Trabalho Prático de Otimização - Parte 1

Gustavo Henrique da Silva Barbosa   Pietro Polinari Cavassin

13 de Abril de 2022

1 O Problema

- Uma empresa de transporte recebeu uma carga a ser transportada. A carga tem n itens, $I_1, I_2, \ldots, I_n$, cada um com seu peso w_i, para $1 \leq i \leq n$, em kg
- A empresa tem apenas um caminhão com capacidade máxima de carga C kg, que fará uma ou mais viagens.
- As viagens recebem números de 1 a k, onde k é o número de viagens feitas.
- Determinamos a função v, onde $v(i)$ é a viagem onde foi transportado o item I_i.
- Para cada par ordenado (a, b) entregue pelo cliente é determinada a restrição $v(a) < v(b)$.
- A tarefa é decidir quais itens vão em que viagem de forma a minimizar o número de viagens.

2 Modelagem

$$\min \sum_{j=1}^{n} y_j$$

S.A

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ij} \cdot w_i \leq C \cdot y_j, \qquad \text{para todo } j \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq n \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} M_{ij} = 1, \qquad \text{para todo } i \in \mathbb{N},\ 1 \leq i \leq n \tag{2}$$

Para cada par ordenado (a, b):

$$\sum_{j=1}^{p} M_{aj} \geq \sum_{j=1}^{p} M_{bj}, \qquad \text{para todo } p \in \mathbb{N},\ 1 \leq p \leq n \tag{3}$$

$$M_{aj} + M_{bj} \leq 1, \qquad \text{para todo } j \in \mathbb{N},\ 1 \leq j \leq n \tag{4}$$

Restrições de valor:

$$0 \leq M_{ij} \leq 1, \qquad \text{para todo } 1 \leq i, j \leq n \tag{5}$$

$$0 \leq y_j \leq 1, \qquad \text{para todo } 1 \leq j \leq n \tag{6}$$

As seguintes variáveis foram utilizadas na modelagem:

- C: carga suportada pelo caminhão
- y_j: vale 0 se a viagem j não for feita e 1 caso contrário.
- M_{ij}: vale 1 se o item i for transportado na viagem j e 0, caso contrário.
- w_i: constante que equivale ao peso do item i.
- n: número de itens a serem transportados pelo caminhão

A restrição (1) garante que, para cada viagem j, a soma das cargas a serem transportadas nela será menor ou igual à carga máxima C. A multiplicação dentro do somatório $(M_{ij} \cdot w_i)$ garante que apenas sejam somados os pesos que serão transportados na viagem j. Da mesma forma, a multiplicação ao lado direito $(C \cdot y_j)$ reduz a carga suportada a 0, caso a viagem j não seja feita $(y_j = 0)$.

A restrição (2) garante que cada item i seja transportado em apenas uma viagem, visto que uma linha i corresponde a um item.

A restrição (3) garante que, para um par ordenado (a, b), $v(a) \leq v(b)$. Isso ocorre, pois para uma dada linha a, A soma dos itens de a entre a coluna 1 e uma coluna p será 1 caso $v(a) <= p$ e 0, caso contrário. Portanto, a restrição (3) indica que $v(a) \leq v(b)$

A restrição (4) garante que, para um par ordenado (a, b), o item a seja transportado na mesma viagem que b. Isso ocorre, pois as colunas representam as viagens, e a soma das linhas a e b em uma mesma coluna não pode passar de 1. Ou seja, ambos os valores não podem ser 1 ao mesmo tempo.

As restrições (5) e (6) limitam os valores dos itens de M e y entre 0 e 1.

3 Detalhes de Implementação

Na implementação em lp_solve, todas as restrições foram utilizadas, incluindo a de ordem. Isso fez com que o resultado da solução ótima ficasse diferente do resultado esperado na especificação do trabalho.

Isso aconteceu, pois as restrições de ordem exigiam que o item 2 fosse transportado antes do 3 e o 5 antes do 1. Além disso, a solução parcial especificada fixou o item 3 na viagem 2 e o item 5 na viagem 3. Sabendo que o item 5 deve ir na viagem 3, necessariamente o item 1 deve ir na viagem 4 ou depois. Da mesma forma, o item 3 foi fixado na viagem 2, obrigando o item 2 a ser transportado na viagem 1.

Isso fez com que fossem transportados, nessa ordem, 6kg (item 2), 10kg, 10kg e 5kg (item 1).

4 Referências

Bin Packing Problem. In: Wikipedia: the free encyclopedia. Disponível em: `https://en.wikipedia.org/wiki/Bin_packing_problem` Acesso em: 12 mar 2022.