INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Câmpus
São José

Avaliação I - Processos Estocasticos

Variaveis aleatórias com PDF conjunta constante

Arthur Cadore Matuella Barcella

08 de outubro de 2023

Sumário

1 Questão a ser desenvolvida:

Considere duas variáveis aleatórias X e Y com PDF conjunta constante (igual a k) e diferente de zero apenas na área sombreada da figura abaixo.

FONTE: Elaborado pelo autor

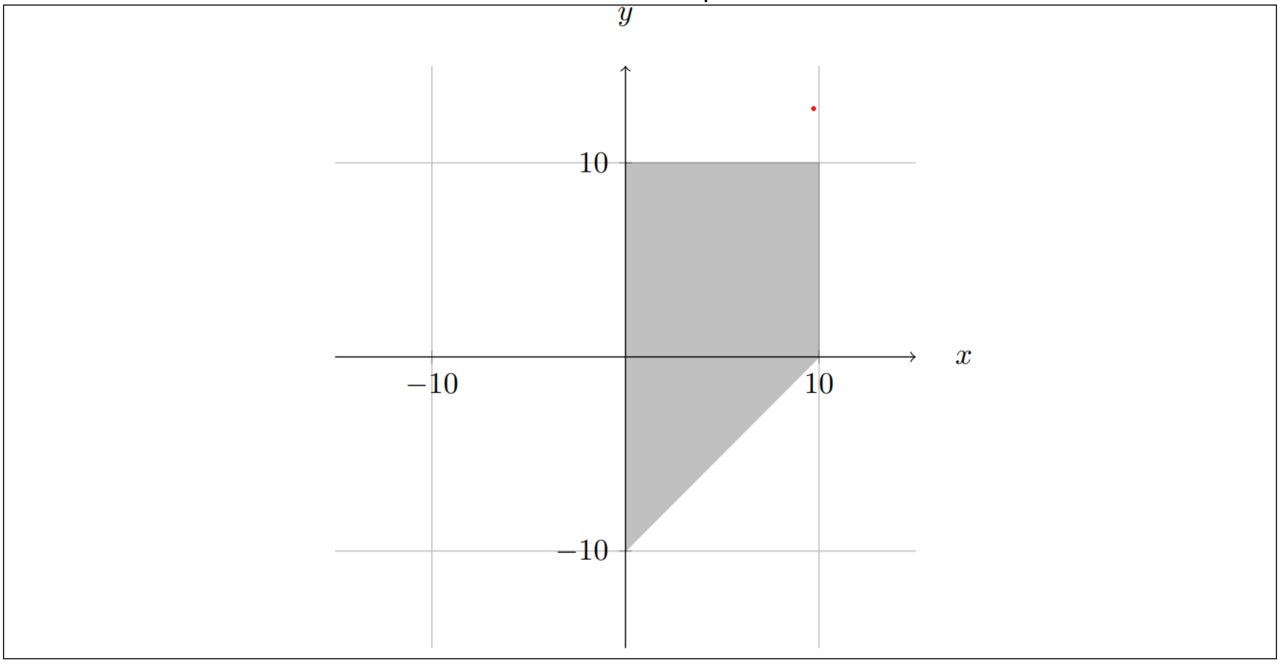

Figura 1: Questão a ser desenvolvida

1. Determine o valor da constante k.
2. Determine Pr[X >= Y].
3. Determine e esboce a PDF marginal de Y .
4. Determine e esboce a CDF marginal de Y .
5. Determine e esboce a PDF condicional de Y dado X = 5.
6. Determine a covari^ancia entre X e Y .

