UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GUSTAVO VALENTE NUNES

MODELAGEM DE UM PROBLEMA DE ENVIO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR

CURITIBA PR

2022

GUSTAVO VALENTE NUNES

MODELAGEM DE UM PROBLEMA DE ENVIO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR

Trabalho apresentado como requisito parcial à conclusão da disciplina de Otimização no Curso de Bacharelado em Ciência da Computação, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Área de concentração: *Ciência da Computação*.

CURITIBA PR

2022

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O problema sugerido pelo orientador consiste em modelar e implementar uma solução para o problema de envio ordenado. Existe uma certa quantidade de produtos disponíveis e esses produtos precisam ser enviados em uma quantidade finita de caminhões. O objetivo do trabalho, é encontrar uma solução que minimize a quantidade de caminhões necessários para realizar o transporte de todas as mercadorias. Os items serão que transportados, podem ser separados em pedaços menores de forma que seja possível separar os pedaços em caminhões diferentes.

1.1 LIMITAÇÕES E DETALHES

Antes de começar a análise e modelagem do problema, vou definir alguns detalhes, limitações e problemas encontrados.

- O custo mínimo é calculado sobre a quantidade minima de viagens necessárias, de forma que eu consiga fazer o transporte de todos os produtos.
- Cada caminhão possui um limite de peso que ele consegue carregar. E esse peso precisa ser respeitado pelos itens que estarão dentro desse caminhão.
- Os caminhões podem carregar diferentes itens, contanto que o peso seja respeitado.
- Na modelagem do problema, não foi considerado os pares ordenados. Isso porque não foi possível chegar em uma forma de ter pares ordenados utilizando programação linear.
- Se necessário, um item pode ser separado em diferentes caminhões.

1.2 VARIÁVEIS DO PROBLEMA

Nessa sessão é apresentado as váriaveis e restrições que foram realizados na usados na modelagem do problema.

Variaveis Geras

- n = Quantidade de itens que terão que ser transportados.
- C = Capacidade total possível para cada caminhão.

Váriaveis referente ao problema

- x_i = representa o item i.
- w_i = representa o peso do item i.
- y_j = representa o caminhão j.
- $x_{i,j}$ = representa o item i no caminhão j.

Essas são todas as váriaveis necessárias para realizar a modelagem do problema. Nos próximos capítulos seram abordados a resposta ótima para o problema, a modelagem e restrições, como foi implementado e um exemplo prático.

1.3 RESPOSTA ÓTIMA PARA O PROBLEMA

O problema de envio de cargas será resolvido utilizando as técnicas de programação linear. Nesta área, uma das principais preocupações para o problema, é encontrar uma solução ótima para o problema. Neste problema, a solução ótima é aquela que respeita as restrições e o custo total mínimo. A técnica de programação linear que será utilizada, é o simplex. Iremos utilizar a linguagem de programação python junto com uma ferramenta chamada ortools do Google e como essa ferramenta nos disponibiliza vários resolvedores possíveis, o escolhido é o "GLOP".

1.3.1 Exemplo de como utilizar a ferramenta

Para facilitar a leitura dos problemas posteriores, nessa seção será apresentado um passo a passo de um problema básico. Desde sua modelagem, até solução. Vamos supor o seguinte problema de programação linear:

$$max : 3x + 4y$$

$$st : x + 2y \leq 14$$

$$st : 3x - y \geq 0$$

$$st : x - y \leq 2$$

Tanto a função objetiva 3x + 4y quanto suas restrições são representado por expressões lineares, criando assim um problema de programação linear. As restrições do problema, criam a seguinte região.

