INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Avaliação V - Processos Estocasticos

Vetor Gaussiano de Média Nula

Arthur Cadore Matuella Barcella

11 de novembro de 2023

Sumário

1 Questão a ser desenvolvida:

Um vetor gaussiano $\tilde{X} = [X1X2X3]^T$ tem média nula e matriz covariância

$$\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine:

- Pr[3 <= X1 <= 4]
- Pr[3 <= X1 <= 4 e X3 < 0]
- Pr[3 <= X1 <= 4 e X3 < 0 | X2 = 3]
- Pr[X1 + X2 + X3 > 2]

2 Desenvolvimento

2.1 Determinando Pr[3 <= X1 <= 4]:

Para determinar a Pr[3 <= X1 <= 4], utilizamos a equação abaixo:

$$Pr[a <= X <= b] = \phi\left(\frac{b-u}{\sigma}\right) - \phi\left(\frac{a-u}{\sigma}\right)$$

Aplicando a equação acima, temos que:

$$Pr[3 <= X1 <= 4] = \phi\left(\frac{4-u}{\sqrt{9}}\right) - \phi\left(\frac{3-u}{\sqrt{9}}\right) = 0.067444$$

Abaixo está o script correspondente ao primeiro item (no script também esta o inicio do código utilizado):

```
clear all; close all ; clc;
pkg load statistics;

N = 100000;  % Numero de experimentos probabilisticos
% ============================================================================

u = [0;0;0]; % Vetor média
C = [ 9 2 0; 2 4 0; 0 0 1]; % Matriz covariaância

 % Criando a matriz a partir do vetor e a matriz covariância.
vetX = mvnrnd(u, C, N);

X1 = vetX(:,1)'; % Cria o X1, com os valores da primeira coluna de vetX.
X2 = vetX(:,2)'; % Cria o X2, com os valores da primeira coluna de vetX.
X3 = vetX(:,3)'; % Cria o X3, com os valores da primeira coluna de vetX.

% ============================================================================
% a) Pr[3 <= X1 <= 4]

A_PrSim = mean(( 3 <= X1 ) & ( X1 <= 4 ))
A_PrTeo = normcdf(4/sqrt(9)) - normcdf(3/sqrt(9))
```

2.2 Determinando Pr[3 <= X1 <= 4 e X3 < 0]:

Para a segunda questão, utiliza-se também a equação demonstrada na primeira questão, dessa forma:

$$Pr[3 <= X1 <= 4, X3 < 0] = \phi\left(\frac{4-u}{\sqrt{9}}\right) - \phi\left(\frac{3-u}{\sqrt{9}}\right)$$

Como pode-se vericar na matriz covariância dada no enunciado, temos que:

$$cov[X2, X3] = 0$$

Dessa forma, a equação torna-se a seguinte:

$$Pr[3 <= X1 <= 4, X3 < 0] = \phi\left(\frac{4-u}{\sqrt{9}}\right) - \phi\left(\frac{3-u}{\sqrt{9}}\right) = 0.067444$$

Para validar o calculo, abaixo está o script para a segunda questão:

```
% b) Pr[3 <= X1 <= 4 e X3 < 0]

B_idx = (-0.5 <= X3) & ( X3 <= 0.5);
B_X_cond = X1(B_idx);
B_PrSim = mean(3 <= B_X_cond & B_X_cond <= 4)
B_PrTeo = normcdf(4/sqrt(9)) - normcdf(3/sqrt(9))
```

2.3 Determinando Pr[3 <= X1 <= 4 e X3 < 0 | X2 = 3]:

Para resolver a questão 3, abaixo está a anotação do VA gaussiano especificado:

$$\vec{X}\ \vec{N}(\vec{\mu}, C)$$

Dessa forma, temos que:

$$\begin{pmatrix} X1 \\ X2 \end{pmatrix} N \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right)$$

