k_1m_2+k_2m_2+m_1k_2+b_1b_2)+s(b_1k_2+k_1b_2)+k_1k_2}$$

$$m_1m_2\ddddot{y} + (m_1b_2 + b_2m_2 + b_1m_2)\dddot{y} + (k_1m_2 + k_2m_2 + k_2m_1 + b_1b_2)\ddot{y} + (b_1k_2 + b_2k_1)\dot{y} + (k_1k_2)y = b_2\dot{u} + k_2u$$

$$\begin{matrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\\ \dot{z}_3\\ \dot{z}_4\end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1k_2}{m_1m_2} & \frac{-(b_1k_2 + b_2k_1)}{m_1m_2} & \frac{-(k_1m_2 + k_2m_2 + k_2m_1 + b_1b_2)}{m_1m_2} & \frac{-(m_1b_2 + b_2m_2 + b_1m_2)}{m_1m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{m_1m_2} & \frac{b_2}{m_1m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + [0]u$$



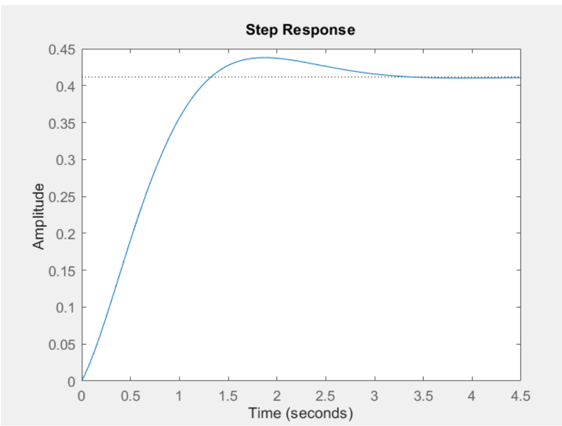
$$\frac{x_1(s)}{x_2(s)}$$

$$\frac{x_1(s)}{x_2(s)} = \frac{k_2+b_2 s}{m_1 s^2+(b_1+b_2)s+k_1+k_2}$$

$$m_1\ddot{y} + (b_1 + b_2)\dot{y} + (k_1 + k_2)y = b_2\dot{u} + k_2 u$$

$$\begin{matrix}\dot{z}_1\\ \dot{z}_2\end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_1 + k_2}{m_1} & \frac{-(b_1 + b_2)}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

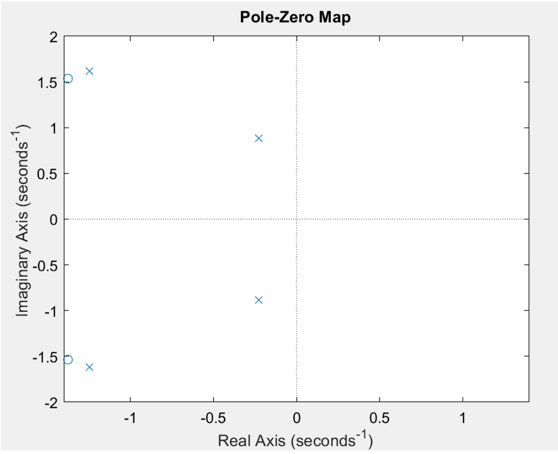
$$y = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \end{bmatrix} + [0]u$$



Plano S

$$\frac{X_2(S)}{F(S)}$$

$$\frac{X_2(S)}{F(S)} = \frac{4S^2+11S^2+17}{20S^4+59S^3+123S^2+80S+70}$$



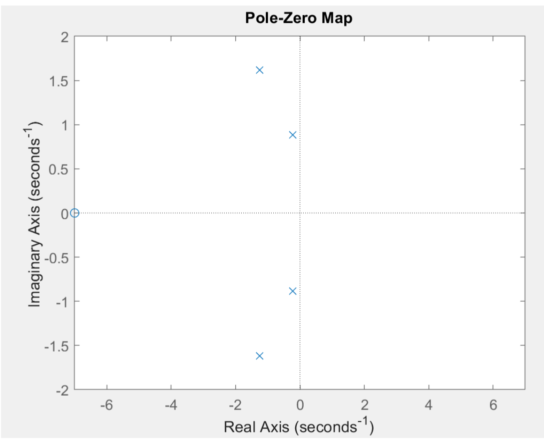
Ceros: (-1.3750 + 1.5360j) , (-1.3750 - 1.5360j) y 2 en el infinito

Polos: (-1.2462 + 1.6178j), (-1.2462 - 1.6178j), (-0.2288 + 0.8871j), (-0.2288 - 0.8871j)

Comportamiento: Oscilatorio decreciente

$$\frac{X_1(S)}{F(S)}$$

$$\frac{X_1(S)}{F(S)} = \frac{S+7}{20S^4+59S^3+123S^2+80S+70}$$



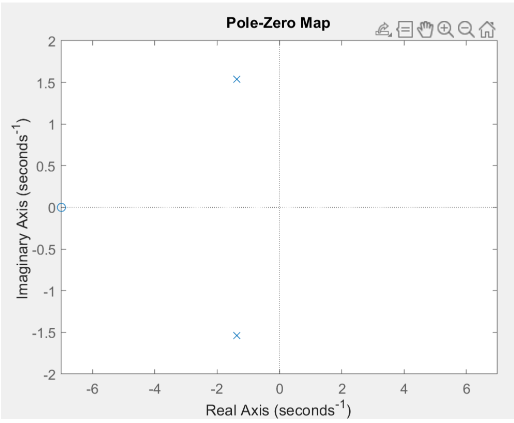
Ceros: (-7) y 3 en el infinito

Polos: (-1.2462 + 1.6178j), (-1.2462 - 1.6178j), (-0.2288 + 0.8871j), (-0.2288 - 0.8871j)

