INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Avaliação I - Processos Estocasticos

Simulação de Monte Carlo

Arthur Cadore Matuella Barcella

25 de setembro de 2023

Sumário

1 Questão a ser desenvolvida:

Simule (Monte Carlo) todos os itens da questão no Octave/MATLAB.

- A avaliação é individual. Não é permitida a troca de nenhum tipo de informação sobre a avaliação entre os alunos.
- Calculadoras, softwares, livros e outros materiais podem e devem ser utilizados, mas todos os seus passos devem ser justificados.
- E permitido o envio de manuscrito digitalizado (ex: foto) ou de documento digitado. ´
- Deverá ser enviado um único arquivo em formato .zip pelo SIGAA, contendo um arquivo .pdf e um ou mais arquivos .m.
- Deverá ser respeitada a data de fechamento indicada no SIGAA. Não serão aceitos envios por email.
- Dúvidas? Entre em contato.

1.1 Questão Sorteada:

Seja B1, B2 e B3 variáveis aletórias sorteadas independentemente.

$$B_1, B_2, B_3 \sim Bern(\frac{3}{4})$$

$$X = B_1 + B_2 + B_3$$

$$Y = B_1(B_2 + B_3)$$

1. Determine a PMF conjunta de X e Y.
2. Determine e esboce as PMFs marginais de X e Y.
3. Determine e esboce as PMFs condicionais de X dado que Y = y, para dois valores de y e SY á sua escolha.

2 Desenvolvimento

2.1 PMF conjunta de X e Y:

Para demonstrar a PMF conjunta de X e Y, utilizamos a função massa probabilidade conjunta, classificamos todos os possiveis casos determinando a probabilidade de cada caso e o valor de cada variável:

FONTE: Elaborado pelo autor

B1	B2	B3	PB1	PB2	PB3	X	Y	Pr
0	0	0	1/4	1/4	1/4	0	0	1/64
0	0	1	1/4	1/4	3/4	1	0	3/64
0	1	0	1/4	3/4	1/4	1	0	3/64
0	1	1	1/4	3/4	3/4	2	0	9/64
1	0	0	3/4	1/4	1/4	1	0	3/64
1	0	1	3/4	1/4	3/4	2	1	9/64
1	1	0	3/4	3/4	1/4	2	1	9/64
1	1	1	3/4	3/4	3/4	3	2	27/64
							Probabilidade Total:	1

Figura 1: PMF conjunta de X e Y

A tabela acima apresenta todos os possiveis casos que podem ser originados ao sortear cada variavel (B1, B2 e B3). Como a questão solicitou bernoulli como probabilidade do sorteio, quando um sorteio resulta em 1, ele assume a própria probabilidade de bernoulli, portanto 3/4.

Dessa forma, os valores de PB1, PB2 e PB3 determinam o valor de probabilidade para cada caso. Os valores de X e Y são calculados atraves das equações repassadas pela questão, portanto:

$$X = B_1 + B_2 + B_3$$

$$Y = B_1(B_2 + B_3)$$

E a coluna 'Pr' corresponde a probabilidade resultante de cada caso, que nada mais é que a multiplicação das colunas PB1, PB2 e PB3.

Lembrando que a soma das probabilidades resultantes precisa ser igual á 1, dessa forma, se faz a seguinte verificação:

$$\frac{1}{64} + \frac{3}{64} + \frac{3}{64} + \frac{9}{64} + \frac{3}{64} + \frac{9}{64} + \frac{9}{64} + \frac{27}{64} = 1$$

Dessa forma podemos definir a tabela da PMF conjunta de X e Y, mapeando todos os casos:

FONTE: Elaborado pelo autor

PMF Conjunta de X e Y		X			
		0	1	2	3
Y	0	1/64	9/64	9/64	0
	1	0	0	18/64	0
	2	0	0	0	27/64
	3	0	0	0	0

Figura 2: PMF conjunta de X e Y

No matlab, a definição da PMF Conjunta teórica de X e Y é dada pelo seguinte script:

```
% Item a:
% Item a:

% Calculo de PMF Conjunta de X e Y (Simulada e Teórica):
pmfXY_sim = hist3([X' Y'], {x, y}) / N
pmfXY_teo = [1/64 0     0     0;
             9/64 0     0     0;
             9/64 18/64 0     0;
             0    0     27/64 0]

% OBS: Como nesse item não foi necessário plot,
% mative sem ';' para comparação no terminal.
```