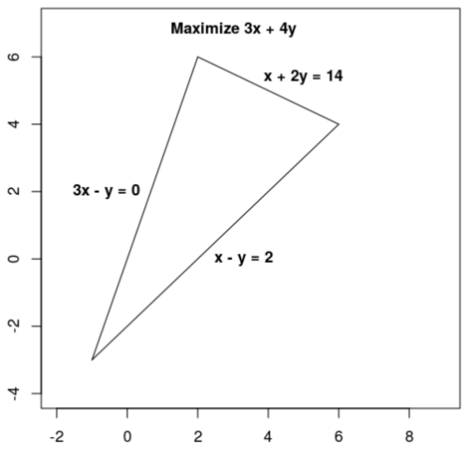


Imagem 1: Feasible region

Para começarmos a resolução do problema de exemplo, precisaresmo fazer o import da bilioteca e selecionar o resolver que queremos.

```
from ortools.linear_solver import pywraplp

solver = pywraplp.Solver.CreateSolver('GLOP')
```

Imagem 1: Import e Resolvedor

Como ja explicado acima, o "GLOP"é um resolver de problemas de programação linear que utilizado o algoritimo do simplex. Agora que ja temos o resolvedor pronto, precisamos criar as váriaveis e as restrições. Para criar as váriaveis, precisamos fazer o seguinte :

```
x = solver.NumVar(0, solver.infinity(), 'x')
y = solver.NumVar(0, solver.infinity(), 'y')
```

Imagem 2: Variáveis do problema.

Com as váriaveis criadas, precisamos criar as restrições necessáris.

```
solver.Add(x + 2 * y <= 14.0)
solver.Add(3 * x - y >= 0.0)
solver.Add(x - y <= 2.0)
```

Imagem 3: Restrições do problema.

Agora que temos tanto as váriaveis do problema e as restrições, preciso criar minha função objetiva e chamar o resolvedor.

```
solver.Maximize(3 * x + 4 * y)
status = solver.Solve()
```

Imagem 3: Restrições do problema.

Agora com tudo pronto, teremos a seguinte resposta.

```
Solution:
Objective value = 33.99999999999999
x = 5.999999999999998
y = 3.9999999999999996
```

Imagem 3: Restrições do problema.

Esse é um exemplo de como funciona a ferramenta ortools, dessa mesma forma será feito a modelagem do problema de envio de cargas.

2 MODELAGEM E RESTRIÇÕES

Nesse capitulo será realizado a modelagem do problema utilizando as váriveis já descritas nos capítulos anteriores. De forma a facilitar o entendimento, será apresetado a modelagem inteira de uma vez e em seguida será discutido passo a passo como que ela funciona.

Inequações	Restrições	Limite
Inequação 1	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1$	$1 \leq i, j \leq n$
Inequação 2	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i * x_{i,j} \leq C * y_i$	$1 \leq i, j \leq n$
Inequação 3	$x_{i,j} \in \{0, 1\}$	$1 \leq i, j \leq n$
Inequação 4	$y_j \in \{0, 1\}$	$1 \leq j \leq n$

INEQUAÇÃO 1: A inequação 1 nos diz a quantidade do item i que está contida dentro do caminhão j e essa soma não pode ultrapassar o 1, que indica que o item ja foi completamente transportado. Essa restrição é importante, porque confirma quando que o item inteiro já foi transportado.

INEQUAÇÃO 2: A inequação 2 nos diz qual o peso limite que cada caminhão pode carregar. Como o C (Capacidade) é um valor fixo, todos os caminhões terão um mesmo limite de peso. Então cada item multiplicado pelo seu peso, terão que ser menor que a quantidade limite de peso que o caminhão consegue carregar. Essa restrição é importante, porque dessa forma conseguimos separar os itens em vários caminhões, caso contrário todos os itens irião tudo em um único caminhão.

INEQUAÇÃO 3 e 4: Essas inequações apenas nos diz onde que está o limite

2.1 FUNÇÃO DE CUSTO

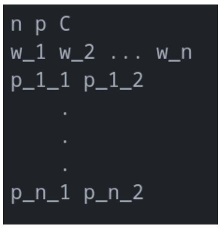
Com a função abaixo que iremos conseguir calcular nosso resultado ótimo para o problema.

$$\sum_{j=1}^{n} y_j, 1 \leq j \leq n$$

Como o nosso problema é para encontrar a menor quantidade de viajens possíveis para uma quantidade n de caminhões. Com isso, basta fazer a soma de todos os y_j que conseguimos chegar em um resultado ótimo para nosso função, é importante ressaltar que esse valor de y_j está dentro do limite de {0, 1}.

3 FORMATO DE ENTRADA

O nosso formato de entrada é a partir de um arquivo. Em sua primeira linha existe três números, n sendo a quantidade de itens, p indicando o numero de pares ordenados, e C que indica a capacidade total de cada caminhão. Na segunda linha, tempos n pesos w_i, sendo que cada i representa o peso de um item. E no final, tempos os pares ordenados (p1, p2), que por motivos ja citados anteriormente, eles não foram utilizados para resolver este problema. Para uma melhor representação, segue a imagem abaixo de um exemplo genérico:



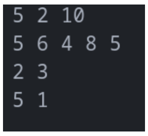
```
n p C
w_1 w_2 ... w_n
p_1_1 p_1_2
    .
    .
    .
p_n_1 p_n_2
```

Imagem 6: Exemplo genérico de entrada.

Esse seria um exemplo gérico de entrada, para que o script consiga resolver independentemente dos valores de entrada.

3.1 EXEMPLO PRÁTICO

Nesse capítulo vamos modelar o problema do envio de cargas de acordo com os valroes de entrada da figura abaixo.



```
5 2 10
5 6 4 8 5
2 3
5 1
```

Imagem 7: Exemplo de entrada com valores reais.

Entrada:

n = 5; p = 2; C = 10;

$w_1 = 5, w_2 = 6, w_3 = 4, w_4 = 8, w_5 = 5$

$(p_1 = 2, p_2 = 3)$

$(p_1 = 5, p_2 = 1)$

Saída:

2.8

De acordo com o capítulo onde foi explicado as restrições e as váriaveis, as restrições serão montadas de acordo com as inequações já apresentadas.

Inequação 1: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{i,j} = 1$

As restrições ficariam da seguinte forma:

$x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} + x_{1,4} + x_{1,5} = 1$

$x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} + x_{2,4} + x_{2,5} = 1$

$x_{3,1} + x_{3,2} + x_{3,3} + x_{3,4} + x_{3,5} = 1$

$x_{4,1} + x_{4,2} + x_{4,3} + x_{4,4} + x_{4,5} = 1$

$x_{5,1} + x_{5,2} + x_{5,3} + x_{5,4} + x_{5,5} = 1$

Inequação 2: $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i * x_{i,j} \leq C * y_i$

$5x_{1,1} + 5x_{1,2} + 5x_{1,3} + 5x_{1,4} + 5x_{1,5} \leq C * y_1$
$6x_{2,1} + 6x_{2,2} + 6x_{2,3} + 6x_{2,4} + 6x_{2,5} \leq C * y_2$
$4x_{3,1} + 4x_{3,2} + 4x_{3,3} + 4x_{3,4} + 4x_{3,5} \leq C * y_3$
$8x_{4,1} + 8x_{4,2} + 8x_{4,3} + 8x_{4,4} + 8x_{4,5} \leq C * y_4$
$5x_{5,1} + 5x_{5,2} + 5x_{5,3} + 5x_{5,4} + 5x_{5,5} \leq C * y_5$

limites:

$x_{i,j} \in \{0, 1\}$
$y_j \in \{0, 1\}$

Essa seria a modelagem do problema, se utilizarmos as restrições. Se jogarmos essas restrições em qualquer resolvedor, teriamos o resultado de 2.8. A imagem abaixo representa a solução dessa modelagem utilizando o lpsolve IDE, que é basicamente um resolvedor com interface gráfica.

Objective | Constraints | Sensitivity

Variables	result
	2.8
y1	0.5
y2	0.6
y3	0.4
y4	0.8
y5	0.5
x11	1
x12	0
x13	0
x14	0
x15	0
x21	1
x22	0
x23	0
x24	0
x25	0
x31	1

Imagem 8: Resolvedor com interface grafica IDE

4 MODELAGEM UTILIZANDO O PYTHON3

Nesse capítulo será explicado como utilizar da ferramente ortools para resolver o problema de envio de cargas, será apresentado apenas as partes importantes do código. De forma que seja possível resolver o problema para qualquer entrada, separamos a o código em duas partes. A primeira parte lê o arquivo de entrada e salvo em um dicionario chamado dictInput e a partir disso consigo criar um dicionário chamado data que representa a modelagem do problema de envio de cargas. E a na segunda parte é onde conseguimos a solução do problema.

```
# Dicionario que salvo os dados de entrada
# a partir do arquivo.
dictInput = {
    "firstLine": [],
    "weights": [],
    "ordered_pairs": [],
}
```

Imagem 9: Dicionário que contém o input dos dados

```
# Indica os pesos de cada item
data["weights"] = dictInput["weights"]

# Indica a quantidade de itens existentes
# Será utilizado para criar as váriaveis mais tarde
data["items"] = list(range(len(dictInput["weights"])))

# Indica a quantidade de caminhões.
data["trucks"] = data["items"]

# Indica os pares ordenados. Aviso: Não foi utilizado.
data["ordered_pairs"] = dictInput["ordered_pairs"]

#Indica a capacidade da carga, C
data["bin_capacity"] = dictInput["firstLine"][2]
```

Imagem 10: Dicionário que contém os dados modelados.

Agora que tempos os dados de entrada dentro de um dicionário, fica muito mais fácil de se criar as restrições do problema. Agora é necessário criar as váriaveis dos itens e dos caminhões. Conseguimos fazer isso da seguinte forma:

```
# x[i, j] = 1, se o item está no caminhão j
x = {}
for i in data['items']:
    for j in data['trucks']:
        # Cria uma váriavel(objeto do tipo NumVar) e salvo na váriavel x_i_j
        x[(i, j)] = solver.NumVar(0.0, 1.0, 'x_%i_%i' % (i, j))
```

Imagem 11: Criação das váriaveis $x_{i,j}$

Dessa forma, conseguimos criar as váriaveis que indicará em qual caminhão j o item i irá pertencer.

Para criarmos os possíveis caminhções, será feito algo similar.

```
# y[j] = 1, se o caminhão j está sendo usado.
y = {}
for j in data['trucks']:
    y[j] = solver.NumVar(0.0, 1.0, 'y[%i]' % j)
```

Imagem 11: Criação das váriaveis dos caminhões y_j

Com isso conseguimos criar todas as váriaveis necessárias para o problema.

Agora que as váriaveis já estão criadas, é necessário criar as restrições do problema. Será criado primeiro a restrições que indicam em qual caminhão cada item será inserido, será feito isso da seguinte forma:

```
# Indica que o peso não deve exceder a capacidade
for j in data['trucks']:
    solver.Add(
        sum(x[(i, j)] * data['weights'][i] for i in data['items'])  <= data["bin_capacity"]*y[j]
    )
```

Imagem 12: Criação das restrições y_j

Agora é preciso criar as restrições de pesos para cada caminão, será feito de forma similar as restrições anteriores.

```
# A soma dos itens existentes, não devem exceder 1.
# Isso porque, a soma dos itens não deve exceder o caminhão.
for i in data['items']:
    solver.Add(sum(x[i, j] for j in data['trucks']) == 1)
```

Imagem 12: Criação das restrições y_j

Agora que temos todo o problema modelado, basta chamar o resolvedor para se obter o resultado da modelagem do problema.

```
# Função objetiva. Minimza o numero de caminhões utilizados.
solver.Minimize(solver.Sum([y[j] for j in data['trucks']]))

# Chama o resolver
solver.Solve()
```

Imagem 12: Criação das restrições y_j

Dessa forma, resolver qualquer problema se tivermos uma entrada de dados correta.