Metodos computacionales: Series de Fourier

Diego Virguez - Gustavo Mejia

07/02/22

1.1 Series de Fourier:

Teniendo la definición de serie de Fourier:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n cos(nw_0 t) + b_n sin(nw_0 t)) \tag{1}$$

Podemos aplicar la linealidad de la derivada para hallar una ecuación para la derivada de la serie de Fourier:

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{d(\frac{a_0}{2})}{dt} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{d(a_n cos(nw_0 t))}{dt} + \frac{d(b_n sin(nw_0 t))}{dt}) \tag{2}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{\infty} nw_0(-a_n sin(nw_0 t) + b_n cos(nw_0 t)) \tag{3}$$

Nuevamente aplicamos la linealidad de la integral para hallar la ecuación mostrada en la guía

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{\infty}(\int_{t_1}^{t_2} a_n cos(nw_0 t)dt + \int_{t_1}^{t_2} b_n sin(nw_0 t)dt) \tag{4}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt = \frac{a_0(t_2 - t_1)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nw_0}(a_n(sin(nw_0 t_2) - sin(nw_0 t_1)) - (b_n(cos(nw_0 t_2) - cos(nw_0 t_1))) \tag{5}$$

1.2 Presentación de funciones:

Los coeficientes de la serie de Fourier están dados por las siguientes ecuaciones (L es el limite del intervalo):

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt \tag{6}$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)sin(\frac{n\pi t}{L})dt \tag{7}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)cos(\frac{n\pi t}{L})dt \tag{8}$$

En nuestro caso $f(t) = t$ y $L = \pi$ ya que el intervalo se encuentra entre $-\pi$ y π. Como la función es puramente impar, podemos saber que los términos correspondientes a los cosenos se anulan, por lo que $a_n = 0$, solo quedaría calcular b_n y a_0.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tdt \tag{9}$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}(\frac{\pi^2}{2} - \frac{(-\pi)^2}{2}) = 0 \tag{10}$$

Ahora bien.

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tsin(nt)dt \tag{11}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} tsin(nt)dt \tag{12}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}(-\frac{\pi cos(\pi)}{n} - \frac{\pi cos(-\pi)}{n} - \frac{\pi}{n}\int_{-\pi}^{\pi} cos(nt)dt) \tag{13}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}(-\frac{\pi cos(\pi n)}{n} - \frac{\pi cos(-\pi n)}{n} - \frac{\pi sen(n\pi)}{n^2} + \frac{\pi sen(-n\pi)}{n^2}) \tag{14}$$

$sen(n\pi)$ siempre es 0 ya que n es entero.

$$b_n = (-\frac{cos(\pi n)}{n} - \frac{cos(-\pi n)}{n}) \tag{15}$$

Y por la paridad del coseno.

$$b_n = -2\frac{cos(\pi n)}{n} \tag{16}$$

Como siempre que n sea entero el coseno varia entre -1 y 1.

$$b_n = -2\frac{(-1)^n}{n} \tag{17}$$

$$b_n = 2\frac{(-1)^{n-1}}{n} \tag{18}$$

Considerando que $w_0 = 1$ ya que $T = 2\pi$, la serie de Fourier para t en el intervalo seleccionado es:

$$t = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} sin(nt) \tag{19}$$

1.3 Funcion $\zeta(s)$ de Riemann:

Siguiendo un proceso similar al anterior se puede llegar a que la serie de Fourier para t^2 en un intervalo de $-\pi$ a π es:

$$t^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} cos(nt) \tag{20}$$

Integrando esto entre t_1 y t_2 se obtiene:

$$\frac{t^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}t + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}(sin(nt)) \tag{21}$$

La identidad de Parseval nos dice que:

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f^2(t)dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \tag{22}$$

Donde T = 2π, por lo tanto la integral quedaria como:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{t^3}{12}-\frac{\pi^2}{12})^2dt=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^6} \tag{23}$$

como $(-1)^{2n}$ siempre es 1, se puede despejar fácilmente la suma buscada:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{t^3}{12}-\frac{\pi^2}{12})^2dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6} \tag{24}$$

De tal forma que si quisiéramos calcular el valor exacto de la suma se podría calcular la integral numéricamente y dividirla entre pi. Si se realiza este proceso se obtiene un valor para la suma de:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}=1.01734=\frac{\pi^6}{945} \tag{25}$$