Comportamiento: Oscilatorio decreciente

$$\frac{X_1(S)}{X_2(S)}$$

$$\frac{X_1(S)}{X_2(S)} = \frac{S+7}{4S^2+11S+17}$$



Ceros: (-7) y 1 en el infinito

Polos: (-1.3750 + 1.5360j), (-1.3750 - 1.5360j)

Comportamiento: Oscilatorio decreciente

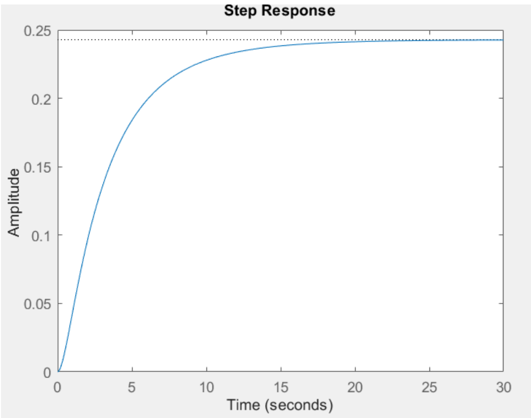
Caso 2:

M1=4 Kg, b1=50 N*s/m, k1=10 N/m, M2=5 Kg, b2=20 N*s/m, k2=7 N/m,

Funciones de transferencia y gráficas

$$\frac{x_2(s)}{F(s)}$$

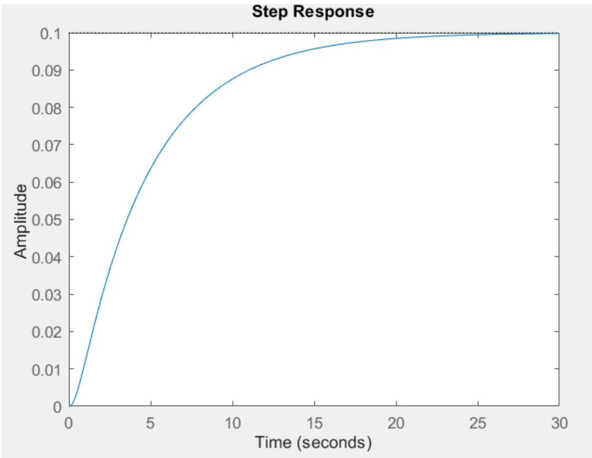
$$\frac{x_2(s)}{F(s)} = \frac{m_1s^2+k_1+b_1s+k_2+b_2s}{m_1m_2s^4+s^3(m_1b_2+b_2m_2+b_1m_2)+s^2(k_1m_2+k_2m_2+m_1k_2+b_1b_2)+s(b_1k_2+k_1b_2)+k_1k_2}$$




```
         4 s^2 + 70 s + 17
-----------------------------------------
20 s^4 + 430 s^3 + 1113 s^2 + 550 s + 70
```

$$\frac{x_1(s)}{F(s)}$$

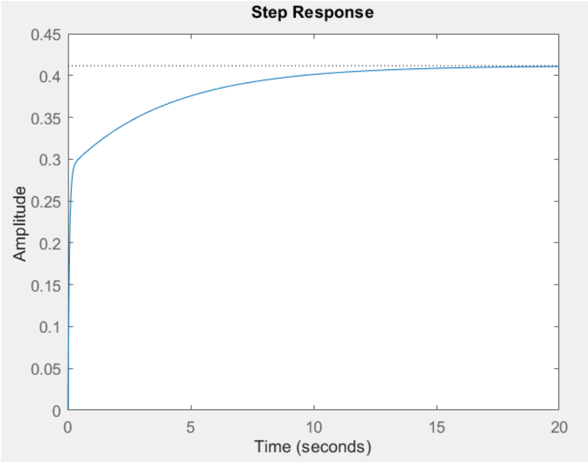
$$\frac{x_1(s)}{F(s)} = \frac{k_2 + b_2 s}{m_1 m_2 s^4 + s^3(m_1 b_2 + b_2 m_2 + b_1 m_2) + s^2(k_1 m_2 + k_2 m_2 + m_1 k_2 + b_1 b_2) + s(b_1 k_2 + k_1 b_2) + k_1 k_2}$$




```
               20 s + 7
-----------------------------------------
20 s^4 + 430 s^3 + 1113 s^2 + 550 s + 70
```

$$\frac{x_1(s)}{x_2(s)}$$

$$\frac{x_1(s)}{x_2(s)} = \frac{k_2 + b_2 s}{m_1 s^2 + k_1 + b_1 s + k_2 + b_2 s}$$



$$\frac{20\,s + 7}{4\,s^2 + 70\,s + 17}$$

Espacio de Estados

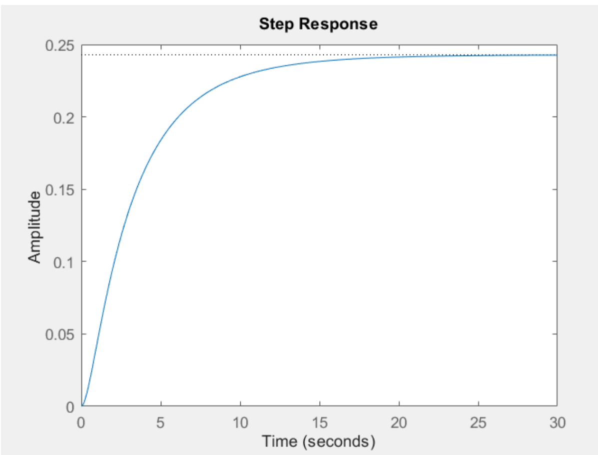
$$\frac{x_2(s)}{F(s)}$$

$$\frac{x_2(s)}{F(s)} = \frac{m_1 s^2 + k_1 + b_1 s + k_2 + b_2 s}{m_1 m_2 s^4 + s^3 (m_1 b_2 + b_2 m_2 + b_1 m_2) + s^2 (k_1 m_2 + k_2 m_2 + m_1 k_2 + b_1 b_2) + s(b_1 k_2 + k_1 b_2) + k_1 k_2}$$

