UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GUSTAVO VALENTE NUNES

# MODELAGEM DE UM PROBLEMA DE ENVIO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR

CURITIBA PR

2022

GUSTAVO VALENTE NUNES

# MODELAGEM DE UM PROBLEMA DE ENVIO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR

Trabalho apresentado como requisito parcial à conclusão da disciplina de Otimização no Curso de Bacharelado em Ciência da Computação, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Área de concentração: *Ciência da Computação*.

CURITIBA PR

2022

**SUMÁRIO**

# 1 INTRODUÇÃO

O problema sugerido pelo orientador consiste em modelar e implementar uma solução para o problema de envio ordenado. Existe uma certa quantidade de produtos disponíveis e esses produtos precisam ser enviados em uma quantidade finita de viagens. O objetivo do trabalho, é encontrar uma solução que minimize a quantidade de viagens necessárias para realizar o transporte de todas as mercadorias. Os itens que serão transportados podem ser separados em pedaços menores de forma que seja possível separar os pedaços em caminhões diferentes.

## 1.1 LIMITAÇÕES E DETALHES

Antes de começar a análise e modelagem do problema, vou definir alguns detalhes, limitações e problemas encontrados.

- O custo mínimo é calculado sobre a quantidade mínima de viagens necessárias, de forma que eu consiga fazer o transporte de todos os produtos.
- Cada caminhão possui um limite de peso que ele consegue carregar. E esse peso precisa ser respeitado pelos itens que estarão dentro desse caminhão.
- Os caminhões podem carregar diferentes itens, contanto que o peso seja respeitado.
- Na modelagem do problema, os pares ordenados não foram considerados. Isso porque não foi encontrada uma forma de se utilizar os pares ordenados utilizando da programação linear.
- Se necessário, um item pode ser separado em diferentes caminhões.

## 1.2 VARIÁVEIS DO PROBLEMA

Nesta seção é apresentado as variáveis e restrições que foram utilizadas na modelagem do problema.

**Variáveis Gerais:**

- n = Quantidade de itens que serão transportados.
- C = Capacidade total possível para cada caminhão.

**Váriaveis referente ao problema:**

- $w_i$ = representa o peso do item i.
- $y_j$ = representa o caminhão j.
- $x_{i,j}$ = representa o item i no caminhão j.

Essas são todas as variáveis necessárias para realizar a modelagem do problema. Nos próximos capítulos serão abordados a resposta ótima para o problema, a modelagem/restrições, como foi implementado e um exemplo prático.

## 1.3 ESCOLHA DA FERRAMENTA DE MODELAGEM

O problema de envio de cargas será resolvido utilizando as técnicas de programação linear. Nesta área, uma das principais preocupações é encontrar uma solução ótima para o problema. Neste problema, a solução ótima é aquela que respeita as restrições e o custo total mínimo. A técnica de programação linear que será utilizada, é o simplex. Iremos utilizar a linguagem de programação python junto com uma ferramenta chamada ortools do Google e como essa ferramenta nos disponibiliza vários resolvedores possíveis, o escolhido é o "GLOP".

### 1.3.1 Exemplo de como utilizar a ferramenta

Para facilitar a leitura dos problemas posteriores, nessa seção será apresentado um passo a passo de um problema básico, desde sua modelagem, até solução. Vamos supor o seguinte problema de programação linear:

$$max : 3x + 4y$$

$$st : x + 2y \leq 14$$

$$st : 3x - y \geq 0$$

$$st : x - y \leq 2$$

Tanto a função objetiva 3x + 4y, quanto suas restrições são representados por expressões lineares, criando assim um problema de programação linear. As restrições do problema, criam a seguinte região.

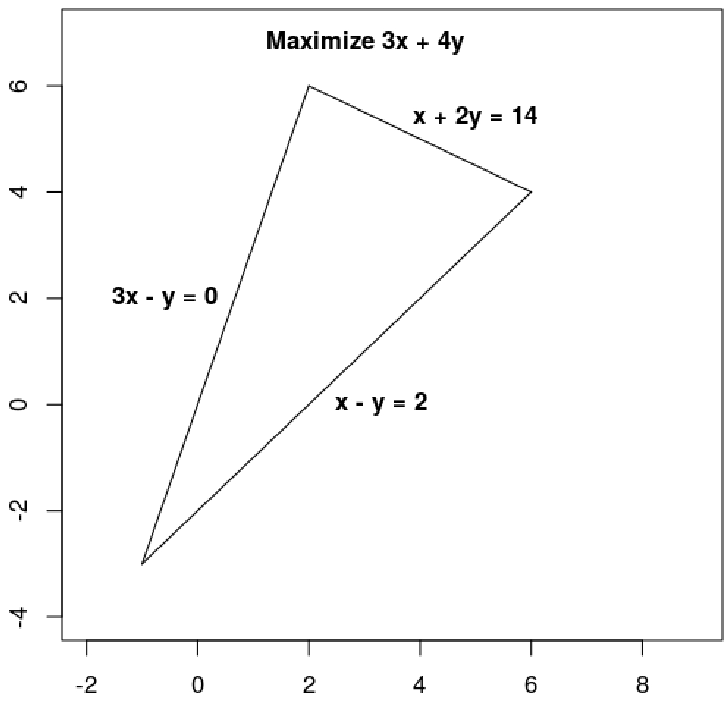



Imagem 1: Possíveis resultados.

Para começarmos a resolução do problema de exemplo, precisaremos fazer o import da biblioteca e selecionar o resolver que queremos.

```
from ortools.linear_solver import pywraplp

solver = pywraplp.Solver.CreateSolver('GLOP')
```

Imagem 1: Import e Resolvedor

Como já explicado acima, o "GLOP"é um resolvedor de problemas de programação linear que utiliza o algoritmo do simplex. Agora que já temos o resolvedor pronto, precisamos criar as variáveis e as restrições. Para criar as variáveis, precisamos fazer o seguinte:

```
x = solver.NumVar(0, solver.infinity(), 'x')
y = solver.NumVar(0, solver.infinity(), 'y')
```

Imagem 2: Variáveis do problema.

Com as váriaveis criadas, precisamos criar as restrições necessáris.

```
solver.Add(x + 2 * y <= 14.0)
solver.Add(3 * x - y >= 0.0)
solver.Add(x - y <= 2.0)
```

Imagem 3: Restrições do problema.

Agora que temos tanto as variáveis do problema e as restrições, preciso criar minha função objetiva e chamar o resolvedor.

```
solver.Maximize(3 * x + 4 * y)
status = solver.Solve()
```

Imagem 3: Restrições do problema.

Agora com tudo pronto, teremos a seguinte resposta.

```
Solution:
Objective value = 33.99999999999999
x = 5.999999999999998
y = 3.9999999999999996
```

Imagem 4: Restrições do problema.

Esse é um exemplo de como funciona a ferramenta or-tools, dessa mesma forma será feito a modelagem do problema de envio de cargas.

# 2 MODELAGEM E RESTRIÇÕES

Neste capítulo será realizado a modelagem do problema utilizando as variáveis já descritas nos capítulos anteriores. De forma a facilitar o entendimento, será apresentado a modelagem inteira de uma vez e em seguida será discutido passo a passo de como ela funciona.

| Inequações | Restrições | Limite |
|---|---|---|
| Inequação 1 | $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1$ | $1 \leq i, j \leq n$ |
| Inequação 2 | $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i * x_{i,j} \leq C * y_i$ | $1 \leq i, j \leq n$ |
| Inequação 3 | $x_{i,j} \in \{0.0, 1.0\}$ | $1 \leq i, j \leq n$ |
| Inequação 4 | $y_j \in \{0.0, 1.0\}$ | $1 \leq j \leq n$ |

**INEQUAÇÃO 1:** A inequação 1 nos diz a quantidade do item i que está contida dentro do caminhão j, essa soma não pode ultrapassar o 1, que indica que o item já foi completamente transportado. Essa restrição é importante, porque confirma quando o item inteiro já foi transportado.

**INEQUAÇÃO 2:** A inequação 2 nos diz qual o peso limite que cada caminhão pode carregar. Como o C (Capacidade) é um valor fixo, todos os caminhões terão um mesmo limite de peso. Então cada item multiplicado pelo seu peso, terão que ser menores que a quantidade limite de peso que o caminhão consegue carregar. Essa restrição é importante, porque dessa forma conseguimos separar os itens em vários caminhões, caso contrário todos os itens irão em um único caminhão.

**INEQUAÇÃO 3 e 4:** Essas inequações apenas nos diz qual é o conjunto de valores que $x_{i,j} e y_j$ podem assumir.

## 2.1 FUNÇÃO DE CUSTO

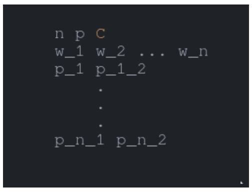
Com a função abaixo que iremos conseguir calcular nosso resultado ótimo para o problema.

$$\sum_{j=1}^{n} y_j, 1 \leq j \leq n$$

Como o problema é encontrar a menor quantidade de viagens possíveis. Com isso, basta fazer a soma de todos os $y_j$ que conseguiremos chegar em um resultado ótimo para o problema, é importante ressaltar que esse valor de $y_j$ está dentro do limite de $\{0.0, 1.0\}$.

# 3 FORMATO DE ENTRADA

O nosso formato de entrada é a partir de um arquivo. Em sua primeira linha existem três números, **n** sendo a quantidade de itens, **p** indicando o número de pares ordenados, e **C** que indica a capacidade total de cada caminhão. Na segunda linha, tempos n pesos $w_i$, sendo que cada i representa o peso de um item. E no final, tempos os pares ordenados (p1, p2), que por motivos já citados anteriormente, não foram utilizados para resolver este problema. Para uma melhor representação, segue a imagem abaixo dê um exemplo genérico:



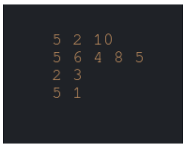
```
n p C
w_1 w_2 ... w_n
p_1 p_1_2
    .
    .
    .
p_n_1 p_n_2
```

Imagem 6: Exemplo genérico de entrada.

Esse seria um exemplo genérico de entrada, para que o script consiga resolver independentemente dos valores de entrada.

## 3.1 EXEMPLO PRÁTICO

Neste capítulo vamos modelar o problema do envio de cargas de acordo com os valores de entrada da figura abaixo.



```
5 2 10
5 6 4 8 5
2 3
5 1
```

Imagem 7: Exemplo de entrada com valores reais.

Entrada:

n = 5; p = 2; C = 10;

$w_1 = 5, w_2 = 6, w_3 = 4, w_4 = 8, w_5 = 5$

$(p_1 = 2, p_2 = 3)$

$(p_1 = 5, p_2 = 1)$

Saída:

2.8

De acordo com o capítulo onde foi explicado as restrições e as variáveis, as restrições serão montadas de acordo com as inequações já apresentadas.

Inequação 1: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1$

As restrições ficariam da seguinte forma:

$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} = 1$

$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{2,5} = 1$

$x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} + x_{3,5} = 1$

$x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} + x_{4,4} + x_{4,5} = 1$

$x_{5,1} + x_{5,2} + x_{5,3} + x_{5,4} + x_{5,5} = 1$

Inequação 2: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i * x_{i,j} \leq C * y_i$

$5x_{1,1} + 5x_{1,2} + 5x_{1,3} + 5x_{1,4} + 5x_{1,5} \leq 10 * y_1$
$6x_{2,1} + 6x_{2,2} + 6x_{2,3} + 6x_{2,4} + 6x_{2,5} \leq 10 * y_2$
$4x_{3,1} + 4x_{3,2} + 4x_{3,3} + 4x_{3,4} + 4x_{3,5} \leq 10 * y_3$
$8x_{4,1} + 8x_{4,2} + 8x_{4,3} + 8x_{4,4} + 8x_{4,5} \leq 10 * y_4$
$5x_{5,1} + 5x_{5,2} + 5x_{5,3} + 5x_{5,4} + 5x_{5,5} \leq 10 * y_5$

limites:

$x_{i,j} \in \{0, 1\}$
$y_j \in \{0, 1\}$

Essa seria a modelagem do problema, se utilizarmos as restrições. Se jogarmos essas restrições em qualquer resolvedor, teríamos o resultado de 2.8. A imagem abaixo representa a solução dessa modelagem utilizando o lpsolve IDE, que é basicamente um resolvedor com interface gráfica.

| Variables | result |
|---|---|
| | 2.8 |
| y1 | 0.5 |
| y2 | 0.6 |
| y3 | 0.4 |
| y4 | 0.8 |
| y5 | 0.5 |
| x11 | 1 |
| x12 | 0 |
| x13 | 0 |
| x14 | 0 |
| x15 | 0 |
| x21 | 1 |
| x22 | 0 |
| x23 | 0 |
| x24 | 0 |
| x25 | 0 |
| x31 | 1 |
| x32 | 0 |
| x33 | 0 |
| x34 | 0 |
| x35 | 0 |
| x41 | 1 |
| x42 | 0 |
| x43 | 0 |
| x44 | 0 |
| x45 | 0 |
| x51 | 1 |
| x52 | 0 |
| x53 | 0 |
| x54 | 0 |
| x55 | 0 |

Imagem 8: Resolvedor com interface grafica IDE

# 4 MODELAGEM UTILIZANDO O PYTHON3

Neste capítulo será explicado como utilizar da ferramenta or-tools para resolver o problema de envio de cargas, será apresentado apenas as partes importantes do código. De forma que seja possível resolver o problema para qualquer entrada, separamos o código em duas partes. A primeira parte lê o arquivo de entrada e salvo em um dicionário chamado dictInput e a partir disso consigo criar um dicionário chamado data que representa a modelagem do problema de envio de cargas. E a na segunda parte é onde conseguimos a solução do problema.

```
# Dicionario que salvo os dados de entrada
# a partir do arquivo.
dictInput = {
    "firstLine": [],
    "weights": [],
    "ordered_pairs": [],
}
```

