Departamento de Modelagem Computacional – DMC
Período: 2023/02
Disciplina: CÁLCULO NUMÉRICO (IPRJ01-07579 e CÁLCULO NUMÉRICO – R (IPRJ 01-11976).
Carga horária: 75 horas
Professor Hermes Alves Filho

**MÓDULO 4.2**

## 4.3) Quadratura Gaussiana

De uma maneira geral, uma fórmula de Newton-Cotes, que aproxima f(x) por um polinômio que interpola essa função em $x_0, x_2, x_3, ......., x_n$ é exata para polinômio de grau $\leq n$ (verificar o erro de truncamento das fórmulas de aproximação)

Vamos mostrar aqui que podemos deduzir outras fórmulas do mesmo tipo que as Newton-Cotes . Tais fórmulas são exatas para polinômios de grau $\leq 2n-1$ e são conhecidas como Quadraturas Gaussianas.

Montagem das Quadraturas Gaussianas

1) Vamos montar a quadratura Gaussiana de dois pontos (N = 2) $t_1$ e $t_2$ considerando os limites da integral de -1 a +1. O formato da quadratura numérica assume a forma

$$\int_{-1}^{+1} f(t)dt = \sum_{n=1}^{N} \omega_n f(t_n) = \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2) + ..... + \omega_n f(t_n) \qquad (4.25)$$

Onde por definição N é a ordem da quadratura e os valores de $\omega_1, \omega_2, ......., \omega_n$ são denominados de pesos da quadratura

Exemplo: N = 2

Como temos dois pontos $t_1$ e $t_2$, a quadratura Gaussiana integra um polinômio de grau máximo $\leq 2N-1 = \leq 2*2-1=3$. Esse polinômio de grau 3 possui a seguinte característica:

$$\int_{-1}^{+1} f(t)dt = \sum_{n=1}^{2} \omega_n f(t_n) = \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2)$$

$f(t) = 1,$

$f(t) = t,$

$f(t) = t^2,$

$f(t) = t^3.$

A aproximação da integral pela quadratura de Gauss de grau 2 assume a forma

$$\int_{-1}^{+1} f(t)dt = \sum_{n=1}^{2} \omega_n f(t_n) = \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2)$$

As incógnitas do problema são as variáveis $t_1, t_2, \omega_1, \omega_2$. Para a determinação dessas 4 variáveis é montado o seguinte sistema de equações. Para achar a solução dessas incógnitas temos que resolver as seguintes equações

$$\int_{-1}^{+1} f(t)dt = \sum_{n=1}^{2} \omega_n f(t_n) = \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2)$$

i) $f(t) = 1$

$$\int_{-1}^{+1} 1dt = [t]_{-1}^{+1} = 2 = \omega_1 + \omega_2$$

ii) $f(t) = t$

$$\int_{-1}^{+1} tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{+1} = 0 = \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2$$

iii) $f(t) = t^2$

$$\int_{-1}^{+1} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{3} = \omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2$$

iv) $f(t) = t^3$

$$\int_{-1}^{+1} t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{+1} = 0 = \omega_1 t_1^3 + \omega_2 t_2^3$$

Baseados nos resultados (i-iv) obtemos o seguinte sistema de equações

$$
\begin{aligned}
&\text{i) } \omega_1 + \omega_2 = 2\\
&\text{ii) } \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 = 0\\
&\text{iii) } \omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2 = 2/3\\
&\text{iv) } \omega_1 t_1^3 + \omega_2 t_2^3 = 0
\end{aligned}
\qquad (4.26)
$$

O sistema de equações não-lineares, representado por Eq. (4.26) possui a seguinte solução

$$\omega_1 = \omega_2 = 1$$
$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ t_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Exemplo ilustrativo 1

