

Métodos Numéricos:
Introducción al Método de Elementos Finitos

Luis Ferragut Canals

14 de diciembre de 2005

Índice general

1. Introducción al M.E.F. para problemas elípticos: Problemas en dimensión 1	6
1.1. Formulación débil de un problema modelo unidimensional . . .	6
1.2. El M.E.F. para el problema modelo con funciones lineales a trozos	8
1.3. Integración numérica	12
2. El M.E.F. en problemas elípticos de segundo orden I: Problema de Dirichlet asociado a la ecuación de Poisson	16
2.1. Repaso de algunas fórmulas de cálculo vectorial	16
2.2. La ecuación de Poisson: formulación débil	17
2.3. Un Método de Elementos Finitos para el problema de Poisson	18
2.4. Cálculo de la matriz del sistema de ecuaciones y del segundo miembro: Un ejemplo	24
2.5. Elementos finitos de Lagrange	29
2.6. Un método general para el cálculo de matrices y vectores elementales	36

3. El M.E.F. en problemas elípticos de segundo orden II	39
3.1. Problema de Neuman homogéneo asociado al operador $-\Delta + I$	39
3.2. Problema de Neuman no homogéneo asociado al operador $-\Delta + I$	40
3.3. Problema mixto asociado a la ecuación de transmisión de calor	41
3.4. Deformación elástica de un sólido	44
3.5. Elasticidad plana	46

Índice de figuras

1.1. Ejemplo de una función $v_h \in V_h$, 5 subintervalos.	9
1.2. Ejemplo de una función de la base de V_h , 10 subintervalos. . .	10
2.1. Ejemplo de triangulación	19
2.2. Ejemplo de una función base	20
2.3. función λ_1	22
2.4. función λ_2	23
2.5. función λ_3	23
2.6. Triangulación del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$	25
2.7. Curvas de nivel de la función φ_{41}	25
2.8. Soporte de la función φ_{41}	26
2.9. Estrella asociada a la ecuación 41	26
2.10. triángulo de seis nodos	32
2.11. función p_1	33
2.12. función p_2	33
2.13. función p_3	34

2.14. función p_4	34
2.15. función p_5	35
2.16. función p_6	35

Capítulo 1

Introducción al M.E.F. para problemas elípticos: Problemas en dimensión 1

1.1. Formulación débil de un problema modelo unidimensional

Consideremos el problema de contorno siguiente

$$-u''(x) = f(x) \quad \text{para } 0 < x < 1 \quad (1.1.1)$$

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (1.1.2)$$

donde $v' = \frac{dv}{dx}$ y f es una función continua. Integrando la ecuación (1.1.1) dos veces, es fácil ver que este problema tiene solución única.

Ejemplo 1: cuerda elástica

1.1. FORMULACIÓN DÉBIL DE UN PROBLEMA MODELO UNIDIMENSIONAL

Ejemplo 2: barra elástica

$$\begin{aligned}\sigma &= Eu' \quad (\text{Ley de Hooke}) \\ -\sigma' &= f \quad (\text{ecuación de equilibrio}) \\ u(0) &= u(1) = 0 \quad (\text{condiciones de contorno})\end{aligned}$$

Ejemplo 3: Conducción de calor en una barra

$$\begin{aligned}-q &= ku' \quad (\text{Ley de Fourier}) \\ q' &= f \quad (\text{ley de conservación de la energía}) \\ u(0) &= u(1) = 0\end{aligned}$$

Vamos a reformular el problema modelo. Para ello introducimos el espacio vectorial de funciones siguiente:

$V = \{v; v \text{ es una función continua en } [0,1], v' \text{ es continua a trozos y acotada en } [0,1], v(0) = v(1) = 0\}$

multiplicamos la ecuación 1.1.1 por una función cualquiera de V e integramos en el intervalo $[0,1]$, aplicamos la fórmula de integración por partes. Obtenemos:

$$-\int_0^1 u''(x)v(x) dx = -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx \quad (1.1.3)$$

y concluimos que para toda función $v \in V$, la solución u del problema modelo 1.1.1 verifica:

$$\int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \quad (1.1.4)$$

La formulación anterior 1.1.4 se llama formulación débil del problema de partida 1.1.1. Las dos formulaciones no son estrictamente equivalentes. En efecto hemos visto que toda solución de 1.1.1 es solución de 1.1.4. De hecho la formulación débil es más general, pues dependiendo de los datos del problema, es decir de la regularidad de la función f , el problema 1.1.1 puede no tener solución y sin embargo si tenerla el problema 1.1.4.

Ejercicios

1.2. EL M.E.F. PARA EL PROBLEMA MODELO CON FUNCIONES LINEALES A TROZOS

1. Dibujar funciones que pertenezcan al espacio V , definido anteriormente.
2. Probar que si la solución u del problema 1.1.4 es dos veces derivable y la derivada segunda es continua entonces u es solución de 1.1.1
3. Hallar la formulación débil del problema siguiente:

$$\begin{aligned}-u''(x) &= f(x) \quad \text{para } 0 < x < 1 \\ u(0) &= a \\ u'(1) &= b\end{aligned}$$

4. Hallar la formulación débil del problema siguiente:

$$\begin{aligned}-u''(x) &= f(x) \quad \text{para } 0 < x < 1 \\ u'(0) &= u'(1) = 0\end{aligned}$$

5. Hallar la formulación débil del problema siguiente:

$$\begin{aligned}-u''(x) &= f(x) \quad \text{para } 0 < x < 1 \\ u'(0) &= g \\ u(1) &= 0\end{aligned}$$

6. Hallar la formulación débil del problema siguiente

$$\begin{aligned}-(a(x)u'(x))' + b(x)u'(x) + c(x)u(x) &= f(x) \quad \text{para } 0 < x < 1 \\ u(0) &= u(1) = 0\end{aligned}$$

donde las funciones $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ y $f(x)$ son funciones conocidas.

1.2. El M.E.F. para el problema modelo con funciones lineales a trozos

El espacio V es un espacio de funciones de dimensión infinita. La idea del M.E.F. es buscar soluciones de 1.1.4 en un subespacio de V , más sencillo

1.2. EL M.E.F. PARA EL PROBLEMA MODELO CON FUNCIONES LINEALES A TROZOS

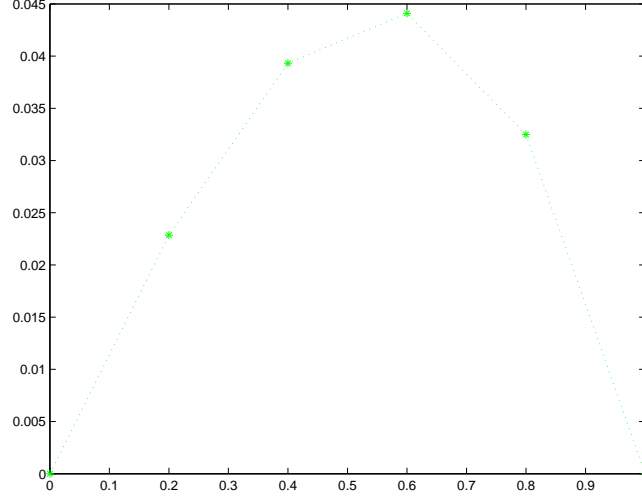


Figura 1.1: Ejemplo de una función $v_h \in V_h$, 5 subintervalos.

de manejar, en particular en un espacio vectorial de funciones que sea de dimensión finita. Esto nos permitirá representar cualquier función de este subespacio con una combinación lineal (número finito de sumandos) de elementos de una base. En primer lugar construiremos un subespacio V_h de V . Para ello sea $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M < x_{M+1} = 1$, una partición del intervalo $(0,1)$ en subintervalos $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ de longitud $h_j = x_j - x_{j-1}$, $j = 0, \dots, M+1$ y sea $h = \max h_j$. La cantidad h es una medida de lo fina que es la partición. Consideremos ahora el conjunto de funciones v_h lineales en cada subintervalo I_j , y continuas en $[0,1]$ y tales que $v(0) = v(1) = 0$, como en el ejemplo de la siguiente figura: Una base de este espacio est constituida por el siguiente conjunto de funciones $\varphi_j \in V_h$, $j = 1, \dots, M$, definidas por:

$$\varphi_j(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

es decir, φ_j es continua y lineal a trozos y toma el valor 1 en el nodo x_j y el valor 0 en los otros nodos. De forma más precisa:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq x_{j-1} \\ \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{if } x_{j-1} < x < x_j \\ \frac{x_{j+1} - x}{x_{j+1} - x_j} & \text{if } x_j < x < x_{j+1} \\ 0 & \text{if } x_{j+1} \leq x \end{cases}$$

1.2. EL M.E.F. PARA EL PROBLEMA MODELO CON FUNCIONES LINEALES A TROZOS

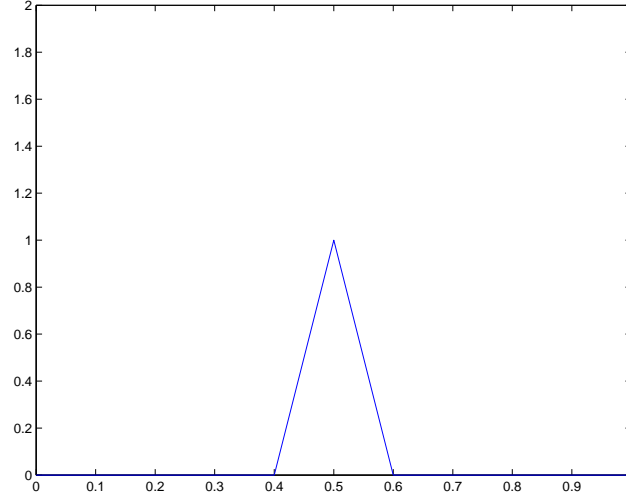


Figura 1.2: Ejemplo de una función de la base de V_h , 10 subintervalos.

