1. Descomposisición 3+1

La descomposición 3+1 de la Relatividad General, consiste en reescribir la métrica espacio–tiempo $g_{\mu\nu}$ en términos de una foliación por hipersuperficies espaciales Σ_t de codimensión uno, parametrizadas por un tiempo coordinado t. Esta foliación permite separar explícitamente las variables dinámicas gravitatorias de su evolución temporal.

En términos de las funciones $\alpha, \beta^i, \gamma_{ij}$, se puede ver fácilmente que la métrica del espacio-tiempo toma la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -\alpha^2 dt^2 + \gamma_{ij}\left(dx^i + \beta^i dt\right)\left(dx^j + \beta^j dt\right) && (1)\\
&= \big(-\alpha^2 + \beta_i\beta^i\big)dt^2 + 2\beta_i dt dx^i + \gamma_{ij} dx^i dx^j && (2)
\end{aligned}
$$

en donde α, β^i y γ_{ij} corresponden a la función lapse, el vector shift y las componentes espaciales, respectivamente. En particular, $\beta_i := \gamma_{ij}\beta^j$. De manera más explicita, tenemos:

$$
g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_i\beta^i & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix} \tag{3}
$$

Y el tensor inverso es:

$$
g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^j/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i\beta^j/\alpha^2 \end{pmatrix} \tag{4}
$$

En este formalismo se satisface que

$$
\sqrt{-g} = \alpha\sqrt{\gamma} \tag{5}
$$

donde $g := \det(g_{\mu\nu})$ y $\gamma := \det(\gamma_{ij})$.

2. General Relativity Hydrodinamics

Las ecuaciones de GRHD (General Relativity Hydrodinamics) se pueden reescribir en forma conservatica de la siguiente forma (Alcubierre, 2008; Font, 2007):

$$
\frac{1}{\sqrt{-g}}\left[\partial_t\big(\sqrt{\gamma}\mathbf{U}\big) + \partial_k\big(\sqrt{-g}\mathbf{F}^k\big)\right] = \mathbf{S} \tag{6}
$$

O de manera equivalente:

$$
\partial_t\big(\sqrt{\gamma}\mathbf{U}\big) + \partial_k\big(\sqrt{-g}\mathbf{F}^k\big) = \sqrt{-g}\mathbf{S} \tag{7}
$$

en donde $\mathbf{U}$ es el vector de variables conservadas, $\mathbf{F}$ el vector de los flujos, $\mathbf{S}$ el vector de términos fuentes. Esta ecuacion tambien se puede escribir como

$$
\partial_t\big(\sqrt{\gamma}\mathbf{U}\big) + \partial_k\big(\sqrt{\gamma}\mathbf{F}^k\big) = \alpha\sqrt{\gamma}\mathbf{S} \tag{8}
$$

en donde

$$
\begin{aligned}
\mathbf{U} &= \big(D,\ S_j,\ \tau\big), && (9)\\
\mathbf{F}^k &= \big(D\tilde{v}^k,\ S_j\tilde{v}^k + \alpha p\delta^k_j,\ \tau\tilde{v}^k + \alpha p v^k\big) && (10)\\
\mathbf{S} &= \big(0,\ \Gamma^{\mu}_{\nu j}T^{\nu}_{\mu},\ \alpha\big[T^{0\mu}\partial_\mu \ln\alpha - \Gamma^{0}_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\big]\big) && (11)
\end{aligned}
$$

siendo $\tilde{v}^k = \alpha v^k - \beta^k$. En particular, las ecuaciones de masa, momento y energía estan definidas como se muestra a continuación:

$$
D = \rho W, \quad S_j = \rho h W^2 v_j, \quad \tau = \rho h W^2 - p - D, \tag{12}
$$

donde definimos al factor de Lorenz como $W = \big[1 - v^2\big]^{-1/2}$, con $v := \gamma_{ij}v^i v^j$.

3. Métrica de Schwarzchild

El elemento de línea de Schwarzchild (usando coordenadas geométricas $G = c = 1$) se define como

$$
ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{13}
$$

No obstante usando coordenadas Eddington–Finkelstein, tenemos que el elmento de línea es:

$$
ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{4M}{r}dtdr + \left(1 + \frac{2M}{r}\right)dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \tag{14}
$$

Así, el tensor métrico se define como:

$$
g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix}
-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & \frac{2M}{r} & 0 & 0\\
\frac{2M}{r} & \left(1 + \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0\\
0 & 0 & r^2 & 0\\
0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta
\end{pmatrix} \tag{15}
$$

Y

$$
g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix}
-\left(1 + \frac{2M}{r}\right) & \frac{2M}{r} & 0 & 0\\
\frac{2M}{r} & \left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0\\
0 & 0 & r^{-2} & 0\\
0 & 0 & 0 & r^{-2}\sin^{-2}\theta
\end{pmatrix}. \tag{16}
$$