$$m_1 m_2 \ddddot{y} + (\mathrm{m_1 b_2 + b_2 m_2 + b_1 m_2})\dddot{y} + (k_1 m_2 + k_2 m_2 + k_2 m_1 + b_1 b_2)\ddot{y} + (b_1 k_2 + b_2 k_1)\dot{y} + (k_1 k_2) y \\ = m_1 \ddot{u} + (b_1 + b_2)\dot{u} + (\mathrm{k_1 + k_2}) u.$$

$$\begin{matrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1 k_2}{m_1 m_2} & \frac{-(b_1 k_2 + b_2 k_1)}{m_1 m_2} & \frac{-(k_1 m_2 + k_2 m_2 + k_2 m_1 + b_1 b_2)}{m_1 m_2} & \frac{-(m_1 b_2 + b_2 m_2 + b_1 m_2)}{m_1 m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1 m_2} & \frac{(b_1 + b_2)}{m_1 m_2} & \frac{1}{m_2} & 0 \end{bmatrix} + [0]u$$



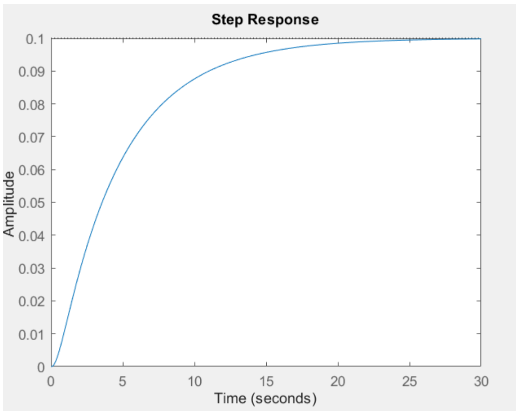
$$\frac{x_1(s)}{F(s)}$$

$$\frac{x_1(s)}{F(s)} = \frac{k_2+b_2 s}{m_1 m_2 s^4+s^3(m_1 b_2+b_2 m_2+b_1 m_2)+s^2(k_1 m_2+k_2 m_2+m_1 k_2+b_1 b_2)+s(b_1 k_2+k_1 b_2)+k_1 k_2}$$

$$m_1 m_2 \ddddot{y} + (\mathrm{m_1 b_2} + \mathrm{b_2 m_2} + \mathrm{b_1 m_2})\dddot{y} + (k_1 m_2 + k_2 m_2 + k_2 m_1 + b_1 b_2)\ddot{y} + (b_1 k_2 + b_2 k_1)\dot{y} + (k_1 k_2) y = b_2 \dot{u} + k_2 u$$

$$\begin{matrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_1 k_2}{m_1 m_2} & \frac{-(b_1 k_2 + b_2 k_1)}{m_1 m_2} & \frac{-(k_1 m_2 + k_2 m_2 + k_2 m_1 + b_1 b_2)}{m_1 m_2} & \frac{-(\mathrm{m_1 b_2} + \mathrm{b_2 m_2} + \mathrm{b_1 m_2})}{m_1 m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{u}$$

$$y = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{m_1 m_2} & \frac{b_2}{m_1 m_2} & 0 & 0 \end{bmatrix} + [0]u$$



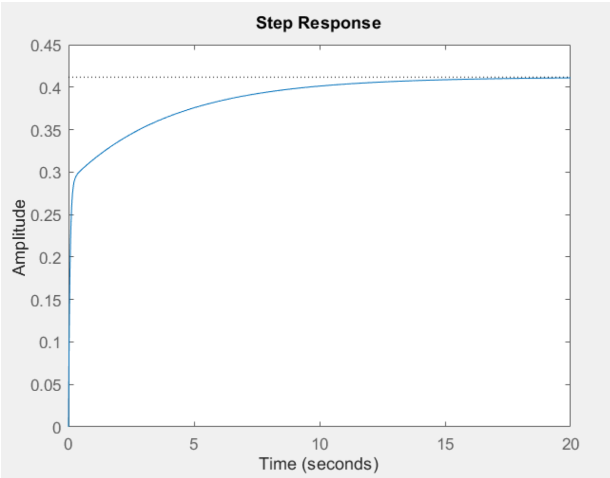
$$\frac{x_1(s)}{x_2(s)}$$

$$\frac{x_1(s)}{x_2(s)} = \frac{k_2+b_2 s}{m_1 s^2+(b_1+b_2)s+k_1+k_2}$$

$$m_1 \ddot{y} + (b_1 + b_2)\dot{y} + (k_1 + k_2) y = b_2 \dot{u} + k_2 u$$

$$\begin{matrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{matrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-k_1 + k_2}{m_1} & \frac{-(b_1 + b_2)}{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{u}$$

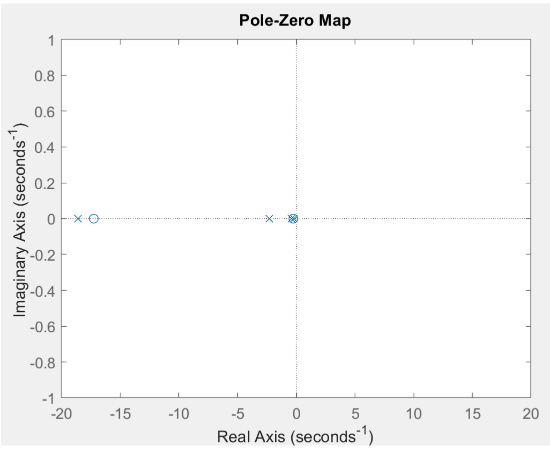
$$y = \begin{bmatrix} \frac{k_2}{m_1} & \frac{b_2}{m_1} \end{bmatrix} + [0]u$$