Una función $v_h \in V_h$ se escribe de forma única como combinación lineal de funciones de la base $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$,

$$v_h(x) = \sum_{i=1}^M v_h(x_i) \varphi_i(x) \quad x \in [0, 1]$$

El método de elementos finitos para el problema de contorno 1.1.1 se formula de la siguiente manera:

Hallar $u_h \in V_h$ tal que para todo $v_h \in V_h$ verifique:

$$\int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx \quad (1.2.1)$$

Este problema, como vamos a ver es equivalente a resolver un sistema algebraico lineal, en efecto:

Por una parte la solución u_h se expresa en función de los elementos de la base $\{\varphi_i\}_{i=1}^M$ $u_h(x) = \sum_{i=1}^M u_i \varphi_i(x)$, donde $u_i = u_h(x_i)$ por otra parte para que se verifique 1.2.1 para cualquier v_h es necesario y suficiente que se verifique para cualquier función de la base, teniendo en cuenta que la integral de una suma

1.2. EL M.E.F. PARA EL PROBLEMA MODELO CON FUNCIONES
LINEALES A TROZOS

es suma de integrales y las constantes pueden salir de la integral (linealidad de la integral) resulta que el problema a resolver es:

Hallar $\mathbf{u} = \{u_i\}_{i=1}^M \in \mathbb{R}^M$ solución de

$$\sum_{i=1}^M \left(\int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx \right) u_i = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx \quad j = 1, \dots, M \quad (1.2.2)$$

En forma matricial el sistema se puede escribir

$$\mathbf{A} \mathbf{u} = \mathbf{b}$$

donde la matriz $\mathbf{A} = (a_{ij})_{i,j=1}^M$, $a_{ij} = \int_0^1 \varphi'_i(x) \varphi'_j(x) dx$ y el segundo miembro $\mathbf{b} = (b_j)_{j=1}^M$ viene dado por $b_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx$

Los elementos a_{ij} de la matriz \mathbf{A} se calculan fácilmente. Observemos primero que si $|i - j| > 1$ entonces $a_{ij} = 0$ pues en este caso para todo $x \in [0, 1]$, $\varphi_i(x)$ o $\varphi_j(x)$ es igual a cero. Por tanto la matriz \mathbf{A} es tridiagonal, es decir, únicamente los elementos de la diagonal principal y los elementos de las dos diagonales adyacentes pueden ser diferentes de cero. Tenemos para $j = 1, \dots, M$,

$$\int_0^1 \varphi'_j(x) \varphi'_j(x) dx = \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h_{j+1}^2} dx = \frac{1}{h_j} + \frac{1}{h_{j+1}}$$

y para $j = 2, \dots, M$,

$$\int_0^1 \varphi'_j(x) \varphi'_{j-1}(x) dx = - \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h_j^2} dx = -\frac{1}{h_j}$$

Observamos además que la matriz es simétrica y definida positiva, en efecto, $a_{ij} = a_{ji}$ y por otra parte para cualquier $(v_i)_{i=1}^M$, vector de \mathbb{R}^M , distinto del vector nulo, sea $v_h = \sum_{i=1}^M v_i \varphi_i$, entonces

$$\sum_{i,j=1}^M a_{ij} v_i v_j = \int_0^1 v'_h(x) v'_h(x) dx > 0$$

1.3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

En el caso especial en el que los subintervalos I_j tengan todos la misma longitud $h = \frac{1}{M+1}$ el sistema tiene la forma

$$\frac{1}{h} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \quad (1.2.3)$$

que dividiendo por h se interpreta como un esquema en diferencias finitas para resolver el problema (1.1.1).

Ejercicios

1. Formular un método en diferencias para (1.1.1) y comparar con (1.2.3)
2. Formular un método de elementos finitos mediante aproximación con polinomios de grado 1 como en el problema modelo para los problemas planteados en los ejercicios 3 a 6 del apartado 1.1 y calcular la matriz y el segundo miembro del sistema algebraico correspondiente.
3. Construir un espacio de dimension finita $V_h \in V$ a partir de funciones que sean polinomios de segundo grado en cada subintervalo I_j de la partición y calcular la matriz del sistema correspondiente.

1.3. Integración numérica

En los problemas del apartado anterior, a la hora de calcular el segundo miembro aparecen integrales de la forma

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_j(x) dx$$

Salvo en el caso en que la función f sea una función constante a trozos o polinómica a trozos e incluso en ese caso, la forma práctica de calcular

estas integrales será la integración numérica. Vamos a hacer una pequeña introducción a la integración numérica.

Consideraremos el caso de la aproximación numérica de la integral en un intervalo acotado $[a, b]$ de una función general f . Mediante cambio de variable siempre nos podemos trasladar al caso en que el intervalo sea $[-1, +1]$ o $[0, 1]$. En efecto

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \int_0^1 \tilde{f}(\eta) d\eta = \frac{b - a}{2} \int_{-1}^1 \hat{f}(\xi) d\xi$$

donde $f(x) = \tilde{f}(\eta) = \hat{f}(\xi)$, para cada punto $x \in [a, b]$ imagen del correspondiente punto $\eta \in [0, 1]$, respectivamente del correspondiente $\xi \in [-1, 1]$

Las fórmulas de integración numérica son expresiones del tipo

$$\int_a^b f(x) dx \simeq \sum_{l=1}^L \omega_l f(x_l) \quad (1.3.1)$$

donde el conjunto de puntos x_l ($l = 1, \dots, L$) son una serie de puntos convenientemente elegidos donde se va a evaluar la función llamados puntos soporte y los coeficientes ω_l ($l = 1, \dots, L$) se llaman pesos de la fórmula de integración. Vamos a deducir algunas fórmulas sencillas de integración numérica entre las llamadas de tipo interpolatorio. La idea general es bien sencilla. Se aproxima primero la función a integrar f por un polinomio p y se integra el polinomio. Veamos un ejemplo. Supongamos que queremos integrar una función f en el intervalo $[-1, +1]$. Para ello aproximamos la función f por un polinomio de grado 0, es decir por una función constante. Podemos tomar por ejemplo la función constante que toma el mismo valor que f en el punto medio del intervalo, es decir el punto $\xi = 0$. Obtenemos inmediatamente la siguiente fórmula de integración numérica

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \simeq \int_{-1}^1 f(0) d\xi = 2f(0) \quad (1.3.2)$$

Esta fórmula se conoce como la fórmula del punto medio. Observemos que esta fórmula integra exactamente no solo las funciones constantes, lo que es

1.3. INTEGRACIÓN NUMÉRICA

obvio, sino también los polinomios de grado 1. Esto es debido a que los errores cometidos a un lado y al otro del punto soporte $\xi = 0$ tienen signo distinto y se cancelan como se puede comprobar con un ejemplo y la correspondiente gráfica.

Resulta fácil pensar ahora en otras fórmulas. Por ejemplo utilizando interpolación lineal, es decir, sustituyendo la función f por un polinomio de grado 1, eligiendo el polinomio de grado 1 que toma el mismo valor que f en los extremos del intervalo. Tendremos que dicho polinomio será

$$f(-1)\frac{1-\xi}{2} + f(1)\frac{1+\xi}{2}$$

de donde tras un sencillo cálculo obtenemos la siguiente fórmula de integración numérica, conocida como fórmula del trapecio

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \simeq f(-1) + f(1) \quad (1.3.3)$$

Obviamente esta fórmula es exacta para polinomios de grado 1, pero no para polinomios de grado mayor, como es fácil comprobar con un sencillo contraejemplo.

La regla de Simpson está basada en la interpolación cuadrática, es decir, sustituimos la función por un polinomio de grado 2. Los puntos soporte utilizados son los dos extremos del intervalo y el punto medio. Se obtiene así la siguiente fórmula

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \simeq \frac{1}{3}(f(-1) + 4f(0) + f(1)) \quad (1.3.4)$$

Como la regla de Simpson está basada en la interpolación cuadrática es exacta para polinomios de grado 2. De hecho es mejor que esto, pues resulta exacta para polinomios de grado 3

Habiendo observado que obtenemos un grado de precisión extra (orden de los polinomios que son integrados exactamente) para la fórmula del punto medio y para la regla de Simpson resulta natural pensar en encontrar fórmulas

que sean exactas para polinomios del grado más alto posible. Las tres fórmulas anteriores, punto medio, trapecio y Simpson, son del tipo (1.3.1) de 1 punto, 2 puntos y 3 puntos respectivamente. En general una fórmula de L puntos tiene $2L$ parámetros, los L puntos ξ_l ($l = 1, \dots, L$) y los L pesos ω_l ($l = 1, \dots, L$). Al poder elegir $2L$ parámetros si lo hacemos adecuadamente es razonable pensar que podremos obtener fórmulas que sean exactas para polinomios de grado $2L-1$, pues un polinomio de grado $2L-1$ viene determinado por $2L$ coeficientes. Visto de otra manera, puesto que la integral y la regla general de L puntos (1.3.1) son ambas lineales, basta exigir a una fórmula que sea exacta para los polinomios $p_0(\xi) = 1$, $p_1(\xi) = \xi$, $p_2(\xi) = \xi^2$, ..., $p_{2L-1}(\xi) = \xi^{2L-1}$. Esto impone $2L$ condiciones con las que podemos calcular los $2L$ parámetros de la fórmula de $2L$ puntos. Las fórmulas obtenidas de esta manera se llaman fórmulas de Gauss. La fórmula de Gauss de un punto es justamente la fórmula del punto medio. La fórmula de Gauss de 2 puntos es la siguiente:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi \simeq f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (1.3.5)$$

La fórmula de Gauss de un punto es desde este punto de vista al menos tan precisa como la fórmula del trapecio y la fórmula de Gauss de dos puntos es tan precisa como la de Simpson. La existencia y unicidad de fórmulas de Gauss de n puntos se prueba mediante la teoría de polinomios ortogonales cuyos detalles no veremos en este curso.

Ejercicios

1. Calcular utilizando adecuadamente la fórmula del trapecio

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x) \varphi_i(x) dx$$

donde φ_i es la correspondiente función de la base de V_h asociada al nodo x_i .

