Autômatos Finitos

Modelos Computacionais

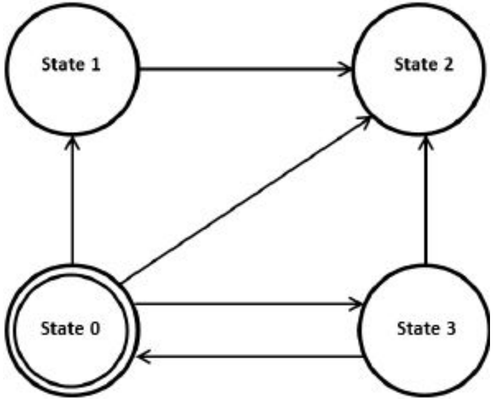
Computadores reais são demasiado complicados para nos permitir estabelecer uma teoria matemática manuseável sobre eles diretamente. Ao invés, usamos um computador idealizado chamado um modelo computacional.

Modelos Computacionais

Computadores reais são demasiado complicados para nos permitir estabelecer uma teoria matemática manuseável sobre eles diretamente. Ao invés, usamos um computador idealizado chamado um modelo computacional.

Autômatos finitos

São bons modelos para computadores com uma quantidade de memória extremamente limitada.



Aplicações de Autômatos Finitos

- Controlador de elevador, onde cada estado pode representar o andar no qual o elevador está e as entradas podem ser os sinais recebidos dos botões.

- Controladores para vários dispositivos domésticos tais como:
    - lavadoras de pratos;
    - termostatos eletrônicos.

- Peças de relógios digitais e calculadoras, são exemplos adicionais de computadores com memórias limitadas.

Aplicações de Autômatos Finitos

- Controlador de elevador, onde cada estado pode representar o andar no qual o elevador está e as entradas podem ser os sinais recebidos dos botões.

- Controladores para vários dispositivos domésticos tais como:
  - lavadoras de pratos;
  - termostatos eletrônicos.

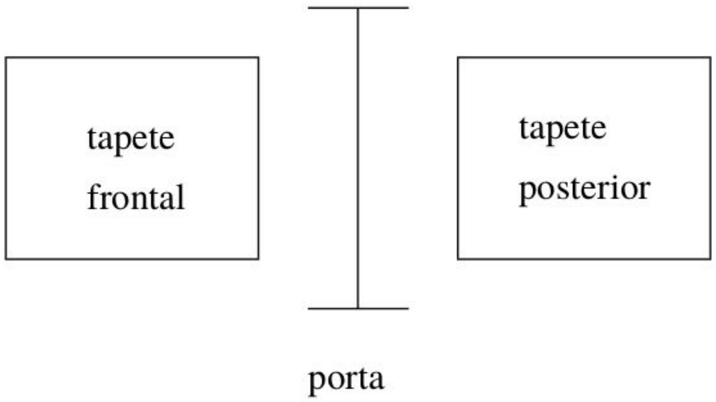
- Peças de relógios digitais e calculadoras, são exemplos adicionais de computadores com memórias limitadas.

O desenho de tais dispositivos requer que se mantenha em mente a metodologia e a terminologia de autômatos finitos.

Aplicações de Autômatos Finitos

Controlador de porta automática

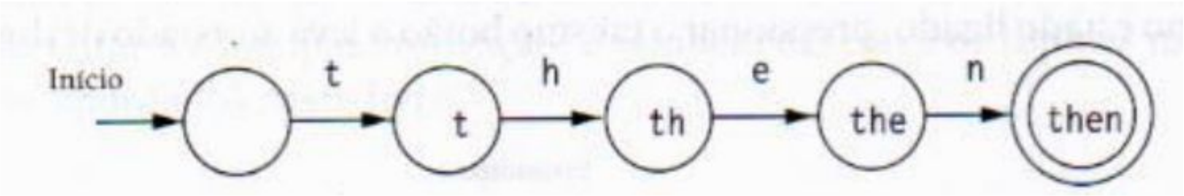
Frequentemente encontradas em entradas e saídas de supermercados, portas automáticas abrem deslizando quando uma pessoa está se aproximando.