Usar a fórmula da quadratura Gaussiana de 2 pontos e aproximar a seguinte integral

$$\int_{-1}^{+1} \left[2 + t - t^2 + 3t^3\right] dt$$

A) Solução direta: r

$$r = \int_{-1}^{+1} \left[2 + t - t^2 + 3t^3\right] dt = \left[2t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} + \frac{3t^4}{4}\right]_{-1}^{+1} =$$

$$\left[2t + \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3} + \frac{3(1)^4}{4}\right] - \left[2t + \frac{(-1)^2}{2} - \frac{(-1)^3}{3} + \frac{3(-1)^4}{4}\right] = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3} \text{ u.a.}$$

B) Solução usando aquadratura de Gauss de dois pontos (N = 2)

Dados da quadratura de Gauss: $r^*$

$$\omega_1 = \omega_2 = 1$$
$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ t_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$r^* = \int_{-1}^{+1}\left[2+t-t^2+3t^3\right]dt = \sum_{n=1}^{2}\omega_n f(t_n) = \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2)$$

$$1*\left[2+\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+3*\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right]+1*\left[2-\frac{1}{\sqrt{3}}-\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+3*\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\right]=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}\text{u.a.}$$

Obs: Os valores de r e $r^*$ são iguais

2) Vamos montar a quadratura Gaussiana de três pontos (N = 3) $t_1$, $t_2$ e $t_3$, considerando os limites da integral de -1 a +1. O formato da quadratura numérica assume a forma

$$\int_{-1}^{+1} f(t)dt = \sum_{n=1}^{3}\omega_n f(t_n) = \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2) + \omega_3 f(t_3) \qquad (4.27)$$

Como temos três pontos $t_1$, $t_2$ e $t_3$,a quadratura Gaussiana integra um polinômio de grau máximo $\le 2n-1 = \le 2*3-1=5$. Esse polinômio de grau 5 possui a seguinte característica:

Incógnitas: $t_1$, $t_2$ e $t_3$
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$

$f(t) = 1,$

$f(t) = t,$

$f(t) = t^2,$

$f(t) = t^3,$

$f(t) = t^4,$

$f(t) = t^5.$

As incógnitas do problema são as variáveis $t_1, t_2, t_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3$. Para a determinação dessas 4 variáveis é montado o seguinte sistema de equações. Para achar a solução dessas incógnitas temos que resolver as seguintes equações

$$\int_{-1}^{+1} f(t)dt = \sum_{n=1}^{3}\omega_n f(t_n) = \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2) + \omega_3 f(t_3)$$

i) $f(t) = 1$

$$\int_{-1}^{+1} 1dt = [t]_{-1}^{+1} = 2 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$$

ii) $f(t) = t$

$$\int_{-1}^{+1} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{+1} = 0 = \omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \omega_3 t_3$$

iii) $f(t) = t^2$

$$\int_{-1}^{+1} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{3} = \omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2 + \omega_3 t_3^2$$

iv) $f(t) = t^3$

$$\int_{-1}^{+1} t^3 dt = \left[\frac{t^4}{4}\right]_{-1}^{+1} = 0 = \omega_1 t_1^3 + \omega_2 t_2^3 + \omega_3 t_3^3$$

v) $f(t) = t^4$

$$\int_{-1}^{+1} t^4 dt = \left[\frac{t^5}{5}\right]_{-1}^{+1} = \frac{2}{5} = \omega_1 t_1^4 + \omega_2 t_2^4 + \omega_3 t_3^4$$

vi) $f(t) = t^5$

$$\int_{-1}^{+1} t^5 dt = \left[\frac{t^6}{6}\right]_{-1}^{+1} = 0 = \omega_1 t_1^5 + \omega_2 t_2^5 + \omega_3 t_3^5$$

Baseados nos resultados (i-vi) obtemos o seguinte sistema de equações

$$\begin{aligned}
&\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 2 \\
&\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \omega_3 t_3 = 0 \\
&\omega_1 t_1^2 + \omega_2 t_2^2 + \omega_3 t_3^2 = 2/3 \\
&\omega_1 t_1^3 + \omega_2 t_2^3 + \omega_3 t_3^3 = 0 \\
&\omega_1 t_1^4 + \omega_2 t_2^4 + \omega_3 t_3^4 = 2/5 \\
&\omega_1 t_1^5 + \omega_2 t_2^5 + \omega_3 t_3^5 = 0
\end{aligned} \tag{4.28}$$

O sistema de equações não-lineares, representado por Eq. (4.28) possui a seguinte solução

$\omega_1 = 5/9$
$\omega_2 = 8/9$
$\omega_3 = 5/9$
$t_1 = -0,77459667$
$t_2 = 0$
$t_3 = +0,77459667$

Exemplo ilustrativo 2

Calcular a seguinte integral usando o método da quadratura de Gauss de grau igual 3

$$\int_{-1}^{+1} (1 - t^3 + 2t^4 + t^5)dt$$

A) Solução direta: r

$$r = \int_{-1}^{+1} (1 - t^3 + 2t^4 + t^5)dt = \left[ t - \frac{t^4}{4} + \frac{2t^5}{5} + \frac{t^6}{6} \right]_{-1}^{+1} =$$

$$\left[1 - \frac{(1)^4}{4} + \frac{2(1)^5}{5} + \frac{(1)^6}{6}\right] - \left[1 - \frac{(-1)^4}{4} + \frac{2(-1)^5}{5} + \frac{(-1)^6}{6}\right] = 14/5 \text{ u.a.}$$

B) Solução aproximada usando a quadraturra Gaussiana de grau 3: $r^*$

$$r^* = \int_{-1}^{+1} (1 - t^3 + 2t^4 + t^5)dt = \sum_{n=1}^{3} \omega_n f(t_{\tilde{n}}) = \omega_1 f(t_1) + \omega_2 f(t_2) + \omega_3 f(t_3)$$

$$\frac{5}{9}\left[1 - (-0,77459667)^3 + 2 * (-0,77459667)^4 + (-0,77459667)^5\right] +$$

$$\frac{8}{9}\left[1 - (0)^3 + 2 * (0)^4 + (0)^5\right] +$$

$$\frac{5}{9}\left[1 - (0,77459667)^3 + 2 * (0,77459667)^4 + (0,77459667)^5\right] = 14/5 \text{u.a.}$$

Obs: Os resultados de r e $r^*$ são os mesmos

Exercícios de verificação: Nos exercícios ilustrativos 1 e 2 usar as regras de Trapézio e Simpson simples para estimar o valor das integrais e comparar com a solução usando a quadratura de Gauss de graus N = 2 e N = 3

Uma vez que as quadraturas Gaussianas aproximam integrais definidas no intervalo

$[-1;+1]$ ,

precisamos fazer uma mudança de variável para resolvermos uma integral definida na forma

$$\int_a^b f(x)dx \rightarrow \int_{-1}^{+1} f(t)\,dt \tag{4.29}$$

Para fazermos essa tarefa fazemos as seguintes definições

$$t = \frac{2x-(b+a)}{(b-a)} \tag{4.30}$$

Da Eq. (4.30) podemos observar as relações

$$\begin{aligned} x &= a \rightarrow t = -1 \\ x &= b \rightarrow t = +1 \end{aligned}$$

Da relação mostrada na Eq. (4.30) podemos obter

$$\begin{aligned} x &= \frac{(b-a)t+(b+a)}{2} \\ dx &= \frac{(b-a)}{2}dt \end{aligned} \tag{4.31}$$

Agora, substituindo essas relações mostradas na Eq. (4.29) na integral definida

$$\int_a^b f(x)dx$$

obtemos a relação

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{+1} f\left[\frac{(b-a)t+(b+a)}{2}\right]\left(\frac{(b-a)}{2}\right)dt = \left(\frac{(b-a)}{2}\right)\int_{-1}^{+1} f\left[\frac{(b-a)t+(b+a)}{2}\right]dt \qquad (4.32)$$

