Universidade do Estado do Rio de Janeiro

IPRJ

Relatório 3: Aproximação da derivada primeira através da Diferença Avançada, Diferença Centrada e Não Centrada e aproximação da derivada segunda com polinômio de Taylor

Gustavo de Souza Curty

Matheus Marendino

Matheus Iack

Sumário

1. Introdução ………………………………………………………. 3
2. Metodologia …………………………………………………….. 3

2.1 Diferença Avançada ………………………………………. 3

2.2 Diferença Centrada e Não Centrada ……………………. 4

2.3 Diferença com polinômio de Taylor………………………. 6

2.4 Desvios …….……………………………………………….. 6

1. Explicando o código …………………………………………… 7

3.1 Diferença Avançada ………………………………………. 7

3.2 Diferença Centrada e Não Centrada ……………………. 8

3.3 Diferença com polinômio de Taylor………………………. 9

1. Introdução

O conceito de derivada está relacionado à taxa de variação instantânea da função, a qual está presente no cotidiano das pessoas, podemos tomar como exemplo a taxa de variação de temperatura, taxa de crescimento econômico do país, entre outros. Utilizamos esse exemplo para mostrar que a variação da função e o resultado da mesma se faz necessária em algum momento.

Nesse caso, o objetivo é encontrar uma aproximação para e , para isso será utilizado ferramentas da Diferenciação Numérica. A diferenciação numérica tem origem no conceito de interpolação polinomial, é uma técnica utilizada para estimar derivadas de funções por meio de cálculos aproximados. Nesse caso, para calcular a aproximação da derivada primeira, utilizaremos a Fórmula de dois pontos avançada, e a Fórmula de três pontos Centrada e Não Centrada. E para calcularmos a aproximação da derivada segunda, usaremos a fórmula com aproximação de Taylor.

1. Metodologia

2.1 Diferença Avançada

Se são números reais distintos no intervalo fechado [a;b] e se [a;b], podemos escrever o polinômio de Lagrange de grau n, que aproxima a f(x), segundo o teorema de Weierstrass, na forma:

onde

Representa o erro de truncamento dessa aproximação [a;b].

Agora, considere [a;b] e um ponto [a;b]. Nosso objetivo é obter uma aproximação para . Para tanto, seja , onde h ≠ 0 e suficientemente pequeno para garantir que [a;b]. Para n = 1, obtemos:

Onde

para

Assim, com algumas manipulações matemáticas, chegamos a fórmula:

Onde - representa o erro de truncamento da aproximação da .

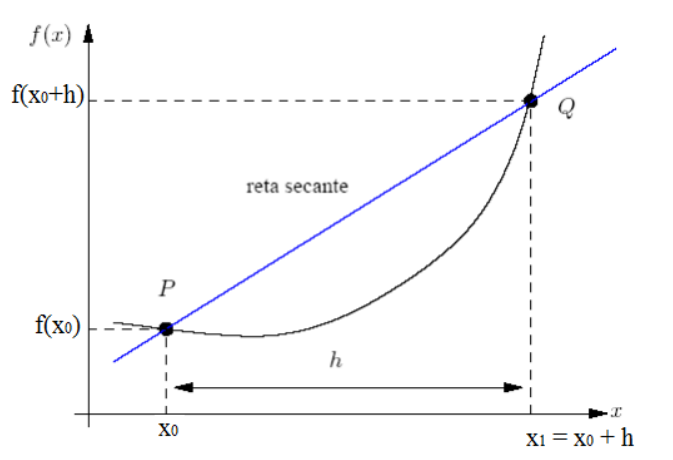


Figura 1: Fórmula Diferença avançada

2.2 Diferença Centrada e Não Centrada

Considere agora uma função [a;b] e um ponto [a;b]. O objetivo continua sendo determinar de forma aproximada. Aqui vamos, por exemplo, empregar os pontos:

Onde h ≠ 0 e suficientemente pequeno para garantir que [a;b]. Partindo da equação:

onde

Representa o erro de truncamento dessa aproximação [a;b]. Para n = 2, temos:

Onde

para

Assim, com algumas manipulações matemáticas, obtemos as seguintes fórmulas de três pontos:

1. Fórmula Não centrada

para

1. Fórmula Centrada

para

2.3 Diferença com polinômio de Taylor

Vamos agora considerar uma função [a;b] em um ponto [a;b]. Inicialmente expandimos essa f(x) no polinômio de Taylor na forma:

,

Assim, com algumas manipulações matemáticas, obtemos a fórmula:

2.3 Desvios

Após os cálculos usando as fórmulas acima, devemos calcular o Desvio Absoluto e o Desvio Relativo Percentual, são medidas estatísticas que fornecem informações sobre a dispersão ou variabilidade de um conjunto de dados em relação à sua média. Ambas as medidas são úteis para avaliar o quão longe os valores individuais estão da média, mas elas são expressas de maneiras ligeiramente diferentes.

Ambos os casos dependem dos valores de r e r\*, que são, respectivamente, a referência calculada através da derivada n da função, e a aproximação calculada pela fórmula do método em questão.

O **Desvio Absoluto:** fornece uma medida da distância média entre cada ponto de dados e a média. Quanto maior o desvio absoluto, maior é a dispersão dos dados.

O **Desvio Relativo Percentual**: O desvio relativo percentual expressa o desvio absoluto como uma porcentagem da média, permite comparar a dispersão em termos proporcionais à média.

3. Explicando o código

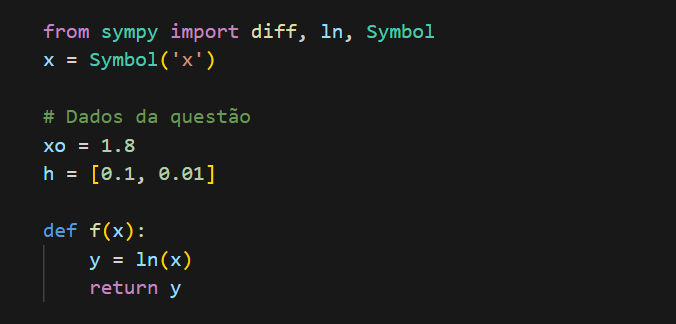
Para esse trabalho escolhemos o Jupyter Notebook, uma plataforma que permite manipulações em Python. Para cada método, resolvemos uma questão sobre diferenciação numérica.

3.1 Diferença Avançada

Iniciamos com a fórmula de dois pontos, método de **Diferença Avançada**.

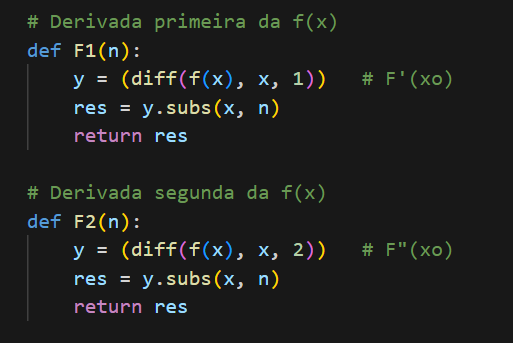
**Questão:** Considere a função f(x) = ln(x) use a fórmula da diferença avançada para estimar f'(1.8) considerando h = 0.1 e h = 0.01. Calcular o Desvio relativo percentual (DRP) e a cota máxima de erro de truncamento para os dois problemas.

Começamos o código importando as bibliotecas necessárias, após isso, definimos os dados fornecidos na questão, como o Xo, os valores de h como um array, e a função dada.

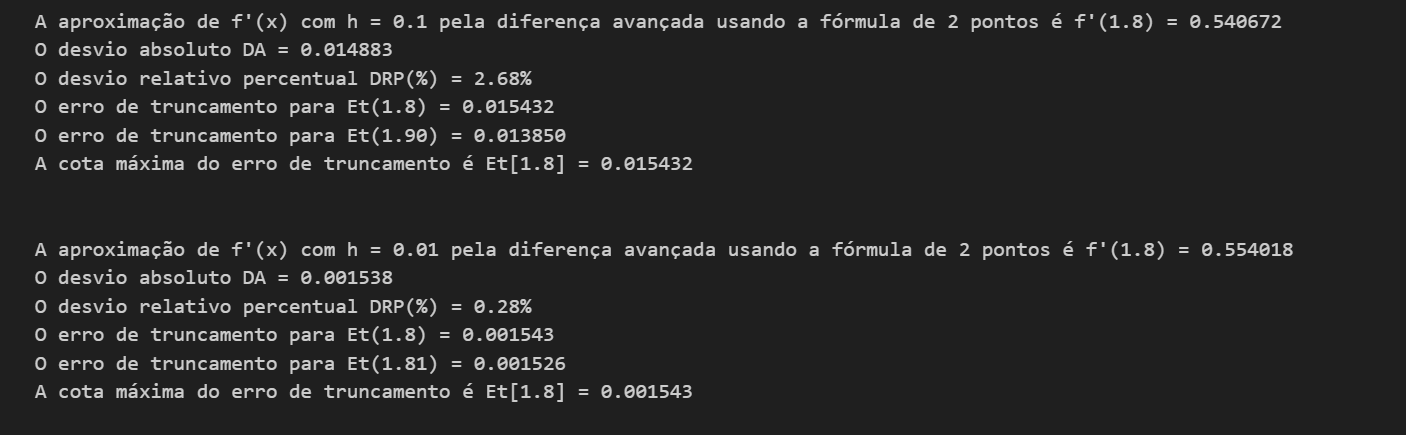


Em seguida, criamos uma estrutura de repetição para se repetir de acordo com a quantidade de valores no h, para assim calcular todas as possíveis aproximações, e também o desvio absoluto, desvio relativo percentual e o Erro de truncamento.

Para o cálculo das derivadas da função, foi usada a biblioteca Sympy, e sua função diff(), que calcula a derivada da função pedida.



Em seguida, fizemos a lógica dos cálculos utilizando as fórmulas da Diferença Avançada de dois pontos. Chegando aos seguintes resultados:

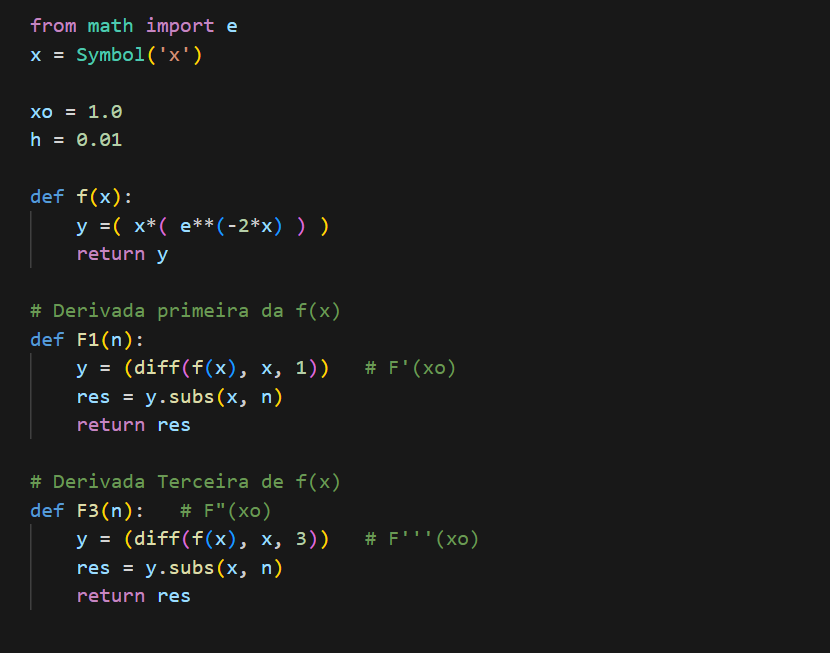


3.2 Diferença Centrada e Não Centrada

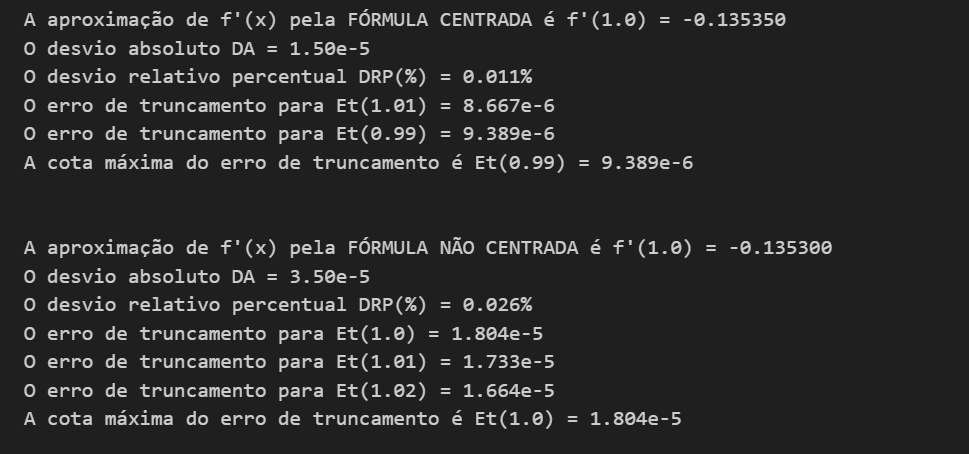
Em seguida, no mesmo código, utilizamos a fórmula de três pontos, método de **Diferença Centrada e Não Centrada**.

**Questão:** Indique a melhor aproximação para a f´(1), da função f(x) = x\*e^(-2\*x) para h = 0,01, usando a fórmula de três pontos. Estime os desvios absoluto e relativo percentual, bem como a cota máxima do erro de truncamento dessa aproximação. Usar 6 algarismos após a vírgula

E mantivemos o mesmo raciocínio usado acima. Definimos os dados da questão, e suas derivadas.



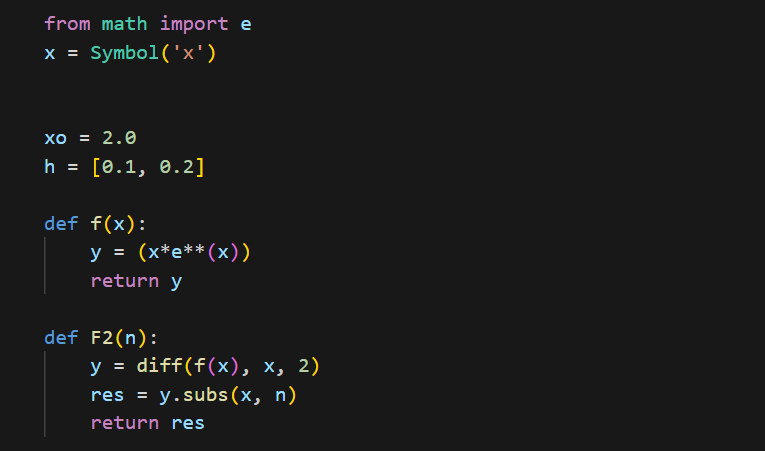
Em seguida, efetuamos a lógica para os cálculos e chegamos aos seguintes resultados:



3.2 Diferença com polinômio de Taylor

**Questão:** Calcule de forma aproximada a derivada segunda f"(2) da função xe^(x) considerando h = 0,1 e h = 0,2. Estime o desvio relativo percentual e a cota de erro máximo dessas aproximações.

Definimos os dados fornecidos na questão e suas derivadas:



Por fim, obtivemos os seguintes resultados:

