Instituto Politécnico | IPRJ Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Departamento de Modelagem Computacional – DMC
Período: 2023/02
Disciplina: CÁLCULO NUMÉRICO (IPRJ01-07579 e CÁLCULO NUMÉRICO – R (IPRJ 01-11976).
Carga horária: 75 horas
Professor Hermes Alves Filho

MÓDULO 4.1

4) **INTEGRAÇÃO NUMÉRICA**: Nesse tópico o discente tomará contato com as técnicas mais comumente usadas em aproximações numéricas de integrais definidas que nem sempre possuem soluções diretas.

Apresentamos aqui nesse tópico os métodos de integração numérica (fórmulas fechadas de Newton-Cotes) baseados na representação de funções com polinômios interpolantes de Lagrange ou com polinômios de Taylor, como vimos no capítulo anterior, e no segundo teorema do valor médio do cálculo integral. Nosso objetivo é resolver de forma aproximada a integral definida na forma:

$$\int_a^b f(x)dx \tag{4.1}$$

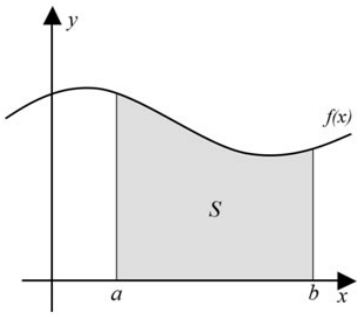

Figura 4.1. Área sobre a Curva

O cálculo direto da integral definida, pelo teorema fundamental do cálculo, apresenta a forma:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{4.2}$$

Onde temos a seguinte representação dF(x)/dx = f(x)

Dificuldade: Nem sempre é possível a obtenção da primitiva F(x) e, portanto, recorremos a soluções aproximadas (numéricas) da integral definida vista na Eq. (4.1)

Observação importante: Em todos os métodos de integração numérica que serão apresentados neste módulo, as fórmulas de integração numérica de funções definidas e contínuas em [a;b] são do tipo:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{n=0}^{N} a_n f(x_n) \tag{4.3}$$

As expressões (somatórios) do lado direito da Eq.(4.3) são denominadas como quadraturas numéricas. Inicialmente serão consideradas as quadraturas numéricas geradas a partir de polinômios interpolantes de Lagrange de grau máximo igual a 1 (dois pontos) e de polinômio de Taylor de grau 3 (três pontos), com pontos igualmente espaçados

4.1) Regra do Trapézio Simples (1/3)

Considere agora uma função $f(x) \in C^2[a;b]$ e dois pontos distintos x_0 e x_1 tais que $x_0 = a$, $x_1 = b$ e $h = b - a = x_1 - x_0$. Nosso objetivo é obter uma aproximação para a integral vista na Eq. (5.1). Para tanto usaremos a seguinte relação

$$f(x) = P_1(x) + E_{T2}(x), \tag{4.4}$$

onde $P_1(x)$ é o polinômio de Lagrange de grau 1. Então, podemos escrever

$$f(x) = L_0 f(x_0) + L_1 f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''[\xi(x)],\ \xi(x) \in [a,b]. \tag{4.5}$$

Da Eq.(5.1) obtemos

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_0 f(x_0)dx + \int_a^b L_1 f(x_1)dx + \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''[\xi(x)]dx, \tag{4.6}$$

$$\int_a^b f(x)dx = f(x_0)\int_a^b \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}dx + f(x_1)\int_a^b \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}dx + \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''[\xi(x)]dx, \tag{4.7}$$

Mas como $a = x_0$ e $b = x_1$, obtemos

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \left[\frac{(x-x_1)^2}{2(x_0-x_1)} f(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2(x_1-x_0)} f(x_1) \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''[\xi(x)]dx, \quad (4.8)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \left[\frac{(x_1-x_0)}{2} f(x_0) + \frac{(x_1-x_0)}{2} f(x_1) \right] + \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''[\xi(x)]dx, \quad (4.9)$$

Mas como $h = x_1 - x_0$, obtemos

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \left[\frac{h}{2} f(x_0) + \frac{h}{2} f(x_1) \right] + \int_{x_0}^{x_1} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{2!} f''[\xi(x)]dx, \quad (4.10)$$

Agora vamos tentar resolver a integral

$$INT = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1) f''[\xi(x)]dx, \quad (4.11)$$

Para fazermos essa resolução vamos usar o seguinte teorema

Teorema 4.1: Se f(x) e g(x) são funções contínuas num intervalo fechado [a;b] e se g(x) não possui raiz (não muda de sinal) em (a;b), então existe um número ϑ entre a e b tal que

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)g(x)dx = f(\vartheta) \int_{x_0}^{x_1} g(x)dx \quad (4.12)$$

Agora, fazendo o uso do teorema 4.1 na EQ. (5.11), obtemos

$$INT = \frac{f''[\xi(x)]}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)dx \quad (4.13)$$

Substituindo a Eq.(5.13) na Eq.(5.10) temos como solução

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \left[\frac{h}{2} f(x_0) + \frac{h}{2} f(x_1) \right] + \frac{f''[\xi(x)]}{2} \int_{x_0}^{x_1} (x-x_0)(x-x_1)dx \quad (4.14)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \left[\frac{h}{2} f(x_0) + \frac{h}{2} f(x_1) \right] + \frac{f''[\xi(x)]}{2} \int_{x_0}^{x_1} \left[x^2 - (x_0+x_1)x + x_0 x_1 \right] dx \quad (4.15)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \left[\frac{h}{2} f(x_0) + \frac{h}{2} f(x_1) \right] + \frac{f''[\xi(x)]}{2} \left[\frac{x^3}{3} - \frac{(x_0+x_1)x^2}{2} + x_0 x_1 x \right]_{x_0}^{x_1} \quad (4.16)$$

Após uma pequena álgebra, obtemos

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] + \frac{f''[\xi(x)]}{2}[-\frac{(x_1-x_0)^3}{6}] \qquad (4.17)$$

