Departamento de Modelagem Computacional – DMC
Período: 2023/02
Disciplina: CÁLCULO NUMÉRICO (IPRJ01-07579 e CÁLCULO NUMÉRICO – R (IPRJ 01-11976).
Carga horária: 75 horas
Professor Hermes Alves Filho

MÓDULO 3.2 - Continuação

3.3) Derivada Segunda com Polinômios de Taylor

Vamos agora considerar uma função $f(x) \in C^4[a;b]$ em um ponto $x_0 \in [a;b]$. Inicialmente expandimos essa f(x) no polinômio de Taylor na forma

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \\ + \frac{(x-x_0)^4}{4!} f^{iv}[\xi(x_0)], \quad \xi(x_0) \in (x_0, x) \tag{3.24}$$

Agora para x = x_0 + h, onde $h \neq 0$ e suficientemente pequeno, para $(x_0 + h) \in [a;b]$, obtemos

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \\ + \frac{h^4}{24} f^{iv}[\xi^+(x_0)], \quad \xi^+(x_0) \in (x_0, x_0 + h) \tag{3.25}$$

Agora para x = x_0 - h, onde $h \neq 0$ e suficientemente pequeno, para $(x_0 - h) \in [a;b]$, obtemos

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(x_0) + \\ + \frac{h^4}{24} f^{iv}[\xi^-(x_0)], \quad \xi^-(x_0) \in (x_0 - h; x_0) \tag{3.26}$$

Somando a Eq. (3.25) e Eq.(3.26) obtemos

$$f(x_0+h)+f(x_0-h)=2*f(x_0)+h^2*f''(x_0)+\frac{h^4}{24}\left[f^{iv}[\xi^-(x_0)]+f^{iv}[\xi^+(x_0)]\right] \qquad (3.27)$$

Depois de uma pequena álgebra obtemos

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left[f(x_0+h)+f(x_0-h)-2*f(x_0)\right]-\frac{h^2}{24}\left[f^{iv}[\xi^-(x_0)]+f^{iv}[\xi^+(x_0)]\right] \qquad (3.28)$$

Mas podemos escrever também

$$f^{iv}[\xi(x_0)]=\frac{f^{iv}[\xi^-(x_0)]+f^{iv}[\xi^+(x_0)]}{2},\quad \xi(x_0)\in[x_0-h;x_0+h] \qquad (3.29)$$

Então a Eq.(3.27) assume a forma

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left[f(x_0+h)+f(x_0-h)-2*f(x_0)\right]-\frac{h^2}{12}f^{iv}[\xi(x_0)], \qquad (3.27)$$

$$\xi(x_0)\in[x_0-h;x_0+h]$$

Exercício de fixação

Calcule de forma aproximada a derivada segunda $f''(2)$ da função $f(x)=x*e^x$ considerando h = 0,1 e h = 0,2. Estime o desvio relativo percentual e a cota de erro máximo dessas aproximações

a.1) Solução

a) h = 0,1
b) x_0 = 2
c) x_0 – h = 2 – 0,1 = 1,9
d) x_0 + h = 2 +0,1 = 2,1

$$f''(x_0)=\frac{1}{h^2}\left[f(x_0+h)+f(x_0-h)-2*f(x_0)\right]$$

Então,

$$f(2,1)=2,1*e^{2,1}=17,148957$$

$$f(1,9)=1,9*e^{1,9}=12,703199$$

$$f(2) = 2 * e^2 = 14,778112$$

$$r^* = f''(2) = \frac{1}{(0,1)^2}\left[f(2,1) + f(1,9) - 2 * f(2)\right] = 29,5932$$

Cálculo da referência

$$f(x) = x * e^x$$

$$f'(x) = e^x + x * e^x$$

$$r = f''(2) = e^2(2+2) = 4 * e^2 = 29,555622$$

a.2) Desvio Relativo Percentual

$$DRP = \left|\frac{r - r^*}{r}\right| * 100 = 0,13\%$$

a.3) Cota máxima do erro de truncamento

$$E_{T4}[\xi(x_0)] = \left|\frac{h^2}{12} * f^{iv}[\xi(x_0)]\right|,\ \xi(x_0) \in [x_0 - h; x_0 + h],\ \xi(x_0) \in [1,9; 2,1]$$