2.2 PMF Marginais de X e Y:

A PMF marginal de X e Y é calculada através da tabela apresentada anteriormente, somando as probabilidades dos eventos e criando uma nova coluna/linha nas margens da tabela, conforme abaixo:

FONTE: Elaborado pelo autor

PMF Marginal		X				P(y)
		0	1	2	3	
Y	0	1/64	9/64	9/64	0	19/64
	1	0	0	18/64	0	18/64
	2	0	0	0	27/64	27/64
	3	0	0	0	0	0
P(x)		1/64	9/64	27/64	27/64	1

Figura 3: PMF marginal de X e Y

Nesta tabela também se faz uma verificação das probabilidades obtidas, onde tanto a P(x) quanto a P(y) precisa ser igual á 1.

$$P(y) = \frac{19}{64} + \frac{18}{64} + \frac{27}{64} = 1$$

$$P(x) = \frac{1}{64} + \frac{9}{64} + \frac{27}{64} + \frac{27}{64} = 1$$

No matlab, a definição da PMF Marginal teórica de X e Y é dada pelo seguinte script:

```
% Item b:

% Calculo de PMF Marginal de X e Y (Simulada e Teórica):
pmfX_sim = hist(X, x) / N;
pmfX_teo = [1/64 9/64 27/64 27/64];
pmfY_sim = hist(Y, y) / N;
pmfY_teo = [19/64 18/64 27/64 0];


% Impressao da PMF Marginal de X e Y (Simulada e Teórica):
figure;
subplot(2, 1, 1); hold on; grid on;
```

```
bar(x, pmfX_sim, 'y');
stem(x, pmfX_teo, 'b', 'LineWidth', 4);
xlabel('x'); ylabel('p_X(x)');

subplot(2, 1, 2); hold on; grid on;
bar(y, pmfY_sim, 'y');
stem(y, pmfY_teo, 'b', 'LineWidth', 4);
xlabel('y'); ylabel('p_Y(y)');
```

Após a execução e plotagem no matlab, os seguintes gráficos foram obtidos para a PMF Marginal de X e Y:

FONTE: Elaborado pelo autor

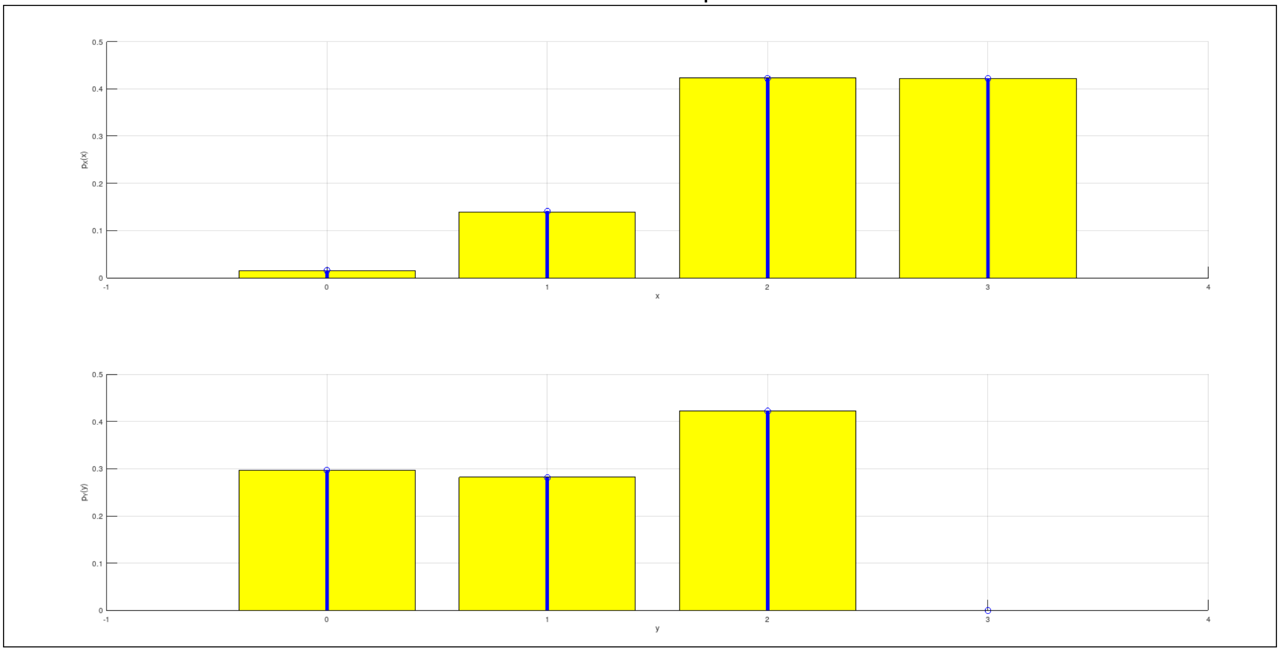

Figura 4: Plotagem da PMF marginal de X e Y

Na imagem acima o Px(X) é o gráfico superior da imagem, enquanto que o Py(Y) é o gráfico inferior da imagem.

2.3 PMF condicionais de X:

A questão solicitou a PMF condicional de X dado que Y=y, sendo que y serão dois valores escolhidos, dessa forma, defini os seguintes valores para y:

$$y = 0, y = 1$$

Para calcular a PMF condicional de uma variável dado o valor de outra variável, utiliza-se a seguinte equação:

$$PX(\frac{X}{Y}|Y) = \frac{P_{X,Y}(X,Y)}{P_Y(y)}$$

Dessa forma, aplicando em y = 0 temos que:

$$Px(X = 0|y = 0) = \frac{P(x = 0|Y = 0)}{P_Y(y = 0)} = \frac{\frac{1}{64}}{\frac{19}{64}} = \frac{1}{19}$$

$$Px(X = 1|y = 0) = \frac{P(x = 1|Y = 0)}{P_Y(y = 0)} = \frac{\frac{9}{64}}{\frac{19}{64}} = \frac{9}{19}$$

$$Px(X = 2|y = 0) = \frac{P(x = 2|Y = 0)}{P_Y(y = 0)} = \frac{\frac{9}{64}}{\frac{19}{64}} = \frac{9}{19}$$

$$Px(X = 3|y = 0) = \frac{P(x = 3|Y = 0)}{P_Y(y = 0)} = \frac{0}{\frac{19}{64}} = 0$$

Da mesma maneira, aplicando em y = 1 temos que:

$$Px(X = 0|y = 1) = \frac{P(x = 0|Y = 1)}{P_Y(y = 1)} = \frac{0}{\frac{18}{64}} = 0$$

$$Px(X = 1|y = 1) = \frac{P(x = 1|Y = 1)}{P_Y(y = 1)} = \frac{0}{\frac{18}{64}} = 0$$

$$Px(X = 2|y = 1) = \frac{P(x = 2|Y = 1)}{P_Y(y = 1)} = \frac{\frac{18}{64}}{\frac{18}{64}} = 1$$

$$Px(X = 3|y = 1) = \frac{P(x = 1|Y = 1)}{P_Y(y = 1)} = \frac{0}{\frac{18}{64}} = 0$$

Ao juntar os resultados temos a seguinte tabela apresentando todos os possiveis casos para as probabilidades condicionais:

FONTE: Elaborado pelo autor

X	0	1	2	3
PX(Y=0)	1/19	9/19	9/19	0
PX(Y=1)	0	0	1	0

Figura 5: PMF Condicional de X e Y

No matlab, a definição da PMF Condicional teórica de X e Y é dada pelo seguinte script:

```
% Item c:

pmfX_condY_sim = zeros(2, 4); % Cria um vertor de zeros

% Calculo da PMF condicional de X dado que PY(y) = 0 e 1
XcondY = X(Y == 0); % Quando PY(y) = 0
pmfX_condY_sim(1, :) = hist(XcondY, x) / sum(Y == 0);
XcondY = X(Y == 1); % Quando PY(y) = 1
pmfX_condY_sim(2, :) = hist(XcondY, x) / sum(Y == 1);

% Definição da PMF condicional teórica de X dado que PY(y) = 0 e 1
pmfX_condY_teo = [1/19 9/19 9/19 0;
                  0    0    1    0];

% Impressão das PMFs condicionais de X dado que PY(y) = 0 e 1
figure;
subplot(2, 1, 1); hold on; grid on;
bar(x, pmfX_condY_sim(1, :), 'y');
stem(x, pmfX_condY_teo(1, :), 'b', 'LineWidth', 4);
xlabel('x'); ylabel(sprintf('p_X(x | Y = 0)'));

subplot(2, 1, 2); hold on; grid on;
bar(x, pmfX_condY_sim(2, :), 'y');
```

```
stem(x, pmfX_condY_teo(2, :), 'b', 'LineWidth', 4);
xlabel('x'); ylabel(sprintf('p_X(x | Y = 1)'));
```

Após a execução e plotagem no matlab, os seguintes gráficos foram obtidos para a PMF Condicional de X dado um valor de Y:

FONTE: Elaborado pelo autor

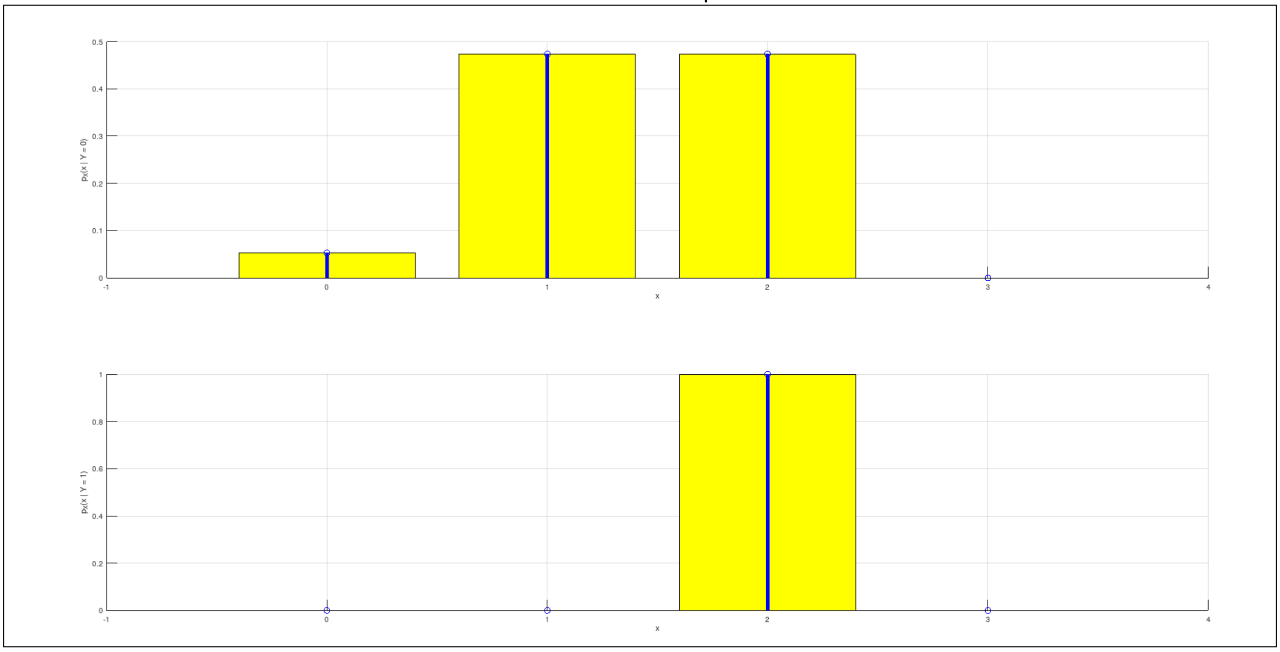

Figura 6: PMF Condicional de X e Y

Na imagem acima o gráfico superior da imagem corresponde a Px(X) dado que y=0, enquanto que o gráfico inferior da imagem corresponde a Px(X) dado que y=1.

3 Referências bibliográficas

Variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas