Instituto Politécnico | IPRJ Universidade do Estado do Rio de Janeiro

UNIVERSIDADE DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO UERJ

Departamento de Modelagem Computacional – DMC
Período: 2023/02
Disciplina: CÁLCULO NUMÉRICO (IPRJ01-07579 e CÁLCULO NUMÉRICO – R (IPRJ 01-11976).
Carga horária: 75 horas
Professor Hermes Alves Filho

MÓDULO 3.1

3) DIFERENCIAÇÃO NUMÉRICA: Aqui o discente tomará contato com as técnicas de aproximação de derivadas primeira (f´(x)) e segunda (f´´(x)) em problemas clássicos envolvendo funções que são muito usadas nas engenharias

No tópico anterior, justificamos o uso de polinômios algébricos para a interpolação e aproximação de funções através do Teorema da aproximação de Weierstrass, i.e., existe um polinômio que está arbitrariamente próximo de uma função contínua e definida em em um intervalo fechado. Numa outra propriedade da classe de funções polinomiais é que as derivadas e integrais de polinômios são simples de se avaliaram (são também polinômios). Portanto, não é surpreendente que a maior parte dos procedimentos para aproximar derivadas e integrais baseia-se em polinômios algébricos para representarem a função fornecida.

Observação importante: A técnicas de derivação numérica tem origem no conceito de interpolação polinomial

3.1) Diferenças avançada e recuada

Teorema 4.1: Se $x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ são números reais distintos no intervalo fechado [a;b] e se $f(x) \in C^{n+1}[a;b]$, podemos escreve o polinômio de Lagrange de grau n, que aproxima a f(x), segundo o teorema de Weierstrass, na forma

$$f(x) = P_n(x) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots\ldots(x - x_n)\frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!} \tag{3.1}$$

onde

$$E_{Tn+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)........(x-x_n)\frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!} \tag{3.2}$$

Representa o erro de truncamento dessa aproximação e $\xi(x) \in [a;b]$.

Agora, considere $f(x) \in C^2[a;b]$ e um ponto $x_0 \in [a;b]$. Nosso objetivo é obter uma aproximação para $f'(x_0)$. Para tanto, seja $x_1 = x_0 + h$, onde $h \neq 0$ e suficientemente pequeno para garantir que $x_1 \in [a;b]$. Usando o Teorema 4.1 para n = 1, obtemos

$$f(x) = P_1(x) + (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''[\xi(x)]}{2!} \quad \text{para} \quad \xi(x) \in [x_0;x_1] = [x_0;x_0+h]. \tag{3.3}$$

O $P_1(x)$ representa o polinômio de Lagrange de grau 1. Sendo assim, podemos escrever

$$f(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''[\xi(x)]}{2}, \tag{3.4}$$

$$f(x) = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f(x_1) + (x-x_0)(x-x_1)\frac{f''[\xi(x)]}{2}, \tag{3.5}$$

Substituindo $x_1 = x_0 + h$ na Eq. (3.5), obtemos

$$f(x) = \frac{(x-x_0-h)}{(x_0-x_0-h)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(x_0+h-x_0)}f(x_0+h) + (x-x_0)(x-x_0-h)\frac{f''[\xi(x)]}{2} \tag{3.6}$$

$$f(x) = \frac{(x-x_0-h)}{(-h)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{(h)}f(x_0+h) + (x-x_0)(x-x_0-h)\frac{f''[\xi(x)]}{2} \tag{3.7}$$

Agora, vamos aplicar o operador derivada primeira $\frac{d}{dx}$ na Eq. (3.7). Obtemos a forma

$$f'(x) = -\frac{f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0+h)}{h} + \frac{d}{dx}[(x-x_0)(x-x_0-h)\frac{f''[\xi(x)]}{2}] \tag{3.8}$$

Distribuindo agora o operador derivada primeira, obtemos

$$f'(x) = -\frac{f(x_0)}{h} + \frac{f(x_0+h)}{h} + \frac{2(x-x_0)-h}{2}f''[\xi(x)] +$$

$$[(x-x_0)(x-x_0-h)\frac{d}{dx}\frac{f''[\xi(x)]}{2}] \tag{3.9}$$

Fazendo agora na Eq. (3.9) $x = x_0$, obtemos a seguinte expressão

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h)}{h} - \frac{f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''[\xi(x_0)], \;\; \xi(x_0) \in [x_0; x_0+h] \tag{3.10}$$

Simplificando a Eq. (3.10) obtemos

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \frac{h}{2} f''[\xi(x_0)], \;\; \xi(x_0) \in [x_0; x_0+h] \tag{3.11}$$

Na Figura 15 temos uma representação geométrica para a compreensão da Eq. (3.11)

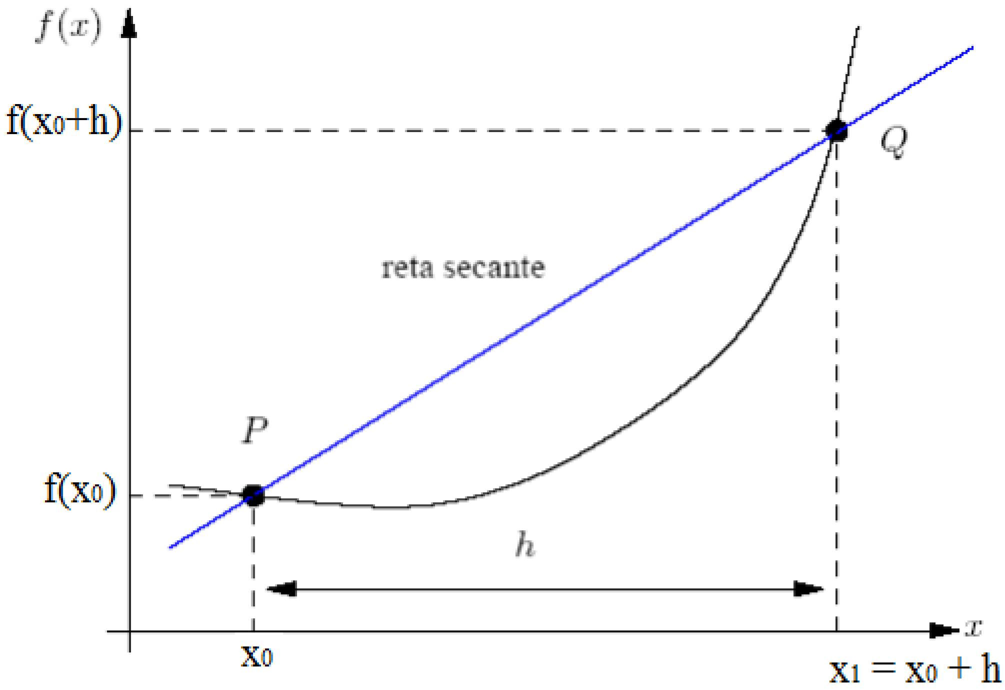

Figura 15: Fórmula da diferença avançada

A Eq. (3.11) é conhecida com diferença avançada. Para obtermos a equação da diferença atrasada é só substituir na Eq. (4.11) $x_0 = x_0 - h$ e de pois disso, h = -h

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h} + \frac{h}{2} f''[\xi(x_0)], \;\; \xi(x_0) \in [x_0 - h; x_0] \tag{3.12}$$

Reagrupando a Eq. (3.12), obtemos

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} + \frac{h}{2} f''[\xi(x_0)], \;\; \xi(x_0) \in [x_0 - h; x_0] \tag{3.13}$$

Obs. O termo $\frac{h}{2} f''[\xi(x_0)], \; \xi(x_0) \in [x_0 - h; x_0]$ representa o erro de truncamento da aproximação da $f'(x_0)$. As fórmulas, representadas pelas equações (3.11) e (3.13), são equivalentes.

Exemplo ilustrativo 1: Considerando a função f(x) = ln (x) use a fórmula da diferença avançada para estimar f´(1,8) considerando h = 0,1 e h = 0,01. Calcular o desvio absoluto (DA), o desvio relativo percentual (DRP) e a cota máxima de erro de truncamento para os dois problemas. Usar a aproximação de 6 dígitos significativos após a vírgula

A) Solução para h = 0,1

$$r^* = f'(1,8) = \frac{f(1,8+0,1) - f(1,8)}{0,1} = \frac{\ln(1,9) - \ln(1,8)}{0,1} = 0,540672$$

Cálculo da referência

f(x) = ln(x)
f´(x) = 1/x

referência r = f´(1,8) = 1/1,8 = 0,555556

A.1) Desvio Absoluto (DA)

$$DA = \left| r - r^* \right| = 0,014884$$

A.2) Desvio Relativo Percentual (DRP)

$$DRP = \left| \frac{r - r^*}{r} \right| * 100 = 2,70\%$$

A3) Cota Máxima do Erro de Truncamento

$$E_{T2}[\xi(x_0)] = \left| \frac{h}{2} f''[\xi(x_0)] \right|, \;\; \xi(x_0) \in [x_0; x_0 + h]$$

x_0 = 1,8 , $x_1 = x_0$ + h = 1,8 + 0,1 = 1,9

$$E_{T2}[\xi(x_0)] = \left| \frac{h}{2} f''[\xi(x_0)] \right|, \;\; \xi(x_0) \in [1,8; 1,9]$$

$$f(x) = \ln(x), \; f'(x) = 1/x, \; f''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$E_{T2}[\xi(x_0)] = \left| \frac{0,1}{2} \frac{(-1)}{x^2} \right|, \;\; \xi(x_0) \in [1,8; 1,9]$$

$$E_{T2}[\xi(x_0)] = 1,8$$

$$E_{T2}[1,8] = \left| \frac{0,1}{2} \frac{(-1)}{(1,8)^2} \right| = 0,015432$$

Para $E_{T2}[\xi(x_0)] = 1,9$

$$E_{T2}[1,9] = \left| \frac{0,1}{2} \frac{(-1)}{(1,9)^2} \right| = 0,013850$$

Conclusão: A cota máxima do Erro de Truncamento é $E_{T2}[1,8] = 0,015432$

B) Solução para h = 0,01

$$r^* = f'(1,8) = \frac{f(1,8+0,01) - f(1,8)}{0,01} = \frac{\ln(1,81) - \ln(1,8)}{0,01} = 0,554018$$

r = f´(1,8) = 1/1,8 = 0,555556

B.1) Desvio Absoluto (DA)

$$DA = \left| r - r^* \right| = 1,538 * 10^{-3}$$

B.2) Desvio Relativo Percentual (DRP)

$$DRP = \left| \frac{r - r^*}{r} \right| * 100 = 0,28\%$$

B3) Cota Máxima do Erro de Truncamento

$$E_{T2}[\xi(x_0)] = \left| \frac{h}{2} f''[\xi(x_0)] \right|, \ \xi(x_0) \in [x_0; x_0 + h]$$

x_0 = 1,8 , x_1 = x_0 + h = 1,8 + 0,01 = 1,81

$$E_{T2}[\xi(x_0)] = \left| \frac{h}{2} f''[\xi(x_0)] \right|, \ \xi(x_0) \in [1,8; 1,81]$$

$$f(x) = \ln(x), \ f'(x) = 1/x, \ f''(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$E_{T2}[\xi(x_0)] = \left| \frac{0,1}{2} \frac{(-1)}{x^2} \right|, \ \xi(x_0) \in [1,8; 1,81]$$

Para $E_{T2}[\xi(x_0)] = 1,8$

$$E_{T2}[1,8] = \left| \frac{0,1}{2} \frac{(-1)}{(1,8)^2} \right| = 0,015432$$

Para $E_{T2}[x_0] = 1,81$

$$E_{T2}(1,81) = \left| \frac{0,1}{2} \frac{(-1)}{(1,81)^2} \right| = 0,015262$$

Conclusão: A cota máxima do Erro de Truncamento é $E_{T2}[1,81] = 0,015432$

Exercícios propostos

Calcular a derivada primeira f´(x) das funções abaixo usando a fórmula de diferença avançada e considerando x_0 = 2 e os valores de h = 0,1 e h = 0,01

a) f(x) = sen (2x) + cos (3x)
b) $g(x) = \ln\sqrt{x^2+1}$
c) $h(x) = e^{\sqrt{x^2-1}}$
d) $l(x) = x^2 - \ln(x+1)$
e) $m(x) = 4e^{-x^2} - 3\ln(x^3+1)$

Estime para os casos (a-d) o desvio absoluto (DA), o desvio relativo percentual (DRP) e a cota máxima do erro de truncamento.

3.2) Fórmula de três pontos

Vamos agora considerar a Figura 16

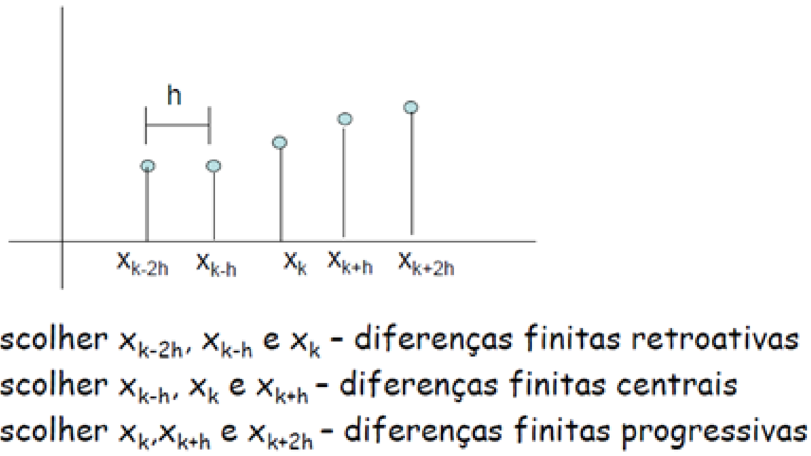

Figura 16: Fórmula de três pontos para o cálculo aproximado de derivadas primeiras

Considere agora uma função $f(x) \in C^3[a;b]$ e um ponto $x_0 \in [a;b]$. O objetivo continua sendo determinar $f'(x_0)$ de forma aproximada. Aqui vamos, por exemplo, empregar os pontos

x_0.
$x_1 = x_0 + h$.
$x_2 = x_0 + 2h$.

Onde $h \neq 0$ e suficientemente pequeno para garantir que x_1 e $x_2 \in [a;b]$. Como n = 2 podemos escrever segundo o Teorema 5

$$f(x) = P_2(x) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{f'''[\xi(x)]}{3!} \tag{3.14}$$

Onde $P_2(x)$ é o polinômio de Lagrange de grau 2. Então, podemos escrever

$$f(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + \tag{3.15}$$

$$(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{f'''(\xi(x))}{3!}$$

Ou também

$$f(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}f(x_1) + \tag{3.16}$$

$$\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}f(x_2) + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{f'''[\xi(x)]}{3!}$$

Agora, vamos aplicar o operador derivada primeira $\frac{d}{dx}$ na Eq. (3.16). Obtemos a forma

$$f'(x) = \frac{(2x - x_1 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}f(x_0) + \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)}f(x_1) + \tag{3.17}$$

$$\frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}f(x_2) + \frac{d}{dx}[(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\frac{f'''[\xi(x)]}{6}]$$

Após alguma álgebra, obtemos

$$f'(x) = \frac{(2x - x_1 - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{2x - x_0 - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1) +$$

$$\frac{2x - x_0 - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2) +$$

(3.18)

$$[(x - x_1)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_0)(x - x_1)] \frac{f'''(\xi(x))}{6} +$$

$$[\frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)}{6} \frac{d}{dx} f'''(\xi(x))]$$

Vamos obter agora

$f'(x_0)$
$f'(x_1)$
$f'(x_2)$

Usando também

x_0.
$x_1 = x_0 + h.$
$x_2 = x_0 + 2h.$

Obtemos

$$f'(x_0) = \frac{-3}{2h} f(x_0) + \frac{2}{h} f(x_0 + h) - \frac{1}{2h} f(x_0 + 2h) + \frac{h^2}{3} f'''[\xi(x_0)] \quad (3.19)$$

$$f'(x_0 + h) = -\frac{1}{2h} f(x_0) + \frac{1}{2h} f(x_0 + 2h) - \frac{h^2}{6} f'''[\xi(x_0 + h)] \quad (3.20)$$

$$f'(x_0 + 2h) = \frac{1}{2h} f(x_0) - \frac{2}{h} f(x_0 + h) + \frac{3}{2h} f(x_0 + 2h) + \frac{h^2}{3} f'''[\xi(x_0 + 2h)] \quad (3.21)$$

i) Porém, as expressões representadas pelas Equações (3.19) e (3.21) são equivalentes. Para que se possa ver essa equivalência é só substituir na Eq (3.21) $x_0 = x_0 – 2h$ e depois $h = - h$.

ii) Na Eq. (3.20) também vamos substituir $x_0 = x_0 – h$ e depois $h = - h$.

Fazendo esses procedimentos realizados acima, obtemos as seguintes fórmulas de três pontos:

A) Fórmula não Centrada

$$f'(x_0)=\frac{-3}{2h}f(x_0)+\frac{2}{h}f(x_0+h)-\frac{1}{2h}f(x_0+2h)+\frac{h^2}{3}f'''[\xi(x_0)], \tag{3.22}$$

$\xi(x_0)\in[x_0;x_0+2h]$

e

B) Fórmula Centrada

$$f'(x_0)=-\frac{1}{2h}f(x_0-h)+\frac{1}{2h}f(x_0+h)-\frac{h^2}{6}f'''[\xi(x_0)], \tag{3.23}$$

$\xi(x_0)\in[x_0-h;x_0+h]$

Obs. As fórmulas centradas possuem aproximações melhores do que as fórmulas não centradas.

Exemplo Ilustrativo:

Dada a Tabela abaixo aproxime f´(2) considerando as fórmulas de três pontos centrada e não centrada para os valores de $h=\pm0,1$ e $h=\pm0,2$

Tabela

x	**f(x)**
1,8	**10,889365**
1,9	**12,703199**
2,0	**14,778112**
2,1	**17,148957**
2,2	**19,855030**

Solução: Como os únicos dados do problema estão na Tabela, precisamos fazer uma análise do problema antes de fazermos os cálculos pedidos:

Fórmulas de três pontos

A) Fórmula não centrada

$$\begin{aligned}
&a)\,h=0,1\rightarrow \text{fórmula não centrada}\rightarrow x_0=2,0\rightarrow x_0+h=2,1\rightarrow x_0+2h=2,2\ \text{(ok)}\\
&b)\,h=-0,1\rightarrow \text{fórmula não centrada}\rightarrow x_0=2,0\rightarrow x_0+h=1,9\rightarrow x_0+2h=1,8\ \text{(ok)}\\
&c)\,h=0,2\rightarrow \text{fórmula não centrada}\rightarrow x_0=2,0\rightarrow x_0+h=2,2\rightarrow x_0+2h=2,4\ \text{(não)}\\
&d)\,h=-0,2\rightarrow \text{fórmula não centrada}\rightarrow x_0=2,0\rightarrow x_0+h=1,8\rightarrow x_0+2h=1,6\ \text{(não)}
\end{aligned}$$

Fórmula Centrada

$$f'(x_0) = -\frac{1}{2h} f(x_0 - h) + \frac{1}{2h} f(x_0 + h) - \frac{h^2}{6} f'''[\xi(x_0)],$$

$$\xi(x_0) \in [x_0 - h; x_0 + h]$$

Tabela

x	f(x)
1,8	**10,889365**
1,9	**12,703199**
2,0	**14,778112**
2,1	**17,148957**
2,2	**19,855030**

a) $h = 0{,}1 \to x_0 = 2 \to x_0 - h = 1{,}9 \to x_0 + h = 2{,}1$ (ok)

b) $h = -0{,}1 \to x_0 = 2 \to x_0 - h = 2{,}1 \to x_0 + h = 1{,}9$ (ok)

c) $h = 0{,}2 \to x_0 = 2 \to x_0 - h = 1{,}8 \to x_0 + h = 2{,}2$ (ok)

d) $h = -0{,}2 \to x_0 = 2 \to x_0 - h = 2{,}2 \to x_0 + h = 1{,}8$ (ok)

Obs. Pode ser observado que na fórmula de três pontos centrada temos as seguintes igualdades
b) = a)
d) = c)

Conclusão: De oito possibilidades de cálculo temos que realizar só 4 (metade). Outra coisa, a fórmula centrada apresenta o melhor resultado, pois tem o erro de truncamento menor.

Exercício de fixação

Indique a melhor aproximação para a f´(1), da função $f(x) = xe^{-2x}$ para h = 0,01, usando a fórmula de três pontos. Estime os desvios absoluto e relativo percentual, bem como a cota máxima do erro de truncamento dessa aproximação. Usar 6 algarismos após a vírgula

Solução:
a) Fórmula de três pontos centrada

$$f'(x_0) = -\frac{1}{2h} f(x_0 - h) + \frac{1}{2h} f(x_0 + h) - \frac{h^2}{6} f'''[\xi(x_0)]$$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} f'''[\xi(x_0)]$$

$$\xi(x_0) \in [x_0 - h; x_0 + h]$$

$x_0 = 1,0$
$h = 0,01$

$$f(x) = xe^{-2x}$$

$$f(x_0 - h) = f(1,0 - 0,01) = f(0,99) = 0,99 * e^{-2*0,99} = 0,99 * e^{-1,98} = 0,136689$$

$$f(x_0 + h) = f(1,0 + 0,01) = f(1,01) = 1,01 * e^{-2*1,01} = 1,01 * e^{-2,02} = 0,133982$$

$$r^* = f'(1,0) = -\frac{0,136689}{2*0.01} + \frac{0,133982}{2*0,01} = -0,13535$$

Cálculo da referência

$$r = f(x) = xe^{-2x}$$

$$f'(x) = e^{-2x} - 2x * e^{-2x} = e^{-2x}(1 - 2x)$$
$$r = f'(1,0) = e^{-2*1}(1 - 2*1) = -0,135336$$

a.1) Desvio Absoluto (DA)

$$DA = \left| r - r^* \right| = 1,86 * 10^{-4}$$

a.2) Desvio relativo Percentual (DRP)

$$DRP = \left| \frac{r - r^*}{r} \right| * 100 = 0,137436 * 10^{-3}\ \% = 0,0013746\%$$

a.3) Cálculo da cota máxima do erro de truncamento

$$E_{T3}(\xi(x_0)) = \left| \frac{h^2}{6} f'''[\xi(x_0)] \right|,$$

$$\xi(x_0) \in [x_0 - h; x_0 + h]$$

No caso onde $x_0 = 1,0$ e $h = 0,01$, temos

$$E_{T3}[\xi(x_0)] = \left| \frac{(0,01)^2}{6} f'''[\xi(x_0)] \right|,$$

$$\xi(x_0) \in [0,99; 1,01]$$

$$f(x) = xe^{-2x}$$

$$f'(x) = e^{-2x} - 2x * e^{-2x}$$

$$f''(x) = -2 * e^{-2x} - 2(e^{-2x} - 2x * e^{-2x}) = -2 * e^{-2x} - 2 * e^{-2x} + 4x * e^{-2x} = -4 * e^{-2x} + 4x * e^{-2x}$$

$$f''(x) = e^{-2x}(-4 + 4x)$$

$$f'''(x) = 8 * e^{-2x} + 4(e^{-2x} - 2x * e^{-2x}) = 8 * e^{-2x} + 4 * e^{-2x} - 8x * e^{-2x} = e^{-2x}(12 - 8x)$$

$$f'''(x) = e^{-2x}(12 - 8x)$$

$$\xi[x_0] = 0,99$$

$$f'''[0,99] = e^{-2*0,99}(12 - 8 * 0,99) = 0,563322$$

$$E_{T3}[0,99] = \left| \frac{(0,01)^2 * 0,563322}{6} \right| = 9,388871 * 10^{-6},$$

$$\xi[x_0] = 1,01$$

$$f'''[1,01] = e^{-2*1,01}(12 - 8 * 1,01) = 0,520009$$

$$E_{T3}[1,01] = \left| \frac{(0,01)^2 * 0,520009}{6} \right| = 8,666817 * 10^{-6},$$

Conclusão: A cota máxima do erro de truncamento é

$$E_{T3}[0,99] = 9,388871 * 10^{-6}$$

b) Fórmula de três pontos não centrada

$$f'(x_0) = \frac{-3}{2h} f(x_0) + \frac{2}{h} f(x_0 + h) - \frac{1}{2h} f(x_0 + 2h) + \frac{h^2}{3} f'''[\xi(x_0)],$$

$$\xi(x_0) \in [x_0; x_0 + h]$$

x_0 = 1,0

h = 0,01

$$f(x) = xe^{-2x}$$

$$f(x_0) = f(1,0) = 1 * e^{-2*1} = 0,135335$$

$$f(x_0 + h) = f(1,0 + 0,01) = f(1,01) = 1,01 * e^{-2*1,01} = 1,01 * e^{-2,02} = 0,133982$$
$$f(x_0 + 2h) = f(1,0 + 2 * 0,01) = f(1,02) = 1,02 * e^{-2*1,02} = 1,02 * e^{-2,04} = 0,132629$$

$$r^* = f'(x_0) = \frac{-3}{2*0,01} * 0,135335 + \frac{2}{0,01} * 0,133982 - \frac{1}{2*0,01} * 0,132629 = -0,13530$$

b.1) Desvio Absoluto (DA)

referência

$$r = f'(1,0) = e^{-2*1}(1 - 2*1) = -0,135336$$

$$DA = \left| r - r^* \right| = 3,6 * 10^{-5}$$

b.2) Desvio relativo Percentual (DRP)

$$DRP = \left| \frac{r - r^*}{r} \right| * 100 = 0,027\%$$

b.3) Cálculo da cota máxima do erro de truncamento

$$E_{T3}[\xi(x_0)] = \left| \frac{h^2}{3} f'''[\xi(x_0)] \right|,$$

$$\xi(x_0) \in [1,0; 1,0 + 2 * 0,01] \rightarrow \xi(x_0) \in [1,0; 1,02]$$

$$f'''(x) = e^{-2x}(12 - 8x)$$

$$\xi(x_0) = 1$$

$$f'''[1] = e^{-2*1}(12 - 8*1) = e^{-2} * 4 = 0,541341$$

$$E_{T3}[1] = \left| \frac{(0,01)^2}{3} * 0,541341 \right| = 1,80447 * 10^{-5}$$

$$\xi(x_0) = 1.02$$

$$f'''[1,02] = e^{-2*1,02}(12 - 8*1,02) = 0,499310$$

$$E_{T3}(1,02) = \left| \frac{(0,01)^2}{3} * 0,499310 \right| = 1,664367 * 10^{-5}$$

Conclusão. A cota máxima do erro de truncamento vale

$$E_{T3}[1] = 1{,}80447 * 10^{-5}$$

Exercícios propostos

Calcular a derivada primeira das funções abaixo, usando as fórmulas de três pontos (centrada e não centrada), considerando $x_0 = 2$ e os valores de h = 0,1 e h = 0,01

a) $f(x) = sen\,(2x) + cos\,(3x)$
b) $g(x) = \ln\sqrt{x^2 + 1}$
c) $h(x) = e^{\sqrt{x^2 - 1}}$
d) $l(x) = x^2 - \ln(x + 1)$
e) $m(x) = 4e^{-x^2} - 3\ln(x^3 + 1)$

Estime para os casos (a-d) o desvio absoluto (DA), o desvio relativo percentual (DRP) e a cota máxima do erro de truncamento.

Bibliografia

1) Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais – Segunda Edição
Autores: Maria A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes
Editora: Pearson

2) Cálculo Numérico – Licenciatura Matemática
Autores: Francisco Gêvane Muniz Cunha e Jânio Kléo de Sousa Castro
https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/430185/2/Calculo%20Numerico.pdf