

Uniwersytet Wrocławski
Wydział Fizyki i Astronomii

Gustaw Tański

Wizualizacje symboliczne koneksji Christoffela z wykorzystaniem silnika Unity

Symbolic visualizations of the Christoffel connection utilizing the Unity
engine

Praca licencjacka wykonana pod kierunkiem
dr. Remigiusza Durki w Instytucie Fizyki
Teoretycznej UWr

Wrocław 2020

Streszczenie

Celem niniejszej pracy dyplomowej było stworzenie programu komputerowego umożliwiającego trójwymiarową i interaktywną wizualizację koneksji Christoffela dla różnych konfiguracji czterowymiarowej czasoprzestrzeni. Do realizacji zadania użyto środowiska Unity. Prezentowany obiekt stanowi sześćcian zbudowany z 64 bloków, gdzie każdy blok zawiera jedną formułę matematyczną kodującą pojedynczy element koneksji. Możemy manipulować jej ułożeniem oraz przemieszczać się wokół niej zarówno za pomocą klawiatury, jak i myszy. Wizualizacja może zostać wykorzystana do poszukiwań zależności pomiędzy strukturą koneksji Christoffela a właściwościami czasoprzestrzeni.

Abstract

The objective of this thesis was to create a computer program which allows to visualize the Christoffel connection three-dimensionally and interactively for different configurations of a four-dimensional spacetime. The Unity environment was used to perform the task. The presented object is a cube made of 64 blocks, where each block contains one mathematical formula encoding a single element of connection. We are able to manipulate its orientation and move around it using both the keyboard and the mouse. The visualization can be utilized in order to search for the relationship between the structure of Christoffel connection and properties of the spacetime.

Spis treści

1	Wstęp	5
2	Opis teoretyczny	7
2.1	Równanie Einsteina	7
2.2	Metryka, interwał, metryka odwrotna	8
2.3	Stała kosmologiczna	9
2.4	Podstawowe rozwiązania równania Einsteina	9
2.5	Koneksja	13
2.5.1	Koneksja Christoffela	14
2.5.2	Transport równoległy	15
2.5.3	Linia geodezyjna	15
2.6	Krzywizna	15
2.7	Cel wizualizacji koneksji	16
3	Zastosowane technologie	19
3.1	Środowisko programistyczne	20
3.1.1	Unity	21
3.1.2	C#	21
3.1.3	MVC	21
3.1.4	System zdarzeń	21
3.2	Formuły	22
3.2.1	Generowanie symboli Christoffela	22
3.2.2	Przechowywanie formuł	23

3.2.3 Wyświetlanie formuł	23
3.3 Pozostałe rozwiązania	24
4 Opis aplikacji	25
4.1 Wybór Metryki	26
4.2 Wizualizacja	28
4.3 Klawisze Nawigacji	32
4.4 O Programie	33
4.5 Grafika	33
5 Podsumowanie	35
Bibliografia	37

Rozdział 1

Wstęp

Wraz z rozwojem fizyki wprowadzano coraz bardziej skomplikowane wielkości umożliwiające modelowanie zjawisk fizycznych, zaczynając od skalarów (np. masa, ładunek czy temperatura) oraz wektorów (np. położenie, prędkość czy pole elektryczne), a kończąc na tensorach (np. tensor pola elektromagnetycznego). Te ostatnie szczególnie potrzebne były w Ogólnej Teorii Względności, gdzie podstawową zmienną okazała się być metryka – tensor drugiego rzędu, którego komponenty tworzą tablicę 4×4 funkcji (w czterowymiarowej czasoprzestrzeni). Innymi ważnymi elementami tej teorii są: koneksja – obiekt reprezentowany przez blok $4 \times 4 \times 4$ funkcji i tensor Riemanna – tensor czwartego rzędu reprezentowany przez hiperblok $4 \times 4 \times 4 \times 4$ funkcji.

O ile przedstawienie graficzne wektora czy tablicy jest możliwe na kartce papieru, to w przypadku trójwymiarowego układu komponentów koneksji (czy czterowymiarowego tensora Riemanna) ogranicza się do wypisania wszystkich elementów w postaci listy. Konsekwencją takiego rozwiązania jest utrata wglądu w strukturę obiektu (i np. możliwości zaobserwowania pewnych nietrywialnych symetrii).

W celu zapisywania matematycznych formuł, w tym także wspomnianych wyżej wektorów i tablic, powszechnie stosuje się narzędzie do składania tekstu \LaTeX . Jednak rola tego oprogramowania ogranicza się do tworzenia dokumentów czy grafik. Rynek rozwiązań ubogi jest w aplikacje umożliwiające przestrzenne wizualizacje formuł matematycznych.

Celem niniejszej pracy dyplomowej było stworzenie, w ramach środowiska Unity, aplikacji umożliwiającej wizualizację obiektów z trójwymiarową strukturą komponentów, a w

szczegółności koneksji Christoffela. Wizualizacja może zostać wykorzystana w celu obserwacji tego, jak różne rozwiązania równania Einsteina wpływają na stopień skomplikowania i organizację koneksji Christoffela, a także do poszukiwania ukrytych symetrii, związków etc. Elementy stworzonego oprogramowania mogą także posłużyć w innego rodzaju projektach wykorzystujących wyświetlanie formuł matematycznych w przestrzeni trój- lub dwuwymiarowej (np. prezentacje, animacje lub gry). Program można także rozszerzyć w celu wizualizacji innych obiektów podobnych do koneksji (np. tensorów trzeciego rzędu).

W następnym rozdziale, aby lepiej zrozumieć znaczenie i motywację wizualizatora/programu, zostaną przedstawione podstawowe rozwiązania równań Einsteina wraz z omówieniem kluczowych elementów Ogólnej Teorii Względności takich jak metryka, koneksja Christoffela czy tensor Riemanna. Kolejny rozdział dotyczyć będzie technologii, która umożliwiła stworzenie programu, natomiast rozdział trzeci dostarcza opisu samej aplikacji.

Rozdział 2

Opis teoretyczny

2.1 Równanie Einsteina

Ogólna Teoria Względności jest teorią grawitacji stworzoną w 1916 roku przez Alberta Einsteina, w której pole grawitacyjne opisywane jest przez zakrzywienie czasoprzestrzeni. Jej najbardziej podstawowym równaniem jest równanie pola grawitacyjnego nazywane **równaniem Einsteina** [7]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

gdzie $R_{\mu\nu}$ to **tensor Ricciego**, R to **skalar Ricciego**, $g_{\mu\nu}$ to **metryka czasoprzestrzeni**, G to stała grawitacji, a $T_{\mu\nu}$ to **tensor energii-pędu** (wszystkie wielkości opisane są w późniejszych podrozdziałach). Równanie zawiera w sobie związek pomiędzy geometrią czasoprzestrzeni (lewa strona równania) a konfiguracją energii i pędu oraz ich przepływem w czasoprzestrzeni (prawa strona równania). Jest to tensorowe równanie różniczkowe drugiego stopnia [2], gdzie niewiadomą jest metryka czasoprzestrzeni, która jest wystarczająca do opisanie geometrii czasoprzestrzeni. Powyższe tensory są 4-wymiarowymi tensorami drugiego rzędu, jednak ze względu na symetrię metryki równanie Einsteina sprowadza się do 10 niezależnych równań różniczkowych drugiego stopnia.

2.2 Metryka, interwał, metryka odwrotna

Metryka – $g_{\mu\nu}$ – jest symetrycznym tensorem drugiego rzędu określającym **interwał** (odległość w czasoprzestrzeni) pomiędzy dwoma sąsiadującymi, infinitezymalnie bliskimi punktami-wydarzeniami [7]:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.2)$$

Można ją wykorzystać m. in. do obliczania długości i czasu krzywej w czasoprzestrzeni, określania „najkrótszego dystansu” pomiędzy dwoma punktami, zdefiniowana iloczynu skalarnego oraz zastąpienia klasycznego pola grawitacyjnego. Metryka określa wszystkie własności geometrii czasoprzestrzeni [2]. Poprzez tzw. symbol Kroneckera δ_λ^μ można zdefiniować także **metrykę odwrotną** $g^{\mu\nu}$:

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = g_{\lambda\nu} g^{\nu\mu} = \delta_\lambda^\mu. \quad (2.3)$$

Metryka odwrotna także jest symetryczna i wspólnie z metryką służą do podnoszenia i obniżania indeksów.

W Ogólnej Teorii Względności najprostszą metryką jest metryka płaskiej przestrzeni (o niekrzywoliniowych współrzędnych $x^\mu = t, x, y, z$) – tzw. **przestrzeni Minkowskiego** [2] (oznaczana wyjątkowo jako $\eta_{\mu\nu}$):

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Często ustala się $c = 1$ (wówczas na diagonalu znajdują się same ± 1). Przy zmianie układu współrzędnych na inny zmieniają się składowe metryki, ale właściwości geometrii, którą opisuje pozostają takie same [7]. Zawsze można znaleźć układ współrzędnych $x^{\hat{\mu}}$, w którym w jednym, konkretnym punkcie (niekonieczne w jego otoczeniu) metryka $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ przybiera postać $\eta_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$ oraz $\partial_{\hat{\sigma}} g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = 0$. Taki układ nazywany jest **lokalnie inercyjnym**. Odpowiada to stwierdzeniu, że „odpowiednio małe obszary czasoprzestrzeni wyglądają jakby były płaskie”.