Mas, por definição $h = x_1 - x_0$. Finalmente, obtemos

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \left[\frac{h}{2}f(x_0) + \frac{h}{2}f(x_1)\right] - \frac{h^3}{12}f''[\xi(x)],\ \xi(x) \in [x_0; x_1] \qquad (4.18)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \frac{h^3}{12}f''[\xi(x)],\ \xi(x) \in [x_0; x_1]$$

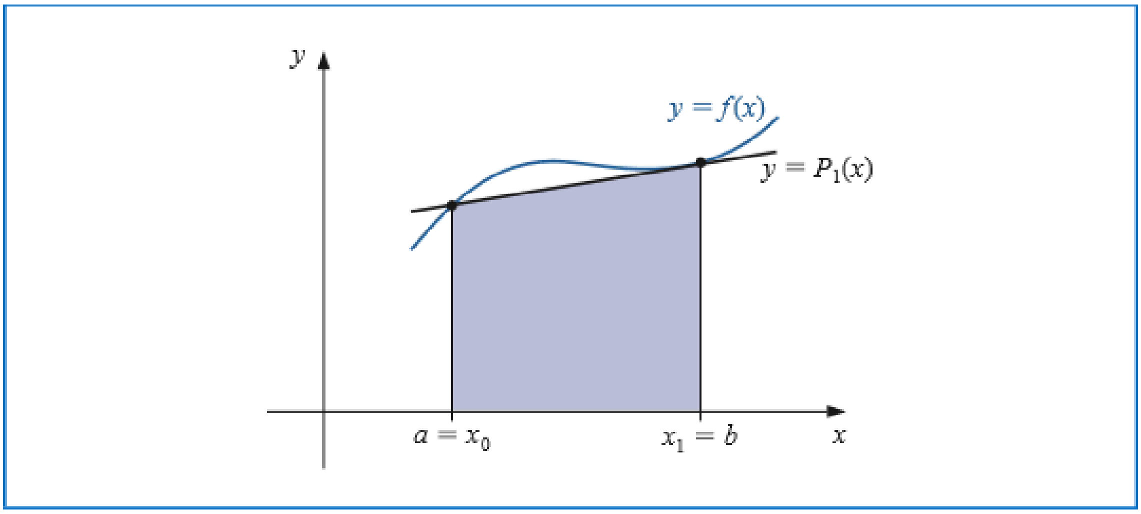

Figura 4.2. Ilustração da Regra do Trapézio Simples

Exemplos Ilustrativos

Usar a regra do trapézio para aproximar as integrais que seguem. Calcular o desvio relativo percentual e a cota máxima de erro de truncamento de cada aproximação.

Exemplo 1

a) Calculo da aproximação: r^*

$$\int_0^{0,1} xe^x\, dx$$

$$\int_0^{0,1} xe^x dx = \frac{h}{2}\left[\left(f(x_0)\right) + \left(f(x_1)\right)\right]$$

$$f(x) = xe^{x}$$
$$x_0 = 0 \rightarrow f(0) = 0$$
$$x_1 = 0{,}1 \rightarrow f(0{,}1) = 0{,}1 * e^{0{,}1} = 0{,}110517$$
$$h = x_1 - x_0 = 0{,}1 - 0 = 0{,}1$$
$$r^* = \int_0^{0{,}1} xe^{x}dx = \frac{0{,}1}{2}\left[0 + 0{,}110517\right] = 0{,}005526\,\text{u.a.}$$

b) Cálculo do valor da referência: r

$$r = \int_0^{0{,}1} xe^{x}dx = \left[e^{x}(x-1)\right]_0^{0{,}1} = 0{,}005346\,\text{u.a.}$$

c) Desvio Relativo Percentual (DRP)

$$DRP = \left|\frac{r - r^*}{r}\right| * 100 = 3{,}37\%$$

d) Cota máxima do erro de truncamento

$$E_{T2}[\xi(x)] = \left|\frac{h^3}{12} f''[\xi(x)]\right|,\ \xi(x) \in [0; 0{,}1]$$
$$f(x) = xe^{x}$$
$$f'(x) = e^{x}(x+1)$$
$$f''(x) = e^{x}(x+2)$$

d.1) $\xi(x) = 0$

$$f''(0) = e^{0}(0+2) = 2$$
$$E_{T2}(0) = \left|\frac{0{,}1^3}{12} * 2\right| = 1{,}666667 * 10^{-4}$$

d.2) $\xi(x) = 0{,}1$

$$f''(0{,}1) = e^{0{,}1}(0{,}1+2) = 2{,}320859$$
$$E_{T2}(0{,}1) = \left|\frac{0{,}1^3}{12} * 2{,}320859\right| = 1{,}934049 * 10^{-3}$$

Conclusão: A cota máxima de erro de truncamento vale $E_{T2}(0{,}1) = 1{,}934049 * 10^{-3}$

Exemplo 2

$$\int_0^{\pi/3} sen^2(x)dx$$

a) Calculo da aproximação: r^*

$$r^* = \int_0^{\pi/3} sen^2(x)dx = \frac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)]$$

$$f(x) = sen^2(x)$$
$$x_0 = 0 \rightarrow f(0) = 0$$
$$x_1 = \frac{\pi}{3} \rightarrow f(\frac{\pi}{3}) = sen^2(\frac{\pi}{3}) = 0,75$$
$$h = x_1 - x_0 = \frac{\pi}{3} - 0 = \frac{\pi}{3}$$

$$r^* = \int_0^{\pi/3} sen^2(x)dx = \frac{\pi}{3*2}[0+0,75] = 0,392699 \text{ u.a.}$$

b) Cálculo do valor da referência: r

$$r = \int_0^{\pi/3} sen^2(x)dx = \int_0^{\pi/3} sen(x)\,sen(x)dx$$

$$\cos(2x) = \cos(x+x) = \cos(x)*\cos(x) - sen(x)*sen(x)$$
$$\cos(2x) = \cos^2(x) - sen^2(x)$$
$$\cos(2x) = [1 - sen^2(x)] - sen^2(x)$$
$$\cos(2x) = 1 - 2sen^2(x)$$
$$sen^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

$$r = \int_0^{\pi/3} sen^2(x)dx = \int_0^{\pi/3}\left[\frac{1-\cos(2x)}{2}\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/3}\cos(2x)dx = \left[\frac{x}{2}\right]_0^{\pi/3} - \left[\frac{1}{4}sen(2x)\right]_0^{\pi/3}$$

$$r = \int_0^{\pi/3} sen^2(x)dx = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}\left[sen(\frac{2\pi}{3}) - sen(0)\right] = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{4}sen(\frac{2\pi}{3}) = 0,307092 \text{ u.a.}$$

c) Desvio Relativo Percentual (DRP)

$$DRP = \left|\frac{r - r^*}{r}\right| * 100 = 29,7\%$$

d) Cota máxima do erro de truncamento

$$E_{T2}[\xi(x)] = \left|\frac{h^3}{12} f''[\xi(x)]\right|,\ \xi(x) \in [0; \frac{\pi}{3}]$$

$$f(x) = sen^2(x)$$
$$f'(x) = 2sen(x)\cos(x)$$
$$f''(x) = 2\left[\cos(x)\cos(x) - sen(x)sen(x)\right] = 2\left[\cos^2(x) - sen^2(x)\right] = 2\left[1 - sen^2(x) - sen^2(x)\right]$$
$$f''(x) = 2\left[1 - 2sen^2(x)\right] = 2 - 4sen^2(x)$$

d.1) $\xi(x) = 0$

$$f''(0) = 2\left[1 - 2sen^2(0)\right] = 2$$

$$E_{T2}[0] = \left|\frac{[\pi/3]^2 * 2}{12}\right| = 0{,}182770$$

d.2) $\xi(x) = \pi/3$

$$f''(\pi/3) = 2 - 4sen^2(\pi/3) = -1$$

$$E_{T2}[\pi/3] = \left|\frac{[\pi/3]^2 * -1}{12}\right| = 0{,}09139$$

Conclusão: A cota máxima do erro de truncamento é $E_{T2}[0] = 0{,}182770$

Exemplo 3

$$\int_0^2 (2+3x)dx$$

a) Calculo da aproximação: r^*

$$r^* = \int_0^2 (2+3x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0 + f(x_1)\right]$$

$$f(x) = 2+3x$$
$$x_0 = 0 \rightarrow f(0) = 2$$
$$x_1 = 2 \rightarrow f(2) = 2+3*2 = 2+6 = 8$$
$$h = x_1 - x_0 = 2-0 = 2$$

$$r^* = \int_0^2 (2+3x)dx = \frac{2}{2}\left[2+8\right] = 10 \text{ u.a.}$$

b) Cálculo da referência

$$\int_0^2 (2+3x)dx = \left[2x + \frac{3x^2}{2}\right]_0^2 = 2*2+\frac{3(2)^2}{2} = 10\,\text{u.a.}$$

c) Desvio relativo Percentual (DRP)

$$DRP = \left|\frac{r-r^*}{r}\right| * 100 = 0\%$$

d) Cota máxima do erro de truncamento

$$E_{T2}[\xi(x)] = \left|\frac{h^3}{12} f''[\xi(x)]\right|,\ \xi(x) \in [0;2]$$

$$f(x) = 2+3x$$
$$f'(x) = 3$$
$$f''(x) = 0$$

Então a cota máxima de erro de truncamento

$$E_{T2}[\xi(x)] = \left|\frac{h^3}{12} * 0\right| = 0,\ \xi(x) \in [0;2]$$

4.1-a) Regra do Trapézio Repetida

Exercício

$$\int_0^{10} xe^x dx$$

a) Calculo da aproximação: r^*

$$f(x) = xe^x$$
$$f'(x) = e^x(x+1)$$
$$f''(x) = e^x(x+2)$$
$$x_0 = 0 \rightarrow f(0) = 0 * e^0 = 0$$
$$x_1 = 10 \rightarrow f(10) = 10 * e^{10} = 220.000,00$$
$$r^* = \int_0^{10} xe^x dx = \frac{10}{2}\left[0 + 220.264,66\right] = 1.101.323,29$$

b) Cálculo da referência: r

$$r = \int_0^{10} xe^x dx = \left[e^x(x-1)\right]_{`0}^{10} = \left[e^{10}(10-1)-1\right] = 9 * e^{10} - 1 = 198.237,19$$

c) Desvio Relativo Percentual (DRP)

$$DRP = \left|\frac{r - r^*}{r}\right| * 100 = 456\%$$

Regra do Trapézio Repetida (caso particular)

$$\int_a^b f(x)dx$$

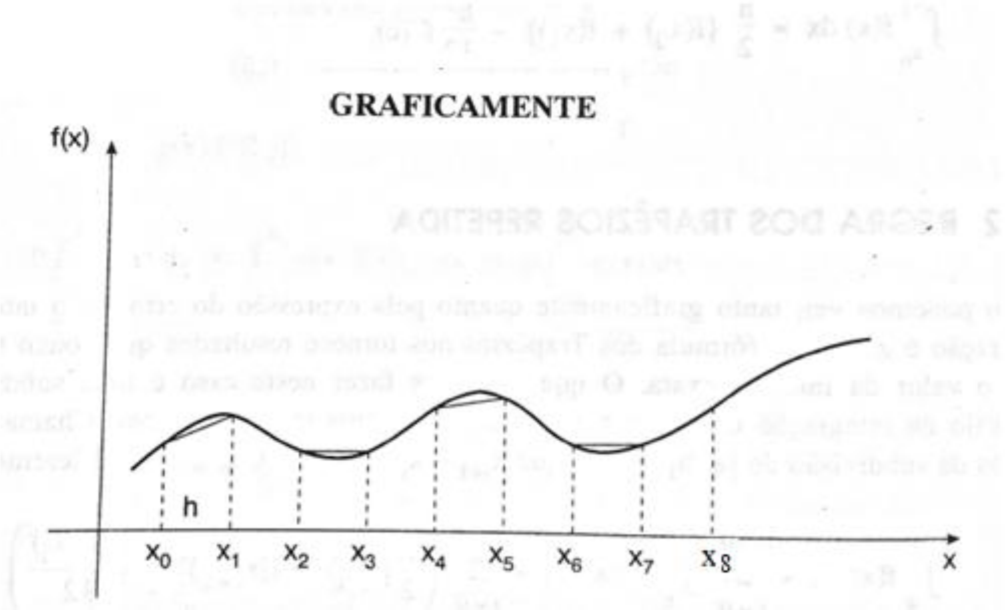

Figura 4.3: Regra do Trapézio Repetida

$$h = \frac{(b-a)}{m},\ a = x_0 \text{ e } b = x_8$$

Onde m = número de partições do intervalo [a;b] = 8

$$h = \frac{(x_8 - x_0)}{8}$$

$$\int_{x_0}^{x_8} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_5} f(x)dx + \int_{x_5}^{x_6} f(x)dx + \int_{x_6}^{x_7} f(x)dx + \int_{x_7}^{x_8} f(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{x_8} f(x)dx = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_1)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_2) + f(x_3)\right] +$$

$$+ \frac{h}{2}\left[f(x_3) + f(x_4)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_4) + f(x_5)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_5) + f(x_6)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_6) + f(x_7)\right] + \frac{h}{2}\left[f(x_7) + f(x_8)\right]$$

$$\int_{x_0}^{x_8} f(x)dx = \frac{h}{2}\{[f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7)] + f(x_8)]\}$$

Regra do Trapézio Repetida (Fórmula Geral)

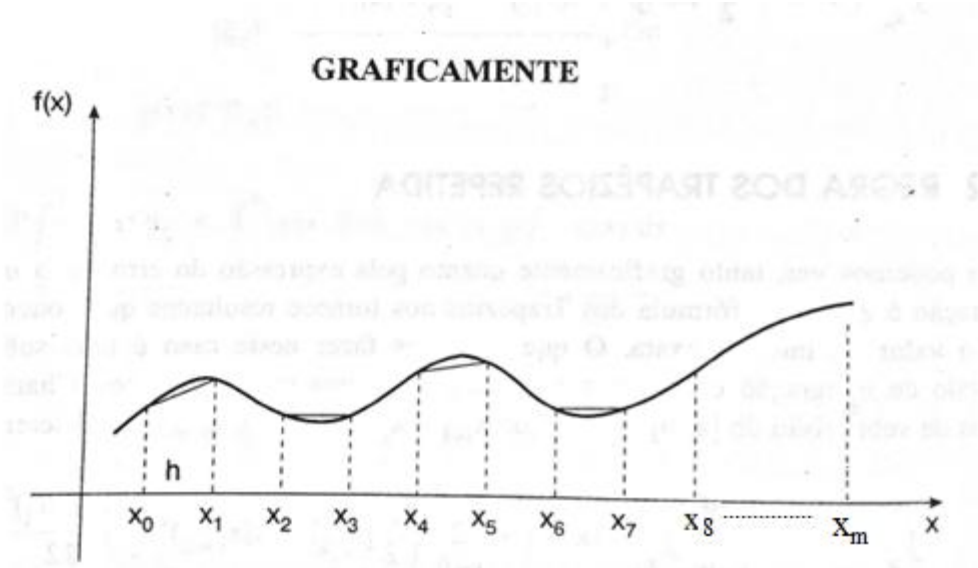

Figura 4.4: Regra do Trapézio Repetida (Fórmula Geral)

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx =$$

$$\frac{h}{2}\left\{\begin{matrix}[f(x_0) + 2[f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5) + f(x_6) + f(x_7) + f(x_8) + \ldots\ldots + f(x_{m-1})]] \\ \\ +f(x_m)]\end{matrix}\right\} \qquad (4.19)$$

$$h = \frac{(b-a)}{m}, \ a = x_0 \text{ e } b = x_m$$

$$h = \frac{(x_m - x_0)}{m}$$

m = número de partições do intervalo $[x_0;x_m]$. Pode assumir qualquer valor inteiro par ou impar

Erro de truncamento

$$E_{TM}(x) = \left|\frac{mh^3}{12} f''[\xi(x)]\right|, \ \xi(x) \in [x_0; x_m] \qquad (4.20)$$

Cota máxima do erro de truncamento

Sendo $f''[\xi(x)]$ contínua em [a;b], então existe $M_2 = \text{máx}\left|f''\left[\xi(x)\right]\right|$. Assim

$$E_{TM}(x) = \left|\frac{mh^3}{12} f''[\xi(x)]\right|,\ \xi(x) \in [x_0; x_m] \tag{4.21}$$

$$E_{TM}(x) = \left|\frac{(b-a)h^2}{12} M_2\right|$$

$$h^3 = h^2 h$$

$$h = \frac{(b-a)}{m},\ a = x_0 \text{ e } b = x_m$$

Exemplo Ilustrativo

1) Calcular uma aproximação da integral dada abaixo usando 10 subintervalos usando a regra do trapézio repetida. Calcule o desvio relativo percentual e a cota máxima do erro de truncamento;
2) Qual é o número mínimo de subdivisões de modo que a cota máxima do erro de truncamento seja inferior a 10^{-3}

$$\int_0^1 e^x dx$$

Resolução:

1.a) Cálculo da aproximação: r^*

$$a = 0; b = 1$$
$$m = 10$$
$$h = \frac{(b-a)}{m} = \frac{(1-0)}{10} = 0{,}1$$

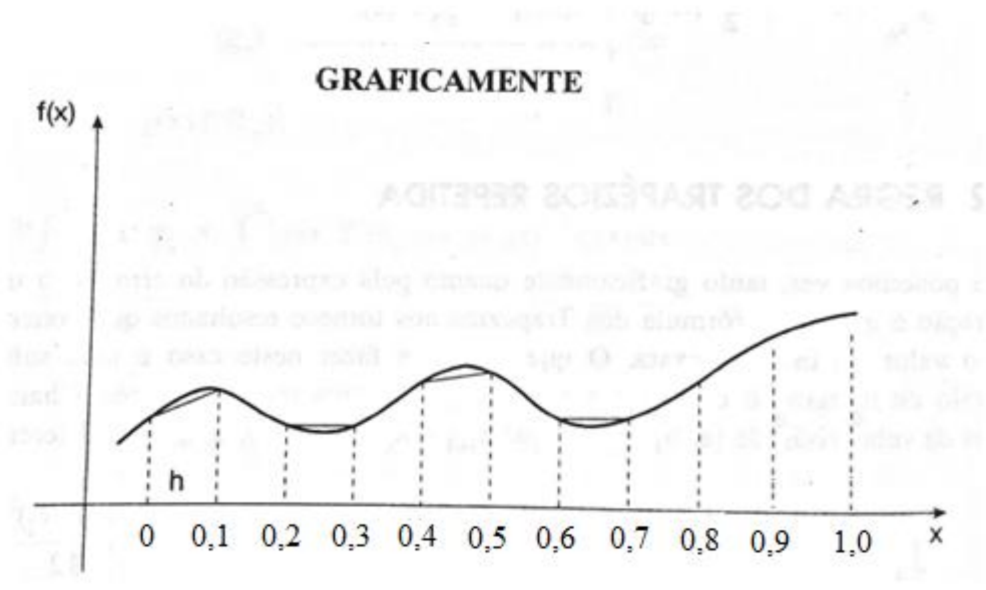

Figura 4.5: Regra do Trapézio Repetida (Fórmula Geral)

$$r^* = \int_0^1 e^x dx = \frac{0,1}{2}\left[e^0 + 2e^{0,1} + 2e^{0,2} + 2e^{0,3} + 2e^{0,4} + 2e^{0,5} + 2e^{0,6} + 2e^{0,7} + 2e^{0,8} + 2e^{0,9} + e^1\right] = 1,719713 \text{ u.a.}$$

1.b) Cálculo da referência: r

$$r = \int_0^1 e^x dx = \left[e^x\right]_0^1 = e^1 - e^0 = 1,718282$$

1.c) Desvio Relativo Percentual

$$DRP = \left|\frac{r - r^*}{r}\right| * 100 = 0,08\%$$

1.d) Resolver a integral de forma aproximada usando a regra do Trapézio simples

$$a = 0; b = 1$$
$$h = b - a = a - 0 = 1$$
$$f(0) = e^0 = 1$$
$$f(1) = e^1 = 2,718282$$

$$r^* = \int_0^1 e^x dx = \frac{h}{2}\left[f(0) + f(1)\right] = \frac{1}{2}\left[1 + 2,718282\right] = 1,859141$$

Desvio Relativo Percentual

$$DRP = \left| \frac{r - r^*}{r} \right| * 100 = 8,20\%$$

1.e) Cota máxima do erro de truncamento

$$n = 10$$
$$h = 0,1$$

$$E_{TM}[\xi(x)] = \left| \frac{10(0,1)^3}{12} f''[\xi(x)] \right|, \ \xi(x) \in [0;1]$$

$$f(x) = e^x$$
$$f'(x) = e^x$$
$$f''(x) = e^x$$

Quando $\xi(x) = 0$

$$f''(0) = e^0 = 1$$

$$E_{TM}[0] = \left| \frac{10(0,1)^3}{12} * 1 \right| = 8,333333 * 10^{-4}$$

Quando $\xi(x) = 1$

$$f''(1) = e^1 = 2,718282$$

$$E_{TM}[1] = \left| \frac{10(0,1)^3}{12} * 2,718282 \right| = 2,265235 * 10^{-3}$$

Conclusão: A cota máxima de erro de truncamento vale

$$E_{TM}[1] = 2,265235 * 10^{-3}$$

2) Qual é o número mínimo de subdivisões de modo que a cota máxima do erro de truncamento seja inferior a 10^{-3}

$$E_{TM}(x) = \left| \frac{(b-a)h^2}{12} M_2 \right|$$

Onde

$$M_2 = \text{máx}\left|f''\left[\xi(x)\right]\right| = 2,718282$$

$$E_{TM}(x) = \left|\frac{(1-0)h^2}{12} * 2,718282\right| < 10^{-3}$$

$$E_{TM}(x) = \left|\frac{h^2}{12} * 2,718282\right| < 10^{-3}$$

$$h^2 < 0,00441$$

$$h < 0,0664408$$

Cálculo do número mínimo de divisões “n”

$$h = \frac{(b-a)}{m} \rightarrow m = \frac{(b-a)}{h} = \frac{1}{0,066440} = 15,052$$

4.2) Regra de Simpson Simples (1/3)

Objetivo: resolver a integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

Considere agora uma função $f(x) \in C^4[a;b]$ e três pontos x_0,x_1 e x_2 com as seguintes características

$$x_0 = a$$
$$x_1 = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} = \frac{x_0 + x_2}{2}$$
$$x_2 = b$$

$$h = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$$

Portanto, x_1 é o ponto médio entre x_0 e x_2

Vamos aqui escrever a expressão

$$f(x) = P_n(x) + E_{Tn+1}(x)$$

Onde aqui n = 3 do polinômio de Taylor que será desenvolvido no ponto intermediário x_1. Podemos escrever

$$f(x) = P_3(x) + E_{T4}(x)$$

$$f(x) = f(x_1) + \frac{(x-x_1)f'(x_1)}{1!} + \frac{(x-x_1)^2 f''(x_1)}{2!} + \frac{(x-x_1)^3 f'(x_1)}{3!} + \frac{(x-x_1)^4 f^{iv}[\gamma(x)]}{4!},$$
$$\gamma(x) \in [x_1; x]$$

O próximo passo é realizar a seguinte integral

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x_1)dx + \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)f'(x_1)\,dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)^2 f''(x_1)}{2}dx +$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)^3 f'(x_1)}{6}dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)^4 f^{iv}[\gamma(x)]}{24}dx,$$
$$\gamma(x) \in [x_1; x]$$

Após um árduo desenvolvimento (anexo no fim do módulo) algébrico obtemos a fórmula de Simpson simples para a solução de integrais definidas

