Instituto Politécnico | IPRJ Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Departamento de Modelagem Computacional – DMC
Período: 2023/02
Disciplina: CÁLCULO NUMÉRICO (IPRJ01-07579 e CÁLCULO NUMÉRICO – R (IPRJ 01-11976).
Carga horária: 75 horas
Professor Hermes Alves Filho

MÓDULO 5.1

5. Solução de Sistemas de Equações Lineares e Algébricas

Neste tópico apresentamos alguns conceitos fundamentais de álgebra linear, referentes às matrizes e apresentamos soluções diretas e numéricas (aproximadas) para sistemas de equações lineares e algébricas e comparamos esses resultados.

Um sistema de Equações Lineares e Algébricas pode ser escrito na forma

$$\begin{array}{l} E_1 : a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ E_2 : a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ E_3 : a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots\dots\dots + a_{3n}x_n = b_3 \\ . \quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ . \quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \quad\quad . \\ E_n : a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots\dots\dots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \tag{5.1}$$

Onde por definição temos que $a_{ij}, i, j = 1:n$ são os coeficientes do sistema. Os valores de $x_j, j = 1:n$ são as incógnitas do problema e os termos $b_j, i, j = 1:n$ são os termos independentes (fontes) do problema

O sistema de equações, representado na Eq. (5.1) pode ser representado na seguinte forma de operadores

$$A\vec{X} = \vec{b} \tag{5.2}$$

Com as seguintes representações

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots\ldots a_{3n} \\ . & . & . \qquad\quad . \\ . & . & . \qquad\quad . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots. \quad a_{nn} \end{bmatrix},$$

Onde A é denominada de matriz dos coeficientes

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ . \\ . \\ b_n \end{bmatrix}$$

e $\vec{X}$ é a matriz-coluna das incógnitas

Solução da Eq.(5.2)

Se $\det(A) \neq 0$ implica que a matriz (A) possui inversa na forma A^{-1} e podemos fazer o seguinte desenvolvimento:

$$A * A^{-1} * \vec{X} = A^{-1} * \vec{b}$$
$$A * A^{-1} = I$$
$$I * \vec{X} = I * A^{-1} * \vec{b}$$
$$\vec{X} = A^{-1} * \vec{b}$$

Por definição I é a matriz identidade n x n e possui a forma

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ . & & . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \\ . & & . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \;\; . \\ 0 & & 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \end{bmatrix}$$

Definição de matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots\ldots a_{1n} & . & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots\ldots a_{2n} & . & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots\ldots a_{3n} & . & b_3 \\ . & . & . \qquad . & . & . \\ . & . & . \qquad . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots\ldots \; a_{nn} & . & b_n \end{bmatrix}$$

Obs. Aqui só serão abordados sistemas possíveis e determinados

Métodos de solução do sistema de equações representado pela Eq. (5.2)

5.1) Métodos diretos

5.1-a) Eliminação de Gauss

O método da eliminação de Gauss é um método de solução direta do sistema (a menos da aritmética finita) e consiste na técnica de escalonamento parcial do sistema de equações. Existem dois procedimento na realização desse escalonamento

Primeiro passo: Escalonamento do sistema onde obtemos a matriz triangular superior e achamos a solução do problema através da técnica da substituição recuada

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} \ldots\ldots\ldots c_{1n} & . & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} \ldots\ldots\ldots c_{2n} & . & d_2 \\ 0 & 0 & 1 \ldots\ldots\ldots c_{3n} & . & d_3 \\ . & . & . \qquad . & . & . \\ . & . & . \qquad . & . & . \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots \; 1 & . & d_n \end{bmatrix}$$

Em seguida procedemos à substituição recuada e obtemos regressivamente as incógnitas do sistema, usando a seguinte relação de recorrência

$$x_i = d_i - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j, \; i = 1:n, \; x_n = d_n$$

Exercício de fixação:

1)

$$\begin{aligned} E_1 &: x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8 \\ E_2 &: 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20 \\ E_3 &: x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ E_4 &: x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4 \end{aligned}$$

Matriz aumentada do sistema

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & . & -8 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & . & -20 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & . & -2 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & . & 4 \end{bmatrix}$$

Opção de solução: Matriz triangular superior com substituição recuada

Passo 1:

Começar o escalonamento pela primeira linha e adotar uma lógica sequencial de cima para baixo

a) verificar se o elemento a_{11} é diferente de zero e igual a 1

$L_2 \leftarrow L_2 - 2 * L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & . & -8 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & . & -4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & . & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & . & 12 \end{bmatrix}$$

Passo 2:

Obs. Como $a_{22} = 0$ fazer $L_2 \leftarrow L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & . & -8 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & . & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & . & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & . & 12 \end{bmatrix}$$

Passo3:

$L_2 \leftarrow L_2 / 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & . & -8 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & . & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & . & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & . & 12 \end{bmatrix}$$

Passo4:

$L_3 \leftarrow -L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & . & -8 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & . & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & . & 12 \end{bmatrix}$$

Passo 5:

$L_4 \leftarrow L_4 - 2 * L_3$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & . & -8 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & . & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & . & 4 \end{bmatrix}$$

Passo 6:

$L_4 \leftarrow L_4 / 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & . & -8 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & . & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \\ x4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} `-8 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ 0 & 1 & c_{23} & c_{24} \\ 0 & 0 & 1 & c_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{bmatrix}$$

Passo 6: Técnica da substituição recuada (matriz triangular superior)

$$x_i = d_i - \sum_{j=i+1}^{n} c_{ij} x_j, \; i = 1:n, \; x_n = d_n$$

n = 4.

$$x_4 = d_4 = 2$$

$$x_3 = d_3 - c_{34} x_4 = 4 - 1 * 2 = 2$$

$$x_2 = c_2 - c_{23} x_3 - c_{24} x_4 = 3 - (-1/2) * 2 - (1/2) * 2 = 3$$

$$x_1 = c_1 - c_{12} x_2 - c_{13} x_3 - c_{14} x_4 = -8 - (-1) * 3 - (2) * 2 - (-1) * 2 = -7$$

A solução do sistema pode ser representada na forma

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Passo final: Testar a solução no sistema de equações

$$E_1 : (-7) \; -(3) + \; 2 * (2) - (2) = -8 \rightarrow -8 \text{ (ok)}$$
$$E_2 : 2 * (-7) - 2 * (3) + 3 * (2) - 3 * (2) = -20 \rightarrow -20\text{(ok)}$$
$$E_3 : -7 + 3 + 2 = -2 \rightarrow -2\text{(ok)}$$
$$E_4 : -7 - (3) + 4 * (2) + 3 * 2 = 4 \rightarrow 4\text{(ok)}$$

2)

$$
\begin{aligned}
&E_1 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\
&E_2 : x_1 + x_2 + 2x_4 = 8 \\
&E_3 : 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \\
&E_4 : x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0
\end{aligned}
$$

Matriz aumentada do sistema

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & . & 7 \\
1 & 1 & 0 & 2 & . & 8 \\
2 & 2 & 3 & 0 & . & 10 \\
-1 & -1 & -2 & 2 & . & 0
\end{bmatrix}
$$

Opção de solução: Matriz triangular superior com substituição recuada

Passo 1:

Começar o escalonamento pela primeira linha e adotar uma lógica sequencial de cima para baixo

a) verificar se o elemento a_{11} é diferente de zero e igual a 1

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 - 2 * L_1$

$L_4 \leftarrow L_4 + L_1$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & . & 7 \\
0 & 0 & -1 & 1. & & 1 \\
0 & 0 & 1 & -2 & . & -4 \\
0 & 0 & -1 & 3. & & 7
\end{bmatrix}
$$

Obs. Como $c_{n2} = 0,\ n = 2:4$, portanto este sistema não possui solução única e o método de eliminação de Gauss não se aplica

3)

$$
\begin{aligned}
&E_1 : 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\
&E_2 : x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\
&E_3 : -x_1 + x_2 + 5x_3 = 16
\end{aligned}
$$

Matriz aumentada do sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & . & 4 \\ 1 & 2 & -2 & . & -1 \\ -1 & 1 & 5 & . & 16 \end{bmatrix}$$

Opção de solução: Matriz triangular superior com substituição recuada

Passo 1:

Começar o escalonamento pela primeira linha e adotar uma lógica sequencial de cima para baixo

a) verificar se o elemento a_{11} é diferente de zero e igual a 1

Passo 2

$$L_1 \leftarrow L_1/3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 & . & 4/3 \\ 1 & 2 & -2 & . & -1 \\ -1 & 1 & 5 & . & 16 \end{bmatrix}$$

Passo 3:

$$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 & . & 4/3 \\ 0 & 7/3 & -7/3 & . & -7/3 \\ 0 & 2/3 & 16/3 & . & 52/3 \end{bmatrix}$$

Passo4:

$$L_2 \leftarrow (3/7) * L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 & . & 4/3 \\ 0 & 1 & -1 & . & -1 \\ 0 & 2/3 & 16/3 & . & 52/3 \end{bmatrix}$$