2.3 Stała kosmologiczna

Albert Einstein długo zastanawiał się nad tym dlaczego mimo, że grawitacja jest przyciągająca, to wszechświat za oknem zdawał się być statyczny (jak ówczesnie uważano) i nie zapadał się. Zaproponowane przez niego rozwiązanie problemu polegało na wprowadzeniu tzw. **stałej kosmologicznej**, która miała mieć niewielki wpływ na małych dystansach, a duże znaczenie na znacznie większych. Jej wprowadzenie wymagało korekty w równaniu pola grawitacyjnego (2.1):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (2.5)$$

gdzie Λ to właśnie stała kosmologiczna. Wiąże się ją z **energiami próżni** czyli z gęstością energii charakterystycznej dla pustej przestrzeni. Istnienie takiej energii implikuje istnienie jednorodnego ujemnego ciśnienia wypełniającego wszechświat [7], co przekłada się na jego rozszerzanie. Prędkość rozszerzania się wszechświata opisuje prawo Hubble’a. Co więcej w 1998 r. zaobserwowano, że tempo rozszerzania się wszechświata rośnie (w ostatecznym rozrachunku doprowadzi to do oddalenia się wszystkich galaktyk od siebie poza możliwości obserwacyjne).

2.4 Podstawowe rozwiązania równania Einsteina

- **Metryka Minkowskiego** – jak wspomniano wyżej opisuje płaską przestrzeń. Jest to równoznaczne z całkowicie pustą czasoprzestrzenią (pozbawioną energii oraz ciśnienia). Wówczas interwał przyjmuje postać [6]:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (2.6)$$

lub we współrzędnych sferycznych $(t, r, \vartheta, \varphi)$:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (2.7)$$

- **Metryka Friedmana-Robertsona-Walkera**(~1923) – opisuje wszechświat wypełniony jednorodnie i izotropowo materią [6]:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + H^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2) \right] \quad (2.8)$$

gdzie $H(t)$ jest pewną arbitralną funkcją czasu zwaną **współczynnikiem skali**, a k jest stałą określającą krzywiznę przestrzeni. Równania Einsteina redukują się wtedy do:

$$\left(\frac{\dot{H}}{H}\right)^2 + \frac{kc^2}{H^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho, \quad (2.9)$$

$$2\frac{\ddot{H}}{H} + \left(\frac{\dot{H}}{H}\right)^2 + \frac{kc^2}{H^2} = -\frac{8\pi G}{c^2}p, \quad (2.10)$$

gdzie ρ to gęstość materii, a p to ciśnienie.

Obserwacje astronomiczne wskazują na to, że w wielkiej skali wszechświat jest prawie izotropowy i jednorodny [1]. Z tego wynika, że z tej perspektywy metryka wszechświata jest w przybliżeniu równa metryce Friedmana-Robertsona-Walkera.

- **Metryka Schwarzschilda** – pierwsze (opublikowane w 1916 – nieco ponad miesiąc po opublikowaniu Ogólnej Teorii Względności) rozwiązanie równania Einsteina – opisuje kształt czasoprzestrzeni na zewnątrz sferycznie-symetrycznego, nierotującego, nienaładowanego i nieprzyspieszającego obiektu [6].

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_s}{r}\right)c^2 dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (2.11)$$

gdzie $r_s = \frac{2GM}{c^2}$ to tzw. **promień Schwarzschilda**, a M to masa obiektu. Gdy $M \rightarrow 0$ lub $r \rightarrow \infty$ to metryka zbiega do metryki Minkowskiego. Tę właściwość nazywa się **asymptotyczną płaskością** [7]. Geometria czasoprzestrzeni dla $r < r_s$ nie pozwala żadnej cząstce wydostać się powyżej r_s . Jednakże metryka Schwarzschilda jest rozwiązaniem próżniowym (dotyczy przestrzeni, w której nie ma masy, ale wokół masywnego obiektu), zatem żeby ten efekt mógł zachodzić to cały obiekt musi być umieszczony wewnątrz sfery o promieniu r_s . Taki obiekt nazywamy **czarną dziurą**, a wspomnianą sferę – **horyzontem zdarzeń**.

- **Metryka Reissnera-Nordstrøma**(~1916 r.) – opisuje przestrzeń wokół naładowanej, nierotującej i nieprzyspieszającej czarnej dziury [6].

$$ds^2 = -A_{RN}c^2 dt^2 + A_{RN}^{-1} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2), \quad (2.12)$$

gdzie $A_{RN} = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{GQ^2}{\epsilon_0 c^4 r^2}$, a Q to ładunek czarnej dziury. Gdy $Q \rightarrow 0$ rozwiązanie redukuje się do metryki Schwarzschilda.

- **Metryka Kerra**(1963 r.) – stworzenie tego bardziej fizycznego przypadku obejmującego obrót zajęło kilka dekad. Metryka Kerra opisuje przestrzeń w pobliżu rotującej wokół własnej osi, nienaładowanej i nieprzyspieszającej czarnej dziury [6].

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s r}{\Sigma}\right) c^2 dt^2 - \frac{2r_s a r \sin^2 \vartheta}{\Sigma} c dt d\varphi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\vartheta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{r_s a^2 \sin^2 \vartheta}{\Sigma}\right) \sin^2 \vartheta d\varphi^2, \quad (2.13)$$

gdzie $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta$, $\Delta = r^2 - r_s r + a^2$, $a = \frac{J}{Mc}$, a J to moment pędu czarnej dziury. Podobnie jak w metryce Reissnera-Nordströma gdy $J \rightarrow 0$ przechodzi w metrykę Schwarzschilda.

- **Metryka Kerra-Newmana**(1965 r.) – bardzo ciekawe uogólnienie, rozwiązanie łączące ładunek elektryczny z obrotem. Metryka Kerra-Newmana opisuje przestrzeń wokół naładowanej, rotującej i nieprzyspieszającej czarnej dziury [5].

$$ds^2 = - \frac{\Delta_{KN}}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \vartheta d\varphi)^2 + \frac{\sin^2 \vartheta}{\Sigma} [adt - (r^2 + a^2)d\varphi]^2 + \frac{\Sigma}{\Delta_{KN}} dr^2 + \Sigma d\vartheta^2, \quad (2.14)$$

gdzie $\Delta_{KN} = r^2 - r_s r + a^2 + \rho Q^2$, zaś $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta$.

- **Metryka de Sittera**(~1920) – opisuje pusty wszechświat z dodatnią stałą kosmologiczną [6]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{\Lambda}{3} r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (2.15)$$

Dodatnia stała kosmologiczna oznacza rozszerzanie, a ujemna kurczenie się wszechświata. Tę metrykę można przedstawić także korzystając ze **stałej Hubble'a** obecnej w prawie Hubble'a. Jest to **forma Lemaître'a-Robertsona** [6]:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + e^{2\mathcal{H}t} [dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)], \quad (2.16)$$

gdzie $\mathcal{H} = \sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}}$ to stała Hubble'a. Jest to specjalny przypadek metryki Friedmana-Robertsona-Walkera, dla $k = 0$ i $H(t) = e^{\mathcal{H}t}$.

- **Metryka (A)dS-Schwarzschilda** – dodanie stałej kosmologicznej do dotychczasowych metryk skutkuje powstaniem nowych rozwiązań równania Einsteina. Jednym z tych rozwiązań jest metryka (Anty) de Sittera-Schwarzschilda (zwana także metryką Kottlera). W przypadku dodatniej stałej kosmologicznej mówimy o metryce dS-Schwarzschilda, a w przypadku ujemnej o metryce AdS-Schwarzschilda [6]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_s}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2). \quad (2.17)$$

- **Metryka Tauba-NUT**(1951 r.) – niecodzienne rozwiązanie równania Einsteina. Nie jest ona asymptotycznie płaska i zakłada istnienie tzw. **magnetycznej masy** (parametr NUT) – jest to hipotetyczny analog ładunku magnetycznego w teorii grawitacji (innymi słowy magnetyczna masa jest wobec masy tym, czym jest ładunek magnetyczny wobec ładunku elektrycznego). Przestrzeń wokół czarnej dziury opisuje wówczas metryka (poniżej przyjęto założenie $G = c = 1$) [6]:

$$ds^2 = - \frac{\Delta}{\Sigma} (dt + 2l \cos \vartheta d\varphi)^2 + \Sigma \left(\frac{dr^2}{\Delta} + d\vartheta^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2 \right), \quad (2.18)$$

gdzie $\Delta = r^2 - 2Mr - l^2$, $\Sigma = r^2 + l^2$, M to masa czarnej dziury, a l to siła monopola magnetycznego.

