Universidade de São Paulo
Escola de Artes, Ciências e Humanidades

ACH2013 – Matemática Discreta – 2º sem. 2024
Professor: José Ricardo G. Mendonça

1ª Prova – Turma 04 – Data: 16 out. 2024

Na resolução dos problemas, explique seu raciocínio e o que você está fazendo de forma que eu possa acompanhá-lo(a). Soluções "mágicas" ou "geniais" não serão aceitas sem explicações.

Problemas

1. O conectivo lógico **nor** é definido pela relação $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$.

   (a) [2 pontos] Reescreva $p \to q$ em termos do conectivo **nor** somente;

   Como $p \equiv p \vee p$, temos que $\neg p \equiv \neg(p \vee p) \equiv p \downarrow p$. Com isso podemos escrever

   $$p \vee q \equiv \neg(p \downarrow q) \equiv (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q),$$

   de maneira que

   $$p \to q \equiv \neg p \vee q \equiv (p \downarrow p) \vee q \equiv ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q).$$

   (b) [1 ponto] Dê um examplo mostrando que o operador lógico **nor** não é associativo.

   Em matemática, a propriedade associativa para operações binárias significa que podemos reorganizar os parênteses em uma expressão sem alterar seu resultado: $(a \ \mathbf{op}\ b)\ \mathbf{op}\ c \equiv a\ \mathbf{op}\ (b\ \mathbf{op}\ c)$, onde **op** é um operador matemático qualquer. O operador $+$ da aritmética usual, por exemplo, é associativo: $(a+b)+c = a+(b+c)$. Queremos mostrar que $(p \downarrow q) \downarrow r \not\equiv p \downarrow (q \downarrow r)$. Podemos construir as tabelas verdades de $(p \downarrow q) \downarrow r$ e $p \downarrow (q \downarrow r)$ e mostrar sua inequivalência ou encontrar um contraexemplo. Vamos mostrar um contraexemplo. Temos

   $$(F \downarrow F) \downarrow T \equiv T \downarrow T \equiv F \quad \text{enquanto} \quad F \downarrow (F \downarrow T) \equiv F \downarrow F \equiv T,$$

   de maneira que $(F \downarrow F) \downarrow T \not\equiv F \downarrow (F \downarrow T)$ e podemos afirmar que o operador lógico **nor** não é associativo.

2. [1 ponto] Determine o valor verdade da proposição $(\exists z \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x+y=z)$ e estabeleça a sua negação.

A proposição é obviamente falsa: não existe um número real super-vale-tudo z tal que $z = x+y$ para quaisquer valores de x e y. Repare que a proposição seria verdadeira se estivesse escrita na forma $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{R})(x+y = z)$.

A negação da proposição dada é $(\forall z \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x+y \neq z)$, cuja verdade é evidente.

3. Estabeleça os seguintes resultados para todo $n \in \mathbb{N}$ usando o princípio de indução finita:

   (a) [2 pontos] O número $n(n^2-1)(3n+2)$ é divisível por 24;

   Vamos denotar a expressão $n(n^2-1)(3n+2)$ por $P(n)$. Vemos que $P(0) = 0$, $P(1) = 0$ e $P(2) = 48$, todos eles divisíveis por 24. Vamos supor que $P(k)$ seja divisível por 24 para algum $k \geqslant 3$ (hipótese de indução) e vamos verificar se isso nos permite concluir que $P(k+1)$ também é divisível por 24. Fazendo a conta encontramos

   $$P(k+1) = (k+1)[(k+1)^2-1][3(k+1)+2] = P(k) + 12k(k+1)^2.$$

   Como por hipótese $P(k)$ é divisível por 24, para que $P(k+1)$ seja divisível por 24 basta que $12k(k+1)^2$ seja também divisível por 24. Mas isso é verdade, pois $k(k+1)$ é sempre um número par e 12 vezes um número par é sempre divisível por 24. Podemos concluir que $P(n)$ é divisível por 24 para todo $n \geqslant 0$.

   (b) [2 pontos] $H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$, onde $H_k = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{k}$ é o k-ésimo número harmônico. Isso mostra que os números harmônicos divergem logaritmicamente.

   Seja a proposição $P(n) \equiv H_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$. $P(0)$ é verdade, pois $H_{2^0} = H_1 = 1 \geqslant 1 + \frac{0}{2}$. Vamos supor que $P(k)$ seja verdade para algum $k \geqslant 1$ e vamos verificar se $P(k) \to P(k+1)$. Temos

   $$H_{2^{k+1}} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} = H_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

   Os 2^k termos $\dfrac{1}{2^k+1}, \ldots, \dfrac{1}{2^{k+1}}$ são todos maiores ou iguais a $\dfrac{1}{2^{k+1}}$, de maneira que

   $$\frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \geqslant 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2},$$

   de onde obtemos

   $$H_{2^{k+1}} = H_{2^k} + \frac{1}{2^k+1} + \cdots + \frac{1}{2^{k+1}} \geqslant 1 + \frac{k}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{k+1}{2},$$

   e podemos afirmar que $P(k) \to P(k+1)$ e, portanto, que $P(n)$ vale para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. Encontre o número de elementos em $A \cup B \cup C$ se cada conjunto possui 100 elementos em cada um dos seguintes casos:

(a) [1 ponto] Houver 50 elementos comuns em cada par de conjuntos e nenhum elemento em todos os três conjuntos;

Pelo princípio da inclusão-exclusão temos

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Pelo enunciado temos $|A| = |B| = |C| = 100$, $|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 50$ e $|A \cap B \cap C| = 0$, de maneira que

$$|A \cup B \cup C| = 100 + 100 + 100 - 50 - 50 - 50 + 0 = 150$$

elementos na união $A \cup B \cup C$.

(b) [1 ponto] houver 40 elementos comuns em cada par de conjuntos e 20 elementos em todos os três conjuntos.

Pelo mesmo raciocínio anterior (princípio da inclusão-exclusão) obtemos neste caso

$$|A \cup B \cup C| = 100 + 100 + 100 - 40 - 40 - 40 + 20 = 200$$

elementos na união $A \cup B \cup C$.

Boa prova!