Aplicações de Autômatos Finitos

Reconhecendo Padrões

Às vezes, o que é memorizado por um estado pode ser muito mais complexo que uma escolha entre aberto/fechado. A Figura abaixo mostra outro autômato finito que poderia fazer parte de um analisador léxico. O trabalho desse autômato é reconhecer a palavra-chave **then**. Desse modo, ele precisa de cinco estados, cada um dos quais representa uma posição diferente na palavra then, conforme o que foi atingido até o momento. Essas posições correspondem aos prefixos da palavra, variando desde o string vazio (isto é, nenhuma parte da palavra foi atingida até agora) até a palavra completa.



Conceitos Centrais na Teoria de Autômatos

Conceitos Centrais na Teoria de Autômatos

Alfabetos

Um conjunto finito não vazio cujos elementos são chamados de símbolos. Convencionalmente usamos o símbolo Σ para denotar um alfabeto.

Conceitos Centrais na Teoria de Autômatos

Alfabetos

Um conjunto finito, não vazio, cujos elementos são chamados de símbolos. Convencionalmente usamos o símbolo Σ para denotar um alfabeto.

Exemplos:

- Σ = {0,1}, o alfabeto binário;
- Σ = {a, b, c, …, z}, o conjunto de todas as letras minúsculas.
- Σ = {a, e, i, o, u}, conjunto de todas as vogais.

Conceitos Centrais na Teoria de Autômatos

Alfabetos

Um conjunto finito não vazio cujos elementos são chamados de símbolos. Convencionalmente usamos o símbolo Σ para denotar um alfabeto.

Exemplos:

- $\Sigma = \{0,1\}$, o alfabeto binário;
- $\Sigma = \{a, b, c, \ldots, z\}$, o conjunto de todas as letras minúsculas.
- $\Sigma = \{a, e, i, o, u\}$, conjunto de todas as vogais.

Os conceitos de **símbolo** e **alfabeto** são introduzidos de forma interdependente: um alfabeto é um conjunto de símbolos, e um símbolo é um elemento qualquer de um alfabeto.

Conceitos Centrais na Teoria de Autômatos

Alfabetos

Um conjunto finito não vazio cujos elementos são chamados de símbolos. Convencionalmente usamos o símbolo Σ para denotar um alfabeto.

Exemplos:

- Σ = {0,1}, o alfabeto binário;
- Σ = {a, b, c, …, z}, o conjunto de todas as letras minúsculas.
- Σ = {a, e, i, o, u}, conjunto de todas as vogais.

Os conceitos de **símbolo** e **alfabeto** são introduzidos de forma interdependente: um alfabeto é um conjunto de símbolos, e um símbolo é um elemento qualquer de um alfabeto.

Cadeias

Uma cadeia é uma sequência finita de símbolos escolhidos de algum alfabeto. Por exemplo, 01101 é uma cadeia do alfabeto binário Σ = {0,1}.

Conceitos Centrais na Teoria de Autômatos

Alfabetos

Um conjunto finito não vazio cujos elementos são chamados de símbolos. Convencionalmente usamos o símbolo Σ para denotar um alfabeto.

Exemplos:

- Σ = {0,1}, o alfabeto binário;
- Σ = {a, b, c, …, z}, o conjunto de todas as letras minúsculas.
- Σ = {a, e, i, o, u}, conjunto de todas as vogais.

Os conceitos de **símbolo** e **alfabeto** são introduzidos de forma interdependente: um alfabeto é um conjunto de símbolos, e um símbolo é um elemento qualquer de um alfabeto.

Cadeias

Uma cadeia é uma sequência finita de símbolos escolhidos de algum alfabeto. Por exemplo, 01101 é uma cadeia do alfabeto binário Σ = {0,1}.

A cadeia vazia

Uma *cadeia vazia* é uma cadeia com zero símbolos. Essa cadeia, denotada por ε, é uma cadeia que pode ser escolhida de qualquer alfabeto.

Conceitos Centrais na Teoria de Autômatos

Linguagem

Dado um alfabeto Σ, uma **linguagem** é definida como um conjunto cadeias sobre Σ.

Conceitos Centrais na Teoria de Autômatos

Linguagem

Dado um alfabeto $\boldsymbol{\Sigma}$, uma **linguagem** é definida como um conjunto cadeias sobre $\boldsymbol{\Sigma}$.