Capítulo 2

El M.E.F. en problemas elípticos de segundo orden I: Problema de Dirichlet asociado a la ecuación de Poisson

2.1. Repaso de algunas fórmulas de cálculo vectorial

Recordemos el teorema de la divergencia. Sea \mathbf{A} un campo vectorial en un conjunto abierto Ω de \mathbb{R}^2 que supondremos abierto, acotado y con frontera Γ bien definida. Es decir $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$, donde $A_1, A_2 : (x_1, x_2) \in \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, la divergencia de \mathbf{A} es la función $\text{div } \mathbf{A}$ dada por

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2}$$

El teorema de la divergencia se escribe:

$$\int_{\Omega} \text{div } \mathbf{A} \, dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \, d\gamma$$

donde $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ es el campo vectorial normal unitario a la frontera de Ω .

2.2. LA ECUACIÓN DE POISSON: FORMULACIÓN DÉBIL

Vamos a aplicar ahora este teorema en unos casos particulares. Consideremos el caso $\mathbf{A} = (uv, 0)$ donde u y v son funciones de Ω en \mathbb{R}^2 . Tendremos para $i = 1, 2$:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx_1 dx_2 + \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} uv \, n_i$$

Si en la fórmula anterior elegimos en el lugar de v la función $\frac{\partial v}{\partial x_i}$ resulta:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx_1 dx_2 + \int_{\Omega} u \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \, dx_1 dx_2 = \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, n_i \, d\gamma$$

Sumando ahora para $i = 1, 2$ obtenemos:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \\ &= - \int_{\Omega} u \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} n_2 \, d\gamma \end{aligned}$$

Denotando mediante ∇v al gradiente de v , es decir, $\nabla^t v = (\frac{\partial v}{\partial x_1}, \frac{\partial v}{\partial x_2})$ y Δv el laplaciano de v es decir, $\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}$ hemos obtenido la siguiente fórmula de Green:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx_1 dx_2 = - \int_{\Omega} u \Delta v \, dx_1 dx_2 + \int_{\Gamma} u \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, d\gamma \quad (2.1.1)$$

donde hemos puesto $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \nabla v \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial v}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial v}{\partial x_2} n_2$.

aclaración: Los vectores los representamos habitualmente mediante matrices columna o lo que es lo mismo por el transpuesto de un vector fila.

2.2. La ecuación de Poisson: formulación débil

Consideraremos el siguiente problema de Dirichlet para la ecuación de Poisson:

$$-\Delta u = f \quad \text{en} \quad \Omega \quad (2.2.1)$$

$$u = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma \quad (2.2.2)$$

2.3. UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL PROBLEMA DE POISSON

donde f es una función dada, definida en Ω .

Un gran número de problemas en física y mecánica se modelan mediante esta ecuación. u puede representar por ejemplo la temperatura de un cuerpo, el potencial electromagnético, el desplazamiento de una membrana elástica fija en su contorno y sometida a una fuerza.

Siguiendo los pasos en el tratamiento del problema modelo unidimensional del capítulo 1, introduciremos una formulación débil del problema (2.2.1-2.2.2). Para ello introducimos un espacio de funciones definidas en Ω y para las cuales tengan sentido las operaciones que vamos a realizar.

$$V = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continuas y derivadas } \frac{\partial v}{\partial x_i}, i = 1, 2 \text{ continuas a trozos en } \Omega \text{ con } v = 0 \text{ en } \Gamma\}$$

Multiplicamos ambos miembros de la ecuación (2.2.1) por una función $v \in V$ cualquiera e integrando aplicando la fórmula de Green (2.1.1) resulta teniendo en cuenta que $v = 0$ en Γ que u es solución del siguiente problema:

Hallar $u \in V$ tal que verifique,

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f v \, dx_1 dx_2 \quad (2.2.3)$$

para toda función $v \in V$

Evidentemente toda solución del problema (2.2.1-2.2.2) será solución de (2.2.3). Recíprocamente si u es solución del problema (2.2.3) y es suficientemente regular, por ejemplo, dos veces derivable con continuidad, entonces u será solución del problema de partida (2.2.1-2.2.2).

2.3. Un Método de Elementos Finitos para el problema de Poisson

Vamos a construir un método numérico para calcular en la práctica una aproximación de la solución de (2.2.3). Empezamos introduciendo un subespacio de V que sea de dimensión finita y elegiremos una base de este espacio

2.3. UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL PROBLEMA DE POISSON

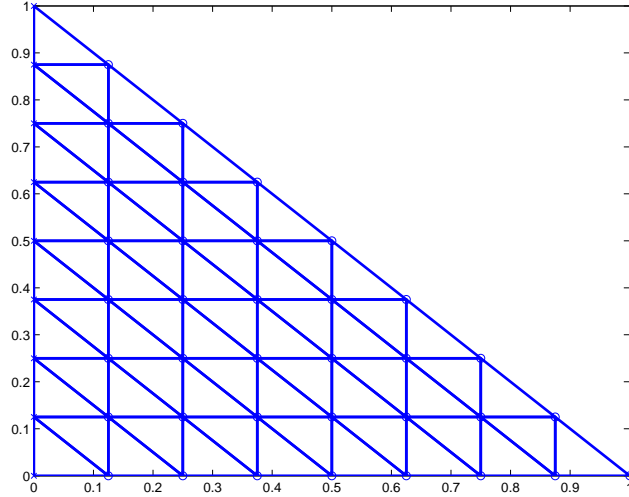


Figura 2.1: Ejemplo de triangulación

de modo que las funciones del mismo sea fáciles de manejar. Para simplificar supondremos que la frontera Γ del dominio Ω es poligonal. Construyamos una triangulación \mathcal{T}_h de Ω , subdividiendo Ω en un conjunto de triángulos $\mathcal{T}_h = \{K_e\}_{e=1,\dots,E}$ de modo que $\bar{\Omega} = \bigcup_{e=1,\dots,E} K_e$, que los triángulos no se superpongan, y que las aristas de cada triángulo sea bien la arista de otro triángulo o una parte de la frontera poligonal Γ . Ver un ejemplo en la figura 2.1. A cada mallado o triangulación \mathcal{T}_h le asociamos el parámetro $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(K)$, donde $\text{diam}(K) = \text{diámetro de } K = \text{lado mayor de } K$.

Definimos ahora V_h como sigue:

$$V_h = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continuas}, v_h|_K \in P_1(x_1, x_2), v_h = 0 \text{ en } \Gamma\}$$

donde $P_1(x_1, x_2)$ designa el conjunto de polinomios de grado 1 de dos variables. El espacio V_h consiste en todas las funciones continuas que son lineales en cada triángulo de la triangulación \mathcal{T}_h y que se anulan en la frontera Γ . Observemos que $V_h \in V$. Como parámetros para describir una función v_h de V_h elegimos los valores $v_h(p_i)$, $i = 1, \dots, M$ de v_h en los puntos p_i , $i = 1, \dots, M$, vértices de la triangulación \mathcal{T}_h , excluyendo los vértices situados en la frontera Γ , puesto que $v_h = 0$ sobre Γ . Las correspondientes funciones de la base

2.3. UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL PROBLEMA DE POISSON

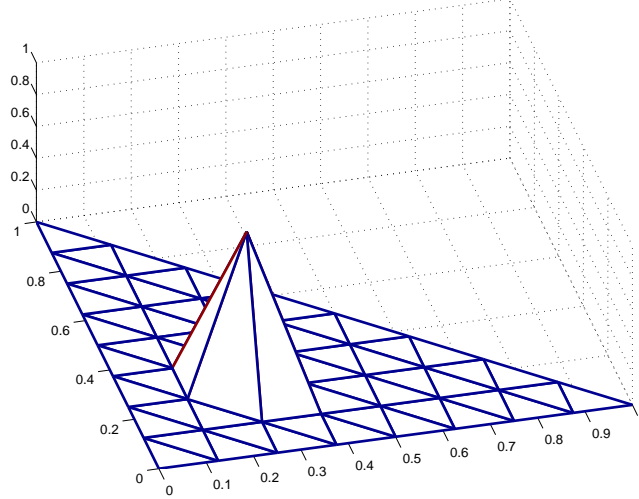


Figura 2.2: Ejemplo de una función base

$\varphi_j \in V_h, j = 1, \dots, M$, están definidas por

$$\varphi_j(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

Una función típica de la base se representa en la figura 2.2

Estamos en disposición de formular el correspondiente problema aproximado del problema(2.2.3): Hallar $u_h \in V_h$ tal que verifique,

$$\int_{\Omega} \nabla u_h \nabla v_h \, dx_1 dx_2 = \int_{\Omega} f v_h \, dx_1 dx_2 \quad (2.3.1)$$

para toda función $v_h \in V_h$.

En la práctica el problema (2.3.1) se reduce a resolver el siguiente sistema lineal algebraico de ecuaciones:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b} \quad (2.3.2)$$

donde $\mathbf{A}_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \, dx_1 dx_2$, $b_i = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx_1 dx_2$ y el vector solución $\mathbf{u} = (u_i)_{i=1, \dots, M}$, donde $u_i = u_h(p_i)$ son los coeficientes de la combinación lineal de elementos de la base de V_h representando u_h , es decir,

2.3. UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL PROBLEMA DE POISSON

$u_h(x_1, x_2) = \sum_{i=1, \dots, M} u_h(p_i) \varphi_i(x_1, x_2)$, siendo p_i , $i = 1, \dots, M$ los vértices de la triangulación que no están en la frontera Γ .

El cálculo de los términos de la matriz \mathbf{A} y del segundo miembro \mathbf{b} se realiza sumando las contribuciones de la integral en cada elemento K de la triangulación, así:

$$\mathbf{A}_{ij} = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{A}_{ij}^K$$

donde

$$\mathbf{A}_{ij}^K = \int_K \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j \, dx_1 dx_2$$

y

$$\mathbf{b}_i = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \mathbf{b}_i^K$$

donde

$$\mathbf{b}_i^K = \int_{K \cap \Gamma} f \varphi_i \, dx_1 dx_2$$

Los pasos a dar en la resolución de un problema mediante el método de elementos finitos con la ayuda de un ordenador son:

1. Entrada de datos f , Ω , etc.
2. Construcción y representación de la triangulación o mallado.
3. Cálculo de las matrices elementales \mathbf{A}^K y de los vectores segundo miembro \mathbf{b}^K
4. Ensamblaje de la matriz global del sistema \mathbf{A} por suma de las matrices elementales \mathbf{A}^K y del vector segundo miembro \mathbf{b} por suma de los vectores elementales \mathbf{b}^K .
5. Resolución del sistema algebraico $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$.
6. Presentación y visualización de resultados.