Plano S

$$\frac{X_2(S)}{F(S)}$$

$$\frac{X_2(S)}{F(S)} = \frac{4S^2+70S+17}{20S^4+430S^3+1113S^2+550S+70}$$



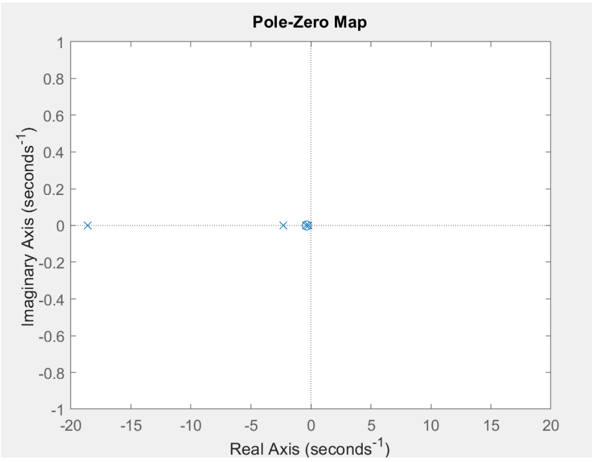
Ceros: (-17.2537), (-0.2463) y 2 en el infinito

Polos: (-18.5847), (-2.3159), (-0.3920), (-0.2074)

Comportamiento: Exponencial decreciente

$$\frac{X_1(S)}{F(S)}$$

$$\frac{X_1(S)}{F(S)} = \frac{20S+7}{20S^4+430S^3+1113S^2+550S+70}$$



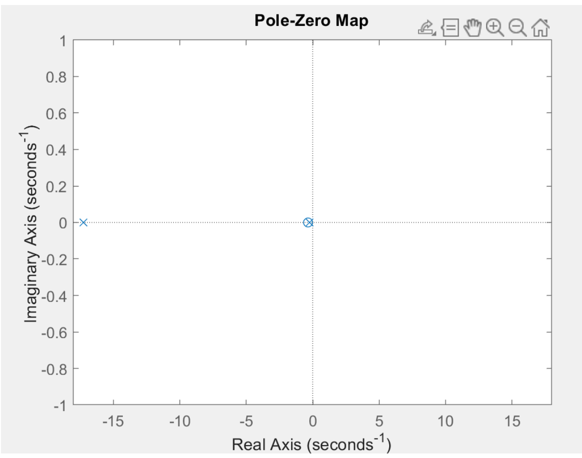
Ceros: (-0.3500)

Polos: (-18.5847), (-2.3159), (-0.3920), (-0.2074)

Comportamiento: Exponencial decreciente

$$\frac{X_1(S)}{X_2(S)}$$

$$\frac{X_1(S)}{X_2(S)} = \frac{20S+7}{4S^2+70S+17}$$

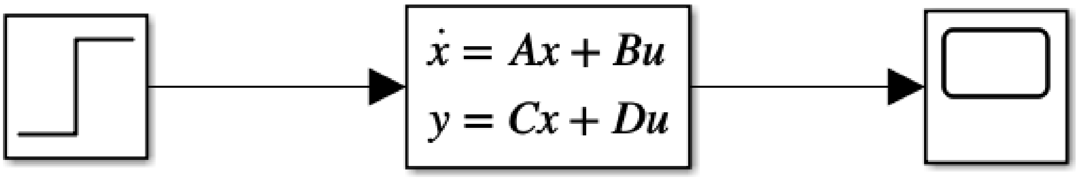


Ceros: (-0.3500) y 1 en el infinito

Polos: (-17.2537), (-0.2463)

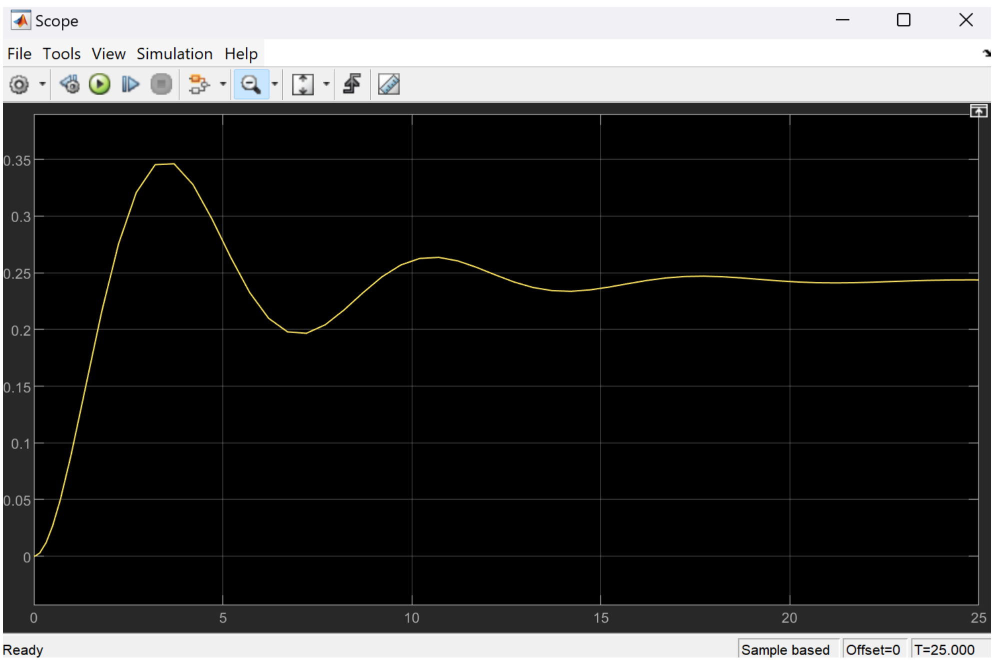
Comportamiento: Exponencial decreciente

Diagrama y Simulación en Simulink

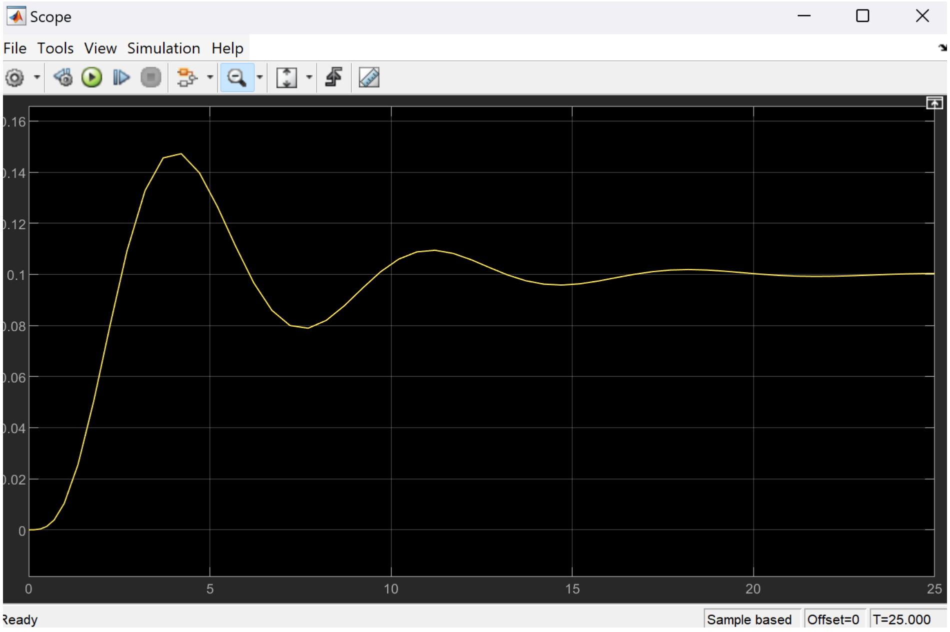


Caso 1

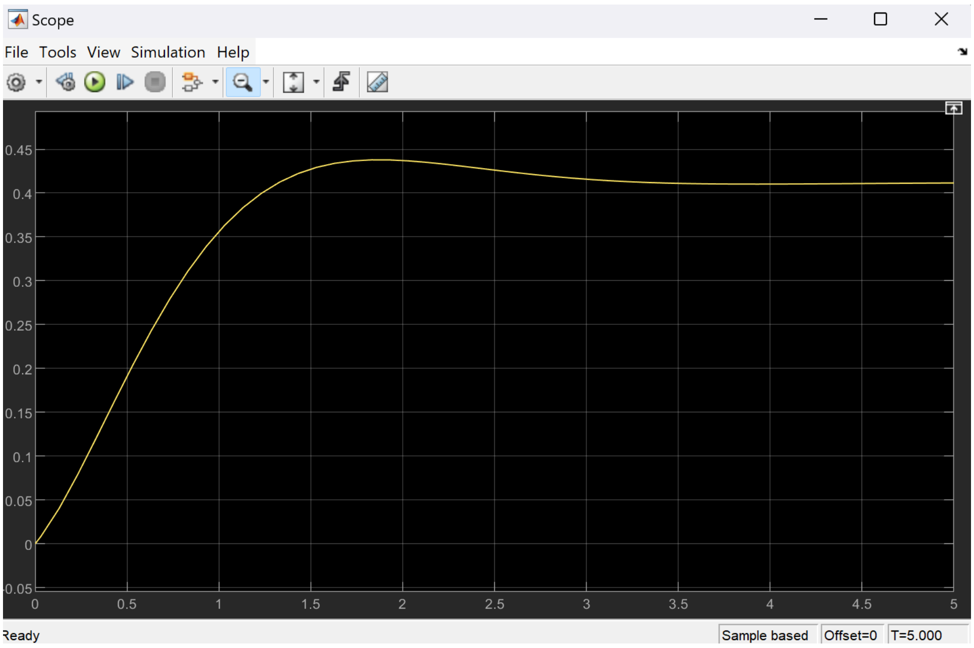
X2(S)/F(S)



X1(S)/F(S)

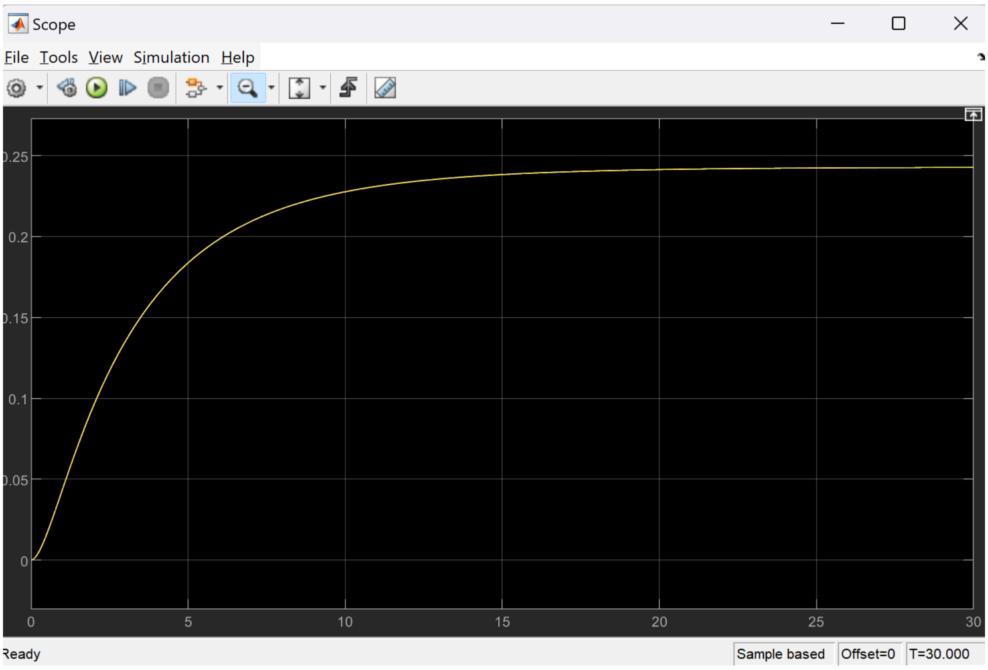


X1(S)/X2(S)