Agora na Eq.(4.32) vamos definir

$$t'_{ñ} = \left[\frac{(b-a)t_n+(b+a)}{2}\right],\ n=1:N$$

A Eq. (4.32) assume a forma

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{-1}^{+1} f\left[t'\right]dt' = \left(\frac{(b-a)}{2}\right)\int_{-1}^{+1} f\left[t'\right]dt' = \left(\frac{(b-a)}{2}\right)\sum_{n=1}^{N}\omega_n f(t'_{ñ}) = \qquad (4.33)$$

$$\left(\frac{(b-a)}{2}\right)\left[\omega_1 f(t'_1)+\omega_2 f(t'_2)+......+\omega_n f(t'_n)\right]$$

Exemplo ilustrativo 1: Usar a fórmula da quadratura Gaussiana de dois pontos (N = 2) para aparoxima a integral definida

$$\int_0^{\pi/2} sen(x)dx$$

Solução.

Temos os seguintes dados

$$a = 0$$

$$b = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} sen(x)dx = \frac{\pi/2}{2}\left[\omega_1 f(t'_1)+\omega_2 f(t'_2)\right]$$

Onde temos, para N = 2

$$t_1' = \left[\frac{(b-a)t_1 + (b+a)}{2}\right]$$

$$t_2' = \left[\frac{(b-a)t_2 + (b+a)}{2}\right]$$

Onde

$$\omega_1 = \omega_2 = 1$$
$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}},\ t_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Então, obtemos

$$t_1 = \sqrt{3}/3 = 0,577350$$
$$t_1' = \left[\frac{(\pi/2)*(0,577350) + (\pi/2)}{2}\right] = 1,238848$$
$$f(t_1') = \mathrm{sen}(t_1') = \mathrm{sen}(1,238848) = 0,945409$$

$$t_2 = -\sqrt{3}/3 = -0,577350$$
$$t_2' = \left[\frac{(\pi/2)*(-0,577350) + (\pi/2)}{2}\right] = 0,331949$$
$$f(t_2') = \mathrm{sen}(t_2') = \mathrm{sen}(0,331949) = 0,325886$$

Então, obtemos

$$r^* = \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(x)dx = \frac{\pi/2}{2}\left[0,945409 + 0,325886\right] = 0,998473\,\text{u.a.}$$

Cálculo da referência: $r^*$

$$r = \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}(x)dx = \left[-\cos(x)\right]_0^{\pi/2} = -\left[\cos(\pi/2) - \cos(0)\right] = 1\,\text{u.a.}$$

Cálculo do Desvio Relativo Percentual: DRP

$$DRP = \left|\frac{r - r^*}{r}\right| * 100 = \left|\frac{1 - 0,998473}{1}\right| * 100 = 0,02\%$$

Exercício de fixação. Resolver a mesma integra usando as regras do Trapézio e de Simpson simples e comparar esses resultados numéricos com os da quadratura Gaussiana

Exemplo ilustrativo 2: Usar a fórmula da quadratura Gaussiana de três pontos (N = 3) para aparoximar a integral definida

$$\int_{0,2}^{0,5} xe^{2x}dx$$

Solução.

Temos os seguintes dados

$$\begin{aligned}
&a = 0,2 \\
&b = 0,5 \\
&\omega_1 = 5/9 \\
&\omega_2 = 8/9 \\
&\omega_3 = 5/9 \\
&t_1 = -0,774597 \\
&t_2 = 0 \\
&t_3 = +0,774597
\end{aligned}$$

$$\int_{0,2}^{0,5} xe^{2x}dx = \left(\frac{0,5-0,2}{2}\right)\left[\omega_1 f(t_1') + \omega_2 f(t_2') + \omega_3 f(t_3')\right]$$