2.3. UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL PROBLEMA DE POISSON

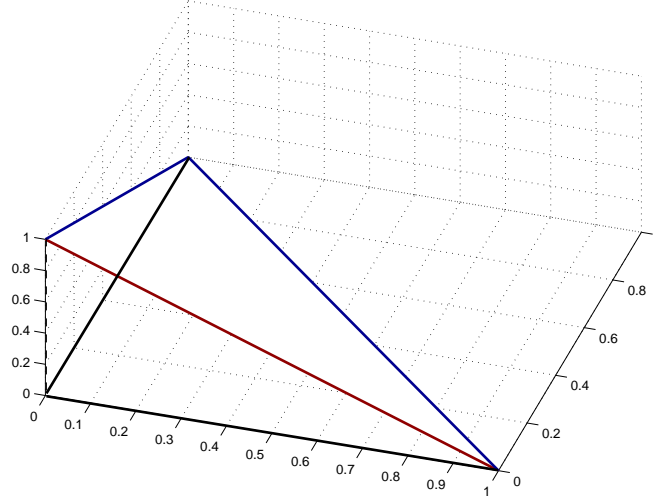


Figura 2.3: función λ_1

Vamos a precisar con algo más de detalle el paso 3 y el 4. En primer lugar para calcular las integrales \mathbf{A}_{ij}^K necesitaremos la expresión explícita de las funciones de la base φ_i , o más concretamente, la restricción a K de las funciones φ_i . Observemos primero que sólo un número reducido de las funciones de la base son distintas de cero en cada triángulo K , en efecto, la función φ_i será distinta de cero en el triángulo K si y sólo si p_i es un vértice de K . Para fijar las ideas, consideremos un triángulo genérico K de vértices $a_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3$ (para no manejar un excesivo número de índices utilizaré aquí la notación (x, y) para designar las coordenadas cartesianas en \mathbb{R}^2). Sólo hay tres funciones de la base de V_h cuya restricción a K sea distinta de cero. Son las funciones λ_i , $i = 1, 2, 3$, polinomios de dos variables de grado 1 en K y que verifican (figuras 2.3, 2.4, 2.5)

$$\lambda_i(a_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

.

La función $\lambda_1 = a + bx + cy$ se puede determinar resolviendo el sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas, a , b , c ,

2.3. UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS PARA EL PROBLEMA DE POISSON

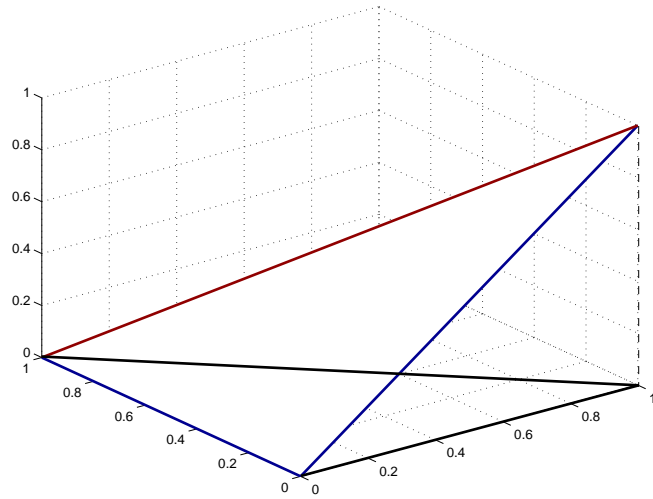


Figura 2.4: función λ_2

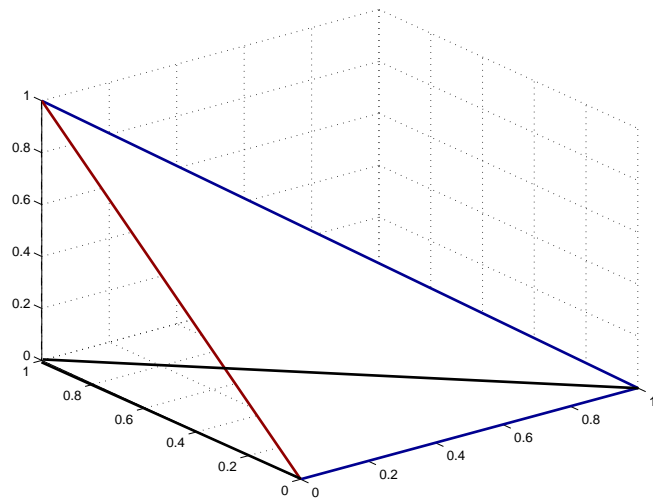


Figura 2.5: función λ_3

2.4. CÁLCULO DE LA MATRIZ DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y DEL SEGUNDO MIEMBRO: UN EJEMPLO

$$a + bx_1 + cy_1 = 1$$

$$a + bx_2 + cy_2 = 0$$

$$a + bx_3 + cy_3 = 0$$

y análogamente para las funciones λ_2 y λ_3 . Observemos que si K es el triángulo de vértices $a_1 = (0, 0)$, $a_2 = (1, 0)$ y $a_3 = (0, 1)$, entonces las funciones λ_i , $i = 1, 2, 3$ tienen una expresión muy sencilla, pues, $\lambda_1 = 1 - x - y$, $\lambda_2 = x$ y $\lambda_3 = y$. Las funciones λ_1 , λ_2 , λ_3 asociadas a un triángulo K , se llaman coordenadas baricéntricas y toman valores entre 0 y 1 en los puntos interiores de K y mayores que 1 o menores que 0 en los exteriores, y el valor 0 o 1 en los puntos frontera. Se tiene además $\sum_{i=1,2,3} \lambda_i(x, y) = 1$ en todo punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

2.4. Cálculo de la matriz del sistema de ecuaciones y del segundo miembro: Un ejemplo

Vamos a calcular explícitamente el sistema (2.3.2) en el caso sencillo correspondiente al problema (2.3.1) en un dominio cuadrado con la triangulación de la figura 2.6. Calcularemos la i -ésima ecuación del sistema (en las figuras, la ecuación número 41 que es la que corresponde al centro del cuadrado). En la figura 2.7 se han dibujado las curvas de nivel de la correspondiente función base φ_{41} y en la figura 2.8 se ha resaltado el soporte de dicha función. Empecemos calculando los términos de la matriz. La fila 41 de dicha matriz solo tendrá algunos términos no nulos, concretamente y “a priori los términos \mathbf{A}_{ij} correspondientes a los valores de índices $i = 41$ y $j = 32, 33, 40, 41, 42, 49, 50$, pues solo para estos valores de los índices los soportes de las funciones φ_i y φ_j tendrán intersección no vacía (ver la figura 2.9).

Vamos a calcular los términos \mathbf{A}_{ij}^K para cada triángulo K de la figura 2.9. De hecho bastará hacerlo para uno de ellos (por ejemplo el de vértices

2.4. CÁLCULO DE LA MATRIZ DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y DEL SEGUNDO MIEMBRO: UN EJEMPLO

Figura 2.6: Triangulación del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$

Figura 2.7: Curvas de nivel de la función φ_{41}

2.4. CÁLCULO DE LA MATRIZ DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y DEL SEGUNDO MIEMBRO: UN EJEMPLO

Figura 2.8: Soporte de la función φ_{41}

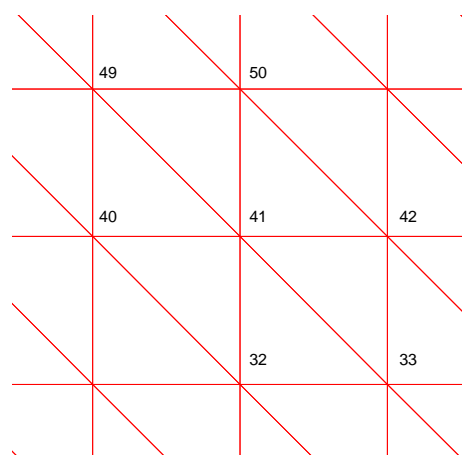


Figura 2.9: Estrella asociada a la ecuación 41

2.4. CÁLCULO DE LA MATRIZ DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y DEL SEGUNDO MIEMBRO: UN EJEMPLO

$a_{41} = (0.5, 0.5)$, $a_{42} = (0.6, 0.5)$, $a_{50} = (0.5, 0.6)$) y por permutación de sus términos obtendremos el resultado para los otros triángulos. De forma algo más general consideremos un triángulo de vértices (y utilizando numeración local para simplificar la escritura, es decir, utilizando valores para los 3 índices 1, 2 y 3, en lugar de 41, 42 y 50) $a_1(x_1, y_1)$, $a_2(x_2 = x_1 + h, y_2)$ $a_3(x_3 = x_1, y_3 = y_1 + h)$, la restricción de las funciones base a este triángulo serán

$$\lambda_1 = 1 - \frac{x - x_1}{h} - \frac{y - y_1}{h},$$

$$\lambda_2 = \frac{x - x_1}{h},$$

$$\lambda_3 = \frac{y - y_1}{h}.$$

En efecto, las anteriores funciones verifican $\lambda_i(a_j) = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, 2, 3$. Los gradientes respectivos son:

$$\nabla \lambda_1 = [-1/h, -1/h]^t,$$

$$\nabla \lambda_2 = [-1/h, 0]^t,$$

$$\nabla \lambda_3 = [0, 1/h]^t.$$

De donde, los correspondiente productos:

$$\nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_1 = 2/h^2 \quad \nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_2 = -1/h^2 \quad \nabla \lambda_1 \cdot \nabla \lambda_3 = -1/h^2$$

$$\nabla \lambda_2 \cdot \nabla \lambda_1 = -1/h^2 \quad \nabla \lambda_2 \cdot \nabla \lambda_2 = 1/h^2 \quad \nabla \lambda_2 \cdot \nabla \lambda_3 = 0$$

$$\nabla \lambda_3 \cdot \nabla \lambda_1 = -1/h^2 \quad \nabla \lambda_3 \cdot \nabla \lambda_2 = 0 \quad \nabla \lambda_3 \cdot \nabla \lambda_3 = 1/h^2$$