$$f'''(x) = e^x + e^x + e^x + x * e^x = e^x(x+3)$$

$$f^{iv}(x) = e^x + e^x + e^x + e^x + x * e^x = e^x(x+4)$$

b.1) $\xi[x_0] = 1,9$

$$f^{iv}[\xi(x_0 - h)] = f^{iv}[1,9] = e^{1,9}(1,9+4) = 39,446772$$

$$E_{T4}[1,9] = \left|\frac{(0,1)^2}{12} * f^{iv}[1,9]\right| = E_{T4}[1,9] = \left|\frac{(0,1)^2}{12} * 39,446772\right| = 0,032872$$

a.2-1) $\xi[x_0] = 2,1$

$$f^{iv}[\xi(x_0 + h)] = f^{iv}[2,1] = e^{2,1}(2,1+4) = 49,813636$$

$$E_{T4}[2,1] = \left|\frac{(0,1)^2}{12} * f^{iv}[2,1]\right| = E_{T4}[2,1] = \left|\frac{(0,1)^2}{12} * 49,813636\right| = 0,041511$$

Conclusão: A cota máxima do erro de truncamento é $E_{T4}[2,1] = 0,041511$

b.1) Solução

a) h = 0,2
b) $x_0 = 2$
c) $x_0 - h = 2 - 0,2 = 1,8$
d) $x_0 + h = 2 + 0,2 = 2,2$

$$f''(x_0) = \frac{1}{h^2}\left[f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2 * f(x_0)\right]$$

Então,

$$f(1,8) = 1,8 * e^{1,8} = 10,889365$$

$$f(2,2) = 2,2 * e^{2,2} = 19,855029$$

$$f(2) = 2 * e^{2} = 14,778112$$

$$r^* = f''(2) = \frac{1}{(0,2)^2}\left[f(2,2) + f(1,8) - 2 * f(2)\right] = 29,7042$$

$$r = f''(2) = e^2(2+2) = 4 * e^2 = 29,555622$$

b.2) Desvio Relativo Percentual

$$DRP = \left|\frac{r - r^*}{r}\right| * 100 = 0,50\%$$

b.3) Cota máxima do erro de truncamento

$$E_{T4}[\xi(x_0)] = \left|\frac{h^2}{12} * f^{iv}[\xi(x_0)]\right|,\ \xi(x_0) \in [x_0 - h; x_0 + h],\ \xi(x_0) \in [1,8; 2,2]$$

b.3-1) $\xi[x_0] = 1,8$

$$f^{iv}[\xi(x_0 - h)] = f^{iv}[1,8] = e^{1,8}(1,8 + 4) = 35,087955$$

$$E_{T4}[1,8] = \left|\frac{(0,2)^2}{12} * f^{iv}[1,8]\right| = E_{T4}[1,8] = \left|\frac{(0,2)^2}{12} * 35,087955\right| = 0,116959$$

b.3-2) $\xi[x_0] = 2,2$

$$f^{iv}[\xi(x_0+h)] = f^{iv}[2,2] = e^{2,2}(2,2+4) = 55,955083$$

$$E_{T4}[2,2] = \left|\frac{(0,2)^2}{12} * f^{iv}[2,2]\right| = E_{T4}[2,2] = \left|\frac{(0,2)^2}{12} * 55,955083\right| = 0,186516$$

Conclusão: A cota máxima do erro de truncamento é $E_{T4}[2,2] = 0,186516$

Exercícios de fixação

A) Calcular a derivada segunda $f''(2)$ das funções abaixo, usando h = 0,1 e h = 0,01. Estime também o desvio realtivo percentual e a cota máxima do erro de truncamento dessas aproximações:

1) $f(x) = (x+1) * \text{sen}(\sqrt{x})$
2) $f(x) = (x^2+1) * \ln(x+1)$
3) $f(x) = \text{sen}(2x) * \cos(4x)$

B) Seja $f(x) = 3x * e^x - \cos(x)$. Use os dados da Tabela abaixo para obter uma aproximação $f''(1,3)$ com h = 0,1 e h = 0,01

x	1,2	1,29	1,3	1,31	1,4
f(x)	11,59006	13,78176	14,04276	14,30741	16,86187

Estime também o desvio realtivo percentual e a cota máxima do erro de truncamento dessas aproximações

Bibliografia

1) Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais – Segunda Edição
Autores: Maria A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes
Editora: Pearson

2) Cálculo Numérico – Licenciatura Matemática
Autores: Francisco Gêvane Muniz Cunha e Jânio Kléo de Sousa Castro
https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/430185/2/Calculo%20Numerico.pdf