- **Metryka Plebańskiego-Demiańskiego** – jeszcze inne, bardzo zaawansowane rozwiązanie. Uwzględnia masę, ładunek elektryczny, ładunek magnetyczny, rotacje, masę magnetyczną oraz przyspieszenie czarnej dziury [4]:

$$ds^2 = \frac{1}{\Omega} \left\{ \frac{Q}{\Sigma} \left[dt - \left(a \sin^2 \vartheta + 4l \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^2 d\varphi \right]^2 - \frac{\Sigma}{Q} dr^2 - \frac{\tilde{P}}{\Sigma} \left[a dt - (r^2 + (a+l)^2) d\varphi \right]^2 - \frac{\Sigma}{\tilde{P}} \sin^2 \vartheta d\vartheta^2 \right\}, \quad (2.19)$$

gdzie

$$\Omega = 1 - \frac{\alpha}{\omega}(l + a \cos \vartheta)r \quad (2.20)$$

$$\Sigma = r^2 + (l + a \cos \vartheta)^2$$

$$\tilde{P} = \sin^2 \vartheta (1 - a_3 \cos \vartheta - a_4 \cos^2 \vartheta)$$

$$Q = (\omega^2 k + e^2 + g^2) - 2Mr + \varepsilon r^2 - 2\alpha \frac{n}{\omega} r^3 - \left(\alpha^2 k + \frac{\Lambda}{3} \right) r^4$$

i

$$a_3 = 2\alpha \frac{a}{\omega} M - 4\alpha^2 \frac{al}{\omega^2} (\omega^2 k + e^2 + g^2) - 4\frac{\Lambda}{3} al \quad (2.21)$$

$$a_4 = -\alpha^2 \frac{a^2}{\omega^2} (\omega^2 k + e^2 + g^2) - \frac{\Lambda}{3} a^2$$

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 k}{a^2 - l^2} + 4\alpha \frac{l}{\omega} m - (a^2 + 3l^2) \left[\frac{\alpha^2}{\omega^2} (\omega^2 k + e^2 + g^2) + \frac{\Lambda}{3} \right]$$

$$n = \frac{\omega^2 kl}{a^2 - l^2} - \alpha \frac{a^2 - l^2}{\omega} m + (a^2 - l^2) l \left[\frac{\alpha^2}{\omega^2} (\omega^2 k + e^2 + g^2) + \frac{\Lambda}{3} \right]$$

$$k = \left(\frac{\omega^2}{a^2 - l^2} + 3\alpha^2 l^2 \right)^{-1} \left(1 + 2\alpha \frac{l}{\omega} m - 3\alpha^2 \frac{l^2}{\omega^2} (e^2 + g^2) - l^2 \Lambda \right)$$

oraz M to masa czarnej dziury, e to ładunek elektryczny, g to ładunek magnetyczny, a to parametr Kerra, l to masa magnetyczna, α to przyspieszenie czarnej dziury, Λ to stała kosmologiczna, a ω to pewien parametr związany z obrotem.

- **Inne rozwiązania** – powyższe metryki (z wyjątkiem Plebańskiego-Demiańskiego) oraz inne, niewymienione wyżej zostały pokazane w wizualizatorze. Obszerne zestawienie rozwiązań równań Einsteina można znaleźć w [6].

2.5 Koneksja

Oprócz interwału istotną cechą czasoprzestrzeni jest jej krzywizna. Od krzywizny zależy m. in. to jak będą transformowały się wektory podczas tzw. **transportu równoległego** – transportu wektora wzdłuż krzywej bez zmieniania go. Przykładem takiego działania jest przesuwanie wektora po powierzchni sfery. W wyniku tego procesu wektor zmienia swój kierunek. W celu matematycznego opisu wprowadza się pojęcie **pochodnej kowariantnej**

[7] – uogólnienia pochodnej cząstkowej, które bazuje na **koneksji**:

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda, \quad (2.22)$$

gdzie V^ν to dowolny wektor, ∇_μ to pochodna kowariantna, a $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ to koneksja. Koneksja nie transformuje się przy zmianie układu współrzędnych jak tensor, więc nie może być nazywana tensorem. Jednakże posiada niektóre cechy tensorów, więc w niniejszej pracy nazywana będzie obiektem tensorowym.

2.5.1 Koneksja Christoffela

Z definicji pochodnej kowariantnej nie wynika jakakolwiek relacja koneksji z metryką. Wręcz przeciwnie, w ogólnym przypadku koneksja może w ogóle nie być z nią związana [7]. W Ogólnej Teorii Względności przedmiotem zainteresowania jest szczególna postać koneksji wynikającej z metryki – **koneksji Christoffela**. Koneksja Christoffela spełnia dwa założenia, tzw. postulaty Einsteina:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha = \Gamma_{\nu\mu}^\alpha - \text{beztorsyjność}, \quad (2.23)$$

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0 - \text{kompatybilność z metryką}. \quad (2.24)$$

Istnieje tylko jedna koneksja spełniająca oba założenia. Opisuje ją równanie:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\alpha[g] = \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\nu\beta} + \partial_\nu g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\nu}). \quad (2.25)$$

Konkretnie elementy koneksji Christoffela nazywa się **symbolami Christoffela**. Jak widać obliczenie komponentów koneksji Christoffela polega na wyliczeniu skomplikowanego sumowania różnych pochodnych elementów metryki i elementów metryki odwrotnej. O ile pojedynczo są to raczej elementarne obliczenia, to ze względu na ich ilość ($4 \times 4 \times 4 = 64$) wyznaczanie koneksji bywa czasochłonne. W związku z tym często do generowania symboli Christoffela wykorzystuje się oprogramowanie komputerowe, np. Wolfram Mathematicę (zob. 3.2.1).

Koneksja Christoffela płaskiej czasoprzestrzeni zeruje się (w kartezjańskim układzie współrzędnych) [7]. Podobnie dzieje się w lokalnie inercjalnych układach współrzędnych ze względu na zerowanie się pierwszych pochodnych metryki.

Poniżej przyjrzymy się kilku zastosowaniom koneksji Christoffela.

2.5.2 Transport równoległy

W czasoprzestrzeniach zakrzywionych wynik transportu równoległego zależy od krzywej, wzdłuż której przesuwany jest wektor [7]. Niech $x^\mu(\lambda)$ będzie krzywą parametryczną w czasoprzestrzeni z parametrem λ . Wówczas **równanie transportu równoległego** wzdłuż tej krzywej ma postać:

$$\frac{d}{d\lambda}V^\mu + \Gamma_{\sigma\rho}^\mu \frac{dx^\sigma}{d\lambda}V^\rho = 0, \quad (2.26)$$

gdzie V^μ to transportowany wektor. Jest to równanie różniczkowe pierwszego rzędu, gdzie zmienną jest transportowany wektor, a warunkiem początkowym jest jego postać sprzed przesunięcia.

2.5.3 Linia geodezyjna

Linia geodezyjna jest uogólnieniem linii prostej do zakrzywionych czasoprzestrzeni – najkrótszej krzywej łączącej dwa wydarzenia [7]. Linie geodezyjną wyznacza się korzystając z **równania geodezyjnego**:

$$\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0. \quad (2.27)$$

W tym równaniu różniczkowym drugiego rzędu niewiadomą jest (x^μ) czyli szukana linia geodezyjna. Jest to niejako uogólnienie drugiego prawa dynamiki Newtona: $\ddot{x} = \frac{F}{m}$.

2.6 Krzywizna

Nierozzerwalnie koneksja Christoffela jest związana z pojęciem krzywizny czasoprzestrzeni. Wygodnym sposobem całkowitego opisu krzywizny jest **tensor Riemanna** (lub **tensor krzywizny**), który definiuje się następująco (w przypadku koneksji Christoffela) [7]:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]V^\rho = R_{\sigma\mu\nu}^\rho V^\sigma, \quad (2.28)$$

gdzie $[\cdot, \cdot]$ to komutator. Po przekształceniu otrzymuje się:

$$R_{\sigma\mu\nu}^\rho = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\lambda}^\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (2.29)$$

Z definicji tensor Riemanna wyraża wpływ przesunięcia równoległego wektora wzdłuż infinitesimalnie małej pętli na ten wektor. Jest wygodniejszy do opisu krzywizny niż koneksja,

ze względu na to, że jest pełnoprawnym tensorem i jego znikanie jest równoznaczne z płaskością przestrzeni (koneksja znika także w lokalnie inercyjnym układzie współrzędnych).

Zwężenie tensora Riemanna, według wzoru poniżej definiuje **tensor Ricciego** [7]:

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}. \quad (2.30)$$

Natomiast ślad tensora Ricciego nazywamy **skalarem Ricciego** lub **skalarem krzywizny**:

$$R = R^{\mu}_{\mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.31)$$

Skalar krzywizny używany jest m. in. do sformułowania **działania Einsteina-Hilberta**:

$$S_H = \int \sqrt{-g} R d^4x, \quad (2.32)$$

gdzie $g = \det(g_{\mu\nu})$. Działanie Einsteina-Hilberta razem z działaniem materii S_M poprzez zasadę najmniejszego działania prowadzą do równania Einsteina (2.1). Powyższe działanie można jeszcze rozszerzyć do postaci ze stałą kosmologiczną:

$$S_H = \int \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) d^4x. \quad (2.33)$$

W wyniku przeprowadzenia procedury wariacyjnej na tej wersji działania Einsteina-Hilberta (wraz z działaniem materii) otrzymuje się równanie Einsteina w postaci (2.5).

2.7 Cel wizualizacji koneksji

Ze względu na to, że koneksja Christoffela jest obiektem tensorowym trzeciego rzędu (posiada trzy indeksy), nie jest możliwe łatwe przedstawienie go w formie graficznej na kartce papieru. Zwykle wypisuje się niezerowe komponenty w postaci listy. Np. (metryka Schwarzschilda):

$$\begin{array}{lll} \Gamma_{tt}^r = \frac{GM}{r^3}(r-2GM) & \Gamma_{rr}^r = \frac{-GM}{r(r-2GM)} & \Gamma_{tr}^t = \frac{GM}{r(r-2GM)} \\ \Gamma_{r\theta}^{\theta} = \frac{1}{r} & \Gamma_{\theta\theta}^r = -(r-2GM) & \Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\phi\phi}^r = -(r-2GM)\sin^2\theta & \Gamma_{\phi\phi}^{\theta} = -\sin\theta\cos\theta & \Gamma_{\theta\phi}^{\phi} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \end{array}$$

W związku z tym zatracą się wgląd w przestrzenne ułożenie poszczególnych symboli Christoffela, a co za tym idzie, nie można obserwować żadnych relacji pomiędzy specyfiką czasoprzestrzeni a organizacją koneksji.

Inaczej jest w przypadku metryki, gdzie poszczególne komponenty znalazły swoje zastosowanie w obliczeniach fizycznych wychodzących poza obliczanie interwału czasoprzestrzennego. Poniżej kilka przykładów:

- **Granica klasyczna** – w przypadku słabych pól grawitacyjnych Ogólna Teoria Względności redukuje się do prawa powszechnego ciążenia Newtona. Jednakże nadal można korzystać z formalizmu. Wówczas szczególnie ważnym komponentem metryki jest g_{tt} , który przyjmuje wartość [7]:

$$g_{tt} = -(1 - 2\Phi), \quad (2.34)$$

gdzie $\Phi = -\frac{GM}{r}$ jest wartością klasycznego potencjału grawitacyjnego.