Exemplos:

1. Sobre o alfabeto $\boldsymbol{\Sigma} = \{0,1\}$, podemos formar as linguagens:

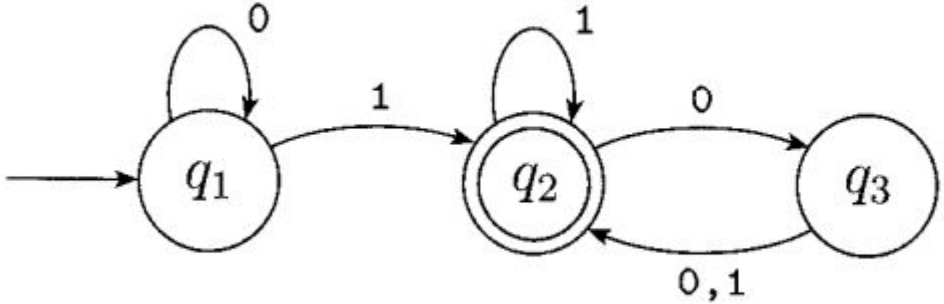
   L = {cadeias que começam por 0};

   A = {cadeias que começam por 1};

   B = {cadeias que terminam em zero};

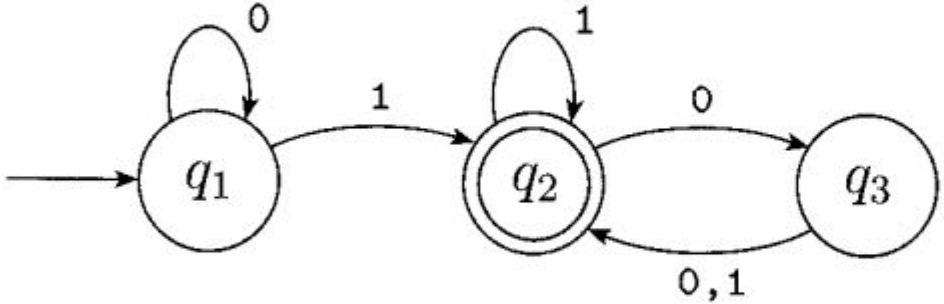
Autômatos Finitls

Exemplo 1: Considere o autômato finito a seguir.



Autômatos Finitls

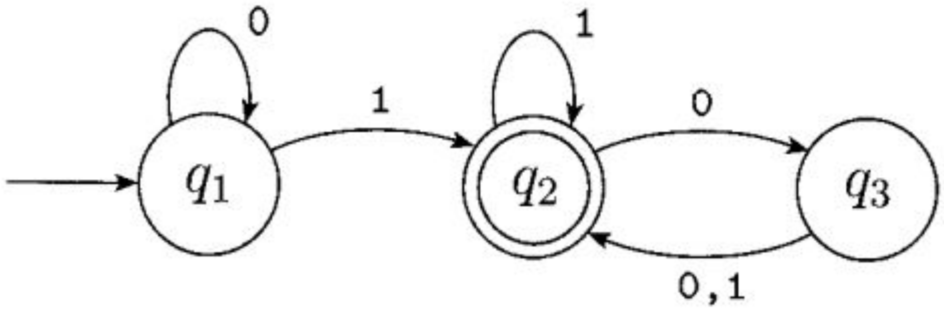
Exemplo 1: Considere o autômato finito a seguir.



- Quais símbolos são aceitos como entrada para esse autômato?
- Quais cadeias fazem com que este autômato termine a leitura no estado q_2?

Autômatos Finitls

Exemplo 1: Considere o autômato finito a seguir.



- Quais símbolos são aceitos como entrada para esse autômato?
- Quais cadeias fazem com que este autômato termine a leitura no estado q_2?

Esta figura é chamada diagrama de estado de **diagrama de estado** . O autômato tem três estados, rotulados q_1, q_2 e q_3. O estado inicial, q_1, é indicado pela seta apontando para ele a partir do nada. O estado de aceitação, q_2, é aquele com um duplo círculo. As setas saindo de um estado para outro são chamadas transições. Quando esse autômato recebe uma cadeia de entrada tal como 1101, ele processa essa cadeia e produz uma saída. A saída é **aceita** ou **rejeita**.

