Министерство образования и науки Российской Федерации

Московский государственный институт электроники и математики
(технический университет) Кафедра «Компьютерная безопасность»

ОТЧЕТ К РАБОТЕ
«**ρо-метод Полларда**» по дисциплине
«Теоретико-числовые методы в криптографии»

Работу выполнили
Студенты группы СКБ 181
Файнберг Т.
Кекеев А.

Работу проверил
Нестеренко А. Ю.

Москва, 2022

Постановка задачи:

Разработать алгоритмы, описанные в статье [2], выполняющие получение дискретного алгоритма числа b по основанию a и по модулю m на основе ρо-метода Полларда. Результат оформить в виде отчета.

Использованные инструменты:
В работе были использованы SageMath, JupyterNotebook

Теоретическая база:

В статье [2] рассматривается четыре вариации алгоритма Полланда:

1. Оригинальный ро-Алгоритм

2. Модифицированный ро-Алгоритм

3. Линейный ро-Алгоритм с 20 множителями

4. Объединенный алгоритм с 16 множителями и 4 квадратами

1. **Оригинальный ро-Алгоритм**

Рассматриваются последовательность пар $\{u_i,\ v_i\}$ целых чисел по модулю $p-1$ и последовательность $\{z_i\}$ целых чисел по модулю p, определенные следующим образом:

$$\{u_i\}, \{v_i\}, \{z_i\},\ \ i \in N,$$
$$u_0 = v_0 = 0,\ \ z_0 = 1;$$

$$u_{i+1} = \begin{cases} u_i + 1 \bmod (p-1), & 0 < z_i < \frac{p}{3}; \\ 2u_i \bmod (p-1), & \frac{p}{3} < z_i < \frac{2}{3}p; \\ u_i \bmod (p-1), & \frac{2}{3}p < z_i < p; \end{cases}$$

$$v_{i+1} = \begin{cases} v_i \bmod (p-1), & 0 < z_i < \frac{p}{3}; \\ 2v_i \bmod (p-1), & \frac{p}{3} < z_i < \frac{2}{3}p; \\ v_i + 1 \bmod (p-1), & \frac{2}{3}p < z_i < p; \end{cases}$$

$$z_{i+1} \equiv b^{u_{i+1}} a^{v_{i+1}} \pmod p = \begin{cases} bz_i \bmod p, & 0 < z_i < \frac{p}{3}; \\ z_i^2 \bmod p, & \frac{p}{3} < z_i < \frac{2}{3}p; \\ az_i \bmod p, & \frac{2}{3}p < z_i < p; \end{cases}$$

Поскольку каждая треть отрезка, которой принадлежит элемент, вероятно, никак не связана с элементами последовательностей $\{u_i, v_i\}$, полученная последовательность — псевдослучайная. Поэтому могут существовать такие числа j и k, что $z_k = z_j$. Если удастся найти такую пару чисел, то получится:

$$b^{u_j} a^{v_j} \equiv b^{u_k} a^{v_k} \pmod p.$$

Если число $u_j - u_k$ взаимно простое с числом $p-1$, то это сравнение можно решить и найти дискретный логарифм:

$$b^{u_j - u_k} \equiv a^{v_k - v_j} \pmod p.$$

$$x \equiv \log_a b \equiv (u_j - u_k)^{-1}(v_k - v_j) \pmod{p-1}.$$

Если же наибольший общий делитель чисел $u_j - u_k$ и $p-1$ равен числу $d > 1$, то существует решение этого сравнения для x по модулю $(p-1)/d$. Пусть $x = x_0(mod(p-1)/d)$, тогда искомое число $x = x_0 + m(p-1)/d$, где m может принимать значения $0, 1, \ldots, d-1$. Поэтому если d — достаточно небольшое число, то задача решается перебором всех возможных значений для m. В худшем случае — когда $d = p-1$ — метод оказывается ничем не лучше полного перебора всех возможных значений для дискретного логарифма.

Для поиска индексов j и k используется алгоритм поиска циклов Флойда. При использовании данного алгоритма на i-м шаге имеются значения $(z_i,\ u_i,\ v_i,\ z_{2i},\ u_{2i},\ v_{2i})$ и ищется номер i, для которого $z_i = z_{2i}$. Если при этом $(u_{2i} - u_i,\ p-1) = 1$, то

$$x \equiv \log_a b \equiv (u_{2i} - u_i)^{-1}(v_i - v_{2i}) \pmod{p-1}.$$

2. **Модифицированный ро-Алгоритм**

Как и в исходной прогулке Полларда, мы используем разбиение G на 3 части. Но теперь $m, n \in_R [\![1, |G|]\!]$