- **Prędkość kątowna** – bezpośrednio z metryki wyznaczyć można prędkością kątową czasoprzestrzeni [9]:

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \quad (2.35)$$

Gdy policzy się Ω dla $r = r_{bh}$, gdzie r_{bh} to promień czarnej dziury, to otrzymuje się prędkość kątową czarnej dziury. Jednakże wyliczając tę wartość dla innego r można otrzymać niezerowy wynik – czasoprzestrzeń wokół czarnej dziury obraca się razem z nią (tzw. frame dragging).

- **Dylatacja czasu** – w różnych układach odniesienia czas może płynąć inaczej – efekt ten nosi nazwę **dylatacji czasu**. Wpływ na niego ma zakrzywienie czasoprzestrzeni, a co za tym idzie metryka. Weźmy pod uwagę dwa zdarzenia z tymi samymi współrzędnymi przestrzennymi (r, ϑ, φ) , ale o innej współrzędnej czasowej t . Wówczas dylatację wyraża wzór [3]:

$$\Delta t = (g_{tt})^{-\frac{1}{2}} \Delta \tau, \quad (2.36)$$

gdzie Δt jest czasem, który upłynął pomiędzy dwoma wydarzeniami w rozpatrywanym układzie współrzędnych (różnica współrzędnej czasowej wydarzeń), a $\Delta \tau$ **czasem**

własnym – czasem pomiędzy zderzeniami, w układzie odniesienia, w którym zdarzenia miały miejsce. Przykładowo w czasoprzestrzeni Schwarzschilda wzór przybiera postać:

$$\Delta t = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \Delta \tau, \quad (2.37)$$

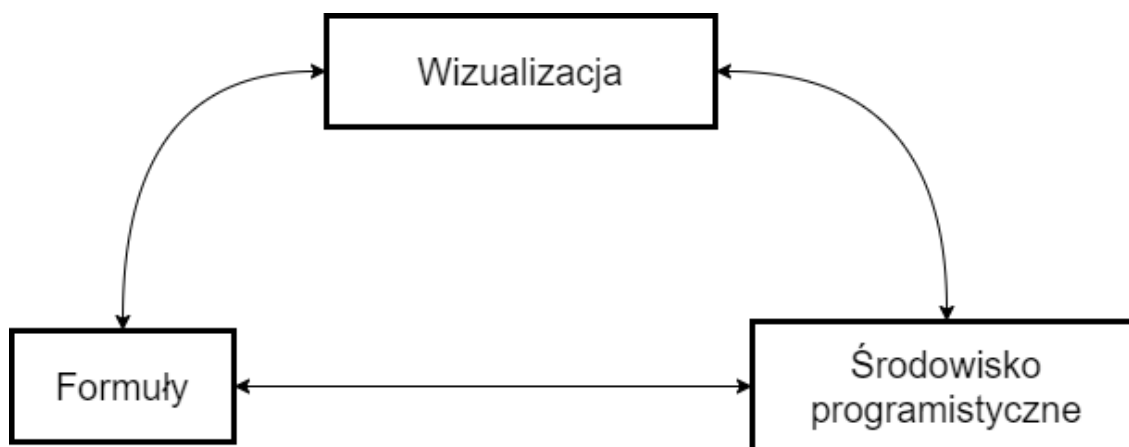
gdzie r to współrzędna radialna obu zdarzeń. Jak widać im bliżej źródła zakrzywienia tym dylatacja bardziej wyraźna.

Jednym z celów wizualizowania koneksji jest umożliwienie poszukiwania podobnych zastosowań jej komponentów lub ich kombinacji, poprzez obserwację jej struktury w przestrzeni trójwymiarowej. Bardzo ciekawym zagadnieniem jest pytanie, czy można z pewnego zbioru komponentów koneksji wyciągnąć informację, która metryka za nie odpowiada.

Rozdział 3

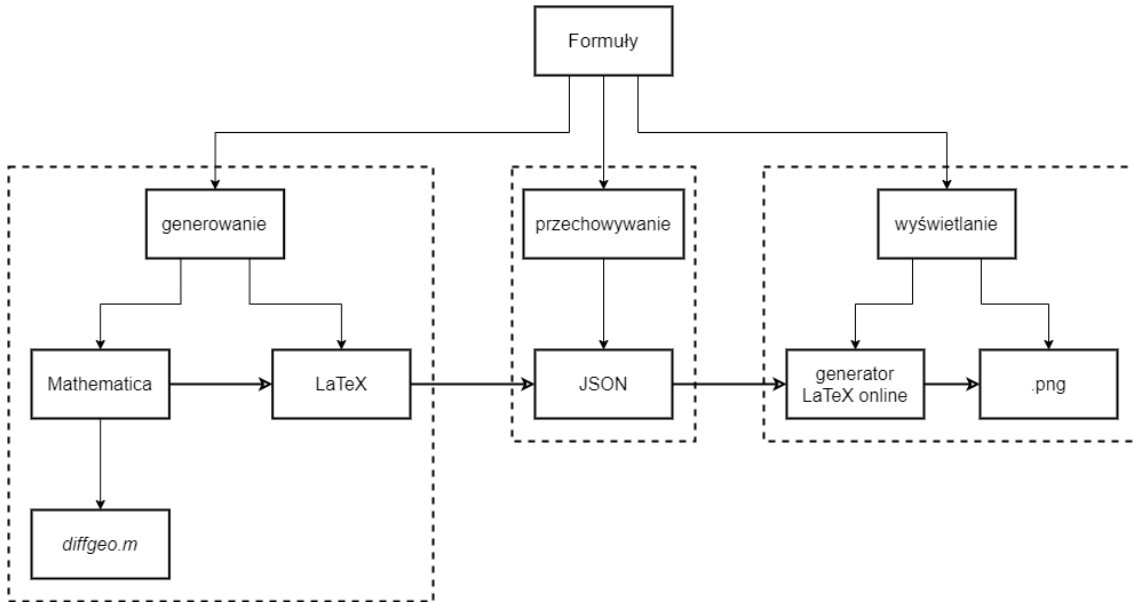
Zastosowane technologie

Proces tworzenia wizualizacji napotyka na rozmaite problemy natury technicznej. Wizualizacja wymaga odpowiedniego generowania, wyświetlania oraz przechowywania formuł wraz z zapewnieniem interaktywnej manipulacji, a także platformy programistycznej zawierającej silnik grafiki 3D, w ramach której napisany zostanie kod aplikacji i stworzony przystępny graficzny interfejs użytkownika.

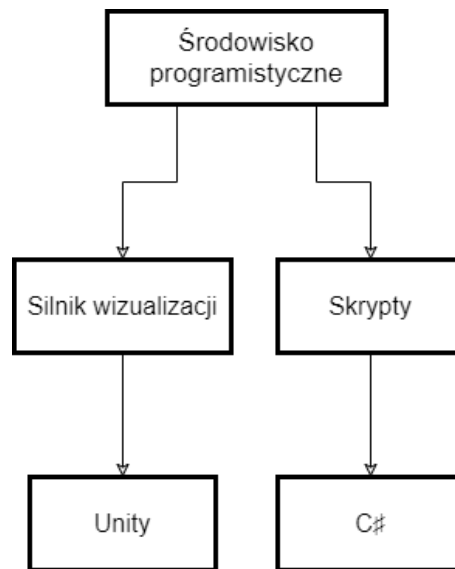


Rysunek 3.1: Diagram głównych elementów programu.

Poniższe diagramy podsumowują jakie narzędzia zostały wykorzystane do ich rozwiązania.



Rysunek 3.2: Diagram technologii odpowiedzialnych za formuły.



Rysunek 3.3: Diagram technologii środowiska programistycznego.

3.1 Środowisko programistyczne

Początkowym problemem był wybór silnika grafiki trójwymiarowej, który umożliwi interaktywne wyświetlanie bloków obiektów z możliwościami łatwej i intuicyjnej wymiany danych

(zmiany metryki czasoprzestrzeni). Ze względu na łatwość w budowaniu interfejsu użytkownika wybór padł na **Unity**.

3.1.1 Unity

Unity to zintegrowane środowisko służące do tworzenia gier, animacji i wizualizacji 2D oraz 3D. Umożliwia realistyczne wyświetlanie grafiki trójwymiarowej wraz z dwuwymiarowymi sprite'ami oraz budowanie intuicyjnego interfejsu użytkownika. Silnik graficzny napisany został w języku C++, natomiast językiem skryptowym [13] (używany przez twórcę grę/wizualizację) wykorzystywanym w ramach Unity jest C#.

3.1.2 C#

C# to język programowania ze składnią bardzo podobną do języka Java [8]. Jest to język zorientowany obiektowo z elementami typowymi dla programowania funkcyjnego (np. funkcje lambda czy typy anonimowe). W odróżnieniu od języków takich jak C czy C++ zarządzaniem pamięcią zajmuje się *garbage collector*.

3.1.3 MVC

W celu uporządkowania aplikacji na wierzchu domyślnego w Unity wzorca komponentów został zastosowany wzorzec projektowy **MVC** (*ang. Model-View-Controller*). We wzorcu MVC każdy obiekt rozdzielany jest na trzy mniejsze: **model** (*model*), **widok** (*view*) i **kontroler** (*controller*). W modelu przechowywane są dane dotyczące obiektu, widok odpowiada za wyświetlanie obiektu, natomiast kontroler bazując na danych zawartych w modelu oraz zdarzeniach wprowadza zmiany w widoku. Informacje zapisane w modelu zmieniać może jedynie kontroler, natomiast widok może je tylko odczytywać.