Luego, símbolos de Christoffel no nulos son:

$$
\begin{matrix}
\Gamma^t_{tt} = \frac{2M^2}{r^3} & \Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \frac{M}{r^2}\left(1 + \frac{2M}{r}\right)\\
\Gamma^t_{rr} = \frac{2M}{r^2}\left(1 + \frac{2M}{r}\right) & \Gamma^r_{rr} = -\frac{M}{r^2}\left(1 + \frac{2M}{r}\right)\\
\Gamma^r_{tr} = -\frac{2M^2}{r^3} & \Gamma^r_{tt} = \frac{M}{r^2}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\\
\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} & \Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r}\\
\Gamma^t_{\theta\theta} = -2M & \Gamma^r_{\theta\theta} = 2M - r\\
\Gamma^t_{\phi\phi} = -2M\sin^2\theta & \Gamma^r_{\phi\phi} = \big(2M - r\big)\sin^2\theta\\
\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta & \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cot\theta
\end{matrix} \tag{17}
$$

Por otro lado, métrica de Schwarzschild en coordenadas Eddington Finkestein usando la descomposición $3+1$ es:

$$\alpha = \left[1+\frac{2M}{r}\right]^{-1/2} \tag{18}$$

$$\beta^i = \big(\beta^r, 0, 0\big) \tag{19}$$

$$\gamma_{ij} = \mathrm{diag}\left(1+\frac{2M}{r}, r^{\ 2},\ r^2\sin^2\theta\right) \tag{20}$$

$$\beta_i = \big(\beta_r, 0, 0\big) \tag{21}$$

$$\gamma = r^4\sin^2\theta\left(1+\frac{2M}{r}\right) \tag{22}$$

4. Tensor energía momento

Sea el tensor energía momento para un fluido perfecto definido como

$$T^{\mu\nu} := \rho h U^\mu U^\nu + p g^{\mu\nu} \tag{23}$$

en donde $U^t = U^0 = W/\alpha$ y $U^k = W\big(v^k - \beta^k/\alpha\big)$. Entonces, los elementos no nulos del tensor energía momentos son:

$$T^{tt} = \frac{1}{\alpha^2}\big(\rho h W^2 - p\big) \tag{24}$$

$$T^{tr} = \frac{\rho h W^2}{\alpha}\left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}\right) + p\frac{\beta^r}{\alpha^2} \tag{25}$$

$$T^{rr} = \rho h U^r U^r + p g^{rr} = \rho h W^2\left(v^r - \frac{\beta^r}{\alpha}\right)^2 + p\left(\gamma^{rr} - \beta^r\beta^r/\alpha^2\right) \tag{26}$$

$$T^{\theta\theta} = \frac{p}{r^2} \tag{27}$$

$$T^{\phi\phi} = \frac{p}{r^2\sin^2\theta} \tag{28}$$

ya que consideramos movimientos puramente radial, y así $v^\theta = v^\phi = 0$.

5. Elementos del término fuente

Dada la ecuación (11) que corresponde al vector de términos fuente tenemos:

$$\mathbf{S} = \big(0,\ \Gamma^\mu_{\nu j}T^\nu_\mu,\ \alpha\big[T^{0\mu}\partial_\mu \ln\alpha - \Gamma^0_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\big]\big)$$

En el caso de simetria esferica con componentes nula en dirección θ y ϕ, se reduce a

$$\begin{aligned}\Gamma^\mu_{\nu j}T^\nu_\mu = T^{00}\Big[\big(-\alpha^2 + \gamma_{rr}(\beta^r)^2\big)\Gamma^0_{0r} + \gamma_{rr}\beta^r\Gamma^r_{0r}\big)\Big] + T^{0r}\Big[\big(-\alpha^2 + \gamma_{rr}(\beta^r)^2\big)\Gamma^0_{0r} + \gamma_{rr}\Gamma^r_{rr} + \gamma_{rr}\beta^r\big(\Gamma^0_{rr} + \Gamma^0_{0r}\big)\Big]\\ + T^{rr}\Big[\gamma_{rr}\Gamma^r_{rr} + \gamma_{rr}\beta^r\Gamma^0_{rr}\Big]\end{aligned} \tag{29}$$

Y

$$\begin{aligned}\alpha\big[T^{0\mu}\partial_\mu\ln\alpha - \Gamma^0_{\mu\nu}T^{\mu\nu}\big] = \alpha\Big[T^{00}\big(\partial_0\ln\alpha - \Gamma^0_{00}\big) + T^{0r}\big(\partial_r\ln\alpha - 2\Gamma^0_{0r}\big)\\ - \big(\Gamma^0_{rr}T^{rr} + \Gamma^0_{\theta\theta}T^{\theta\theta} + \Gamma^0_{\phi\phi}T^{\phi\phi}\big)\Big]\end{aligned} \tag{30}$$