и пусть M = g^m, N = h^n. Теперь определим $f_{\mathrm{Pm}} : G \to G,$

$$f_{\mathrm{Pm}}(y) = \begin{cases} M * y\ , & y \in T_1\ , \\ y^2\ , & y \in T_2\ , \\ N * y\ , & y \in T_3\ . \end{cases}$$

для $\alpha_i u \beta_i$ это зачит

$$\alpha_{i+1} \equiv \alpha_i + m\ , \quad \alpha_{i+1} \equiv 2\alpha_i\ , \quad \text{or}\ \ \alpha_{i+1} = \alpha_i \pmod{|G|}\ ,$$
$$\beta_{i+1} \equiv \beta_i\ , \quad \beta_{i+1} \equiv 2\beta_i\ , \quad \text{or}\ \ \beta_{i+1} \equiv \beta_i + n \pmod{|G|}\ ,$$

3. **Линейный ро-Алгоритм с 20 множителями**

Мы используем разбиение G на 20 частей. Пусть $m_1, n_1, \ldots, m_{20}, n_{20} \in_R [\![1, |G|]\!]$

$$M_s = g^{m_s} * h^{n_s} \ , \qquad s = 1, \ldots, 20$$

Определим f_T= G → G

$$f_T(y) = M_s * y \ , \quad \text{with } s = s(y) \text{ such that } y \in T_s$$

$$\alpha_{i+1} \equiv \alpha_i + m_s \qquad \text{and} \qquad \beta_{i+1} \equiv \beta_i + n_s \pmod{|G|}$$

4. Объединенный алгоритм с 16 множителями и 4 квадратами

Мы используем разбиение G на 20 частей. Выбираем 4 попарно различных значения между 1 и 20.

$$m_1, n_1, \ldots, m_{20}, n_{20} \in_R [\![1, |G|]\!]$$

$$M_s = g^{m_s} * h^{n_s} \ , \qquad s \in \{1, \ldots, 20\} \setminus \{u_1, u_2, u_3, u_4\} \ .$$

Определим f_C= G → G

$$f_C(y) = \begin{cases} M_s * y \ , & \text{Если s } s \notin u1, u2, u3, u4 \\ y^2 \ , & \text{В остальных случаях} \end{cases}$$

$$\alpha_{i+1} \equiv \alpha_i + m_s \quad \text{or} \quad \alpha_{i+1} \equiv 2 * \alpha_i \pmod{|G|} \ ,$$
$$\beta_{i+1} \equiv \beta_i + n_s \quad \text{or} \quad \beta_{i+1} \equiv 2 * \beta_i \pmod{|G|} \ ,$$

Корректность выполнения проверялас функцией verify, которая выполняла команду возведения g в степень x по модулю p

