Trabalho final - ALN

Francisco Paranhos, Gustavo Cruz

June 2025

1 Apresentação do problema

O problema abordado consiste em utilizar as leis de Kirchhoff de corrente e voltagem para calcular a resistência equivalente entre dois pontos de um circuito elétrico. Para que as leis tenham validade, vamos considerar circuitos de corrente contínua, compostos por nós ligados por resistores ideais. A proposta é transformar o problema em um sistema de equações lineares e utilizar algum método iterativo visto em sala de aula para resolvê-lo.

2 Modelagem

Considere um circuito elétrico com N nós numerados de 1 a N. Pela lei da corrente de Kirchhoff, sabemos que, para qualquer nó do circuito, a soma das correntes entrando e saindo do nó deve ser igual à corrente injetada neste vértice por uma fonte externa independente (ou zero, caso não haja corrente externa injetada), ou seja, $\sum_j i_j = I_k$. Além disso, pela lei de Ohm, temos $V = i \cdot R$. Combinando as duas informações, obtemos a seguinte equação para cada nó k:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{V_k - V_j}{R_{kj}} = I_k,$$

onde R_{kj} é a resistência entre os nós k e j. Assim, realizando algumas manipulações algébricas:

$$\begin{aligned} I_k &= \sum_{j=1}^{n} (\frac{V_k}{R_{kj}} - \frac{V_j}{R_{kj}}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{V_k}{R_{kj}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{V_j}{R_{kj}} \\ &= V_k \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{R_{kj}} - \sum_{j=1}^{n} \frac{V_j}{R_{kj}} \end{aligned}$$

obtemos o sistema linear $A \cdot V = I$, onde $V = [V_1, \cdots, V_n]^t$, $\quad I = [I_1, \cdots, I_n]^t$ e a matriz A é dada por $a_{kj} = -\frac{1}{R_{kj}}$, se $k \neq j$, ou $a_{kk} = \sum_{j \neq k} \frac{1}{R_{kj}}$ caso contrário.

3 Aplicação dos algoritmos numéricos

Agora que já construímos um sistema a partir do problema, é necessário decidir qual método utilizar para resolvê-lo. Gostaríamos de poder aplicar o algoritmo do gradiente conjugado, mas a matriz obtida não é positiva-definida, apesar de ser simétrica. Entretanto, devido às características do problema, podemos fazer algumas adaptações para obter uma matriz simétrica positiva-definida.

Em primeiro lugar, observe que, se $V = [V_1, \cdots, V_n]^t$ é uma solução do sistema, somar uma constante real a todas as entradas do vetor também nos dá uma solução. Desse modo, definitivamente existe alguma solução em que uma das entradas do vetor é igual a zero. Suponha $V_i = 0$. Então, podemos resolver o sistema equivalente dado pela matriz A sem a coluna i e pelo vetor V sem a i-ésima entrada, de modo a recuperar exatamente a mesma solução.

Por outro lado, a matriz A ser positiva-semidefinida significa, entre outras coisas, que suas linhas formam um conjunto linearmente dependente. Entretanto, sabemos que a soma de todas as correntes injetadas deve ser igual a zero, e, portanto, sabemos exatamente como escrever uma linha como combinação linear das outras:

$$\sum_{j=1}^{n} I_j = 0 \longleftrightarrow I_k = -\sum_{j \neq k}^{n} I_j \longleftrightarrow A_k = -\sum_{j \neq k}^{n} A_j,$$

Onde A_k denota a k-ésima linha da matriz. Assim, podemos resolver o sistema equivalente sem a k-ésima equação e ainda assim recuperar o mesmo resultado.

Dessa maneira, utilizando as duas observações acima, podemos remover a k-ésima linha e a k-ésima coluna da matriz para encontrar uma solução do problema origainal. Além disso, a matriz resultante é simétrica positiva-definida, ou seja, podemos aplicar o algoritmo do gradiente conjugado.

A versão do algoritimo do gradiente conjugado que utilizamos é a que se encontra na bibliografia do curso, dada por:

Algorithm 1 Algoritmo do Gradiente Conjugado

Inicializar:
$\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{b} - A\mathbf{x}$ ▷ Resíduo inicial
$\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{r}$ ▷ Direção de busca inicial
$\nu \leftarrow \mathbf{r}^T\mathbf{r}$ ▷ Norma do resíduo ao quadrado
$k \leftarrow 0$ ▷ Contador de iterações
loop ▷ Repetir até convergir ou atingir l iterações
if não converge e $k < l$ **then**
    $\mathbf{q} \leftarrow A\mathbf{p}$
    $\mu \leftarrow \mathbf{p}^T\mathbf{q}$
    $\alpha \leftarrow \nu/\mu$
    $\mathbf{x} \leftarrow \mathbf{x} + \alpha\mathbf{p}$
    $\mathbf{r} \leftarrow \mathbf{r} - \alpha\mathbf{q}$
    $\nu_+ \leftarrow \mathbf{r}^T\mathbf{r}$
    $\beta \leftarrow \nu_+/\nu$
    $\mathbf{p} \leftarrow \mathbf{r} + \beta\mathbf{p}$
    $\nu \leftarrow \nu_+$
    $k \leftarrow k + 1$
else
    break
end if
end loop
if não convergiu **then**
    definir alerta de não convergência
end if

Como, para a maioria dos circuitos com aplicações práticas, a matriz é relativamente esparsa, este algoritmo é uma boa escolha para a resolução do sistema.

4 Conclusão

Por fim, com as devidas alterações, foi possível aplicar uma técnica vista em sala de aula em um problema de natureza física. Portanto, consideramos que o objetivo do trabalho foi cumprido. Exibiremos o funcionamento do programa e alguns resultados na apresentação oral.