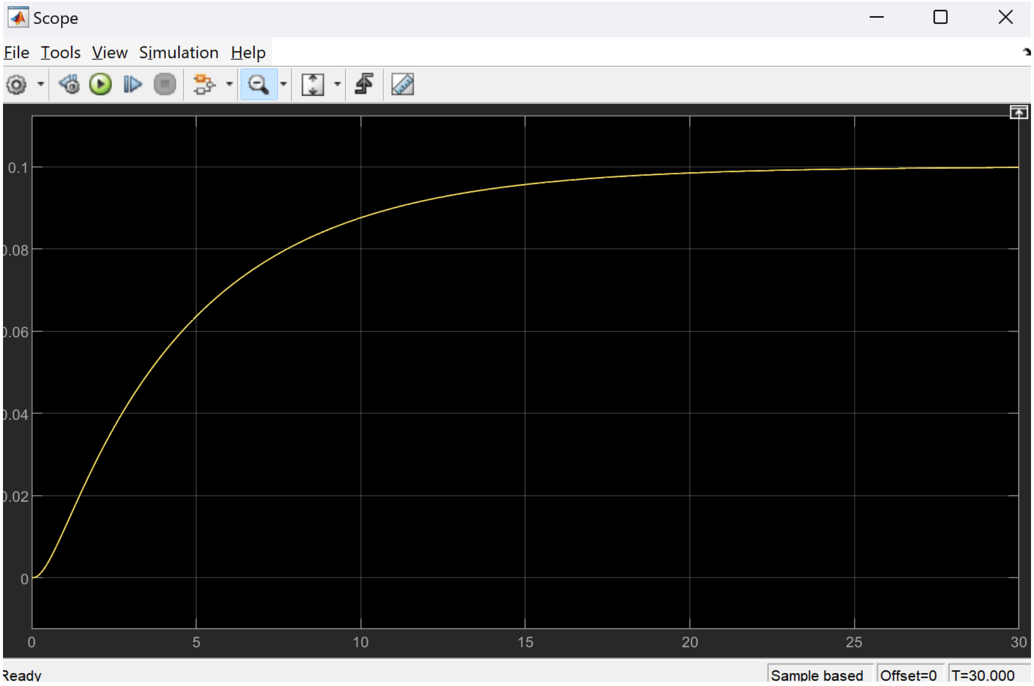
Caso 2

X2(S)/F(S)

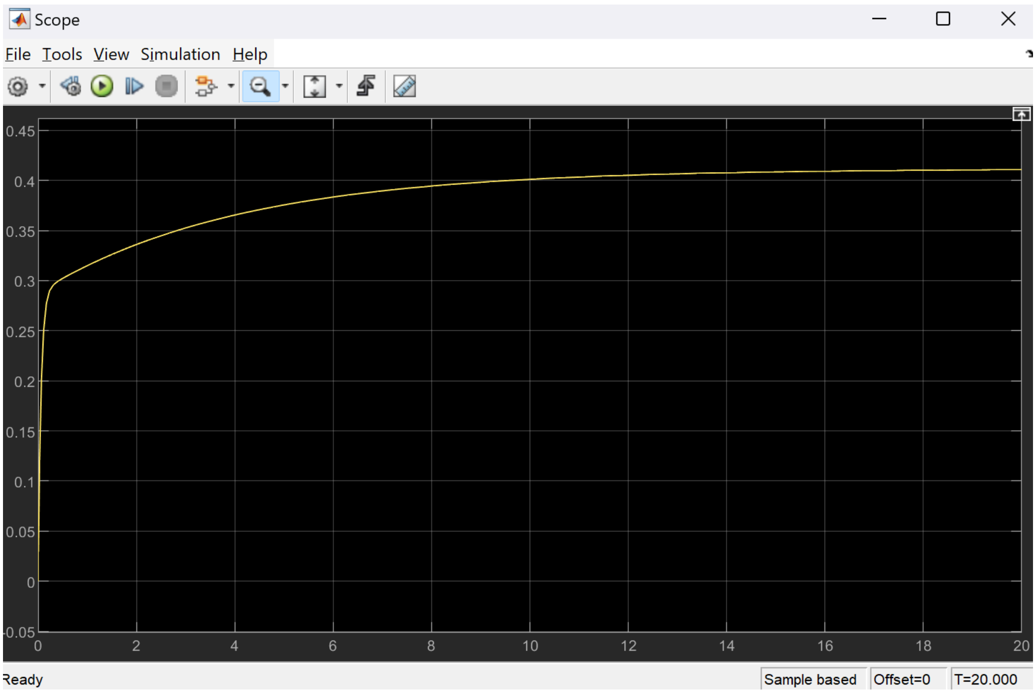


Scope
File Tools View Simulation Help
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
5
10
15
20
25
30
Ready
Sample based
Offset=0
T=30.000

X1(S)/F(S)



X1(S)/X2(S)



Hallazgos y discusión de resultados

Caso 1

Observando las gráficas que obtuvimos al momento de obtener las funciones de transferencia y el espacio de estados, logramos observar que el sistema mecánico masa-amortiguador-resorte, entra en un estado de oscilación en donde, la fuerza externa que le es aplicada a la M2, repercute en un desplazamiento en donde al principio, dicho desplazamiento es grande y de ahí va disminuyendo hasta que el sistema se estabiliza. Lo mismo pasa con la M1, su desplazamiento al principio es significativo, pero mientras pasa el tiempo, dicho sistema llega a un equilibrio. Por el otro lado, la función de transferencia respecto X1(S)/X2(S), si tiene un estado de oscilación; sin embargo, dicho estado no es tan notorio como en los otros sistemas, debido a que rápidamente se logra estabilizar. Esto se puede identificar en las gráficas del plano "S", en donde si observamos, en la gráfica X1(S)/X2(S) los polos están más cargados a la izquierda lo que le permite llegar a la estabilidad más rápido a comparación de los otros sistemas.