Результаты выполнения работы:

```
def ext_euclid_algor(a, b):
    # алгоритм Евклида используется для обратного вычисления
    if b == 0:
        return a, 1, 0
    else:
        d, xx, yy = ext_euclid_algor(b, a % b)
        x = yy
        y = xx - (a // b) * yy
        return d, x, y

def inverse(a, n):
    #инверсия a по mod n
```

```
    return int(ext_euclid_algor(a, n)[1])

def step1(x, a, b, tuple):
    #Шаг Ро-алгоритма Полланда
    G, H, P, Q = tuple[0], tuple[1], tuple[2], tuple[3]

    sub = lift(x) % 3 # Subsets

    if sub == 0:
        x = x*G % P
        a = (a+1) % Q

    if sub == 1:
        x = x * H % P
        b = (b + 1) % Q

    if sub == 2:
        x = x*x % P
        a = a*2 % Q
        b = b*2 % Q
    return x, a, b

def step2(x, a, b, tuple):
    #Шаг модифицированного Ро-алгоритма Полланда
    G, H, P, Q = tuple[0], tuple[1], tuple[2], tuple[3]

    l = np.random.randint(1, G)
    k = np.random.randint(1, G)
    L = pow(G, l)
    K = pow(H, k)


    sub = lift(x) % 3 # Subsets

    if sub == 0:
        x = x*L % P
        a = (a+l) % Q
        b=b

    if sub == 1:
        x = x * K % P
        b = (b + l) % Q
        a = a % Q

    if sub == 2:
        x = x*x % P
        a = a*2 % Q
        b = b*2 % Q
    return x, a, b


def step3(x, a, b, tuple):
    #Линейный шаг
    G, H, P, Q = tuple[0], tuple[1], tuple[2], tuple[3]
    l = []
    k = []
    i = 0
    while i<20:
        l.append(np.random.randint(1, G))
```

```
        k.append(np.random.randint(1, G))
        i+=1

    i = 0
    sub = lift(x) % 20 # Subsets

    L = pow(G, l[sub]) * pow(H, k[sub])
    x = x*L % P
    a = (a + l[sub]) % Q
    b = (b + k[sub]) % Q


    return x, a, b


def step4(x, a, b, tuple):
    #Комбинаторный шаг
    G, H, P, Q = tuple[0], tuple[1], tuple[2], tuple[3]
    l = []
    k = []
    i = 0
    while i<20:
        l.append(np.random.randint(1, G))
        k.append(np.random.randint(1, G))
        i+=1
    u1 = -1
    u2 = -1
    u3 = -1
    u4 = -1
    while u1 == u2 or u1 == u3 or u1 == u4 or u2 == u3 or u2 == u4 or u3 ==
u4:
        u1 = np.random.randint(1, G)
        u2 = np.random.randint(1, G)
        u3 = np.random.randint(1, G)
        u4 = np.random.randint(1, G)

    i = 0
    sub = lift(x) % 20 # Subsets
    if sub != u1 or sub != u2 or sub != u3 or sub != u4:
        L = pow(G, l[sub]) * pow(H, k[sub])
        x = x*L % P
        a = (a + l[sub]) % Q
        b = (b + k[sub]) % Q
    else:
        x = x * x
        a = (2 * a) % Q
        b = (2 * b) % Q


    return x, a, b

def pollard1(G, H, P):
    #Оригинальный алгоритм
    opCount = 0

    Q = int((P - 1) // 2)  # подгруппа
    x = G*H
    a = 1
    b = 1
```

```
    X = x
    A = a
    B = b

    for i in range(1, P):
        #Ёж
        x, a, b = step1(x, a, b, (G, H, P, Q))
        opCount += 1
        #Заяц
        X, A, B = step1(X, A, B, (G, H, P, Q))
        opCount += 1
        X, A, B = step1(X, A, B, (G, H, P, Q))
        opCount += 1

        if x == X:
            break

    nom = a-A
    denom = B-b

    res = (inverse(denom, Q) * nom) % Q

    if verify(G, H, P, res):
        return res, opCount

    return res + Q, opCount

def pollard2(G, H, P):
    #Модифицированный алгоритм
    opCount = 0

    Q = int((P - 1) // 2)
    x = G*H
    a = 1
    b = 1

    X = x
    A = a
    B = b

    for i in range(1, P):
        #Ёж
        x, a, b = step2(x, a, b, (G, H, P, Q))
        opCount += 1
        #Заяц
        X, A, B = step2(X, A, B, (G, H, P, Q))
        opCount += 1
        X, A, B = step2(X, A, B, (G, H, P, Q))
        opCount += 1

        if x == X:
            break

    nom = a-A
    denom = B-b

    res = (inverse(denom, Q) * nom) % Q
```

```
    if verify(G, H, P, res):
        return res, opCount

    return res + Q, opCount

def pollard3(G, H, P):
    #Линейный алгоритм
    opCount = 0

    Q = int((P - 1) // 2)  # подгруппа
    x = G*H
    a = 1
    b = 1

    X = x
    A = a
    B = b

    for i in range(1, P):
        #Ёж
        x, a, b = step3(x, a, b, (G, H, P, Q))
        opCount += 1
        #Заяц
        X, A, B = step3(X, A, B, (G, H, P, Q))
        opCount += 1
        X, A, B = step3(X, A, B, (G, H, P, Q))
        opCount += 1

        if x == X:
            break

    nom = a-A
    denom = B-b

    res = (inverse(denom, Q) * nom) % Q

    if verify(G, H, P, res):
        return res, opCount

    return res + Q, opCount

def pollard4(G, H, P):
    #Объединенный алгоритм с 16 множителями и 4 квадратами
    opCount = 0

    Q = int((P - 1) // 2)  # подгруппа
    x = G*H
    a = 1
    b = 1

    X = x
    A = a
    B = b

    for i in range(1, P):
        #Ёж
        x, a, b = step4(x, a, b, (G, H, P, Q))
        opCount += 1
        #Заяц
```

```
        X, A, B = step4(X, A, B, (G, H, P, Q))
        opCount += 1
        X, A, B = step4(X, A, B, (G, H, P, Q))
        opCount += 1

        if x == X:
            break

    nom = a-A
    denom = B-b

    res = (inverse(denom, Q) * nom) % Q

    if verify(G, H, P, res):
        return res, opCount

    return res + Q, opCount

def verify(g, h, p, x):
    #Проверяет заданный набор g, h, p и x
    return pow(g, int(x), p) == h

import time
jj=5
sptime = [[],[],[],[]]
spoperation = [[],[],[],[]]

while jj < 20:
    print(jj)
    M = next_prime(2 ** jj)
    A = Mod(ZZ.random_element(M), M)
    B = A ** ZZ.random_element(M - 1)

    t1 = time.time()

    res, opCount = pollard1(A, B, M)

    t2 = time.time()
    sptime[0].append((t2 - t1))
    spoperation[0].append(opCount)
    t1 = time.time()

    res, opCount = pollard2(A, B, M)

    t2 = time.time()
    sptime[1].append((t2 - t1))
    spoperation[1].append(opCount)
    t1 = time.time()

    res, opCount = pollard3(A, B, M)

    t2 = time.time()
    sptime[2].append((t2 - t1))
    spoperation[2].append(opCount)
    t1 = time.time()

    res, opCount = pollard4(A, B, M)

    t2 = time.time()
```

```
    sptime[3].append((t2 - t1))
    spoperation[3].append(opCount)
    jj+=1
    # print(x)
    # print('Time elapsed for 2 in',jj,'=', (t2 - t1))
    # print('Operations invoked:', operationCount)
print(sptime)
print('Operations invoked:', opCount)
```

