Instituto Politécnico | IPRJ Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO UERJ

Departamento de Modelagem Computacional – DMC
Período: 2023/02
Disciplina: CÁLCULO NUMÉRICO (IPRJ01-07579 e CÁLCULO NUMÉRICO – R (IPRJ 01-11976).
Carga horária: 75 horas
Professor Hermes Alves Filho

MÓDULO 5.3

5. Solução de Sistemas de Equações Lineares e Algébricas (continuação)

5.2. Métodos Iterativos

5.2-a) Gauss-Jacobi

Objetivo: Resolver o sistema de equações, representado na Eq. (6.4) de forma iterativa (aproximada)

$$
\begin{array}{l}
E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
E_3 : a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots\dots\dots + a_{3n}x_n = b_3 \\
. \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
. \quad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \qquad . \\
E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots\dots\dots + a_{nn}x_n = b_n
\end{array}
$$

Para realizarmos essa tarefa fazemos o seguinte arranjo nas equações do sistema representado acima

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n] \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n] \\
x_3 &= \frac{1}{a_{33}}[b_3 - a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots\dots\dots + a_{3n}x_n] \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}[b_n - a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots\dots\dots + a_{nn-1}x_{n-1}]
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Obs. Como o método de Gauss-Jacobi é um método iterativo (aproximado) precisamos dos seguintes dados iniciais

a) Estimativa inicial (chute inicial)

$$
\vec{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ . \\ x_n^0 \end{bmatrix}
$$

b) Precisão (ε)

O processo iterativo é montado, considerando

$$
\begin{aligned}
x_1^{k+1} &= \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n^k] \\
x_2^{k+1} &= \frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^k + a_{23}x_3^k + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n^k] \\
x_3^{k+1} &= \frac{1}{a_{33}}[b_3 - a_{31}x_1^k + a_{32}x_2^k + \dots\dots\dots + a_{3n}x_n^k] \\
&. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\
x_n^{k+1} &= \frac{1}{a_{nn}}[b_n - a_{n1}x_1^k + a_{n2}x_2^k + a_{n3}x_3^k + \dots\dots\dots + a_{nn-1}x_{n-1}^k]
\end{aligned}
$$

$k = 0 : n$

c) Critério de Convergência – Critério das linhas

Apresentamos aqui um teorema que estabelece uma condição suficiente para a convergência do método iterativo de Gauss-Jacobi

Teorema; Seja o sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ e seja

$$\alpha_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{|a_{kj}|}{|a_{kk}|}$$

Se $\alpha = \max_{1 \le k \le n} \alpha_k < 1$, então o método de Gauss-Jacobi gera uma sequência $\{\vec{x}^k\}$ convergente para a solução do sistema dado, independente da escolha da estimativa inicial $\{\vec{x}^0\}$

Caso exemplo

$$\begin{aligned} E1&: 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ E2&: x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ E3&: 2x_1 + 3x_2 + 10x_3 = 6 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_1 = \frac{|2| + |1|}{|10|} = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$\alpha_2 = \frac{|1| + |1|}{|5|} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\alpha_3 = \frac{|2| + |3|}{|10|} = \frac{2}{5} = 0,5$$

$$\alpha = \max_{1 \le k \le n} \alpha_k = \alpha_3 = 0,5 < 1$$

Conclusão: O sistema representado pela Matriz dos coeficientes A (acima) converge para qualquer estimativa inicial $\{\vec{x}^0\}$

d) Critério (teste) de parada

d.1) Teste do desvio absoluto

O processo iterativo é repetido até que o vetor $\{\vec{x}^{k+1}\}$ esteja suficientemente próximo de o vetor $\{\vec{x}^{k}\}$. Essa medida de distância entre esses vetores é realizada na forma

$$d^{k+1} = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{k+1} - x_i^k \right|$$

Assim, dada uma precisão ε, o vetor $\vec{x}^{k+1}$ pode ser escolhido como a solução aproximada da solução do sistema de equações $A\vec{x} = \vec{b}$, se for satisfeita a condição

$$d^{k+1} < \varepsilon$$

d.2) Teste do desvio relativo

$$d_r^{k+1} = \frac{d^{k+1}}{\max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{k+1} \right|} < \varepsilon$$

Exemplo ilustrativo

Resolver o sistema de equações abaixo usando método de Gauss-Jacobi

$$\begin{aligned} E1&: 10x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ E2&: x_1 + 5x_2 + x_3 = -8 \\ E3&: 2x_1 + 3x_2 \;\; 10x_3 = 6 \end{aligned}$$

Usando

$$\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 0,7 \\ -1,6 \\ 0,6 \end{bmatrix}, \;\; \varepsilon = 0,05$$

Montagem do algoritmo do método iterativo de Gauss-Jacobi

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{10}[7 - 2x_2^k - x_3^k]$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{5}[-8 - x_1^k - x_3^k]$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{10}[6 - 2x_1^k - 3x_2^k]$$

Primeira iteração: $\vec{x}^1$, k = 0

$$x_1^1 = \frac{1}{10}[7 - 2x_2^0 - x_3^0] = 0,96$$
$$x_2^1 = \frac{1}{5}[-8 - x_1^0 - x_3^0] = -1,86$$
$$x_3^1 = \frac{1}{10}[6 - 2x_1^0 - 3x_2^0] = 0,94$$

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0,96 \\ -1,86 \\ 0,94 \end{pmatrix}$$

Desvio absoluto: d^1

$$|x_1^1 - x_1^0| = |0,96 - 0,7| = 0,26$$
$$|x_2^1 - x_2^0| = |-1,86 - (-1,6)| = 0,26$$
$$|x_3^1 - x_3^0| = |0,94 - 0,6| = 0,34$$

Desvio relativo: d_r^1

$$d_r^1 = \frac{d^1}{\max\limits_{1 \le i \le n} |x_i^1|} = \frac{0,34}{|-1,86|} = 0,1828 > \varepsilon > 0,05$$

Segunda iteração: $\vec{x}^2$, k = 1

$$x_1^2 = \frac{1}{10}[7 - 2x_2^1 - x_3^1] = 0,978$$
$$x_2^2 = \frac{1}{5}[-8 - x_1^1 - x_3^1] = -1,98$$
$$x_3^2 = \frac{1}{10}[6 - 2x_1^1 - 3x_2^1] = 0,966$$

$$\vec{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0,978 \\ -1,98 \\ 0,966 \end{pmatrix}$$

Desvio absoluto: d^2

$$\left|x_1^2 - x_1^1\right| = \left|0,978 - 0,96\right| = 0,018$$
$$\left|x_2^2 - x_2^1\right| = \left|-1,98 - (-1,86)\right| = 0,12$$
$$\left|x_3^2 - x_3^1\right| = \left|0,966 - 0,94\right| = 0,026$$

Desvio relativo: d_r^2

$$d_r^2 = \frac{d^2}{\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^2\right|} = \frac{0,12}{\left|-1,98\right|} = 0,0606 > \varepsilon > 0,05$$

Terceira iteração: $\vec{x}^3$, k = 2

$$x_1^3 = \frac{1}{10}[7 - 2x_2^2 - x_3^2] = 0,9994$$
$$x_2^3 = \frac{1}{5}[-8 - x_1^2 - x_3^2] = -1,9888$$
$$x_3^3 = \frac{1}{10}[6 - 2x_1^2 - 3x_2^2] = 0,9984$$

$$\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{pmatrix}$$

Desvio absoluto: d^3

$$\left|x_1^3 - x_1^2\right| = \left|0,9994 - 0,978\right| = 0,0214$$
$$\left|x_2^3 - x_2^2\right| = \left|-1,9888 - (-1,98)\right| = 0,0088$$
$$\left|x_3^3 - x_3^2\right| = \left|0,9984 - 0,966\right| = 0,0324$$

Desvio relativo: d_r^3

$$d_r^3 = \frac{d^3}{\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^3\right|} = \frac{0,0324}{\left|-1,9888\right|} = 0,016 < 0,05$$

Conclusão. O problema convergiu para a solução

$$\vec{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0,9994 \\ -1,9888 \\ 0,9984 \end{pmatrix}$$

5.2-2) Gauss-Seidel

Algoritmo

$$x_1^{k+1} = \frac{1}{a_{11}}[b_1 - a_{12}x_2^k + a_{13}x_3^k + ... + a_{1n}x_n^k]$$

$$x_2^{k+1} = \frac{1}{a_{22}}[b_2 - a_{21}x_1^{k+1} + a_{23}x_3^k + ... + a_{2n}x_n^k]$$

$$x_3^{k+1} = \frac{1}{a_{33}}[b_3 - a_{31}x_1^{k+1} + a_{32}x_2^{k+1} + ... + a_{3n}x_n^k]$$

. . . .

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{nn}}[b_n - a_{n1}x_1^{k+1} + a_{n2}x_2^{k+1} + a_{n3}x_3^{k+1} + ... + a_{nn-1}x_{n-1}^{k+1}]$$

$k = 0 : n$

c) Critério de Convergência – Critério de Sassenfeld

sejam

$$\beta_1 = \frac{|a_{12}| + |a_{13}| + ... + |a_{1n}|}{|a_{11}|}$$

$$\beta_j = \frac{|a_{j1}|\beta_1 + |a_{j2}|\beta_2 + ... + |a_{jj-1}|\beta_{j-1} + ... + |a_{jj+1}| + ... + |a_{jn}|}{|a_{jj}|},\ j = 2 : n$$

Seja

$$\beta = \max_{1 \le k \le n} \beta_k$$

Se $\beta < 1$ o método de Gauss-Seidel gera uma sequência convergente para qualquer que seja $\vec{x}^0$. Quanto menos for β que atenda a essa condição mais rápida será a convergência do processo iterativo