Caso 2

Al analizar el caso 2, en donde el valor de las variable "b" cambia, logramos observar que estos cambios de valores en la constante del amortiguador hacen que el sistema masa-amortiguador-resorte tenga un comportamiento totalmente distinto al caso 1. En este se logra observar como la función de transferencia al igual que el espacio de estados de X1(S)/F(S), X2(S)/F(S) y X1(S)/X2(S) no oscilan en ningún momento. Esto se puede explicar debido a que en el plano "S", no se observa ningún polo en el eje de los imaginarios, esto demostrando que el comportamiento de estos 3 sistemas será exponencial decreciente ya que cuentan con dichos polos del lado izquierdo del plano "S".

Reflexiones individuales por etapas

Descripción y objetivo

José: Creo que esta situación problema es la oportunidad perfecta para poner a prueba nuestras habilidades aprendidas durante la clase de cómo analizar un sistema de control de forma adecuada, generar su función de transferencia y espacio de estado para así poder modelar gráficamente.

Gustavo: Considero que el problema planteado nos permite demostrar las habilidades que logramos desarrollar durante esta Unidad de Formación y nos reta a resolver dicho problema mediante funciones de transferencia y espacio de estados.

Sofia: El sistema masa-resorte-amortiguador es un excelente problema para poder aplicar lo que viene siendo, el sacar ecuaciones diferenciales con un problema planteado, usar laplace para sacar una función de transferencia, identificar tanto los fenómenos físicos y las entradas y salida del sistema.

Ecuaciones planteadas

José: Las ecuaciones planteadas son el hito más importante que tenemos en este reto debido a que todo lo que realizamos después está en base a estas ecuaciones. De habernos equivocado en esta parte todo lo demás no hubiera sido correcto. Debido a esto pusimos extrema atención en esta parte para así poder resolver la problemática de forma correcta.

Gustavo: Creo que esta etapa es de las más importantes de la Situación Problema ya que es el inicio de los siguientes pasos a realizar como lo son las funciones de transferencia, así mismo, fue de suma importancia investigar las leyes de la física que regirán el sistema masa-amortiguador-resorte.

Sofia: Para poder obtener las ecuaciones, se identificó las fuerzas que se aplicaban en cada masa, como solo eran dos masas por eso solo se obtuvieron dos ecuaciones, también se usaron de acuerdo a como actuaba cada fuerza en torno al desplazamiento, velocidad y aceleración. Después se transformaron a laplace para poder así despejar una x en torno a la otra y poder sustituirla en la otra ecuación, para obtener la función de transferencia se usó la función de transferencia que primero se obtuvo y luego se multiplicó por la función de transferencia de x1/x2 y así se obtiene. En todo ese proceso se tuvo que tener mucho cuidado y como quiera aparecieron errores (variables que iban sumándose y no multiplicándose) y se corrigieron en su momento.

Caso 1 función de transferencia, espacio de estados y plano s

José: Una vez obtenidas las funciones de transferencias modelarlas en matlab representaron un reto debido a que en algunos casos al pasar las variables obtenidas al matlab éste las interpreta diferente. No obstante pudimos hacerlo correctamente y pudimos observar el comportamiento de forma gráfica. Posteriormente al realizar los espacios de estados nos dimos cuenta que son iguales confirmando que el procedimiento fue el adecuado. Finalmente al ver la gráfica del plano “s” podemos interpretar de qué forma el sistema se va a comportar.

Gustavo: Al obtener las funciones de transferencia del caso 1, logramos utilizar el código en matlab para obtener las gráficas del comportamiento de los sistemas, esto permitiéndonos a tener una idea de cómo sería su comportamiento, después de pasarlo a espacio de estados, pudimos confirmar que lo habíamos hecho correctamente. Ya por último, el plano “S” nos dio una idea de cómo es el comportamiento de dichos sistemas gracias a que aprendí a leer los polos y los ceros.

Sofía: Para el caso 1 se trabajó tanto con la función de transferencia como con la de espacios de estados, al principio hubo dificultades porque hubo ciertos errores al pasarla a espacio de estados pero se pudieron corregir y se comprobó que estaban bien cuando las dos nos daban igual, al observar el comportamiento de las gráficas con función de transferencia y espacio de estados se podía observar que el sistema si iba a oscilar pero en algún punto se iba a hacer constante, y esto se comprobó con la graficación de los polos y ceros en el plano s

Caso 2 función de transferencia, espacio de estados y plano s

José: Al haber cambiado los valores y volver a realizar el procedimiento del punto anterior pudimos observar como cambia el comportamiento a comparación del primer caso. No solamente lo pudimos visualizar en las gráficas de la funciones de transferencia y espacio de estados si no también en el plano “s” en donde al no tener polos imaginarios podemos deducir su comportamiento.

Gustavo: Al realizar el caso 2 y observar cómo había cambiado el comportamiento del sistema, pude comprender que con una modificación en algunas variables del sistema, pueden hacer grandes cambios al comportamiento del mismo. Esto se presenta en el plano “S” al no tener polos en los números imaginarios y al observar el comportamiento de las gráficas obtenidas en la función de transferencia y el espacio de estados.

Sofía: Con la pura observación de los polos y los ceros se comprueba que el sistema no iba a oscilar, esto también era notorio cuando remplazabas los valores en la función de transferencia; es interesante notar que al cambiar el valor de los amortiguadores más alto esto provoca que el sistema no oscile.

Diagrama y simulación

José: En esta parte en donde tuvimos que hacer el diagrama en Simulink fué verdaderamente un reto debido a que no teníamos un conocimiento previo o guía de como utilizarlo. Para resolverlo tuvimos que recurrir a videos externos ya prueba y error logramos obtener el diagrama y a partir de ahí todo fluyó de forma más sencilla.

