Departamento de Modelagem Computacional – DMC
Período: 2023/02
Disciplina: CÁLCULO NUMÉRICO (IPRJ01-07579 e CÁLCULO NUMÉRICO – R (IPRJ 01-11976).
Carga horária: 75 horas
Professor Hermes Alves Filho

MÓDULO 5.2

5. Solução de Sistemas de Equações Lineares e Algébricas (continuação)

5.1-c) Método da decomposição (fatorização) L.U.

L = Lower
U = Upper

Este método direto é baseado na decomposição da matriz dos cofatores em um produto de matrizes (fatores) com formas convenientes para a solução direta de sistemas de equações lineares e algébricas. Essas matrizes, na qual a matriz dos coeficientes é decomposta, apresentam uma forma triangular inferior (Lower, L) e uma matriz triangular superior (Upper, U). Essas matrizes apresentam as formas

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

$$L = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & 0..........0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & 0..........0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & 0..........0 \\ . & . & . & . \quad . \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & ....\ell_{nn} \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14}............0 \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24}............0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34}............0 \\ . & . & . & . \quad . \quad . \\ 0 & 0 & 0 & 0.,,,.........1 \end{bmatrix}$$

Podemos representar a decomposição da matriz dos coeficientes A em função das matrizes L e U no formato

$$\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & 0 \ldots\ldots\ldots 0 \\ . & . & . & . \quad . \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \ldots\ldots\ldots \ell_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \ldots\ldots\ldots 0 \\ . & . & . & . \quad . \quad . \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots\ldots\ldots 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \ldots\ldots\ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \ldots\ldots\ldots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \ldots\ldots\ldots a_{3n} \\ . & . & . & . \quad , \quad . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} \ldots\ldots\ldots a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\qquad L \qquad\qquad\qquad\qquad U \qquad\qquad\qquad\qquad A$$

O sistema de equações representado pela Eq.(5.2) pode ser representado na forma

$$A\vec{X} = \vec{b} \rightarrow LU = A$$

$$LU\vec{X} = \vec{b}$$

$$U\vec{X} = \vec{z} \rightarrow \vec{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ . \\ z_n \end{bmatrix}$$

$$L\vec{z} = \vec{b}$$

Exemplo da fixação

$$\begin{aligned} &E1:\ 2x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ &E2: 3x_1 + 0{,}5x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ &E3: 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = -1 \\ &E4:\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{aligned}$$

Podemos, então, escrever a seguinte relação (A=LU)

$$\begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & 0 \\ \ell_{31} & \ell_{32} & \ell_{33} & 0 \\ \ell_{41} & \ell_{42} & \ell_{43} & \ell_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & 1 & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & 1 & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0{,}5 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L \quad * \quad U \quad = \quad A$$

Após uma certa álgebra obtemos

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora podemos fazer

$$L\vec{z} = \vec{b}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 5/2 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix}}_{\vec{z}} \underbrace{=}_{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{b}}$$

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -3/2 \\ 7/5 \end{pmatrix}$$

$$U\vec{x} = \vec{z}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}}_{\vec{x}} \underbrace{=}_{=} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -3/2 \\ 7/5 \end{bmatrix}}_{\vec{z}}$$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 0{,}8 \\ -2 \\ -0{,}8 \\ 1{,}4 \end{bmatrix}$$

Obs. Tem que testar o conjunto solução $\vec{x}$ no sistema de equações

Exercício de Fixação.

Resolva os sistemas de equações lineares e algébricas usando os métodos diretos Eliminação de Gauss, Matriz Inversa e Decomposição LU

A)

$6x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$
$3x_1 + 10x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -7$
$x_1 + x_2 + 8x_3 + 2x_4 = -5$
$2x_1 + 3x_3 - 7x_4 = 2$

B)
$8x_1 + 1x_2 + x_3 + 4x_4 = 2$
$2x_1 + 2x_3 - x_4 = 1$
$x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = -6$
$x_1 + x2 + x3 - 8x_4 = 1$

C)

$1x_1 + 1x_2 + x_3 + x_4 = 4$
$2x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 10$
$x_1 + 3x_2 - 10x_3 + 2x_4 = -6$
$3x_1 + 3x_2 + 4x3 - 16x_4 = 1$

Referências Bibliográficas

1) Cálculo Numérico – Aspectos Teóricos e Computacionais – Segunda Edição
Autores: Maria A. Gomes Ruggiero e Vera Lúcia da Rocha Lopes
Editora: Pearson

2) Cálculo Numérico – Licenciatura Matemática
Autores: Francisco Gêvane Muniz Cunha e Jânio Kléo de Sousa Castro
https://educapes.capes.gov.br/bitstream/capes/430185/2/Calculo%20Numerico.pdf