Exemplo Ilustrativo

Resolver o sistema baixo pelo método iterativo de Gauss-Seidel

$$
\begin{aligned}
&E1: 5x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\
&E2: 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 6 \\
&E3: 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0
\end{aligned}
$$

Considere: $\vec{x}^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\varepsilon = 0,05$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Critério de Convergência de Sassenfeld

$$\beta_1 = \frac{|1| + |1|}{|5|} = \frac{2}{5} = 0,4$$

$$\beta_2 = \frac{|3| * 0,4 + |1|}{|4|} = \frac{2,2}{4} = 0,55$$

$$\beta_3 = \frac{|3| * 0,4 + |3| * 0,55}{|6|} = \frac{2,85}{6} = 0,475$$

$$\beta = \max_{1 \le k \le 3} \beta_k = \beta_2 = 0,55 < 1$$

Conclusão: o sistema converge independente do valor de $\vec{x}^0$

Primeira estimativa: $\vec{x}^1$, k = 0

$$
\begin{aligned}
x_1^1 &= \frac{1}{5}[5 - x_2^0 - x_3^0] = 1,0 \\
x_2^1 &= \frac{1}{4}[6 - 3x_1^1 - x_3^0] = 0,75 \\
x_3^1 &= \frac{1}{6}[0 - 3x_1^1 - 3x_2^1] = -0,875
\end{aligned}
$$

$$\vec{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1,0 \\ 0,75 \\ -0,875 \end{pmatrix}$$

Desvio absoluto: d^1

$$|x_1^1 - x_1^0| = |1-0| = 1$$
$$|x_2^1 - x_2^0| = |0,75| = 0,75$$
$$|x_3^1 - x_3^0| = |-0,875-0| = 0,875$$

Desvio Relativo

$$d_r^1 = \frac{d^1}{\max\limits_{1\le i\le n} |x_i^1|} = \frac{1}{|1|} = 1 > 0,05$$

Segunda estimativa: $\vec{x}^2$

$$x_1^2 = \frac{1}{5}[5 - x_2^1 - x_3^1] = 1,025$$
$$x_2^2 = \frac{1}{4}[6 - 3x_1^2 - x_3^1] = 0,95$$
$$x_3^2 = \frac{1}{6}[0 - 3x_1^2 - 3x_2^2] = -0,9875$$

Desvio absoluto: d^1

$$|x_1^2 - x_1^1| = |1,025 - 1,0| = 0,025$$
$$|x_2^2 - x_2^1| = |0,95 - 0,75| = 0,20$$
$$|x_3^2 - x_3^1| = |-0,9875 - (-0,875)| = 0,1125$$

Desvio Relativo

$$d_r^2 = \frac{d^2}{\max\limits_{1\le i\le n} |x_i^2|} = \frac{0,20}{|1,025|} = 0,1951 > 0,05$$

terceira estimativa: $\vec{x}^3$

$$x_1^3 = \frac{1}{5}[5 - x_2^2 - x_3^2] = 1,0075$$
$$x_2^3 = \frac{1}{4}[6 - 3x_1^3 - x_3^2] = 0,9912$$
$$x_3^3 = \frac{1}{6}[0 - 3x_1^3 - 3x_2^3] = -0,9993$$

Desvio absoluto: d^1

$$\left|x_1^3 - x_1^2\right| = \left|1,0075 - 1,025\right| = 0,0175$$
$$\left|x_2^3 - x_2^2\right| = \left|0,9912 - 0,95\right| = 0,0412$$
$$\left|x_3^3 - x_3^2\right| = \left|-0,9993 - (-0,9875)\right| = 0,0118$$

Desvio Relativo

$$d_r^3 = \frac{d^3}{\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^3\right|} = \frac{0,0412}{\left|1,0075\right|} = 0,041 < 0,05$$

Conclusão: O vetor solução aparece na forma

$$\vec{x}^3 = \begin{bmatrix} 1,0075 \\ 0,9912 \\ -0,9993 \end{bmatrix}$$

Exercícios de fixação

Resolva os sistemas de equações lineares e algébricas usando os métodos iterativos Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel. Verificar os critérios de convergência

A)

$6x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$
$3x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -7$
$x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 = -5$
$2x_1 + 3x_3 - 7x_4 = 2$

B)
$8x_1 + 1x_2 + x_3 + 4x_4 = 2$
$2x_1 + 2x_3 - x_4 = 1$
$x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = -6$
$x_1 + x2 + x3 - 8x_4 = 1$

C)

$1x_1 + 1x_2 + x_3 + x_4 = 4$
$2x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 10$
$x_1 + 3x_2 - 10 x_3 + 2x_4 = -6$
$3x_1 + 3x_2 + 4x3 - 16x_4 = 1$

Referências Bibliográficas

1) Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais – Segunda Edição
Autores: Maria A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes
Editora: Pearson

2) Cálculo Numérico – Licenciatura Matemática
Autores: Francisco Gêvane Muniz Cunha e Jânio Kléo de Sousa Castro
https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/430185/2/Calculo%20Numerico.pd