Gustavo: Al momento de tener que pasar el codigo de matlab a un diagrama en Simulink, al principio se me hizo complicado debido a que no tenía conocimiento del funcionamiento de Simulink; pero una vez que aprendí a usarlo, fue muy sencillo realizar el diagrama y la simulación utilizando bloques como step, State-space y Scope.

Sofia: Para usar el simulink busque en internet como deberia quedar el diagrama, se necesitaba haber declarado en espacio de estados en matlab y corrido el programa para que se guardarán los valores para después usarlos en el bloque de espacio de estados, se utilizó un step y un scop para poder que se graficara y efectivamente nos dieron los mismo valores de la gráfica.

Discusión de resultados

José: Finalmente con ambos casos terminados pudimos notar que en el primer caso hay oscilación presente en ambas masas a causa de la fuerza que se le está aplicando. En cambio en el caso dos notamos que esta oscilación ya no existe. No solamente lo podemos notar en el comportamiento de las gráficas sino también en el plano "s" en donde vemos que en el segundo caso al no tener polos imaginarios no existe esta oscilación. Considero que este reto fue sin duda alguna una forma muy buena de poner a prueba todas las habilidades adquiridas durante este último periodo. Pudimos no solamente ver nuestros resultados en forma de ecuaciones sino que también pudimos modelarlas gráficamente. Es muy importante recalcar el trabajo en equipo que realizamos y como este fué fundamental para que el proyecto saliera adelante.

Gustavo: Analizando ambos casos considero que mis compañeros y yo logramos obtener la meta deseada la cual es obtener el modelo en función de transferencia y el espacio de estados del sistema mecánico que emula el comportamiento del sistema masa-amortiguador-resorte propuesto, ya que logramos aplicar de la manera correcta todos los conocimientos que se nos enseñaron durante la Unidad de Formación. Como se puede ver, en el caso 1 obtuvimos un sistema el cual ambas masas sufren de una oscilación a causa de la fuerza exterior aplicada.

Por el otro lado, en el caso 2 en donde se le aumentó la constante del amortiguador al sistema, observamos que la oscilación que se tiene es nula, ya que en el plano “S” se observa que no existen polos en los números imaginarios lo que quiere decir que no hay oscilación. Así mismo, fue de suma importancia saber utilizar matlab y simulink para la solución de la situación problema.

Sofía: Es importante obtener las funciones de transferencia para poder predecir el modelo, saber qué variables o qué fuerzas se tendrían que cambiar los valores para llegar al objetivo, que sería que el sistema no oscile ya que es un vehículo terrestre . El caso 2 es el más ideal para la aplicación, pero el caso 1 es un claro ejemplo de cómo cambiaría el sistema si no se tienen los valores correctos. Para poder resolver el sistema se necesitan conocimientos de Laplace, ya que esta es fundamental para sacar la función de transferencia; si existe una manera para obtener el de espacio de estados sin pasarla a la place pero no es una manera muy correcta, ya que el resultado que nos dio no fue correcto porque no coincidía con la función de transferencia. El saber el programar en matlab y entender cómo usar simulink fueron muy importantes para resolución del reto

VIDEO INDIVIDUAL GUSTAVO: https://youtu.be/3bfJM27eA2o

Anexos

Código en matlab:

Código Función de transferencia ($\frac{X_2(S)}{F(S)}$)*:*

```
num=[M1, B1 + B2, K1 + K2]
den=[M1*M2, M1*B2 + B2*M2 + B1*M2, K1*M2 + K2*M2 + M1*K2 + B1*B2, B1*K2 + K1*B2,
K1*K2]
G=tf(num,den)
step(G)
```

Código Función de transferencia ($\frac{X_1(S)}{F(S)}$)*:*

```
 num=[B2, K2];
 den=[M1*M2, M1*B2 + B2*M2 + B1*M2, K1*M2 + K2*M2 + M1*K2 + B1*B2, B1*K2 +
K1*B2, K1*K2];
 G=tf(num,den)
 step(G)
```

Código Función de transferencia ($\frac{X_1(S)}{X_2(S)}$)*:*

```
num=[B2, K2]
den=[M1, B1 + B2, K1 + K2]
G=tf(num,den)
step(G)
```

Código espacio de estados 1 ($\frac{X_2(S)}{F(S)}$)*:*

```
A=[0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -(K1*K2)/(M1*M2) -((B1 * K2) + (B2 * K1))/(M1*M2) -((K1 * M2) +
(K2 * M2) + (K2 * M1) + (B1 * B2))/(M1*M2) -((M1 * B2) + (B2 * M2) + (B1 * M2))/(M1*M2)]
 B=[0;0;0;1]
C=[(K1+K2)/(M1*M2) (B1+B2)/(M1*M2) (1)/(M1) 0]
D=[0]
 U7=ss(A,B,C,D)
 step(U7)
```

Código espacio de estados 2 ($\frac{X_1(S)}{F(S)}$)*:*

```
A=[0 1 0 0; 0 0 1 0; 0 0 0 1; -(K1*K2)/(M1*M2) -((B1 * K2) + (B2 * K1))/(M1*M2) -((K1 * M2) +
(K2 * M2) + (K2 * M1) + (B1 * B2))/(M1*M2) -((M1 * B2) + (B2 * M2) + (B1 * M2))/(M1*M2)]
 B=[0;0;0;1]
C=[(K2)/(M1*M2) (B2)/(M1*M2) 0 0]
D=[0]
 Q1=ss(A,B,C,D)
 step(Q1)
```

Código espacio de estados 3 ($\frac{X_1(S)}{X_2(S)}$)*:*

```
A=[0 1; -(K1+K2)/(M1) -(B1+B2)/(M1)]
B=[0;1]
 C=[K2/M1 B2/M1]
D=[0]
T1=ss(A,B,C,D)
step(T1)
```