Imagem 9: Dicionário que contém o input dos dados.

```
# Indica os pesos de cada item
data["weights"] = dictInput["weights"]

# Indica a quantidade de itens existentes
# Será utilizado para criar as váriaveis mais tarde
data["items"] = list(range(len(dictInput["weights"])))

# Indica a quantidade de caminhões.
data["bins"] = data["items"]

# Indica os pares ordenados. Aviso: Não foi utilizado.
data["ordered_pairs"] = dictInput["ordered_pairs"]

#Indica a capacidade da carga, C
data["bin_capacity"] = dictInput["firstLine"][2]
```

Imagem 10: Dicionário que contém os dados modelados.

Agora que tempos os dados de entrada dentro de um dicionário, fica muito mais fácil de se criar as restrições do problema. Agora é necessário criar as variáveis dos itens e dos caminhões. Conseguimos fazer isso da seguinte forma:

```
# x[i, j] = 1, se o item está no caminhão j
x = {}
for i in data['items']:
    for j in data['bins']:
        # Cria uma váriavel(objeto do tipo NumVar) e salvo na váriavel x_i_j
        x[(i, j)] = solver.NumVar(0.0, 1.0, 'x_%i_%i' % (i, j))
```

Imagem 11: Criação das variáveis. $x_{i,j}$

Dessa forma, conseguimos criar as váriaveis que indicará em qual caminhão j o item i irá pertencer.

Para criarmos os possíveis caminhões, será feito algo similar.

```
# y[j] = 1, se o caminhão j está sendo usado.
y = {}
for j in data['trucks']:
    y[j] = solver.NumVar(0, 1.0, 'y[%i]' % j)
```

Imagem 11: Criação das váriaveis dos caminhões $y_j$

Com isso conseguimos criar todas as variáveis necessárias para o problema.

Agora que as variáveis já estão criadas, é necessário criar as restrições do problema. Será criado primeiro a restrições que indicam em qual caminhão cada item será inserido, será feito isso da seguinte forma:

```
# A soma dos itens existentes, não devem exceder 1.
# Isso porque, a soma dos itens não deve exceder o caminhão.
for i in data['items']:
    solver.Add(sum(x[i, j] for j in data['trucks']) == 1)
```

Imagem 12: Criação das restrições que indica o envio total do item;

Agora é preciso criar as restrições de pesos para cada caminão, será feito de forma similar as restrições anteriores.

```
# Indica que o peso não deve exceder a capacidade
for j in data['trucks']:
    solver.Add(
        sum(x[(i, j)] * data['weights'][i] for i in data['items'])  <= data["trucks_capac
    )
```

Imagem 12: Criação das restrições de peso para cada caminhão.

Agora que todas as variáveis, restrições e toda a modelagem está feita, basta rodar o resolvedor fazendo o seguinte:

```
# Função objetiva. Minimza o numero de caminhões utilizados.
solver.Minimize(solver.Sum([y[j] for j in data['trucks']]))

# Chama o resolver
solver.Solve()
```

Imagem 12: Função objetiva e resolvedor

Dessa forma é possível resolver qualquer situação que envolva o problema de envio de cargas citado neste artigo. Basta a entrada de dados serem no formato citado.

## 5 OUTROS EXEMPLOS

Entrada:

n = 10; p = 2; C = 20;

$w_1 = 5, w_2 = 6, w_3 = 4, w_4 = 8, w_5 = 5, w_6 = 0, w_7 = 1, w_8, = 2, w_9, = 39, w_{10} = 2$

$(p_1 = 2, p_2 = 3)$

$(p_1 = 5, p_2 = 1)$

Saída:

3.6

Entrada:

n = 15; p = 2; C = 30;

$w_1 = 7, w_2 = 2, w_3 = 4, w_4 = 4, w_5 = 5, w_6 = 29, w_7 = 2, w_8 = 1, w_9 = 94, w_{10} = 57, w_{11} = 12, w_{12} = 305, w_{13} = 28, w_{14} = 2, w_{15} = 3$

$(p_1 = 2, p_2 = 3)$

$(p_1 = 5, p_2 = 1)$

Saída:

Não existe solução ótima.

# 6 REFERÊNCIAS

[1] MATOUŠEK, Jiří; GÄRTNER, Bernd. Understanding and Using Linear Programming. [S. l.]: Springer, 2007.

[2] Google OR-Tools, Google, https://developers.google.com/optimization, 2015, acessado em 11/04/2022