Integrando en el triángulo K , teniendo en cuenta que son términos constantes y que $\text{área}(K) = h^2/2$ resulta,

$$\mathbf{A}^K = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

y análogamente para los otros triángulos del soporte de φ_{41} . Para construir la matriz global \mathbf{A} estas contribuciones se han de sumar adecuadamente en la

2.4. CÁLCULO DE LA MATRIZ DEL SISTEMA DE ECUACIONES Y DEL SEGUNDO MIEMBRO: UN EJEMPLO

posición fila-columna correspondiente, así el término $\mathbf{A}_{1,1}^K$ irá a sumarse en la posición $\mathbf{A}_{41,41}$ de la matriz global, el término $\mathbf{A}_{1,2}^K$, se sumará en la posición $\mathbf{A}_{41,42}$, el término $\mathbf{A}_{1,3}^K$, se sumará en la posición $\mathbf{A}_{41,50}$ y así sucesivamente. Los términos de \mathbf{A} , distintos de cero, correspondiente a la ecuación número 41 serán (fila 41 de la matriz) :

$$\mathbf{A}_{41,32} = \mathbf{A}_{41,40} = \mathbf{A}_{41,42} = \mathbf{A}_{41,50} = -1$$

$$\mathbf{A}_{41,33} = \mathbf{A}_{41,49} = 0$$

$$\mathbf{A}_{41,41} = 4$$

Calculemos el segundo miembro. El término de la ecuación 41 es: $b_{41} = \int_{\Omega} f \varphi_{41} dx_1 dx_2$, la integral la calcularemos utilizando integración numérica. La fórmula siguiente de Newton-Cotes que integra exactamente polinomios de grado 1, es suficiente:

$$\int_K f(x, y) dx dy \approx \frac{\text{área}(K)}{3} \sum_{i=1,2,3} f(a_i)$$

donde a_i $i = 1, 2, 3$ son los 3 vértices del triángulo. En nuestro caso, la función a integrar es $f \varphi_{41}$, que vale 1 en el vértice 41 y 0 en los otros. Por tanto,

$$\int_K f \varphi_{41} dx dy \approx \frac{\text{área}(K)}{3} f(a_{41})$$

sumando las contribuciones de los seis triángulos de la estrella (ver la figura 2.9) y teniendo en cuenta que el área de cada triángulo es igual a $h^2/2$, resulta

$$\int_K f \varphi_{41} dx dy \approx h^2 f(a_{41})$$

La ecuación 41 del sistema se escribe:

$$-u_{32} - u_{40} + 4u_{41} - u_{42} - u_{50} = h^2 f(a_{41}) \quad (2.4.1)$$

que coincide con el método clásico de diferencias finitas. Naturalmente el método de elementos finitos es mucho más general pues se aplica sin dificultad a dominios mucho más generales, con triangulaciones no tan estructuradas como la del ejemplo anterior. Veremos también como se puede, sin grandes dificultades, utilizar polinomios de grado más alto, lo que permite en la práctica mejorar la precisión del método.

2.5. Elementos finitos de Lagrange

La aproximación estudiada en la sección anterior la hemos construido con ayuda de una terna de objetos $\{K, P, \mathcal{L}\}$, donde K era un triángulo, P el espacio de los polinomios de grado 1 en dos variables, y \mathcal{L} un conjunto de puntos, concretamente los vértices del triángulo, a_i , $i = 1, 2, 3$. Asociados a estos tres vértices hemos elegido tres funciones del espacio de polinomios, $p_i = \lambda_i$ $i = 1, 2, 3$ que verificaban la propiedad $p_i(a_j) = \delta_{ij}$ y que constituyen una base del espacio de polinomios P . Una terna como la anterior es un ejemplo de lo que se llama Elemento Finito de Lagrange.

Vamos a generalizar este concepto y construir nuevos ejemplos de elementos finitos.

Definición: Un Elemento Finito de Lagrange es una terna $\{K, P, \mathcal{L}\}$ donde

1. K es un poliedro de \mathbb{R}^d
2. P es un espacio vectorial de funciones de dimensión finita L cuyos elementos son funciones de K en \mathbb{R} .
3. \mathcal{L} es un conjunto de L puntos de K , P -unisolvente.

Para completar la definición debemos aclarar el concepto de P -unisolvencia, siendo P el espacio de dimensión L de la definición anterior: Diremos que un conjunto de puntos \mathcal{L} es P -unisolvente si y solo si, dados L escalares reales cualesquiera α_j $j = 1, \dots, L$, existe una función $p \in P$ y una sola tal que

$$p(a_j) = \alpha_j \quad 1 \leq j \leq L$$

Dado un elemento finito de Lagrange $\{K, P, \mathcal{L}\}$ se llaman funciones base asociadas a este elemento finito, las funciones $p_i \in P$ $i = 1, \dots, L$ determinadas por:

$$p_i(a_j) = \delta_{ij} \quad 1 \leq j \leq L \tag{2.5.1}$$

Definición: se llama operador de P -interpolación de Lagrange sobre \mathcal{L} al operador que a toda función v definida en K le asocia la función $\Pi_K v$ definida por

$$\Pi_K v = \sum_{i=1, \dots, L} v(a_i) p_i$$

$\Pi_K v$ se llama la función P -interpolada de v sobre \mathcal{L} . En efecto la función Π_K verifica

$$\Pi_K v(a_j) = \sum_{i=1, \dots, L} v(a_i) p_i(a_j) = \sum v(a_i) \delta_{ij} = v(a_j), \quad 1 \leq j \leq L$$

es pues la única función de $p \in P$ verificando

$$p(a_j) = v(a_j) \quad j = 1, \dots, L$$

Puesto que tenemos dimensión de P es igual al número de puntos de \mathcal{L} para asegurar la unisolvencia bastará hallar las funciones de la base de P verificando la condición (2.5.1). En efecto, si estas funciones existen, a todo conjunto de L escalares reales α_j , $1 \leq j \leq L$ le asociamos la función

$$p = \sum_{j=1, \dots, L} \alpha_j p_j$$

Esta función es la única función de P tal que $p(a_j) = \alpha_j$ $1 \leq j \leq L$ que es la condición de P -unisolvencia.

Ejemplos

1. Tria-p1-c:

K : Triángulo.

P : Polinomios de grado 1.

\mathcal{L} : Los tres vértices del triángulo.

Es el ejemplo que hemos estudiado. Las funciones de la base local son

$p_i = \lambda_i$.

2. Tria-p2-c:

K : Triángulo.

P : Polinomios de grado 2.

\mathcal{L} : Los tres vértices y los puntos medios de las aristas.

Las funciones de P son pues funciones de la forma $p(x, y) = a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2$. P es un espacio de dimensión seis. La base asociada de P estará formada por las seis funciones p_i verificando $p_i(a_j) = \delta_{ij}$. Para hallar las seis funciones de la base, podemos proceder de la manera siguiente: Llamemos a_i , $i = 1, 2, 3$ los tres vértices y a_i , $i = 4, 5, 6$ los tres puntos medios de las aristas (ver figura 2.10). Para hallar p_1 , es decir una función que verifique

$$p(a_1) = 1 \quad p(a_j) = 0 \quad j \neq 1$$

Observemos que λ_1 la coordenada baricéntrica que vale 1 en el nodo a_1 y cero en a_2, a_3, a_4 no se anula en a_5, a_6 donde vale $\lambda_1(a_5) = \lambda_1(a_6) = 1/2$. Por tanto si tomamos

$$p_1 = \lambda_1(2\lambda_1 - 1)$$

verifica las propiedades requeridas. Análogamente las otras dos funciones asociadas a los vértices serán

$$p_2 = \lambda_2(2\lambda_2 - 1)$$

$$p_3 = \lambda_3(2\lambda_3 - 1)$$

Busquemos ahora p_4, p_5 y p_6 , las funciones asociadas a los puntos medios de los lados. Basta observar que la función λ_2 se anula en la recta $a_1 - a_5 - a_3$, y λ_3 se anula en la recta $a_1 - a_6 - a_2$, por lo tanto $\lambda_2\lambda_3$ se anula en todos los puntos de \mathcal{L} salvo en a_4 donde vale $\lambda_2(a_4)\lambda_3(a_4) = 1/2, 1/2 = 1/4$, de donde finalmente la función

$$p_4 = 4\lambda_2\lambda_3$$

será la función base asociada al nodo a_4 . Análogamente obtenemos

$$p_5 = 4\lambda_1\lambda_3$$

$$p_6 = 4\lambda_1\lambda_2$$

En las figuras 2.11, 2.12, 2.13, 2.14, 2.15 y 2.16 se representa las gráficas de las funciones de la base p_i , $i = 1, \dots, 6$ en el triángulo de referencia de vértices $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$.

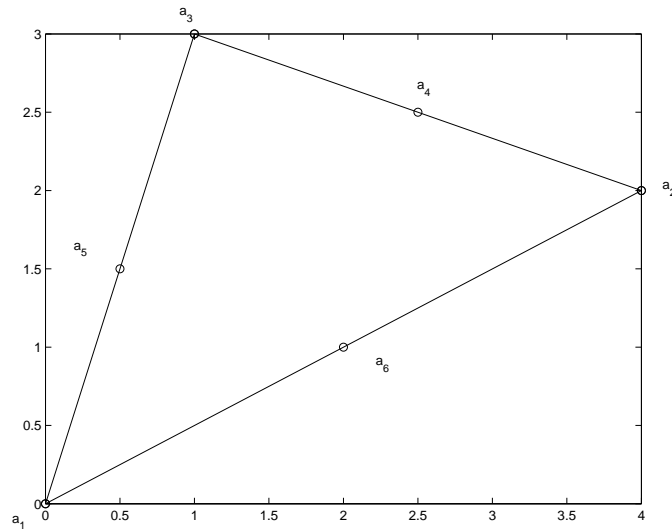


Figura 2.10: triángulo de seis nodos

3. Tetra-p1-c:

K : Tetraedro.

P : Polinomios de grado 1 de tres variables.

\mathcal{L} : Los cuatro vértices del tetraedro.