3.1.4 System zdarzeń

Zdarzenia wbudowane w środowisko Unity okazały się niewystarczające do komunikacji pomiędzy obiektami i dlatego zbudowano system „syntetycznych” zdarzeń. Każdy typ zdarze-

nia został przyporządkowany do jednego obiektu obsługującego, który to, bazując na słowie kluczowym event [8], umożliwiał nasłuchiwanie i propagowanie wydarzeń. Dowolny inny obiekt mógł zarówno tworzyć zdarzenia jak i ich nasłuchiwać.

3.2 Formuły

Autorskim zagadnieniem było generowanie i wyświetlanie komponentów koneksji Christoffela.

3.2.1 Generowanie symboli Christoffela

W celu oszczędzania zasobów komputerowych zdecydowano się na jednorazowe wygenerowanie symboli Christoffela za pomocą programu **Mathematica**.

Mathematica

Mathematica jest systemem obliczeń symbolicznych i numerycznych [12]. Znajduje szerokie zastosowanie w wielu dziedzinach nauki czy inżynierii. W jej obrębie używany jest funkcyjny język programowania **Wolfram Language**. Dodatkowo należy zaznaczyć, że wykorzystano **diffgeo** – dedykowaną bibliotekę napisaną w Wolfram Language przez Matthew Headrick’a, która umożliwia przeprowadzenie obliczeń związanych z geometrią różniczkową oraz Ogólną Teorią Względności takich, jak wyznaczanie tensora Riemanna czy koneksji Christoffela na bazie metryki. Zapis wyników może być eksportowany w Mathematicie do wielu formatów, w tym do kodu \LaTeX .

\LaTeX

\LaTeX to oprogramowanie służące do składania dokumentów i tekstów [11] (przykładem może być niniejsza rozprawa). Umożliwia łatwe generowanie skomplikowanych równań i formuł matematycznych, a także tabel i umieszczanie ilustracji. W przeciwieństwie do popularnych procesorów tekstu korzystając z \LaTeX pisze się tekst niesformatowany używając

języka znaczników (także nazywanego \LaTeX). W związku z tym jest popularny w tworzeniu dokumentów natury naukowej lub technicznej.

Proces

W celu wygenerowania symboli Christoffela skorzystano z dostępnych w literaturze [4, 5, 6] metryk. Otrzymane komponenty zostały uproszczone (o ile to było możliwe) i przekształcone z używanego wewnątrz Mathematici formatu na kod \LaTeX .

3.2.2 Przechowywanie formuł

Wygenerowane formuły w postaci kodu \LaTeX zostały zapisane w formacie dokumentu **JSON** jako element pliku zawierającego wszystkie dane o konkretnej czasoprzestrzeni.

JSON

JSON (*ang. JavaScript Object Notation*) to lekki, czytelny dla człowieka format przechowywania danych [10]. Bazuje na składni języka programowania JavaScript, ale jest od niego niezależny i może być wykorzystywany przez inne języki programowania.

3.2.3 Wyświetlanie formuł

Sporym problemem było wyświetlenie kodu \LaTeX w wybranym przez nas silniku graficznym. Nie istnieje żadne darmowe narzędzie, które umożliwiłoby generowanie formuł w postaci graficznej z kodu \LaTeX (ani żadnego innego kodu) w ramach Unity (istnieje jedno narzędzie płatne, kosztujące kilkadziesiąt dolarów amerykańskich). Koniecznym było więc samodzielne stworzenie rozwiązania, którego opis znajduje się poniżej.

Proces

Kod \LaTeX odczytany z pliku JSON, wysyłany jest do internetowego generatora \LaTeX (udostępnionego dla wizualizatora dzięki uprzejmości <http://sciencesoft.at/>). Generator wysyła z powrotem obraz w formacie .png, który jest ładowany jako tekstura do silnika Unity i wyświetlany na ekranie. Każda formuła pobierana jest raz w trakcie działania programu i

zapisywana w pamięci podręcznej.

3.3 Pozostałe rozwiązania

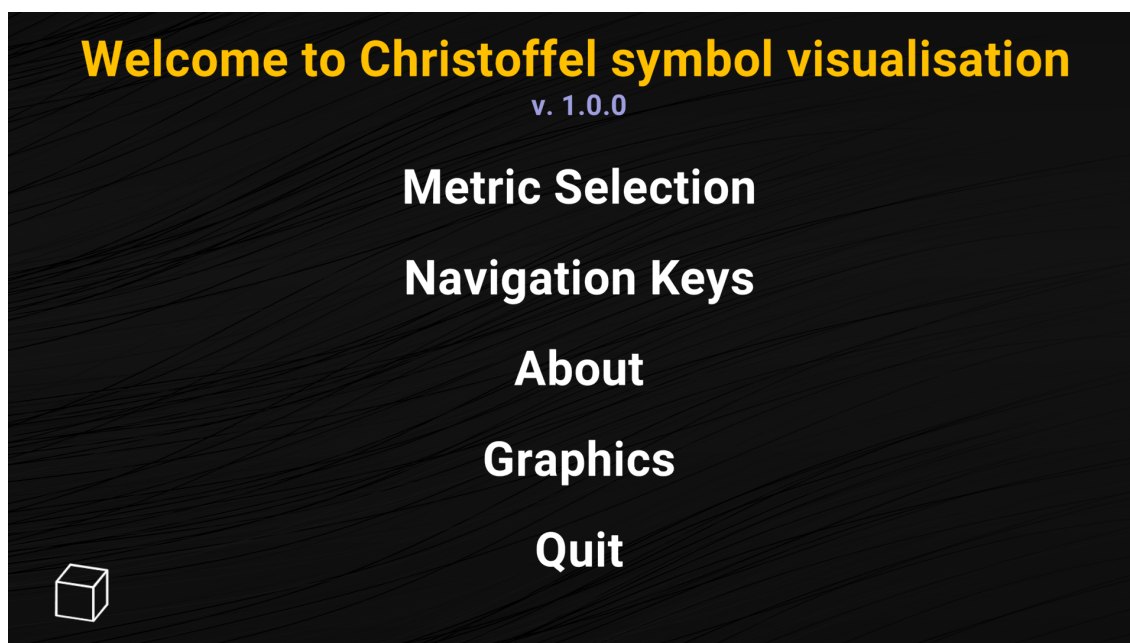
Oprócz wymienionych powyżej poważnych problemów napotkano również na trudności mniejszego rozmiaru:

- **Interfejs użytkownika** – przy tworzeniu interfejsu posługiwano się w dużej mierze pakietem *Text Mesh Pro* oraz elementami UI dostępnymi domyślnie w ramach Unity.
- **Sterowanie za pomocą klawiatury i myszy** – wykorzystano pakiet *Input Manager*.
- **Przechowywanie ustawień użytkownika** – w celu przechowania danych posłużono się dostępnym w Unity obiektem *PlayerPrefs*, za pomocą którego można odczytywać i zapisywać informacje na dysku twardym.
- **Konwersja plików JSON na struktury C#** – skorzystano z biblioteki *Json.NET*.
- **Odczytywanie plików JSON z dysku twardego** – w tym celu użyto obiektu *Resources* dostępnego w ramach Unity.
- **Intuicyjny wybór czasoprzestrzeni** – wewnątrz wizualizacji dostępna jest opcja wyboru czasoprzestrzeni, której koneksja ma zostać zwizualizowana, na podstawie parametrów charakteryzujących daną czasoprzestrzeń (np. parametr *M* – masa – odpowiada czasoprzestrzeni Schwarzschilda). Dokładny opis tej funkcji zostanie przedstawiony w następnym rozdziale. Aby uprościć problemowi posłużono się systemem flag: każdemu dostępnemu parametrowi przyporządkowano flagę – jedną z cyfr bitowej reprezentacji liczby nieujemnej. Stan reprezentowany jest przez liczbę, gdzie 1 i 0 w dwójkowej reprezentacji tej liczby oznaczają odpowiednio wybór i brak wyboru konkretnego parametru (tego, któremu przypasowano dany bit). Następnie stworzono mapę pomiędzy dozwolonymi stanami (liczbami) a nazwami czasoprzestrzeni – obiekt klasy *Dictionary* (z biblioteki standardowej C#).

Rozdział 4

Opis aplikacji

Po uruchomieniu programu użytkownik rozpoczyna w menu głównym:



Rysunek 4.1: Menu główne.