A função para encontrar a probabilidade é dada pela seguinte equação:

$$Pr[3 <= X1 <= 4eX3 < 0|X2 = 3] \rightarrow Fx(X1|X2 = 3) = \frac{F_{X1,X2}(X1, 3)}{Fy(3)}$$

Inicialmente, vamos resolver o numerador. Precisaremos analisar a PDF da distribuição gaussiana multidimensional para o X2 passado como parâmetro, para isso, temos que:

$$f(X1|X2 = 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \times detC}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(X1 - 0, 3 - 0)\begin{pmatrix} \frac{9}{32} & \frac{-1}{16} \\ \frac{-1}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X1 - 0 \\ 3 - 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$f(X1|X2 = 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \times 32}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}(X1, 3)\begin{pmatrix} \frac{9}{32} & \frac{-1}{16} \\ \frac{-1}{16} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$$

Feito o calculo da multiplicação de matrizes/vetores em calculadora (não registrado), o resultado é o seguinte:

$$f(X1|X2 = 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \times 32}}\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{32}(3X^2 - 4X + 12)\right)\right)$$

Agora para o denominador, temos que:

$$F(Y = 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi 3}}\right) \exp\left(-\frac{3}{2}\right)$$

Dessa forma, temos que:

$$\frac{F_{X1,X2}(X1,3)}{Fy(3)} = \frac{Numerador}{Denominador} = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{64\pi}}\right) \exp\left(-\frac{3}{64}(3X^2 - 4X + 12)\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{6\pi}}\right) \exp\left(-\frac{3}{2}\right)}$$

$$\frac{F_{X1,X2}(X1,3)}{Fy(3)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{64}(12 - 4x + 3x^2)\right) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \exp\left(1 - \frac{1}{64}(3x - 2)^2\right)$$

$$\frac{F_{X1,X2}(X1,3)}{Fy(3)} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \exp\left(1 - \frac{1}{2}\frac{(3x - 2)^2}{32}\right)$$

A partir desse valor, podemos calcular a probalidade da seguinte maneira:

$$(X1, X2)\ N \begin{pmatrix} 2 \\ 32 \end{pmatrix}$$

E finalmente, aplicamos na equação inicial:

$$Pr[3 <= X1 <= 4eX3 < 0|X2 = 3] = \phi\left(\frac{4-2}{\sqrt{32}}\right) - \phi\left(\frac{3-2}{\sqrt{32}}\right) = 0.068005$$

Para demonstrar o seguinte calculo de maneira simulada, utilizei o seguinte script:

```
% c) Pr[3 <= X1 <= 4 e X3 < 0 | X2 = 3]

C_idx = (2.8 <= X3) &( X3 <= 3.2)  & (-0.5 <= X2) &( X2 <= 0.5);
C_X_cond  = X1(C_idx);
C_PrSim = mean(3 <= C_X_cond & C_X_cond <= 4)
C_PrTeo =  normcdf((4-2)/sqrt(32)) - normcdf((3-2)/sqrt(32))
```

2.4 Determinando Pr[X1 + X2 + X3 > 2]:

Para encontrar X1 + X2 + X3 > 2, temos que:

$$W = X1 + X2 + X3$$

$$u_W = A\mu_{\vec{X}} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ X3 \end{pmatrix} = 0$$

$$C_W = AC_XA^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 9 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 6 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 18$$

Agora aplicamos o valor encontrado na equação da primeira questão, dessa forma temos que:

$$Pr[W > 2] = \phi\left(\frac{\infty - 0}{\sqrt{18}}\right) - \phi\left(\frac{4 - 0}{\sqrt{18}}\right) = 0.3187$$

```
% d) Pr[X1 + X2 + X3 > 2]

D_PrSim = mean((X1+X2+X3) > 2)
D_PrTeo = 1 - normcdf((2-0)/sqrt(18))
```

3 Referências bibliográficas

Processos Estocásticos - Vetores aleatórios gaussianos