Las funciones de la base local son $p_i = \lambda_i$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Ejercicios

1. Deducir el esquema (2.4.1) a partir de la aproximación mediante diferencias finitas del operador de Laplace.
2. Hallar la base asociada al elemento finito de Lagrange $\{K, P, \mathcal{L}\}$ donde K es el triángulo y P son los polinomios de grado tres y \mathcal{L} está formado por los vértices, dos puntos sobre cada arista situados a una distancia $1/3$ y $2/3$ de los extremos y el baricentro del triángulo.
3. Construir un elemento finito basado en el tetraedro y polinomios de grado 2 en 3D.

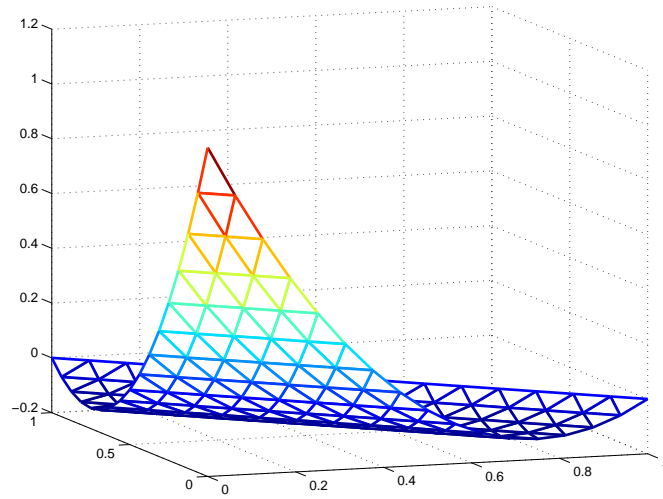


Figura 2.11: función p_1

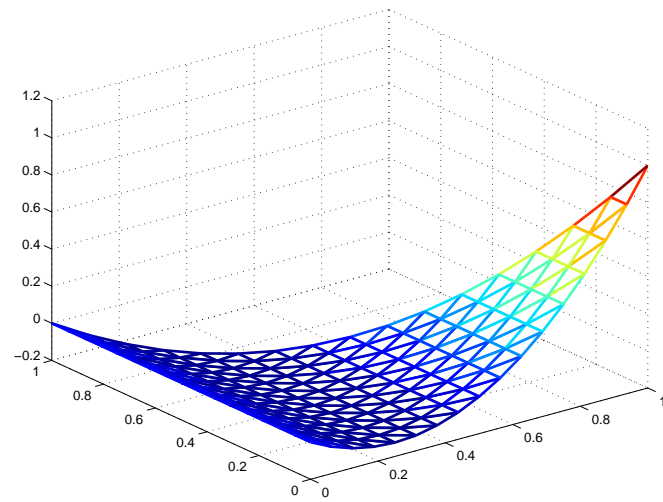


Figura 2.12: función p_2

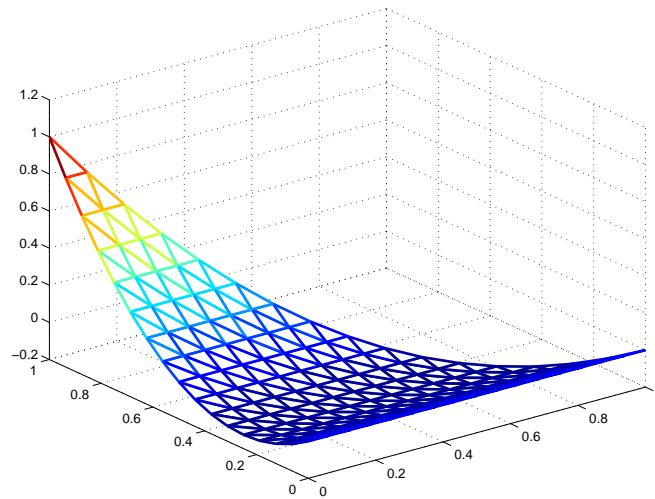


Figura 2.13: función p_3

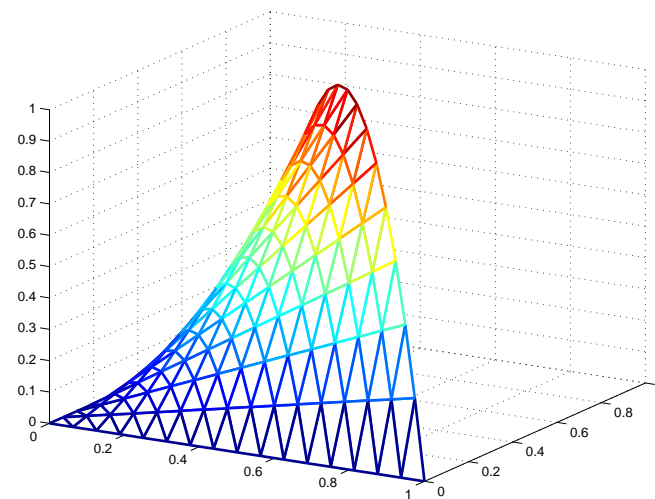


Figura 2.14: función p_4

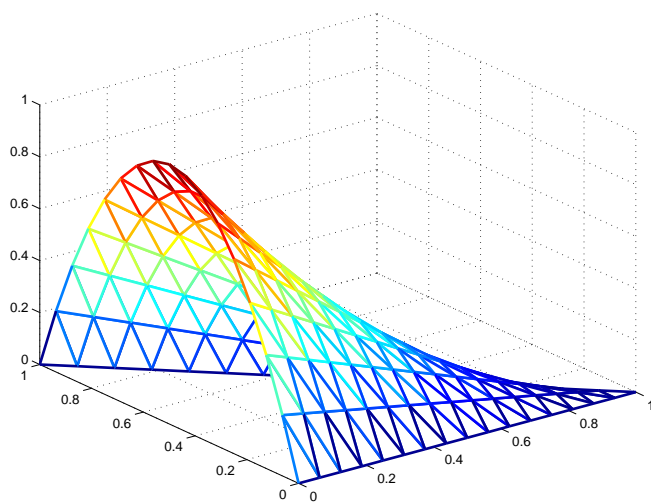


Figura 2.15: función p_5

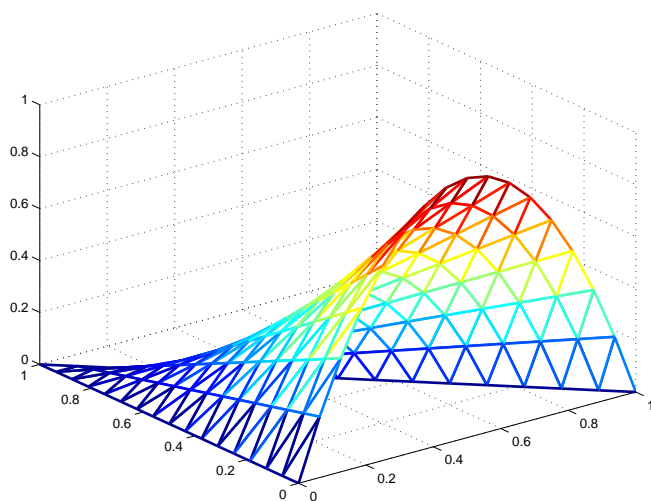


Figura 2.16: función p_6

2.6. Un método general para el cálculo de matrices y vectores elementales

Vamos a desarrollar un método de cálculo de las matrices y vectores elementales que se pueda aplicar a situaciones más generales que la correspondiente al caso anterior. Por ejemplo en mallados más generales de dominios cualesquiera, con elementos finitos de orden mayor que 1, y en problemas elípticos más generales como los que veremos en el capítulo siguiente. Desarrollaremos con detalle el ejemplo correspondiente al cálculo de términos:

$$A_{ij}^K = \sum_{kl} \int_K D_{kl} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_l} dx_1 \dots dx_d \quad (2.6.1)$$

donde D_{kl} $k, l = 1, \dots, d$ son funciones reales definidas en Ω . Con notación matricial se escribe:

$$A_{ij}^K = \int_K \nabla^t \varphi_j D \nabla \varphi_i dx_1 \dots dx_d \quad (2.6.2)$$

El cálculo de estos términos se hace generalmente pasando a un elemento de referencia y utilizando integración numérica. Supongamos para fijar las ideas que $\Omega \in \mathbb{R}^2$, es decir $d = 2$ y consideremos un triángulo genérico K de vértices $a_1 = (x_1, y_1)$, $a_2 = (x_2, y_2)$ y $a_3 = (x_3, y_3)$ definido en un plano ordinario de ejes $x - y$. Introducimos ahora una transformación afín cuya imagen del triángulo \hat{K} de vértices $\hat{a}_1 = (0, 0)$, $\hat{a}_2 = (1, 0)$ y $\hat{a}_3 = (0, 1)$ en el plano de ejes $\xi - \eta$ sea precisamente el triángulo dado K . Dicha transformación afín es fácil de encontrar, en efecto, utilizando las coordenadas baricéntricas del triángulo \hat{K} ,

$$\hat{\lambda}_1 = 1 - \xi - \eta$$

$$\hat{\lambda}_2 = \xi$$

$$\hat{\lambda}_3 = \eta$$

la imagen $[x, y]^t$ de un punto $[\xi, \eta]^t$ viene dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} (1 - \xi - \eta) + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \xi + \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \eta$$

2.6. UN MÉTODO GENERAL PARA EL CÁLCULO DE MATRICES Y VECTORES ELEMENTALES

o bien

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} \\ y_{21} & y_{31} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

donde

$$x_{21} = x_2 - x_1, \quad x_{31} = x_3 - x_1,$$

$$y_{21} = y_2 - y_1, \quad y_{31} = y_3 - y_1$$

o bien llamando

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{31} \\ y_{21} & y_{31} \end{bmatrix}$$

y

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

resulta

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = F(\xi, \eta) = \mathbf{B} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} + \mathbf{c}$$

La transformación de coordenadas F induce una transformación de funciones, así, una función φ definida en el plano $x - y$ induce una función $\hat{\varphi}$ en el plano $\xi - \eta$ mediante la composición de funciones

$$\hat{\varphi}(\xi, \eta) = (\varphi \circ F)(\xi, \eta) = \varphi(F(\xi, \eta)) = \varphi(x, y)$$

Por otra parte las derivadas se transformarán según la regla de la cadena:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} \end{bmatrix}$$

o bien, observando que

$$\mathbf{B}^t = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

con notación matricial,

$$\nabla \hat{\varphi} = \mathbf{B}^t \nabla \varphi$$

de donde,

$$\nabla \varphi = \mathbf{B}^{-t} \nabla \hat{\varphi}$$

2.6. UN MÉTODO GENERAL PARA EL CÁLCULO DE MATRICES Y VECTORES ELEMENTALES

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$\mathbf{B}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \begin{bmatrix} y_{31} & -x_{31} \\ -y_{21} & x_{21} \end{bmatrix}$$

y por tanto

$$\mathbf{B}^{-t} = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix}$$

aplicando el teorema del cambio de variable bajo el signo integral

$$\begin{aligned} A_{ij}^K &= \int_K \nabla^t \varphi_j D \nabla \varphi_i \, dx dy \\ &= \frac{1}{\det \mathbf{B}} \int_{\hat{K}} \nabla^t \hat{\varphi}_j \begin{bmatrix} y_{31} & -x_{31} \\ -y_{21} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix} \nabla \hat{\varphi}_i \, d\xi d\eta \end{aligned}$$

En el caso en que los términos de la matriz \mathbf{D} sea funciones constantes por elemento, introduciendo la matriz

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} y_{31} & -x_{31} \\ -y_{21} & x_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{31} & -y_{21} \\ -x_{31} & x_{21} \end{bmatrix}$$

el cálculo de \mathbf{A}_{ij}^K se simplifica. En efecto, con la notación

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

la matriz \mathbf{A}^K se escribe

$$\mathbf{A}_{ij}^K = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \int_{\hat{K}} \nabla^t \hat{\varphi}_j \mathbf{C} \nabla \hat{\varphi}_i \, d\xi d\eta = \frac{1}{\det \mathbf{B}} \sum_{k,l=1}^2 c_{kl} \int_{\hat{K}} \frac{\partial \hat{\varphi}_j}{\partial \xi_k} \frac{\partial \hat{\varphi}_i}{\partial \xi_l} \, d\xi_1 d\xi_2$$

donde hemos utilizado la notación $\xi_1 = \xi$, $\xi_2 = \eta$ para poder expresar apropiadamente la suma. La última integral se calcula una sola vez, pues es una integral en el elemento de referencia, que se calcula habitualmente mediante integración exacta o integración numérica exacta para los polinomios correspondientes. Si los términos de la matriz \mathbf{D} no son constantes, entonces los términos c_{kl} no pueden salir de la integral, se utiliza entonces integración numérica para calcular la integral intermedia de la expresión anterior.

Capítulo 3

El M.E.F. en problemas elípticos de segundo orden II

3.1. Problema de Neuman homogéneo asociado al operador $-\Delta + I$

En esta sección estudiamos problemas en los que no se conoce el valor de la solución en el contorno sino el valor de alguna de sus derivadas, como por ejemplo el valor de la derivada en la dirección de la normal a la frontera del dominio. Es decir lo que se conoce como condiciones de contorno de Neuman.

La formulación clásica de un problema de contorno con condiciones de Neuman, para el operador $-\Delta + I$ es:

Hallar la función u definida en Ω , conjunto abierto de \mathbb{R}^d (en la práctica, $d = 1, 2$ o 3 y de frontera Γ que verifique

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega \tag{3.1.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma \tag{3.1.2}$$

donde f es una función dada definida en Ω y que supondremos al menos que

3.2. PROBLEMA DE NEUMAN NO HOMOGÉNEO ASOCIADO AL OPERADOR $-\Delta + I$

es de cuadrado integrable y donde utilizamos la notación

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^d \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i$$

Vamos a deducir una formulación débil para el problema anterior. Para ello introducimos un espacio de funciones definidas en Ω y para las cuales tengan sentido las operaciones que vamos a realizar como en los capítulos anteriores.

$$V = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continuas y derivadas } \frac{\partial v}{\partial x_i}, i = 1, \dots, d \text{ continuas a trozos en } \Omega\}$$

Observemos que no imponemos ninguna condición sobre los valores en la frontera Γ . Procediendo como en el capítulo anterior multiplicamos los dos miembros de la ecuación (3.1.1) por una función $v \in V$ cualquiera, integramos en Ω aplicando la fórmula de Green (2.1.1), resulta

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx_1 \dots dx_d - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\gamma + \int_{\Omega} uv \, dx_1 \dots dx_d = \int_{\Omega} fv \, dx_1 \dots dx_d$$

Teniendo en cuenta (3.1.2), el problema es: hallar $u \in V$ que verifique

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx_1 \dots dx_d + \int_{\Omega} uv \, dx_1 \dots dx_d = \int_{\Omega} fv \, dx_1 \dots dx_d \quad \forall v \in V \quad (3.1.3)$$

3.2. Problema de Neuman no homogéneo asociado al operador $-\Delta + I$

Consideremos la variante del problema anterior correspondiente a condiciones de contorno de Neuman no nulas en la frontera.

$$-\Delta u + u = f \quad \text{en } \Omega \quad (3.2.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{sobre } \Gamma \quad (3.2.2)$$

3.3. PROBLEMA MIXTO ASOCIADO A LA ECUACIÓN DE TRANSMISIÓN DE CALOR

donde g es una función definida sobre Γ y que supondremos de cuadrado integrable sobre Γ . Procediendo como en el caso anterior la formulación débil será: Hallar $u \in V$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx_1 \dots dx_d + \int_{\Omega} uv \, dx_1 \dots dx_d = \\ \int_{\Omega} fv \, dx_1 \dots dx_d + \int_{\Gamma} gv \, d\gamma \quad \forall v \in V \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Al igual que en el capítulo 1 en los problemas unidimensionales las condiciones de contorno de Dirichlet y de Neuman se tienen en cuenta de forma diferente en las respectivas formulaciones débiles. En efecto, las condiciones de Dirichlet se imponen directamente en el espacio de funciones en el que se busca la solución, mientras que las condiciones de Neuman, sean éstas, homogéneas o no, se recogen ímplicitamente en la formulación débil.

Los problemas anteriores tienen solución única, lo que se puede demostrar precisando mejor el espacio V en el que se busca la solución, y utilizando los teoremas del Análisis Funcional apropiados.

3.3. Problema mixto asociado a la ecuación de transmisión de calor

Consideraremos en esta sección la determinación de la distribución de temperatura u de un cuerpo que ocupa una región Ω del espacio \mathbb{R}^d ($d=1,2$ o 3). En el caso estacionario, es decir cuando la temperatura no depende del tiempo, tenemos las siguientes relaciones:

$$\operatorname{div} \mathbf{q} = f \quad \text{en } \Omega \quad (3.3.1)$$

$$\mathbf{q} = -\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, k_d \frac{\partial u}{\partial x_d}\right)^t = -\mathbf{k} \nabla u \quad \text{en } \Omega \quad (3.3.2)$$

donde $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_d)^t$ es el vector flujo de calor cuyas componenetes q_i para $i = 1, \dots, d$ denotan el flujo de calor en la dirección x_i . La ecuación (3.3.1) es la ecuación de la conservación de la energía que es una ley general independiente

3.3. PROBLEMA MIXTO ASOCIADO A LA ECUACIÓN DE TRANSMISIÓN DE CALOR

del material de que se trate. La ecuación (3.3.2) es una ley de comportamiento del material conocida como Ley de Fourier. El parámetro k_i representa una propiedad del material llamada conductividad térmica en la dirección x_i y f es una función definida en los puntos de Ω representando la producción o eliminación de calor debida a fuentes o sumideros externos. En el caso de medios isótropos, es decir, que tienen las mismas propiedades en las distintas direcciones del espacio, $k_i = k$ para $i = 1, \dots, d$. Si además k no depende del punto $x = (x_1, \dots, x_d)$, ni de la temperatura u , obtenemos por eliminación de \mathbf{q} y dividiendo por k , la ecuación de Poisson que hemos estudiado en los anteriores ejemplos. En lo que sigue supondremos que la conductividad puede depender del punto x , aunque la supondremos independiente de la temperatura u , lo que dará lugar a un problema no lineal que no tratamos en este capítulo. Aclaremos antes de continuar con la formulación del problema alguno de los conceptos que han aparecido y las notaciones que vamos a utilizar. \mathbf{k} corresponde al concepto de un tensor de orden 2, (los vectores son tensores de orden 1) de modo que su representación general será mediante una matrix, así (para $d=3$):

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix}$$

de hecho es simétrico, de modo que $k_{ij} = k_{ji}$, $i, j = 1, \dots, d$. En muchas ocasiones la representación del tensor en la base correspondiente a las coordenadas cartesianas es diagonal, de modo que en la mayor parte de las aplicaciones

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_{11} & 0 & 0 \\ 0 & k_{22} & 0 \\ 0 & 0 & k_{33} \end{bmatrix}$$

El producto $\mathbf{k}\nabla u$ sigue las reglas del producto matriz por vector, de modo que

$$\mathbf{k}\nabla u = \left(\sum_{j=1, \dots, d} k_{1j} \frac{\partial u}{\partial x_j}, \dots, \sum_{j=1, \dots, d} k_{dj} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^t$$

que en el caso diagonal queda reducido a

$$\mathbf{k}\nabla u = \left(k_{11} \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, k_{dd} \frac{\partial u}{\partial x_d} \right)^t$$

3.3. PROBLEMA MIXTO ASOCIADO A LA ECUACIÓN DE TRANSMISIÓN DE CALOR

En cuanto a las condiciones de contorno, en los problemas de física e ingeniería se conoce con frecuencia la temperatura en una parte del contorno Γ_0 y en la otra parte, Γ_1 se conoce, sino el flujo, una relación entre el flujo de calor y la temperatura; esta condición suele ser una condición de transmisión de calor por convección en la frontera y depende de un parámetro r llamado coeficiente de convección en la frontera. Las ecuaciones que rigen el fenómeno serán pues

$$-\operatorname{div}(\mathbf{k}\nabla u) = f \quad \text{en } \Omega \quad (3.3.3)$$

$$-\mathbf{k}\nabla u \cdot \nu = r(u - u_\infty) \quad \text{sobre } \Gamma_1 \quad (3.3.4)$$

$$u = u_0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \quad (3.3.5)$$

donde \mathbf{k} es el tensor de conductividad térmica; u_∞ es la temperatura del ambiente que rodea Γ_1 ; f representa las posibles fuentes (o sumideros) en los puntos de Ω .

Vamos a deducir una formulación débil del problema anterior. Consideremos el espacio de funciones

$$V = \left\{ v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ continuas y derivadas } \frac{\partial v}{\partial x_i}, i = 1, 2 \right. \\ \left. \text{continuas a trozos en } \Omega \text{ con } v = 0 \text{ en } \Gamma_0 \right\}$$

Multiplicamos los dos miembros de (3.3.3) por una función $v \in V$, integramos y aplicamos la correspondiente fórmula de Green, obtenemos teniendo en cuenta (3.3.4) y que $v = 0$ sobre Γ_0

$$\int_{\Omega} \mathbf{k}\nabla u \nabla v \, dx_1 \dots dx_d + \int_{\Gamma_1} ruv \, d\gamma = \\ \int_{\Omega} fv \, dx_1 \dots dx_d + \int_{\Gamma_1} ru_\infty v \, dx_1 \dots dx_d \quad (3.3.6)$$

3.4. Deformación elástica de un sólido

En esta sección consideraremos un ejemplo de especial interés, el de un cuerpo sólido que se deforma elásticamente bajo la acción de fuerzas exteriores. El cuerpo ocupa una región Ω de \mathbb{R}^d , $d = 1, 2, 3$ y lo supondremos fijo en una parte Γ_0 , de medida no nula en \mathbb{R}^{d-1} , de su frontera Γ . En el resto de Γ , $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \Gamma_0$ supondremos que actúa una fuerza $\mathbf{g} = (g_1, \dots, g_d)^t$. En los puntos de Ω supondremos a su vez que actúa una fuerza $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_d)$, por ejemplo, el peso del propio cuerpo. Debido a la acción de las fuerzas exteriores \mathbf{f} y \mathbf{g} el cuerpo se deforma y cada punto de Ω experimenta un desplazamiento $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)$. Al deformarse se generan en el cuerpo tensiones elásticas caracterizadas por el tensor de tensiones $\sigma_{ij}(\mathbf{u})$, $i, j = 1, \dots, d$ hasta que se alcanza un equilibrio con las fuerzas exteriores. Las ecuaciones que rigen este fenómeno se estudian en teoría de la elasticidad y son

$$-\sum_{j=1}^d \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{u})}{\partial x_j} = f_i \quad \text{en } \Omega \quad i = 1, \dots, d \quad (3.4.1)$$

$$u_i = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_0 \quad i = 1, \dots, d \quad (3.4.2)$$

$$\sum \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \nu_j = g_i \quad \Gamma_1 \quad i = 1, \dots, d \quad (3.4.3)$$

Las ecuaciones (3.4.1) y la ecuaciones (3.4.3) representan el equilibrio entre fuerzas internas y externas en Ω y en la frontera Γ_1 respectivamente. Por otra parte las ecuaciones (3.4.2) representan el desplazamiento nulo de los puntos de la frontera Γ_0 . Para completar las ecuaciones hay que especificar la ley del comportamiento del material, es decir, la relación entre las componentes del tensor de tensiones y los desplazamientos, de forma más precisa, entre el tensor de tensiones y el tensor de deformaciones, definido por:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad i, j = 1, \dots, d \quad (3.4.4)$$

La ley más sencilla es una relación lineal conocida como ley de Hooke y que expresa el hecho según el cual las tensiones que se producen en un cuerpo son proporcionales a las deformaciones. Esta ley para un cuerpo isótropo se

3.4. DEFORMACIÓN ELÁSTICA DE UN SÓLIDO

expresa

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \lambda \left(\sum_{l=1}^d \varepsilon_{ll}(\mathbf{u}) \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \quad i, j = 1, \dots, d \quad (3.4.5)$$

Los coeficientes $\lambda \geq 0$ y $\mu > 0$ se llaman coeficientes de Lamé, dependen del material y están directamente relacionados con el módulo de Young $E = \mu \frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}$ y el coeficiente de Poisson $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ del material. El tensor de deformaciones es obviamente simétrico y se puede demostrar, como consecuencia de la ley general de conservación del momentos que el tensor de tensiones σ es simétrico.

La ley de Hooke (3.4.5) se puede invertir, y podemos expresar el tensor de deformaciones en función del tensor de tensiones:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \left(\sum_{l=1}^d \sigma_{ll} \right) \delta_{ij} \quad (3.4.6)$$

Vamos a deducir una formulación débil del problema anterior. Introducimos primero el espacio de desplazamientos admisibles V , es decir, funciones vectoriales

$$v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$$

tales que $v_i = 0$, $i = 1, \dots, d$, sobre Γ_0 , con las propiedades de regularidad adecuadas para que las expresiones que aparecerán en la formulación débil tengan sentido, por ejemplo continuidad de las funciones y continuidad a trozos de las derivadas parciales primeras. Sea ahora una función $v \in V$ cualquiera, multipliquemos ambos miembros de la ecuación (3.4.1) por v_i , sumemos respecto al índice i , e integremos aplicando la correspondiente fórmula de Green. Resulta:

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_1 \dots dx_d - \sum_{i,j=1}^d \int_{\Gamma_1} \sigma_{ij} \nu_j v_i d\gamma = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx_1 \dots dx_d$$

Teniendo en cuenta que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ y la ecuación (3.4.3) resulta:

$$\sum_{i,j=1}^d \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) dx_1 \dots dx_d = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx_1 \dots dx_d + \sum_{i=1}^d \int_{\Gamma_1} g_i v_i d\gamma \quad (3.4.7)$$

donde σ_{ij} viene dado por (3.4.5)

3.5. Elasticidad plana

Campo de deformaciones planas

Si en un cuerpo elástico el campo de desplazamientos es de la forma

$$u_1 = u_1(x_1, x_2), \quad u_2 = u_2(x_1, x_2), \quad u_3 = 0$$

el campo de deformaciones está dado por

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, \quad \varepsilon_{33} = 0 \\ \varepsilon_{12} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right), \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{31} = 0 \end{aligned}$$

decimos que tenemos un campo de deformaciones planas. Se observa que las únicas componentes no nulas de este tensor de deformaciones son las componentes ε_{ij} , $i, j = 1, 2$. además las componentes solo dependen de x_1 y de x_2 , pero no de x_3 .

El tensor de tensiones asociado es de la forma

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

donde las componentes σ_{ij} , $i, j = 1, 2$ solo dependen de x_1 y de x_2 y vienen dadas por

$$\sigma_{ij} = \lambda \left(\sum_{l=1}^2 \varepsilon_{ll} \right) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad \text{para } i, j = 1, 2$$

Por otra parte como $\varepsilon_{33} = 0$, resulta de la relación (3.4.6)

$$(1 + \nu)\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = 0$$

es decir,

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

El campo de tensiones es pues, como el campo de desplazamientos y de deformaciones, independiente de x_3 .

Campo de tensiones planas

Un campo de tensiones planas es por definición un campo de tensiones σ_{ij} que solo depende de x_1 y de x_2 y tal que las componentes σ_{i3} , $i = 1, 2, 3$ son nulas. Si el cuerpo elástico es isótropo, el campo de deformaciones asociado ε_{ij} está relacionado con el tensor de tensiones por la ley de Hooke (3.4.5), es decir

$$\sigma_{ij} = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33})\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \quad \text{para } i, j = 1, 2 \quad (3.5.1)$$

$$0 = \varepsilon_{13} = \varepsilon_{23} = 0 \quad (3.5.2)$$

$$0 = \lambda(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) + 2\mu\varepsilon_{33} \quad (3.5.3)$$

resulta de la última de estas relaciones que ε_{33} se expresa explícitamente en función de ε_{11} y de ε_{22} por

$$\varepsilon_{33} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \quad (3.5.4)$$

Se puede escribir la relación (3.5.1) como función únicamente de las componentes ε_{ij} , $i, j = 1, 2$, obteniendo

$$\sigma_{ij}(\mathbf{u}) = \lambda^* \left(\sum_{l=1,2} \varepsilon_{ll} \right) \delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) \quad i, j = 1, 2 \quad (3.5.5)$$

donde

$$\lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$$

Resulta además que ε_{ij} , $i, j = 1, 2$ solo dependen de x_1 y de x_2 y lo mismo ocurre con ε_{33} como consecuencia de (3.5.4).

Un problema de de tensiones planas conduce pues a las mismas ecuaciones de equilibrio que un problema de deformaciones planas sin más que sustituyendo λ por λ^* en (3.5.5).

3.5. ELASTICIDAD PLANA

Formulación débil de problemas de elasticidad plana Con las notaciones para las coordenadas cartesianas mediante $x = x_1$ e $y = x_2$, y para los desplazamientos $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ en elasticidad plana, teniendo en cuenta las observaciones de las subsecciones anteriores la expresión correspondiente a (3.4.7) se escribe para deformaciones planas:

$$\sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \, dxdy = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i v_i \, dxdy + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_1} g_i v_i d\gamma \quad (3.5.6)$$

y teniendo en cuenta (3.5.5) y desarrollando tendremos

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^2 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) \, dxdy &= \\ \int_{\Omega} \sigma_{11}(\mathbf{u}) \varepsilon_{11}(\mathbf{v}) + \sigma_{22}(\mathbf{u}) \varepsilon_{22}(\mathbf{v}) + 2\sigma_{12}(\mathbf{u}) \varepsilon_{12}(\mathbf{v}) \, dxdy &= \\ \int_{\Omega} \left(\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + & \\ \left(\lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + & \\ 4\mu \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \, dxdy & \end{aligned}$$

De donde finalmente

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \, dxdy = \\ \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} f_i v_i \, dxdy + \sum_{i=1}^2 \int_{\gamma_1} g_i v_i d\gamma \end{aligned}$$

debiendo sustituir el valor de λ por el de λ^* en el caso de tensiones planas.