Passo5:

$$L_3 \leftarrow L_3 - (2/3) * L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 & . & 4/3 \\ 0 & 1 & -1 & . & -1 \\ 0 & 0 & 6 & . & 18 \end{bmatrix}$$

Passo6:

$$L_3 \leftarrow L3/6$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/3 & 1/3 & . & 4/3 \\ 0 & 1 & -1 & . & -1 \\ 0 & 0 & 1 & . & 3 \end{bmatrix}$$

Passo 6: Técnica da substituição recuada

Após uma pequena álgebra obtemos

$$\vec{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Passo final: Testar a solução no sistema de equações

$$E_1 : 3*(1) - (2) + 3 = 4 \rightarrow 4 \ \text{(ok)}$$
$$E_2 : (1) + 2*(2) - 2*(3) = -1 \rightarrow -1 \ \text{(ok)}$$
$$E_3 : -(1) + (2) + 5*(3) = 16 \rightarrow 16 \ \text{(ok)}$$

5.1-b) Método da Matriz Inversa

Aqui também o objetivo é acharmos a solução o sistema de equações lineares e algébricas, mostrado na Eq. (6.1)

Vamos voltar a definição

$$A * A^{-1} * \vec{X} = A^{-1} * \vec{b}$$
$$A * A^{-1} = I$$
$$I * \vec{X} = I * A^{-1} * \vec{b}$$
$$\vec{X} = A^{-1} * \vec{b}$$

Obs. Aqui vamos mostrar a obtenção da A^{-1} usando o método de eliminação de Gauss

Vamos definir a matriz inversa de A na forma

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \ldots\ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \ldots\ldots b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \ldots\ldots b_{3n} \\ . & . & . \quad\quad . \\ . & . & . \quad\quad . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \ldots \quad b_{nn} \end{bmatrix}$$

Mas sabemos que

$$A^{-1} * A = I$$

Então, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots a_{3n} \\ . & . & . \quad\quad . \\ . & . & . \quad\quad . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots \quad a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \ldots\ldots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \ldots\ldots b_{2n} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \ldots\ldots b_{3n} \\ . & . & . \quad\quad . \\ . & . & . \quad\quad . \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} \ldots \quad b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & 1 & 0 \ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ . & . & . \quad . \\ . & . & . \quad . \\ 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 1 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$$A \quad\quad * \quad\quad A^{-1} \quad\quad = \quad\quad I$$

Para tanto vamos escrever o sistema (6.3) na forma da matriz aumentada

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \ldots\ldots a_{1n} & . & 1 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \ldots\ldots a_{2n} & . & 0 & 1 & 0 & 0 \ldots\ldots 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \ldots\ldots a_{3n} & . & 0 & 0 & 1 & 0 \ldots\ldots 0 \\ . & . & . \quad\quad . & . & . & . & . & \ldots\ldots \\ . & . & . \quad\quad . & . & . & . & . & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots \quad a_{nn} & . & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots 1 \end{bmatrix}$$

Exercício de fixação. Vamos resolver o exercício 1 pelo método da matriz inversa

$$E_1 : x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -8$$
$$E_2 : 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -20$$
$$E_3 : x_1 + x_2 + x_3 = -2$$
$$E_4 : x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 4$$

Vamos escrever para esse sistema a mtriz aumentada para o cálculo da matriz inversa (A^{-1})

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & . & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & -3 & . & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & . & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora fazemos o escalonamento do sistema acima no esquema matriz tringular superior (método de eliminação de Gauss) e obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & . & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & . & -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & . & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & . & -5/2 & 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Obtenção das variáveis

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Após uma certa álgebra obtemos

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -15/2 & 7/2 & 1/2 & 1 \\ 3 & -3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 9/2 & -2 & 0 & -1/2 \\ -5/2 & 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Fazemos agora

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -15/2 & 7/2 & 1/2 & 1 \\ 3 & -3/2 & 1/2 & -1/2 \\ 9/2 & -2 & 0 & -1/2 \\ -5/2 & 1 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}}_{A^{-1}} * \underbrace{\begin{bmatrix} -8 \\ -20 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}}_{\vec{b}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -7 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}}_{\vec{X}}$$

Referências Bibliográficas

1) Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais – Segunda Edição
Autores: Maria A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes
Editora: Pearson

2) Cálculo Numérico – Licenciatura Matemática
Autores: Francisco Gêvane Muniz Cunha e Jânio Kléo de Sousa Castro
https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/430185/2/Calculo%20Numerico.pdf