$$t_1' = \left[\frac{(b-a)t_1 + (b+a)}{2}\right] = \left[\frac{[(0,5-0,2)*(-0,774597)] + (0,5+0,2)}{2}\right] = 0,233810$$

$$f(t_1') = f(0,233810) = (0,233810)*\exp(2*0,233810) = 0,373205$$

$$t_2' = \left[\frac{(b-a)t_2 + (b+a)}{2}\right] = \left[\frac{[(0,5-0,2)*(0)] + (0,5+0,2)}{2}\right] = 0,352407$$

$$f(t_2') = f(0,35) = (0,35)*\exp(2*0,35) = 0,704813$$

$$t_3' = \left[\frac{(b-a)t_3 + (b+a)}{2}\right] = \left[\frac{[(0,5-0,2)*(0,774597)] + (0,5+0,2)}{2}\right] = 0,466190$$

$$f(t_3') = f(0,466190) = (0,466190)*\exp(2*0,466190) = 1,184378$$

Então, obtemos

$$r^* = \int_{0,2}^{0,5} xe^{2x}dx = \left(\frac{0,5-0,2}{2}\right)\left[\omega_1 f(t_1') + \omega_2 f(t_2') + \omega_3 f(t_3')\right] =$$

$$\left(\frac{0,3}{2}\right)\left[(\frac{5*0,373205}{9}) + (\frac{8*0,704813}{9}) + (\frac{5*1,184378}{9})\right] =$$

$$\left(\frac{0,3}{2}\right)\left[(0,207336) + (0,626500) + (0,657988)\right] = 0,223774 \text{ u.a.}$$

Cálculo da referência

$$r = \int_{0,2}^{0,5} xe^{2x}dx = uv - \int vdu = \frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \left[\frac{xe^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}\right]_{0,2}^{0,5} =$$

$$\left[\frac{0,5e^{2*0,5}}{2} - \frac{1}{4}e^{2*0,5}\right] - \left[\frac{0,2e^{2*0,2}}{2} - \frac{1}{4}e^{2*0,2}\right] = 0 - [0,149182 - 0,372956] = 0,223774 \text{ u.a.}$$

substituição de variáveis

$$u(x) = x$$
$$du = dx$$
$$dv = e^{2x}dx$$
$$v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Cálculo do Desvio Relativo Percentual

DRP = 0

Exercício: Resolver a mesma integral definida usando as regras do Trapézio e de Simpson simples e comparar os resultados numéricos com os da quadratura Gaussiana

Exercícios de fixação:

Exercício 1

Resolver as integrais definidas abaixo usando as regras do Trapézio simples, de Simpson simples e o método da quadratura Gaussiana com graus N = 2 e N = 3. Use o desvio relativo percentual e aponte a melhor aproximação dessas integrais

a) $\int_{1,2}^{1,7} x^2 e^{2x} dx$

b) $\int_{0,2}^{1,3} \mathrm{sen}(2x)\cos(2x) dx$

c) $\int_{1}^{2} \ln(2x)(2x+2)\, dx$

Exercício 2

a)Resolver a integral definida abaixo usando as regras do Trapézio, de Simpson repetidas com 6 partições e o método da quadratura Gaussiana com graus N = 2 e N = 3. Use o desvio relativo percentual e aponte a melhor aproximação para essas integrais

$\int_{1}^{4} x^3 \ln(2x)\, dx$

b) Para as regras do Trapézio e Simpson repetidas estime um valor de h de tal forma que a cota máxima do erro de truncamento seja menor que $10^{-2}$.

**Referências Bibliográficas**

1) Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais – Segunda Edição
Autores: Maria A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes
Editora: Pearson

2) Cálculo Numérico – Licenciatura Matemática
Autores: Francisco Gêvane Muniz Cunha e Jânio Kléo de Sousa Castro
https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/430185/2/Calculo%20Numerico.pdf