Время выполнения

```
1 print(sptime)
```

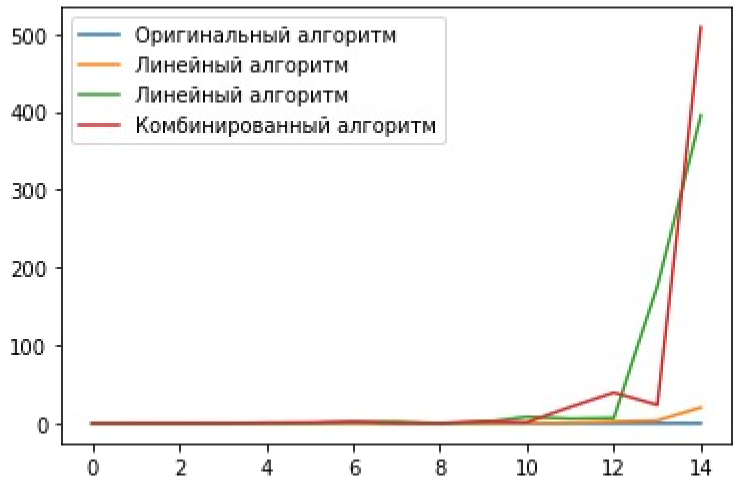
```
[[0.00034689903259277344, 9.822845458984375e-05, 0.00042176246643066406, 0.00011801719665527344, 0.000460863113403
3203, 0.0006537437438964844, 0.0010986328125, 0.0004684925079345703, 0.0005865097045898438, 0.0019912719726562 5,
0.004562139511108398 4, 0.006134986877441406, 0.0026373863220214844, 0.003795146942138672, 0.01466035842895507 8],
[0.007293224334716797, 0.0007696151733398438, 0.010759592056274414, 0.03950023651123047, 0.04629397392272949, 0.08
526086807250977, 0.01108551025390625, 0.012731313705444336, 0.029937744140625, 0.021947860717773438, 0.51121997833
25195, 0.19187498092651367, 2.5103070735931396, 3.786053419113159, 20.3322012424469], [0.04786944389343262, 0.0082
58819580078125, 0.04816174507141113, 0.0020949840545654297, 0.5705082416534424, 0.323472261428833, 1.9187703132629
395, 2.3329644203186035, 0.06703305244445801, 1.5301806926727295, 8.436009407043457, 6.051910400390625, 6.96676611
9003296, 175.67547011375427, 395.18510007858276], [0.036438941955566406, 0.027795553207397 46, 0.14207172393798828,
0.01824116706848144 5, 0.6303024291992188, 1.1482038497924805, 2.1006581783294678, 0.18091320991516113, 0.039686918
25866699, 2.90712833404541, 1.5606694221496582, 21.000721216201782, 39.42337894439697, 23.718202829360962, 508.948
4143257141]]
```

Количество операций

```
1 print(spoperation)
```

```
[[24, 15, 84, 12, 42, 123, 207, 87, 108, 384, 882, 1152, 504, 738, 3492], [105, 27, 390, 768, 876, 3090, 168, 459,
1104, 804, 17238, 6432, 82647, 131940, 890046], [108, 24, 132, 3, 1560, 906, 4830, 5643, 192, 4302, 23238, 15606,
19185, 519153, 1348395], [90, 69, 333, 24, 1560, 2877, 4986, 405, 102, 7464, 3816, 49290, 102765, 71676, 1572924]]
```

График времени работы



Список литературы

1. Shi Bai, R. P. On the Efficiency of Pollard's Rho Method for Discrete Logarithms.

2. Teske, E. SPEEDING UP POLLARD'S RHO METHOD FOR COMPUTING.
3. А.Ю.Нестеренко. Теоретико-числовые методы в крипографии.