Departamento de Modelagem Computacional – DMC
Período: 2023/02
Disciplina: CÁLCULO NUMÉRICO (IPRJ01-07579 e CÁLCULO NUMÉRICO – R (IPRJ 01-11976).
Carga horária: 75 horas
Professor Hermes Alves Filho

MÓDULO 2.2

2) INTERPOLAÇÃO E APROXIMAÇÃO POLINOMIAL DE FUNÇÕES (Continuação)

2.3) Interpolação polinomial

Considere (n+1) números reais (abscissas) distintos $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ em um intervalo [a;b], onde a e b são números reais, com a condição b > a. A seguir, considere um função real f(x) que assume os valores $f(x_i) = f_i, i = 0:n$, nos correspondentes números $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ (pontos vermelhos vistos no gráfico da Figura 14)

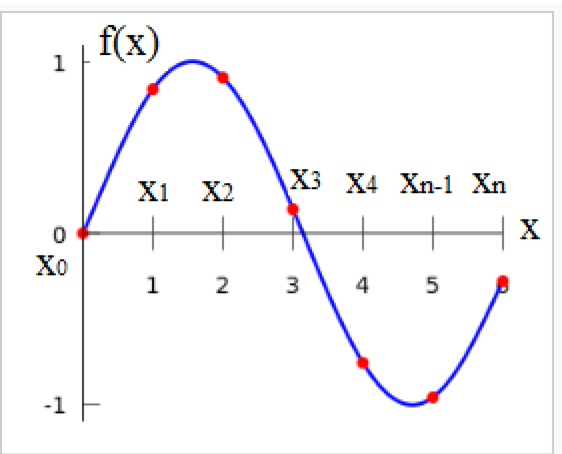

Figura 14: Pares ordenados numa f(x).

Vamos escrever um polinômio de grau n com coeficientes $a_i, i = 0:n$, na forma

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ... + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \ . \tag{2.7}$$

O objetivo agora é fazer o polinômio $P_n(x)$ passar passa pelos (n+1) pontos $(x_i;f_i), i=0:n$ (Figura14). Atendendo a essa condição, obtemos

$$
\begin{aligned}
P_n(x_0) &= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + a_3x_0^3 + ... + a_nx_0^n = f(x_0)\\
P_n(x_1) &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + ... + a_nx_1^n = f(x_1)\\
P_n(x_2) &= a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + a_3x_2^3 + ... + a_nx_2^n = f(x_2)\\
\| \quad & \quad \| \quad \| \quad \| \quad \| \; + ... + \; \| \; = \|\\
\| \quad & \quad \| \quad \| \quad \| \quad \| \; + ... + \; \| \; = \|\\
P_n(x_n) &= a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + a_3x_n^3 + ... + a_nx_n^n = f(x_n)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

A Eq. (2.8) pode ser colocada na seguinte forma

$$
\begin{bmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3........x_0^n\\
1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3........x_1^n\\
1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3........x_2^n\\
\| & \| & \| & \|.........\|\\
\| & \| & \| & \|.........\|\\
1 & x_n & x_n^2 & x_n^3.......x_n^n
\end{bmatrix}
\begin{vmatrix} a_0\\ a_1\\ a_2\\ a_3\\ \|\\ a_n \end{vmatrix}
=
\begin{bmatrix} f_0\\ f_1\\ f_2\\ \|\\ \|\\ f_n \end{bmatrix}
\tag{2.9}
$$

Na forma de operadores a Eq. (2.9) pode ser escrita como

$$X\vec{a} = \vec{f} \tag{2.10}$$

A matriz

$$
X = \begin{bmatrix}
1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3........x_0^n\\
1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3........x_1^n\\
1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3........x_2^n\\
\| & \| & \| & \|.........\|\\
\| & \| & \| & \|.........\|\\
1 & x_n & x_n^2 & x_n^3.......x_n^n
\end{bmatrix}
\tag{2.11}
$$

é conhecida na literatura como matriz de Vandermonde (Alexandre-Théophile Vandermonde), sendo que os termos de cada linha estão em progressão geométrica (PG).

Obs. O fato de a matriz de Vardemonte ter determinante não nulo implica que o problema tem solução e que ela é única. A forma de solução do sistema, representado na Eq.(2.8), pode ser dificultado se n (grau do polinômio) for muito grande, pois a matriz X pode ficar mal condicionada. Portanto, nesse curso, adotaremos outras estratégicas numéricas para obtermos os coeficientes de $P_n(x)$, que são os $a_i, i=0:n$.

2.3-a) Polinômio Interpolador de Lagrange

A fim de resolver o problema de condicionamento da matriz X, vista no sistema de equações (2.9), o matemático Joseph-Louis de Lagrange escolheu uma outra base, que melhorasse o condicionamento da matriz X. A ideia foi diagonalizá-la, obtendo uma matriz identidade, cuja resolução do sistema linear é simples e direta.

Dados n pontos de abscissas $x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, o polinômio interpolador $P_n(x)$ será obtido através de uma base de polinômios de grau menor ou igual n, que satisfaçam a seguinte condição

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1, \text{se} \quad i = k, \\ 0, \text{se} \quad i \neq k \end{cases} \tag{2.12}$$

Considerando a condição descrita na Eq.(2.12) podemos generalizar essa expressão, considerando a forma:

$$L_k(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)......(x-x_{k-1})(x-x_{k+1}).......(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1).....(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})......(x_k-x_n)} \tag{2.13}$$

Sendo assim, podemos escrever o polinômio interpolador de Lagrange na forma

$$P_n(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + ... + L_n(x)f(x_n)$$

$$P_n(x_0) = f(x_0)$$

$$L_0(x_0) = 1$$
$$L_1(x_0) = 0$$
$$L_2(x_0) = 0$$

$$L_n(x_0) = 0$$

Observem que o polinômio $P_n(x)$ satisfaz a Eq. (2.12). Baseado na Eq. (2.13) podemos escrever

$$L_o(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)........(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3).....(x_0-x_n)},$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)........(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3).....(x_1-x_n)},$$

(2.14)

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)........(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3).....(x_2-x_n)},$$

$$L_n(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)........(x - x_{n-1})}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)(x_n - x_2).....(x_n - x_{n-1})}.$$

Exercício resolvido

Considerando a Tabela 1, calcule a aproximação para f(1,25), usando um polinômio interpolador de grau 2 de Lagrange. Sabendo que f(1,25) = 1,5365, pede-se estimar o valor do desvio relativo percentual (DRP) dessa aproximação. Considere que seja aceitável um DRP menor do que 1 %.

Observação: com n pontos (x;f(x)) o polinômio interpolador tem grau máximo igual a n-1

Tabela 1

x	f(x)
$x_0 =$ 1,2	1,5011
$x_1 =$ 2,3	2,4003
$x_2 =$4,5	4,5111

Solução:

$$P_2(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2)$$

Vamos calcular os valores dos L(x) na forma

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 2,3)(x - 4,5)}{(1,2 - 2,3)(1,2 - 4,5)} = \frac{(x - 2,3)(x - 4,5)}{(-1,1)(-3,3)} = \frac{(x - 2,3)(x - 4,5)}{3,63}$$

$$L_0(1,25) = \frac{(1,25 - 2,3)(1,25 - 4,5)}{3,63} = \frac{(-1,05)(-3,25)}{3,63} = 0,94008$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1,2)(x - 4,5)}{(2,3 - 1,2)(2,3 - 4,5)} = \frac{(x - 1,2)(x - 4,5)}{(1,1)(-2,2)} = \frac{(x - 1,2)(x - 4,5)}{-2,42}$$

$$L_1(1,25) = \frac{(1,25 - 1,2)(1,25 - 4,5)}{-2,42} = \frac{(0,05)(-3,25)}{-2,42} = 0,00672$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1,2)(x - 2,3)}{(4,5 - 1,2)(4,5 - 2,3)} = \frac{(x - 1,2)(x - 2,3)}{(3,3)(2,2)} = \frac{(x - 1,2)(x - 2,3)}{7,26}$$

$$L_2(1,25) = \frac{(1,25 - 1,2)(1,25 - 2,3)}{7,26} = \frac{(0,05)(-1,05)}{7,26} = -0,00723$$

Então obtemos

$$r^* = P_2(1,25) = (0,94008x1,5011) + (0,06715x2,4003) + (-0,00723x4,5111) = 1,53972$$

Cálculo do Desvio Relativo Percentual

r = f(1,25) = 1,5365

$$DRP = \left|\frac{r - r^*}{r}\right| x100 = \left|\frac{1,5365 - 1,53972}{1,5365}\right| x100 = 0,21\% < 1\%$$

Nesse exemplo, apresentado na Tabela 1, podemos também tentar fazer uma aproximação da f(x) usando um polinômio de Taylor de grau 1, na forma

$$P_1(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1)$$

Vamos trabalhar com os seguintes pares ordenados

$$x_0 = 1,2 \rightarrow f(x_0) = 1,5011$$
$$x_1 = 2,3 \rightarrow f(x_1) = 2,4003$$

Observem que o ponto x = 1,25, está localizado entre x_0 e x_1

Para esse caso, temos

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_0 - x_1)} = \frac{(x - 2,3)}{(1,2 - 2,3)} = \frac{(x - 2,3)}{(-1,1)},$$

$$L_0(1,25) = \frac{(1,25 - 2,3)}{(-1,1)} = \frac{(-1,05)}{(-1,1)} = 0,95455$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)}{(x_1 - x_0)} = \frac{(x - 1,2)}{(2,3 - 1,2)} = \frac{(x - 1,2)}{(1,1)},$$

$$L_1(1,25) = \frac{(1,25 - 1,2)}{(1,1)} = \frac{(0,05)}{(1,1)} = 0,04545$$

$$p_1(x) = \frac{(x - 2,3)}{(-1,2)} f(x_0) + \frac{(x - 1,2)}{(1,1)} f(x_1)$$

$$r^* = P_1(1,25) = 0,95455x1,5011 + 0,04545x2,4003 = 1,54197$$

Cálculo do Desvio Relativo Percentual (DRP)

r = f(1,25) = 1,5365

$$DRP = \left|\frac{r - r^*}{r}\right| x100 = \left|\frac{1,5365 - 1,54197}{1,5365}\right| x100 = 0,36\%$$

Conclusão: Considerando um DRP < 1 % podemos verificar que os polinômios de Lagrange $P_1(x)$ e $P_2(x)$ atenderam a precisão pedida.

Exercício Proposto: Considerando a Tabela 2, determine o polinômio de Lagrange de grau 2 para estimar o valor de f(0,80). Faça também uma aproximação polinomial usando a série de Taylor de grau 2, com $x_0 = 1$, usando a função $f(x) = \frac{1}{x+1}$, que gerou os dados da Tabela 2. Verifique o desvio relativo percentual (DRP %) dessas aproximações e indique qual foi a melhor.

Tabela 2

X	f(x)
0	1
0,5	0,666666
1	0,5

Solução: referência r = f(0,80) = 0,555556

Exemplo 4.4.2 - No Exemplo 4.3.2, usamos a tabela fornecida para estimarmos $f(1,5)$ através de vários polinômios de Lagrange. Vamos usar a definição e o teorema anteriores para construirmos o triângulo dos polinômios de Lagrange, como segue.

$$
\begin{array}{llllll}
x_0 & f_0 & & & & \\
x_1 & f_1 & P_{0,1} & & & \\
x_2 & f_2 & P_{1,2} \to & P_{0,1,2} & & \\
x_3 & f_3 & P_{2,3} \to & P_{1,2,3} \to & P_{0,1,2,3} & \\
x_4 & f_4 & P_{3,4} \to & P_{2,3,4} \to & P_{1,2,3,4} \to & P_{0,1,2,3,4}
\end{array}
$$

De acordo com a Definição e o Teorema 4.4.1, podemos gerar este triângulo de polinômios de Lagrange da seguinte forma:

i) Obtemos os polinômios $P_{0,1}(x)$, $P_{1,2}(x)$, $P_{2,3}(x)$ e $P_{3,4}(x)$ pela definição da forma lagrangeana, i.e.,

$$P_{0,1}(x) = L_0(x)f_0 + L_1(x)f_1 = \frac{(x-x_1)}{(x_0-x_1)}f_0 + \frac{(x-x_0)}{(x_1-x_0)}f_1$$

$$= \frac{(x-1,3)}{(-0,3)} * 0,7651977 + \frac{(x-1,0)}{0,3} * 0,6200860,$$

$$P_{1,2}(x) = L_1(x)f_1 + L_2(x)f_2 = \frac{(x-x_2)}{(x_1-x_2)}f_1 + \frac{(x-x_1)}{(x_2-x_1)}f_2$$

$$= \frac{(x-1,6)}{(-0,3)} * 0,6200860 + \frac{(x-1,3)}{0,3} * 0,4554022,$$

$$P_{2,3}(x) = L_2(x)f_2 + L_3(x)f_3 = \frac{(x-x_3)}{(x_2-x_3)}f_2 + \frac{(x-x_2)}{(x_3-x_2)}f_3$$

$$= \frac{(x-1,9)}{(-0,3)} * 0,4554022 + \frac{(x-1,6)}{0,3} * 0,2818186,$$

$$P_{3,4}(x) = L_3(x)f_3 + L_4(x)f_4 = \frac{(x-x_4)}{(x_3-x_4)}f_3 + \frac{(x-x_3)}{(x_4-x_3)}f_4$$

$$= \frac{(x-2,2)}{(-0,3)} * 0,2818186 + \frac{(x-1,9)}{0,3} * 0,1103623;$$

ii) Fazemos uso do Teorema 4.4.1 para obtermos os polinômios de Lagrange nas colunas subseqüentes. Vamos considerar primeiramente a coluna de polinômios de Lagrange de grau máximo 2: $P_{0,1,2}(x)$; $P_{1,2,3}(x)$ e $P_{2,3,4}(x)$. De acordo com o Teorema 4.4.1,

$$P_{0,1,2}(x) = \frac{(x-x_2)\,P_{0,1}(x) - (x-x_0)\,P_{1,2}(x)}{(x_0-x_2)}$$

$$= -\frac{1}{0{,}6}\left[(x-1{,}6)\,P_{0,1}(x) - (x-1{,}0)\,P_{1,2}(x)\right],$$

$$P_{1,2,3}(x) = \frac{(x-x_3)\,P_{1,2}(x) - (x-x_1)\,P_{2,3}(x)}{(x_1-x_3)}$$

$$= -\frac{1}{0{,}6}\left[(x-1{,}9)\,P_{1,2}(x) - (x-1{,}3)\,P_{2,3}(x)\right],$$

$$P_{2,3,4}(x) = \frac{(x-x_4)\,P_{2,3}(x) - (x-x_2)\,P_{3,4}(x)}{(x_2-x_4)}$$

$$= -\frac{1}{0{,}6}\left[(x-2{,}2)\,P_{2,3}(x) - (x-1{,}6)\,P_{3,4}(x)\right].$$

Analogamente, vamos obter a coluna de polinômios de Lagrange de grau máximo 3: $P_{0,1,2,3}(x)$ e $P_{1,2,3,4}(x)$.

$$P_{0,1,2,3}(x) = \frac{(x-x_3)\,P_{0,1,2}(x) - (x-x_0)\,P_{1,2,3}(x)}{(x_0-x_3)}$$

$$= -\frac{1}{0{,}9}\left[(x-1{,}9)\,P_{0,1,2}(x) - (x-1{,}0)\,P_{1,2,3}(x)\right],$$

$$P_{1,2,3,4}(x) = \frac{(x-x_4)\,P_{1,2,3}(x) - (x-x_1)\,P_{2,3,4}(x)}{(x_1-x_4)}$$

$$= -\frac{1}{0{,}9}\left[(x-2{,}2)\,P_{1,2,3}(x) - (x-1{,}3)\,P_{2,3,4}(x)\right].$$

Finalmente, obtemos o polinômio de Lagrange de grau máximo 4:

$$P_{0,1,2,3,4}(x) = \frac{(x-x_4)\,P_{0,1,2,3}(x) - (x-x_0)\,P_{1,2,3,4}(x)}{(x_0-x_4)}$$

$$= -\frac{1}{1,2}\left[(x-2,2)P_{0,1,2,3}(x) - (x-1,0)P_{1,2,3,4}(x)\right]$$

Com estes resultados, fazemos $x = 1,5$ e montamos a tabela abaixo.

1,0	0,7651977				
1,3	0,6200860	0,5233449			
1,6	0,4554022	0,5102968	0,5124715		
1,9	0,2818186	0,5132634	0,5112857	0,5118127	
2,2	0,1103623	0,5104270	0,5137361	0,5118302	0,5118200

O procedimento descrito neste exercício é conhecido na literatura como **método de Neville**

$\Downarrow$

ALGORITMO