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4*f(x_1)+f(x_2)] - \frac{h^5}{90} f^{iv}[\chi(x)] \tag{4.22}$$

$\chi(x) \in [x_0; x_2],\ \chi(x) \in [a;b]$

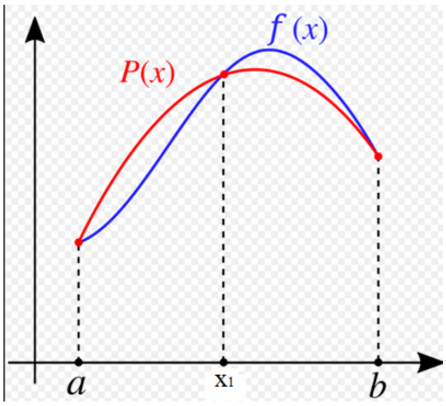

Figura 4.6: Regra de Simpson Simples

Exemplos ilustrativos: vamos repetir aqui os mesmos exemplos que fizemos com a regra do Trapézio simples, vamos comparar os resultados para verificarmos qual das duas regras apresenta uma melhor aproximação para as integrais dos exemplos citados.

Exemplo 1

$$\int_0^{0,1} xe^x\, dx$$

a) Cálculo da aproximação

$$r^* = \int_0^{0,1} xe^x dx = \frac{h}{3}[f(x_0)+4*f(x_1)+f(x_2)]$$

Dados de entrada

$$f(x) = xe^x$$
$$x_0 = 0 \rightarrow f(x_0) = f(0) = 0*e^0 = 0$$
$$x_2 = 0{,}1 \rightarrow f(x_2) = f(0{,}1) = 0{,}1e^{0,1} = 0{,}110518$$
$$x_1 = \frac{(x_0+x_2)}{2} = \frac{(0+0{,}1)}{2} = 0{,}05 \rightarrow f(x_1) = f(0{,}05) = 0{,}05e^{0,05} = 0{,}052564$$
$$h = x_2 - x_1 =,1 - 0{,}05 = 0{,}05$$

$$r^* = \int_0^{0,1} xe^x dx = \frac{0{,}05}{3}[0+4*0{,}052564+0{,}110518] = 0{,}005346$$

b) Cálculo do valor da referência: r

$$r = \int_0^{0,1} xe^x dx = \left[e^x(x-1)\right]_{`0}^{0,1} = 0,005346\,u.a.$$

c) Desvio Relativo Percentual

$$DRP = \left|\frac{r - r^*}{r}\right| * 100 = 0\%$$

d) Cota máxima do erro de truncamento

$$E_{T4}[\chi(x)] = \left|\frac{h^5}{90} f^{iv}[\chi(x)]\right|, \;\; \chi(x) \in [0; 0,1]$$

$$f(x) = xe^x$$
$$f'(x) = e^x(x+1)$$
$$f''(x) = e^x(x+2)$$
$$f'''(x) = e^x(x+3)$$
$$f^{iv}(x) = e^x(x+4)$$

d.1) Caso onde $\chi(x) = 0$

$$f^{iv}(0) = e^0(0+4) = 4$$

$$E_{T4}[0] = \left|\frac{(0,05)^5}{90} * 4\right| = 1,388889 * 10^{-8}$$

d.2) Caso onde $\chi(x) = 0,1$

$$f^{iv}(0) = e^{0,1}(0,1+4) = 4,531291$$

$$E_{T4}[0,1] = \left|\frac{(0,05)^5}{90} * 4,531201\right| = 1,573333 * 10^{-8}$$

Conclusão: A cota máxima do erro de truncamento é $E_{T4}[0,1] = 1,573333 * 10^{-8}$

Obs. Fazer os outros dois exercícios feitos com a regra do Trapézio simples

4.2-a) Regra de Simpson Repetida (caso particular)

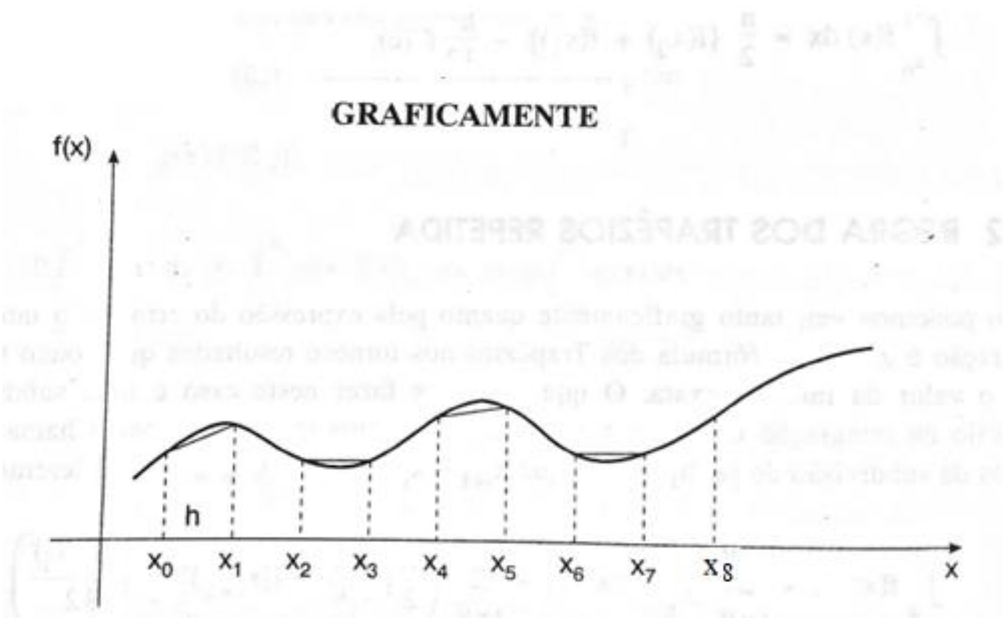

Figura 4.7: Regra de Simpson Repetida

$$h = \frac{(b-a)}{m} = \frac{(b-a)}{8},\ a = x_0 \text{ e } b = x_8, m = 8$$

$$h = \frac{(x_8 - x_0)}{8}$$

m = 8

m = número de partições do intervalo $[x_0;x_1]$. Pode assumir qualquer valor inteiro par

$$\int_{x_0}^{x_8} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \int_{x_4}^{x_6} f(x)dx + \int_{x_6}^{x_8} f(x)dx$$

$$\int_{x_0}^{x_8} f(x)dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right] + \frac{h}{3}\left[f(x_4) + 4f(x_5) + f(x_6)\right] +$$

$$\frac{h}{3}\left[f(x_6) + 4f(x_7) + f(x_8)\right]$$

$$r^* = \int_{x_0}^{x_8} f(x)dx = \frac{h}{3}\left\{f(x_0) + 2\left[f(x_2) + f(x_4) + f(x_6)\right] + 4\left[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + f(x_7)\right] + f(x_8)\right\}$$

Erro de truncamento

$$E_{TM}[\xi(x)] = \left|\frac{mh^5}{90} f^{iv}[\chi(x)]\right|,\ \chi(x) \in [x_0; x_m]$$

Cota máxima do erro de truncamento

Sendo $f^{iv}[\chi(x)]$ contínua em [a;b], então existe $M_2 = \text{máx}\left|f^{iv}[\chi(x)]\right|$. Assim

$$m = \frac{b-a}{h}$$

$$E_{TM}[\chi(x)] = \left|\frac{(b-a)h^4}{90}M_2\right|$$

Regra de Simpson Repetida (Fórmula geral)

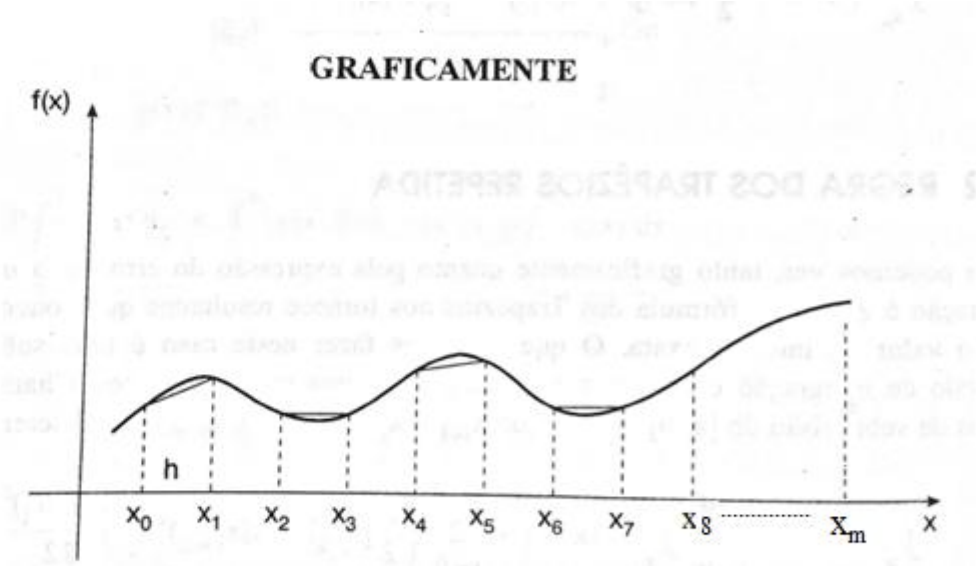

Figura 4.8: Regra do Trapézio Repetida (Fórmula Geral)

$$r^* = \int_{x_0}^{x_8} f(x)dx =$$

$$\frac{h}{3}\begin{Bmatrix} f(x_0) + 2\left[f(x_2)+f(x_4)+f(x_6)+...+f(x_{m-2})\right] + 4\left[f(x_1)+f(x_3)+f(x_5)+...+f(x_{m-1})\right] \\ +f(x_m) \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Erro de truncamento

$$E_{TM}[\chi(x)] = \left|\frac{mh^5}{90} f^{iv}[\chi(x)]\right|, \ \chi(x) \in [x_0; x_m] \quad (4.24)$$

Cota máxima do erro de truncamento

Sendo $f^{iv}[\xi(x)]$ contínua em [a;b], então existe $M_2 = \text{máx}\left|f^{iv}\left[\chi(x)\right]\right|$. Assim

$$E_{TM}[\chi(x)] = \left|\frac{(b-a)h^4}{90} M_2\right|$$

Exercícios de fixação

1) Resolver as integrais abaixo pelas regras do Trapézio e Simpson Simples. Usar o conceito de desvio relativo percentual para avaliar qual das duas regras apresentou o melhor resultado para a solução aproximada das integrais. Calcular a cota máxima de erro de truncamento para as soluções

1) $\int_{0,1}^{0,4} x^2 \ln(2x)dx$

2) $\int_{3}^{3,6} x^2 \sqrt{x+1}\, dx$

3) $\int_{0}^{0,8} e^{-x} \text{sen}(2x)\, dx$

4) $\int_{0}^{\pi/4} \cos^2(x)\, dx$

2) Resolver a seguinte integral com as regras do Trapézio com 8 subdivisões e a regra de Simpson com 4 subdivisões e apontar qual das soluções apresenta o melhor resultado em nível do desvio relativo percentual. Calcule também a cota máxima do erro de truncamento das aproximações

$$\int_{1}^{3} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx$$

Referências Bibliográficas

1) Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais – Segunda Edição
Autores: Maria A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes
Editora: Pearson

2) Cálculo Numérico – Licenciatura Matemática
Autores: Francisco Gêvane Muniz Cunha e Jânio Kléo de Sousa Castro
https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/430185/2/Calculo%20Numerico.pdf

6.2. REGRA DE SIMPSON

Considere agora uma função $f(x) \in C^4[a,b]$ e três pontos x_0, x_1 e x_2 tais que $x_0 = a$, $x_2 = b$ e $h \equiv x_2 - x_1 = x_1 - x_0$. Portanto, x_1 é o ponto médio do intervalo $[a,b]$. Nosso objetivo é obter uma aproximação para $\int_a^b f(x)\,dx$. Para tanto, expandimos $f(x)$ em um polinômio de Taylor de terceiro grau em torno do ponto médio x_1 e escrevemos

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1).(x-x_1) + \frac{f''(x_1)}{2}(x-x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{6}(x-x_1)^3$$

$$+ \frac{f^{(4)}[\xi(x)]}{24}(x-x_1)^4, \quad \xi(x) \text{ está entre } x \text{ e } x_1.$$

Integramos a igualdade acima no intervalo $[x_0, x_2]$ (ou $[a,b]$) e escrevemos

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = f(x_1)(x_2 - x_0) + \frac{f'(x_1)}{2}(x-x_1)^2\Big|_{x_0}^{x_2} + \frac{f''(x_1)}{6}(x-x_1)^3\Big|_{x_0}^{x_2}$$

$$+ \frac{f'''(x_1)}{24}(x-x_1)^4\Big|_{x_0}^{x_2} + \int_{x_0}^{x_2} \frac{f^{(4)}[\xi(x)]}{24}(x-x_1)^4\,dx.$$

Observamos que o segundo e o quarto termos do lado direito são identicamente nulos e escrevemos

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2h f(x_1) + f''(x_1)\frac{h^3}{3} + \int_{x_0}^{x_2} \frac{f^{(4)}[\xi(x)]}{24}(x-x_1)^4\,dx.$$

Substituímos $f''(x_1)$ pelo resultado obtido na seção 5.3 e escrevemos

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = 2hf(x_1) + \frac{h^3}{3}\left\{\frac{1}{h^2}[f(x_0) - 2f(x_1) + f(x_2)] - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(\gamma)\right\}$$

$$+ \int_{x_0}^{x_2} \frac{f^{(4)}[\xi(x)]}{24}(x-x_1)^4\,dx, \quad \gamma \in (x_0, x_2),$$

$$= 2hf(x_1) + \frac{h}{3}f(x_0) - \frac{2h}{3}f(x_1) + \frac{h}{3}f(x_2) - \frac{h^5}{36}f^{(4)}(\gamma)$$

$$+ \int_{x_0}^{x_2} \frac{f^{(4)}[\xi(x)]}{24}(x-x_1)^4\,dx$$

$$= \frac{h}{3}f(x_0) + \frac{4h}{3}f(x_1) + \frac{h}{3}f(x_2) - \frac{h^5}{36}f^{(4)}(\gamma) \quad +$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} \frac{f^{(4)}[\xi(x)]}{24}(x-x_1)^4\,dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{f^{(4)}[\xi(x)]}{24}(x-x_1)^4\,dx.$$

Neste ponto, fazemos uso do Teorema 6.1 e desenvolvemos as integrais remanescentes.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{36}f^{(4)}(\gamma) \; +$$

$$+ \frac{f^{(4)}(\eta_1)}{24}\,\frac{(x-x_1)^5}{5}\Bigg|_{x_0}^{x_1} + \frac{f^{(4)}(\eta_2)}{24}\,\frac{(x-x_1)^5}{5}\Bigg|_{x_1}^{x_2}, \quad \eta_1 \in [x_0, x_1],\ \eta_2 \in [x_1, x_2].$$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{36}f^{(4)}(\gamma) + \left[\frac{h^5}{120}f^{(4)}(\eta_1) + \frac{h^5}{120}f^{(4)}(\eta_2)\right].$$

Uma vez que η_1 e $\eta_2 \in [x_0, x_2]$, fazemos uso do Teorema do Valor Intermediário, viz Capítulo 3, Seção 3.1, e escrevemos

$$f^{(4)}(\eta_1) + f^{(4)}(\eta_2) = 2f^{(4)}(\eta), \quad \eta \in [x_0, x_2], \text{ e}$$

TIROU O MÍNIMO M.C ENTRE AS PARCELAS

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{h^5}{36}f^{(4)}(\gamma) + \frac{h^5}{60}f^{(4)}(\eta), \quad \gamma \text{ e } \eta \in [x_0, x_2],$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right] - \frac{10h^5}{360}f^{(4)}(\gamma) + \frac{6h^5}{360}f^{(4)}(\eta).$$

Usamos uma vez mais o Teorema do Valor Intermediário e escrevemos

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] + h^5 f^{(4)}(x)\left(-\frac{10}{360}+\frac{6}{360}\right)$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right] - \frac{h^5}{90} f^{(4)}(x), \quad x \in [x_0, x_2].$$

FÓRMULA EXATA

Este resultado para $\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx$ é exato. Para pequenos valores de h, podemos escrever a aproximação

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \simeq \frac{h}{3}\left[f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)\right],$$

* onde o limite superior para o erro de truncamento nesta aproximação é dado por $(h^5/90)\,M$, $M>0$, onde M é o limite superior para $|f^{(4)}(x)|$ em $[x_0, x_2]$. Esta aproximação é a convencional <u>regra de Simpson</u>.

Observe que, se $f(x)$ é um polinômio de grau máximo 3, então a regra de Simpson gera resultado livre de erro de truncamento para a integral. Esta é a causa da popularidade da regra de Simpson.

<u>Definição 6.2.1</u> - O grau de precisão de uma fórmula de quadratura numérica é o inteiro positivo n tal que o erro de truncamento é nulo para todo polinômio $p_k(x)$, $k=0:n$, e é não-nulo para algum $p_{n+1}(x)$, onde $p_k(x)$ é um polinômio de grau k.

De acordo com esta definição, a regra do trapézio tem grau de precisão igual a 1 e a regra de Simpson tem grau de precisão igual a 3.

<u>Exemplo 6.2.1</u> - Usar a regra de Simpson para aproximar as integrais do Exemplo 6.1.1. Calcular o limite superior para o erro de truncamento e comparar com o erro absoluto em cada caso.

a) i) $\displaystyle\int_0^{0,1} x e^x\,dx \simeq \frac{0,05}{3}\left[f(0)+4f(0,05)+f(0,1)\right]$

$$= \frac{0,05}{3}\left[4 \times 0,05\, e^{0,05} + 0,1\, e^{0,1}\right] = 0,00534619$$