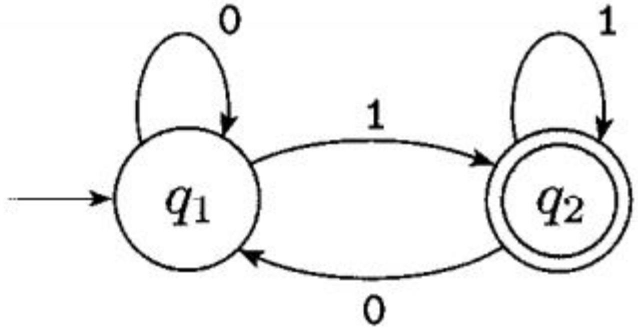
Definição Formal de Autômatos Finitos

Definição 1.1 ....

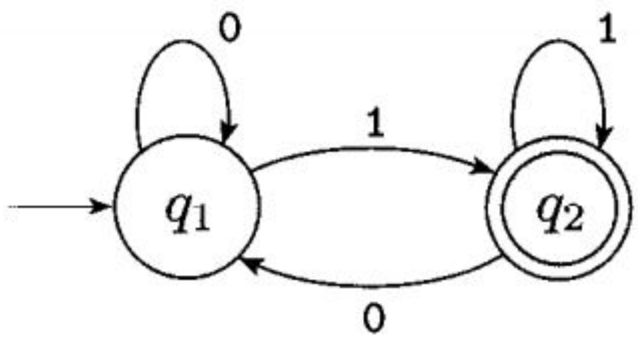
Um ***autômato finito*** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ onde

1. Q é um conjunto finito chamado de ***os estados***,
2. Σ é um conjunto finito chamaddo de ***o alfabeto***,
3. $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ é a ***função de transição***,[1]
4. $q_0 \in Q$ é o ***estado inicial***, e
5. $F \subseteq Q$ é o ***conjunto de estados de aceitação***.[2]

Exemplo 2: Dê a definição formal do autômato a seguir.



Exemplo 2: Dê a definição formal do autômato a seguir e determine a linguagem reconhecida por ele.

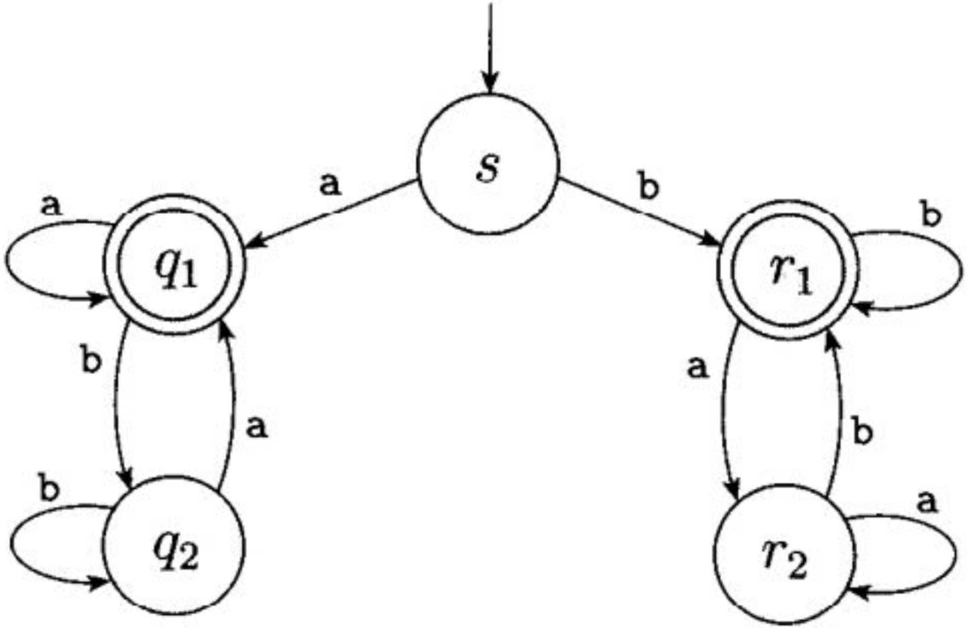


Definição 1.1 . . . .
Um ***autômato finito*** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ onde

1. Q é um conjunto finito chamado de ***os estados***,
2. Σ é um conjunto finito chamaddo de ***o alfabeto***,
3. $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ é a ***função de transição***,[1]
4. $q_0 \in Q$ é o ***estado inicial***, e
5. $F \subseteq Q$ é o ***conjunto de estados de aceitação***.[2]

Exemplo 3: Construir um autômato finito que reconheça todas as cadeias (sequências de símbolos) que terminam em 0.

Exemplo 4: Dê a definição formal do autômato a seguir e determine a linguagem reconhecida por ele.



Definição 1.1 . . . .

Um ***autômato finito*** é uma 5-upla $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ onde

1. Q é um conjunto finito chamado de ***os estados***,
2. Σ é um conjunto finito chamaddo de ***o alfabeto***,
3. $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$ é a ***função de transição***,[1]
4. $q_0 \in Q$ é o ***estado inicial***, e
5. $F \subseteq Q$ é o ***conjunto de estados de aceitação***.[2]

Definição Formal de Computação

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um autômato finito e $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ uma cadeia sobre o alfabeto Σ. Então M ***aceita*** w se uma seqüência de estados $r_0, r_1, \ldots, r_n$ existe em Q com as seguintes três condições:

1. $r_0 = q_0$,
2. $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$ para $i = 0, \ldots, n-1$, e
3. $r_n \in F$.

Definição Formal de Computação

Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ um autômato finito e $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ uma cadeia sobre o alfabeto Σ. Então M ***aceita*** w se uma seqüência de estados $r_0, r_1, \ldots, r_n$ existe em Q com as seguintes três condições:

1. $r_0 = q_0$,
2. $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$ para $i = 0, \ldots, n-1$, e
3. $r_n \in F$.

Definição 1.7 ....

Uma linguagem é chamada de uma ***linguagem regular*** se algum autômato finito a reconhece.

Projetando Autômatos Finitos

Projetando Autômatos Finitos

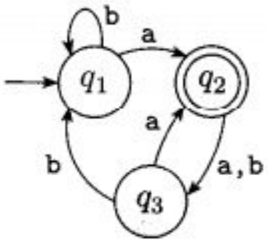
Exemplo: Considere que o alfabeto é {0,1} e a linguagem consiste em todas as cadeias com um número ímpar de 1's. Como construir um autômato que reconhece esta linguagem?

Projetando Autômatos Finitos

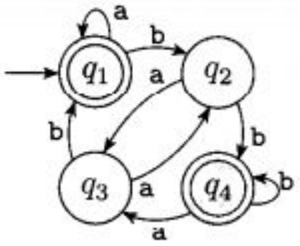
Exemplo: Considere que o alfabeto é {0,1} e a linguagem consiste em todas as cadeias que possuem a cadeia 001 como subcadeia. Por exemplo:0010 1001, 001, 111101000100100. Como construir um autômato que reconhece esta linguagem?

Exercícios:

1.1 Os diagramas a seguir são diagramas de estado de dois AFD's, M_1 e M_2. Responda às seguintes questões sobre essas máquinas.



M_1



M_2

a. Qual é o estado inicial de M_1?

b. Qual é o conjunto de estados de aceitação de M_1?

c. Qual é o estado de aceitação de M_2?

d. Qual é o conjunto de estados de aceitação de M_2?

e. Por qual seqüência de estados M_1 passa na entrada `aabb`?

f. M_1 aceita a cadeia `aabb`?

g. M_2 aceita a cadeia ε?

1.2 Dê uma definição formal das máquinas M_1 e M_2 desenhadas no Exercício 1.1.

Exercícios:

1.3 A descrição formal de um AFD M é $(\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{\mathtt{u}, \mathtt{d}\}, \delta, q_3, \{q_3\})$, onde δ é dada pela tabela abaixo. Dê o diagrama de estados dessa máquina.

	u	d
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_2	q_4
q_4	q_3	q_5
q_5	q_4	q_5

Exercícios :

1.4 Dê diagramas de estados de AFD's que reconhecem as linguagens a seguir. Em todos os casos o alfabeto é $\{0, 1\}$.

a. $\{w \mid w$ começa com um 1 e termina com um $0\}$.

b. $\{w \mid w$ contém pelo menos três 1's$\}$.

c. $\{w \mid w$ contém a subcadeia 0101, i.e., $w = x0101y$ para algum x e algum $y\}$.

d. $\{w \mid w$ tem comprimento pelo menos 3 e seu terceiro símbolo é um $0\}$.