Dostępne są kolejno opcje menu:

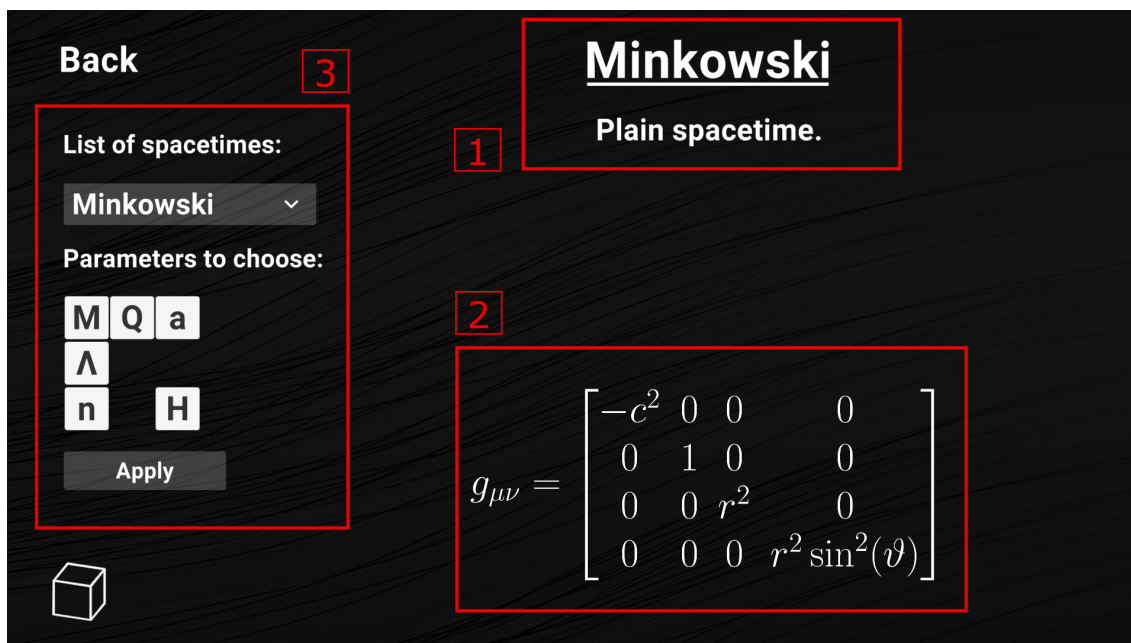
- **Wybór Metryki** (*ang. Metric Selection*),
- **Klawisze Nawigacji** (*ang. Navigation Keys*),
- **O Programie** (*ang. About*),

- **Grafika** (*ang. Graphics*),
- **Wyjście** (*ang. Quit*).

Naciśnięcie ikony sześciianu w lewym dolnym rogu prowadzi bezpośrednio do wizualizacji. Ten przycisk znajduje się w tym samym miejscu na każdym ekranie menu. Taki sam efekt można osiągnąć wciskając przycisk `Escape`.

4.1 Wybór Metryki

Po wyborze opcji *Metric Selection* w menu głównym wyświetli się następujący widok (wszystko w kolorze czerwonym nie występuje w aplikacji – zostało dodane w celu łatwiejszego opisu):

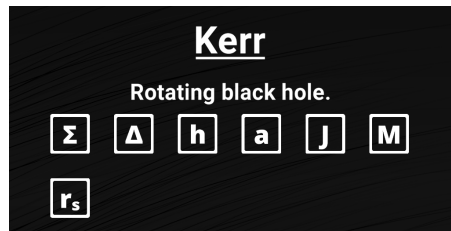


Rysunek 4.2: Ekran umożliwiający wybranie metryki czasoprzestrzeni.

Domyślnie wybraną metryką jest metryka Minkowskiego.

Numerem 1 oznaczono sekcję charakteryzującą wybraną metrykę – nazwę oraz opis czasoprzestrzeni opisywanej przez metrykę. Gdy tytuł jest podkreślony naciśnięcie go otwiera hiperłącze prowadzące do strony w serwisie <http://en.wikipedia.org> poświęconej danej metryce. Poniżej nazwy i opisu czasoprzestrzeni w większości metrykach wyświetlona jest

lista symboli użytych w wizualizacji koneksji oraz w metryce. W przypadku czasoprzestrzeni Kerra:

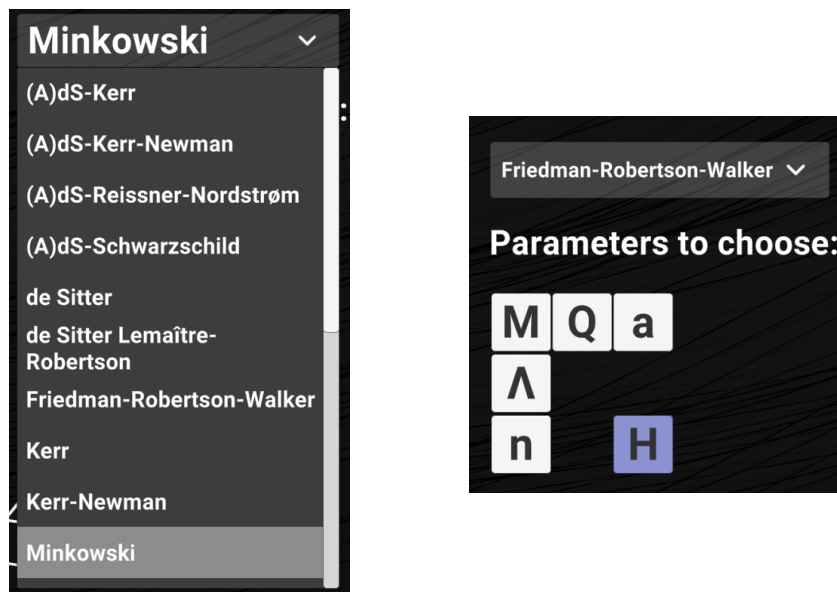


Rysunek 4.3: Symbole wykorzystane przy zapisywaniu metryki Kerra i koneksji.

Po najechaniu kursorem na parametr wyświetlany jest jego opis w postaci tekstu lub formuły matematycznej.

Numerem 2 oznaczono przedstawienie metryki w formie macierzy.

Numerem 3 oznaczono sekcję poświęconą wyborowi metryki czasoprzestrzeni. Korzystając z listy rozwijalnej można wybrać wszystkie dostępne czasoprzestrzenie (wypisane po nazwie metryki). Widoczne poniżej przyciski służą wyborowi czasoprzestrzeni na podstawie parametrów ją charakteryzujących. Przykładowo wybranie parametru $\mathbf{H} = \mathbf{H}(t)$ – czynnik skali (*ang. scale factor*) – odpowiada czasoprzestrzeni Friedmana-Robertsona-Walkera:



Rysunek 4.4: Opcje wyboru czasoprzestrzeni.

Poniższa ilustracja przedstawia dozwolone w programie kombinacje parametrów i odpo-

wiadającym im czasoprzestrzeni. Wystąpienie null oznacza brak oznaczonych parametrów.

```

null => "Minkowski",
M => "Schwarzschild",
Lambda => "de Sitter",
H => "Friedman-Robertson-Walker",
M | Q => "Reissner-Nordstrøm",
M | a => "Kerr",
M | Lambda => "(A)dS-Schwarzschild",
M | n => "Taub-NUT",
M | Q | a => "Kerr-Newman",
M | Q | Lambda => "(A)dS-Reissner-Nordstrøm",
M | a | Lambda => "(A)dS-Kerr",
M | Q | a | Lambda => "(A)dS-Kerr-Newman",

```

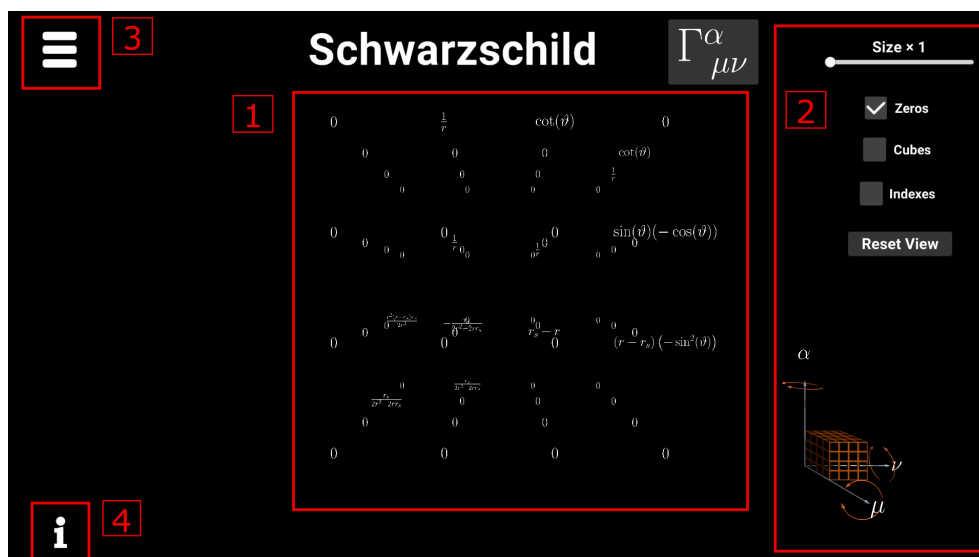
Rysunek 4.5: Relacje kombinacji parametrów z czasoprzestrzeniami.

Przycisk *Apply* zatwierdza wybór czasoprzestrzeni – rozpoczyna pobieranie tekstur oraz przenosi do wizualizacji.

Przycisk *Back* przenosi z powrotem do menu głównego.

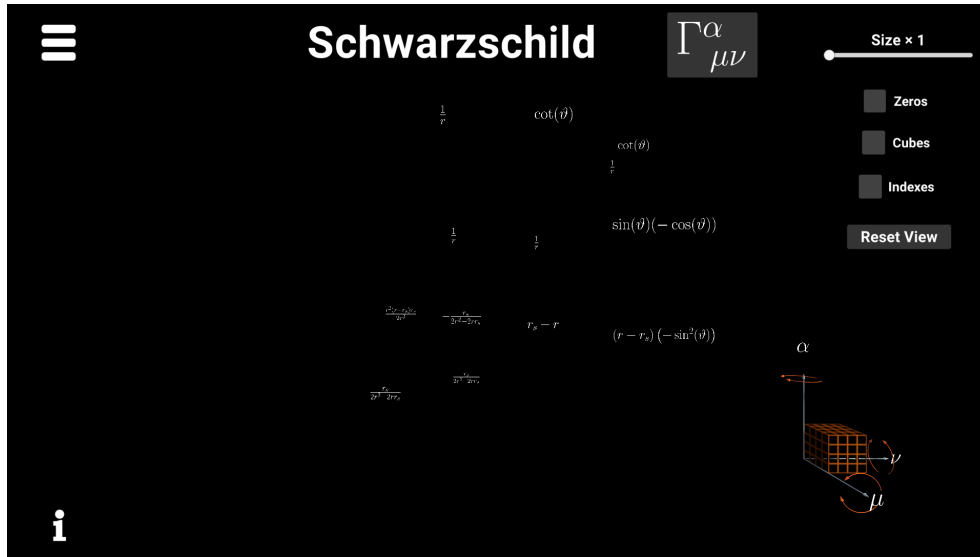
4.2 Wizualizacja

Po przejściu do wizualizacji ukazują się komponenty koneksji ułożone w kształt sześciangu zbudowanego z 64 formuł (duży blok) – numer 1:



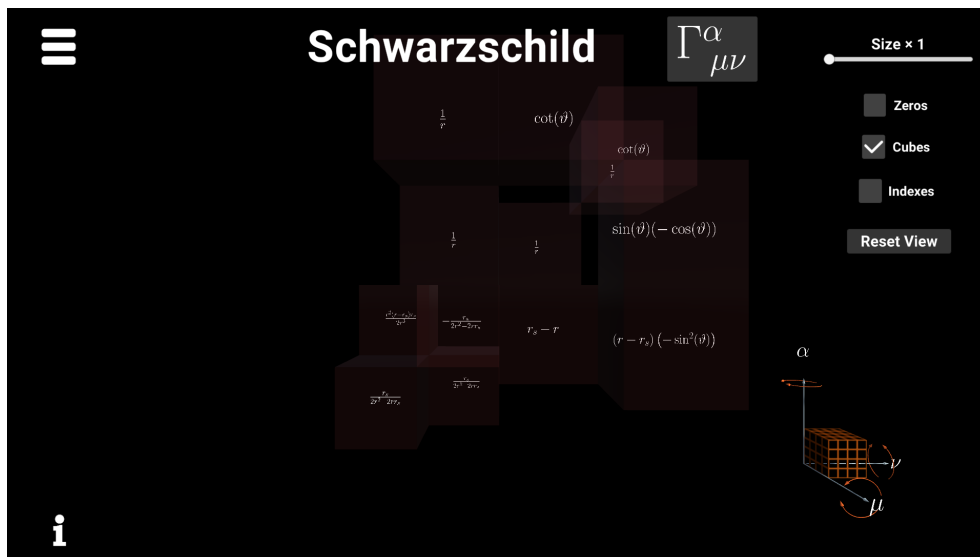
Rysunek 4.6: Wizualizacja z włączoną nakładką narzędzi.

Numerem 2 oznaczono narzędzia służące do obsługi wizualizacji. Suwak pod napisem $Size \times 1$ służy do zwiększania rozmiaru formuł komponentów. Przełącznik poniżej, oznaczony *Zeros*, kontroluje wyświetlanie komponentów o wartości zero. Poniżej wizualizacja po wyłączeniu zerowych segmentów:



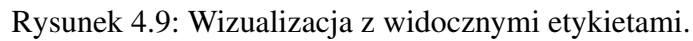
Rysunek 4.7: Wizualizacja ze schowanymi zerowymi komponentami.

Przełącznik *Cubes* włącza podświetlanie małych sześciątów, które otaczają każdą formułę:



Rysunek 4.8: Wizualizacja z podświetlonymi sześciątami.

Wciśnięcie klawisza C lub przełączenie *Indexes* skutkuje wyświetleniem etykiet komponent-



1. Za pomocą zaokrąglonych strzałek umieszczonych wokół osi układu współrzędnych można obracać dużą kostkę. Naciśnięcie na jedną z nich skutkuje obrotem całej struktury wokół osi, obok której znajduje się strzałka, w kierunku który wskazuje.
2. Pokazuje orientację kamery względem bloku oraz osi układu współrzędnych (tzn. pokazuje jak rosną indeksy w różnych kierunkach osi).

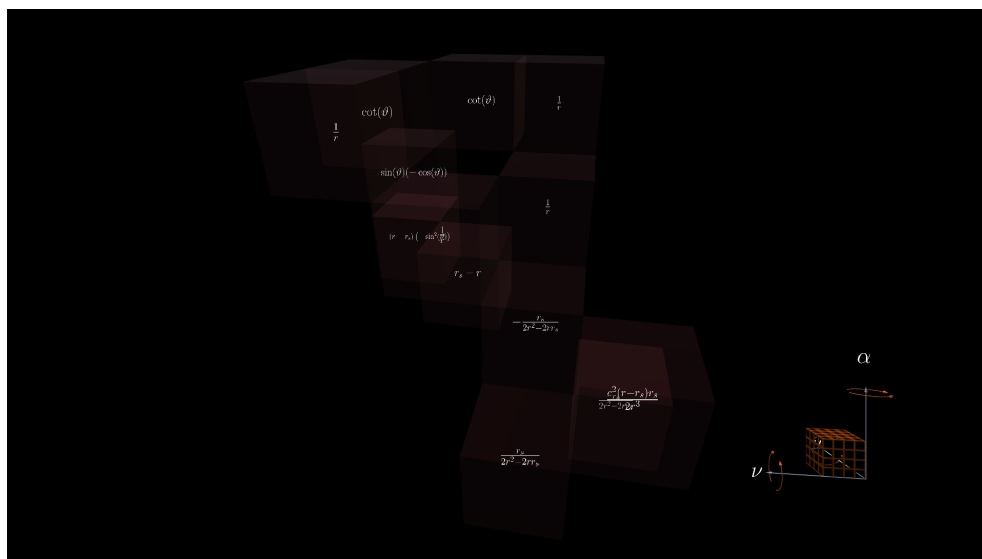
Numerem 4 oznaczono przycisk wyświetlający widok przedstawiający przypisania klawiszy na klawiaturze do funkcji podobny jak w *Navigation Keys* (4.3). Ten sam efekt można osiągnąć przytrzymując K.

30

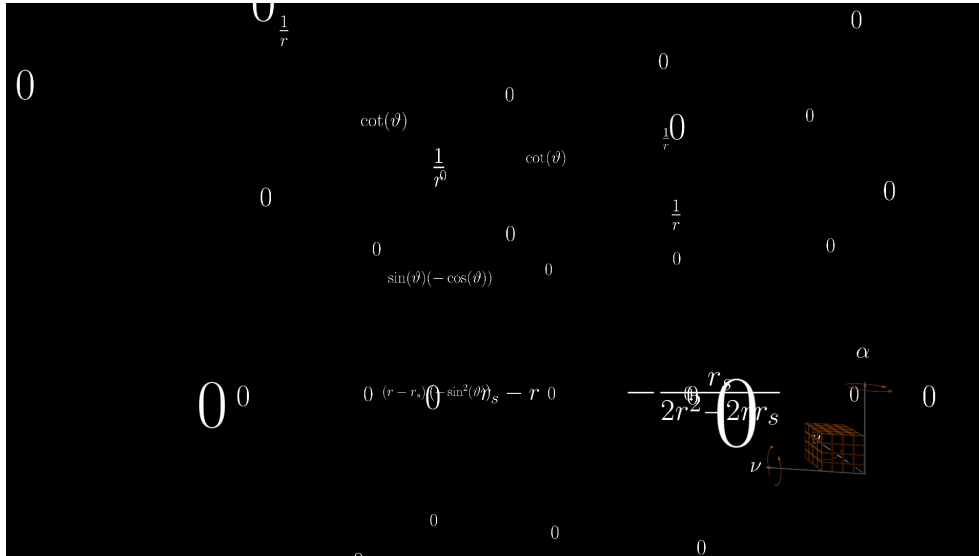
wszystkie elementy interfejsu widoczne na powyższych zrzutach oprócz małej kostki w prawym dolnym rogu. Orientację kamery można zmienić ruszając myszą, natomiast jej pozycje za pomocą przycisków:

- W – do przodu,
- S – do tyłu,
- A – w lewo,
- D – w prawo,
- Q – do góry
- E – w dół,
- lewy Shift – przytrzymany przyspiesza ruch,
- lewy Ctrl – przytrzymany spowalnia ruch.

Ruszając kamerą można obserwować koneksje z różnych perspektyw i odległości. Jednocześnie manipulując myszą i klawiszami można zbliżyć się na dowolną odległość do sześciangu, a nawet wlecieć do środka.



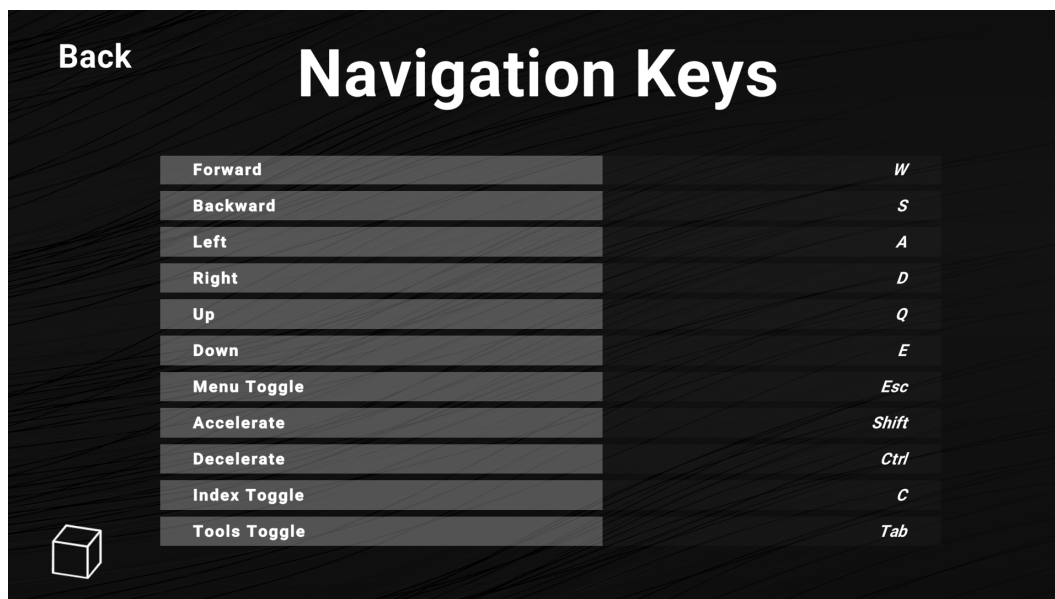
Rysunek 4.10: Wizualizacja z wyłączoną nakładką narzędzi.



Rysunek 4.11: Widok z wnętrza dużego bloku.

Ponownie przyciśnięcie Tab zamraża kamerę i z powrotem wyświetla interfejs, natomiast Esc skutkuje wyświetleniem ostatnio otwartego widoku menu.

4.3 Klawisze Nawigacji

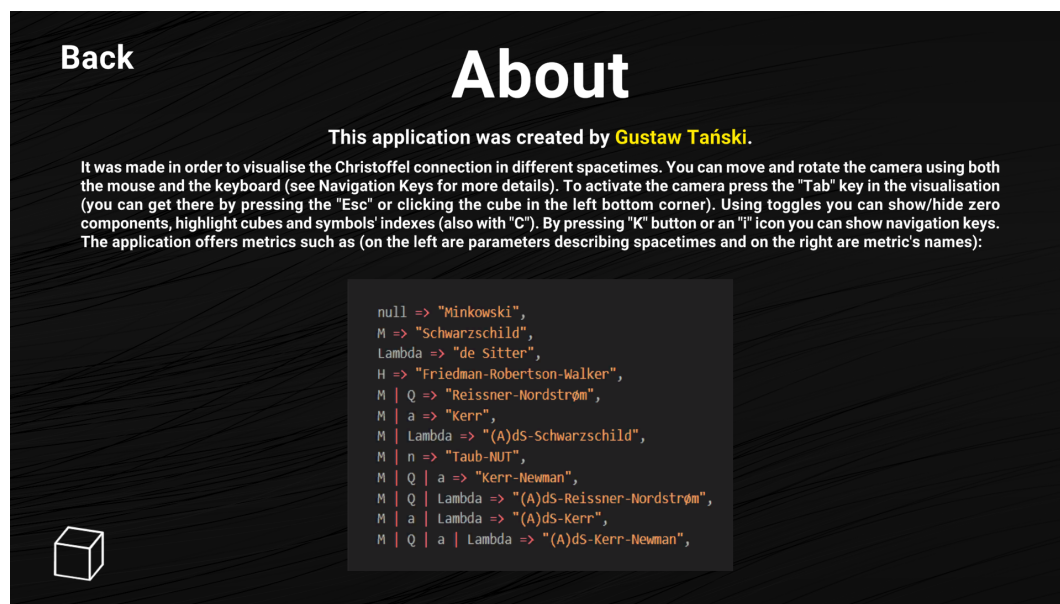


Rysunek 4.12: Lista przypisań klawiszy do funkcji.

W tym widoku przedstawione są w postaci tabeli wszystkie przyciski używane w programie. W lewej kolumnie znajdują się funkcje klawiszy, podczas gdy w prawej ich nazwy. Każde przypisanie przycisku do roli można zmienić poprzez naciśnięcie odpowiedniej komórki po prawej stronie. Wtedy należy wcisnąć przycisk, który ma zostać przypisany.

4.4 O Programie

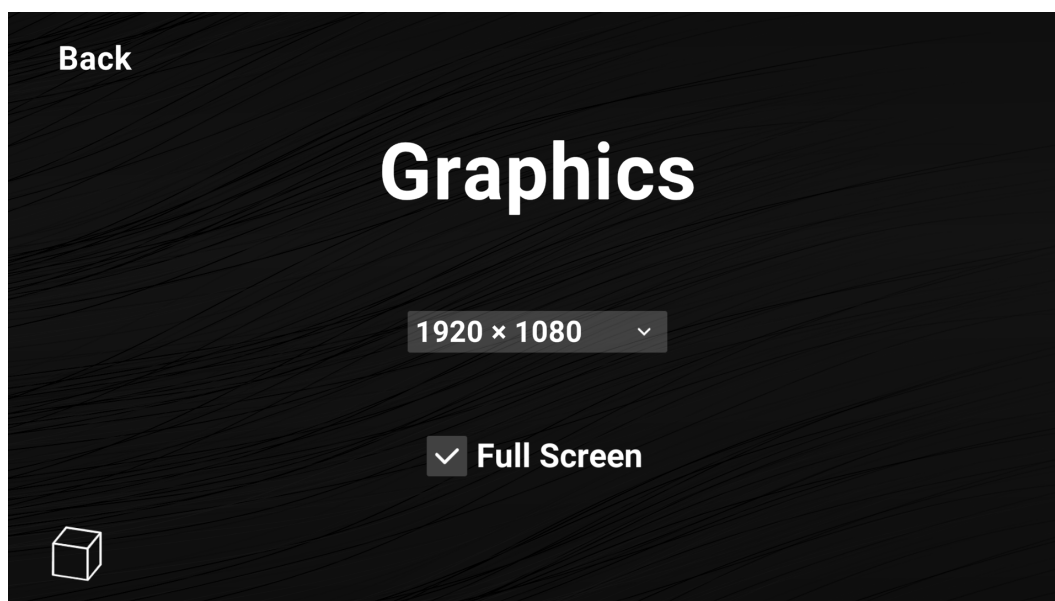
Ten widok oferuje podstawowe informacje dotyczące samego programu i jego obsługi.



Rysunek 4.13: Krótki opis programu.

4.5 Grafika

Sekcja *Graphics* oferuje możliwość zmiany rozdzielczości, w której wyświetlany jest program oraz przełączenie między trybem pełnoekranowym a trybem okienkowym.



Rysunek 4.14: Opcje grafiki.

Rozdział 5

Podsumowanie

W niniejszej pracy udało się stworzyć wizualizator koneksji Christoffela. W jego ramach można wyświetlać kilkanaście podstawowych w Ogólnej Teorii Względności metryk czterowymiarowej czasoprzestrzeni. Dzięki możliwości kolorowania bloków, wyłączania zerowych komponentów, przemieszczania się wokół oraz obrotu wizualizacji koneksji możliwe jest obserwowanie jej struktury, co być może doprowadzi kiedyś do dokonania pewnych obserwacji dotyczących się konfiguracji symboli Christoffela w zależności od parametrów czasoprzestrzeni, którą opisują.

Program można by rozwinąć poprzez dodanie możliwości ładowania samodzielnie wygenerowanych koneksji Christoffela, poprzez wprowadzenie dowolnej metryki i generowanie koneksji dla n -wymiarowej czasoprzestrzeni (lub przestrzeni), a także innych tensorów trzeciego rzędu (niekoniecznie o stałym wymiarze). Wówczas należałoby też rozwinąć sekcję wyboru metryki – oddzielić załadowane przez użytkownika koneksje od bazowych oraz same koneksje od innych tensorów. Inną możliwością rozwoju jest oddanie użytkownikowi kontroli w wyborze serwera generującego formuły matematyczne w postaci obrazów z rozszerzeniem .png. Aby móc korzystać ze stworzonego w pracy systemu wyświetlania formuł matematycznych zapisanych w postaci kodu \LaTeX w innych projektach, należałoby wydzielić ten moduł w postaci osobnej biblioteki.

Dość ciekawe byłoby też zmierzenie się z próbą wizualizacji czterowymiarowego bloku tensora Riemanna.

Bibliografia

- [1] S. W. Hawking i G. F. R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973, s. 351. DOI: 10.1017/CB09780511524646.
- [2] L. D. Landau i E. M. Lifszyc. *Teoria Pola*. Warszawa: PWN, 1979.
- [3] Sean M. Carroll. *Lecture Notes on General Relativity*. 1997. arXiv: gr-qc/9712019 [gr-qc].
- [4] J. B. Griffiths i J. Podolský. „A new look at the Plebański-Demiański family of solutions”. W: *International Journal of Modern Physics D* 15.03 (mar. 2006), s. 335–369. ISSN: 1793-6594. DOI: 10.1142/s0218271806007742. URL: <http://dx.doi.org/10.1142/S0218271806007742>.
- [5] Petr Hájíček. *An Introduction to the Relativistic Theory of Gravitation, Lecture Notes in Physics, Volume 750. ISBN HASH(0x39d8000). Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008, p. T. 750*. Sty. 2008, s. 243. DOI: 10.1007/978-3-540-78659-7.
- [6] Thomas Mueller i Frank Grave. *Catalogue of Spacetimes*. 2010. arXiv: 0904.4184v3 [gr-qc].
- [7] Sean Carroll. *Spacetime And Geometry. An Introduction to General Relativity*. Harlow: Pearson Education Limited, 2014.
- [8] Andrew Troelsen i Philip Japikse. *C# 6.0 and the .NET 4.6 Framework*. 7th. USA: Apress, 2015. ISBN: 1484213335.
- [9] Remigiusz Durka. *The first law of black hole thermodynamics for Taub-NUT space-time*. 2019. arXiv: 1908.04238 [gr-qc].

- [10] <https://www.json.org/>. 2020.
- [11] *LaTeX – about*. <https://www.latex-project.org/about/>. 2020.
- [12] *Mathematica’s Documentation*. <https://reference.wolfram.com/>. 2020.
- [13] *Unity Manual*. <https://docs.unity3d.com/Manual/index.html>. 2020.