2 Desenvolvimento

2.1 O valor da constante k:

Para determinar o valor da constante "k"precisamos utilizar a propriedade abaixo, que determina que a integral sobre sobre a área de PDF de x deve ser igual á "1":

$$\int A_{pdf} k dx dy = 1$$

Seguindo a imagem passada, os limites de integração são determinados a seguir:

FONTE: Elaborado pelo autor

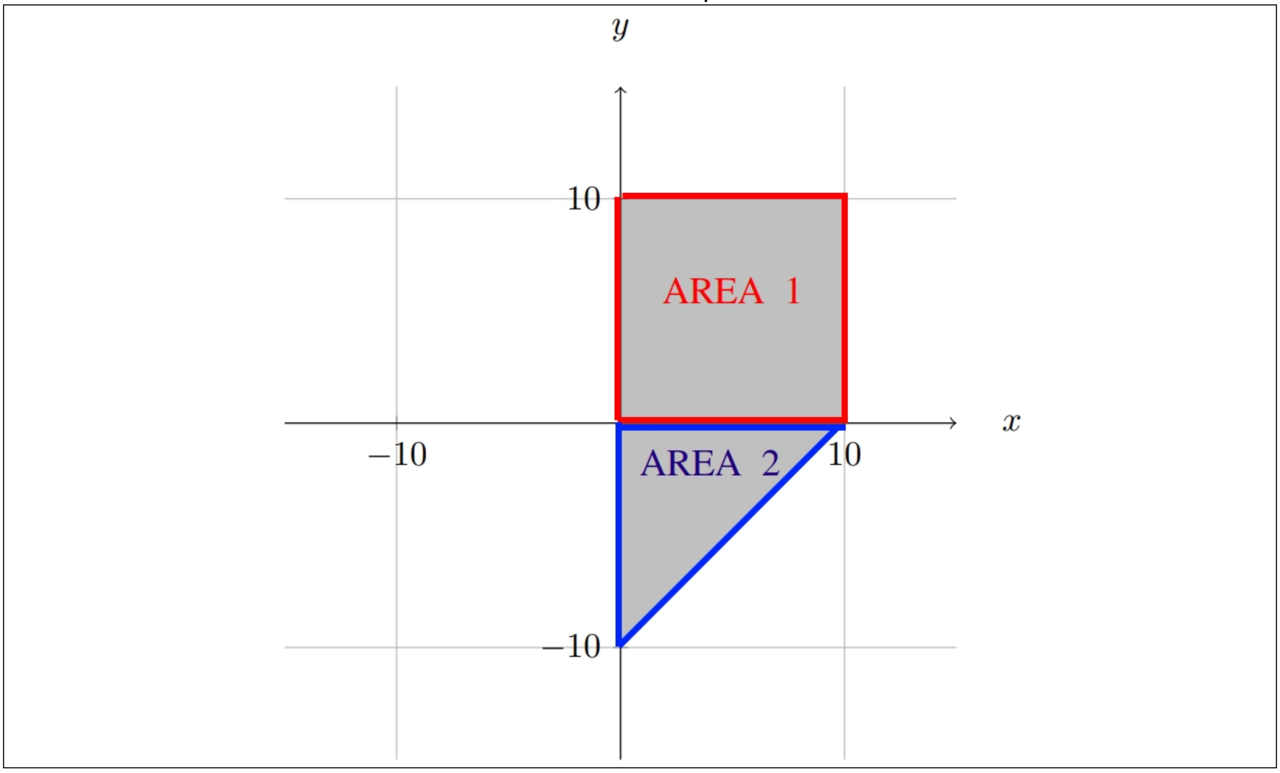

Figura 2: Areas de integração delimitadas

Como se trata de suas figuras geométricas simples, podemos calculalas separadamente, com as seguintes fórmulas:

$$AREA1 = B.L \rightarrow 10.10 = 100$$

$$AREA2 = \frac{B.L}{2} \rightarrow \frac{10.10}{2} \rightarrow \frac{100}{2} = 50$$

Dessa forma, é possivel determinar a area total da região somando ’A1’ (AREA1) e ’A2’ (AREA2):

$$At = A1 + A2 \rightarrow 100 + 50 = 150$$

Dessa forma, como o valor da constante "k"multiplicado pela área precisa ser igual á "1"temos que:

$$At.k = 1 \rightarrow k = \frac{1}{At} \rightarrow k = \frac{1}{150}$$

2.2 Pr[X >= Y]:

Para calcular o valor de Pr[X >= Y], incialmente precisei alterar a área para respeitar a condição de [X >= Y], abaixo está a nova área:

FONTE: Elaborado pelo autor

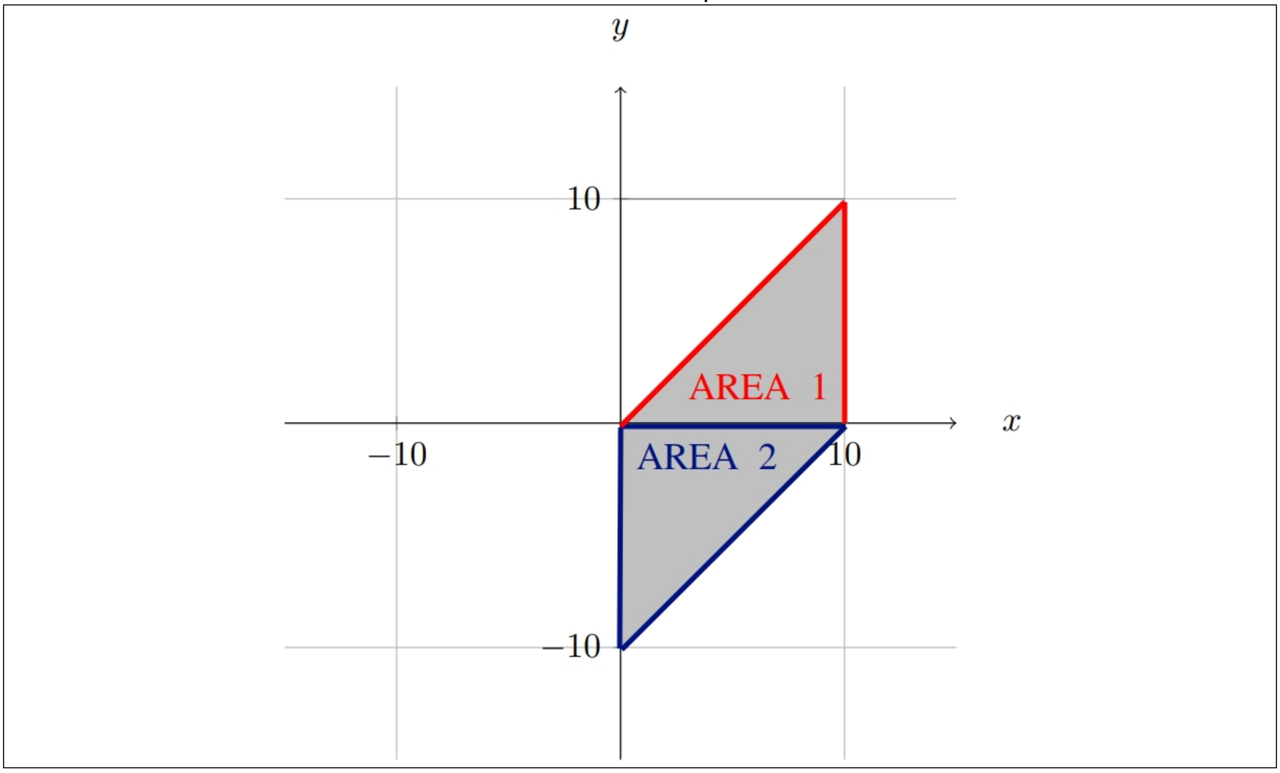

Figura 3: Areas de integração delimitadas com X>=Y

Em seguida, devido ao formato geometrico da área, é possivel calcular a nova área total sombreada através da soma de duas equações de área do triângulo, conforme representado abaixo:

$$A1(Pr[X >= Y]) = \frac{B.L}{2} \rightarrow \frac{10.10}{2} \rightarrow \frac{100}{2} = 50$$

$$A2(Pr[X >= Y]) = \frac{B.L}{2} \rightarrow \frac{10.10}{2} \rightarrow \frac{100}{2} = 50$$

Dessa forma, é possivel determinar a area total da região somando 'A1' (AREA1) e 'A2' (AREA2):

$$At(Pr[X >= Y]) = A1(Pr[X >= Y]) + A2(Pr[X >= Y]) \rightarrow 50 + 50 = 100$$

Para obter o valor de Pr[X >= Y], basta calcular a proporção de área de (Pr[X >= Y]) sobre a área total da questão, conforme abaixo:

$$\frac{At}{At(Pr[X >= Y])} = \frac{100}{150} = \frac{2}{3} \rightarrow 0,66 \rightarrow 66,666\%$$

Para esboçar esse valor e realizar a comparação entre o valor teórico e simulado, utilizei o script abaixo:

```
% b) Pr[X >= Y]

X = zeros(1, N);
Y = zeros(1, N);

i = 1;
while i <= N
  X(i) = 10 * rand();
  Y(i) = 20 * rand() - 10;

  if ([0 <= X(i) && X(i) <= 10] && [-10 <= Y(i) && Y(i) <= 10]) && (Y(i) >= (X(i) - 10))
```

```

    i += 1;
  end
end

PrXmY_sim = mean(X >= Y)
PrXmY_teo = 0.66
```

2.3 PDF marginal de Y:

Para determinar a PDF marginal de Y, devemos aplicar a seguinte equação:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} fX, Y(x, y)dx$$

Dessa forma, temos o seguinte conjunto de integrais ao longo de todas as regiões de menos infinito a mais infinito separadamente:

- Primeiro intervalo: $-\infty \rightarrow -10$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx$$

- Segundo intervalo: $-10 \rightarrow 0$

$$\int_{0}^{x-10} \frac{1}{150}dx = \left[\frac{x}{150}\right]_{0}^{x-10} = \left[\frac{x-10}{150} - \frac{0}{150}\right] = \left[\frac{1}{150} + (x-10)\right] \rightarrow \left[\frac{x}{150} + \frac{2}{30}\right]$$

- Terceiro intervalo: $0 \rightarrow 10$

$$\int_{0}^{10} \frac{1}{150}dx = \left[\frac{x}{150}\right]_{0}^{10} = \left[\frac{10}{150} - \frac{0}{150}\right] = \frac{10}{150} = \frac{1}{15} = \frac{2}{30}$$

- Quarto intervalo: $10 \rightarrow +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx$$

Dessa forma, podemos esboçar o gráfico (teórico) resultante da PDF Marginal de Y:

FONTE: Elaborado pelo autor

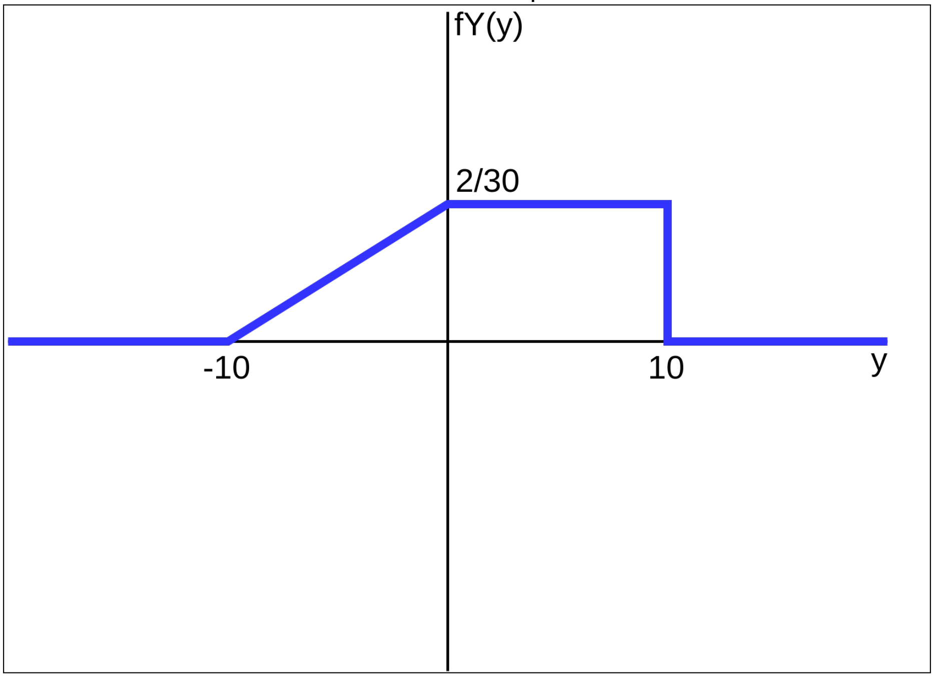

Figura 4: Gráfico da PDF Marginal de Y

Para esboçar o gráfico no octave e verificar a relação entre a PDF teória e PDF simulada, utilizei o seguinte script:

```
% c) PDF marginal de Y

y = -12 : 0.2 : 12;

histY = hist(Y, y);
pdfY_sim = histY / trapz(y, histY);
pdfY_teo = (2/30 + y/150) .* (-10 <= y & y < 0) + ...
           2/30 .* (0 <= y & y < 10);

figure
subplot(1, 1, 1); grid on; hold on;
bar(y, pdfY_sim, 'y');
plot(y, pdfY_teo, 'b', 'LineWidth', 4);
xlabel('y'); ylabel('f_Y(y)');
```

Dessa forma, após a aplicação do script, obtive o seguinte gráfico esboçando a PDF marginal simulada (em barras) e teórica (linha azul):

FONTE: Elaborado pelo autor

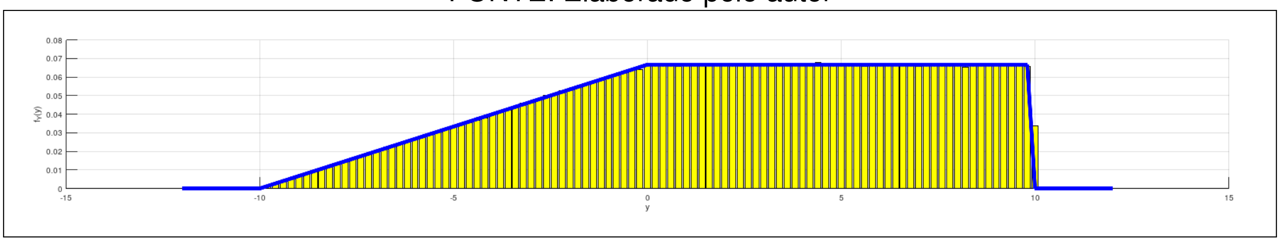

Figura 5: Gráfico da PDF Marginal de Y (Simulada e Teórica)

2.4 CDF marginal de Y:

Para esboçar a CDF marginal de Y, devemos aplicar a seguinte equação:

$$\int_{-\infty}^{y+} fy(u)du$$

Dessa forma, temos o seguinte conjunto de integrais ao longo de todas as regiões de menos infinito a mais infinito separadamente:

- Primeiro intervalo: $-\infty \rightarrow -10$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx$$

- Segundo intervalo: $-10 \rightarrow 0$

$$\int_{-10}^{y} \left[\frac{y}{150} + \frac{2}{30}\right] du = \left[\frac{1}{150}\left(\frac{y^2}{2} - 50\right) + \frac{y}{15} + \frac{2}{3}\right]$$

- Terceiro intervalo: $0 \rightarrow 10$

$$\int_{0}^{y} \frac{2}{30} du = \frac{2}{30}.[u]_0^y = \left[\frac{2y}{30} - \frac{0}{30}\right] = \frac{2y}{30}$$

- Quarto intervalo: $10 \rightarrow +\infty$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 0dx$$

```
% d) CDF marginal de Y

cdfY_sim = cumsum(histY) / N;
cdfY_teo = (1/150 * ((y.^2)/2 - 50) + y/15 + 2/3) .*  (-10 <= y & y < 0) + ...
           ((y)/15 + 5/15)                            .*  (0 <= y & y < 10) + ...
           1  .* (y >= 10);
figure
subplot(1, 1, 1); grid on; hold on;
plot(y, cdfY_sim, 'g', 'LineWidth', 4);
plot(y, cdfY_teo, 'b--', 'LineWidth', 2);
xlabel('y'); ylabel('F_Y(y)');
xlim([-25 25]); ylim([-1, 1.2]);
```

Aplós a plotagem identifiquei que a função calculada está incorreta, conforme a imagem abaixo. Irei verificar com o professor na proxima aula o problema voltado para a questão.

FONTE: Elaborado pelo autor

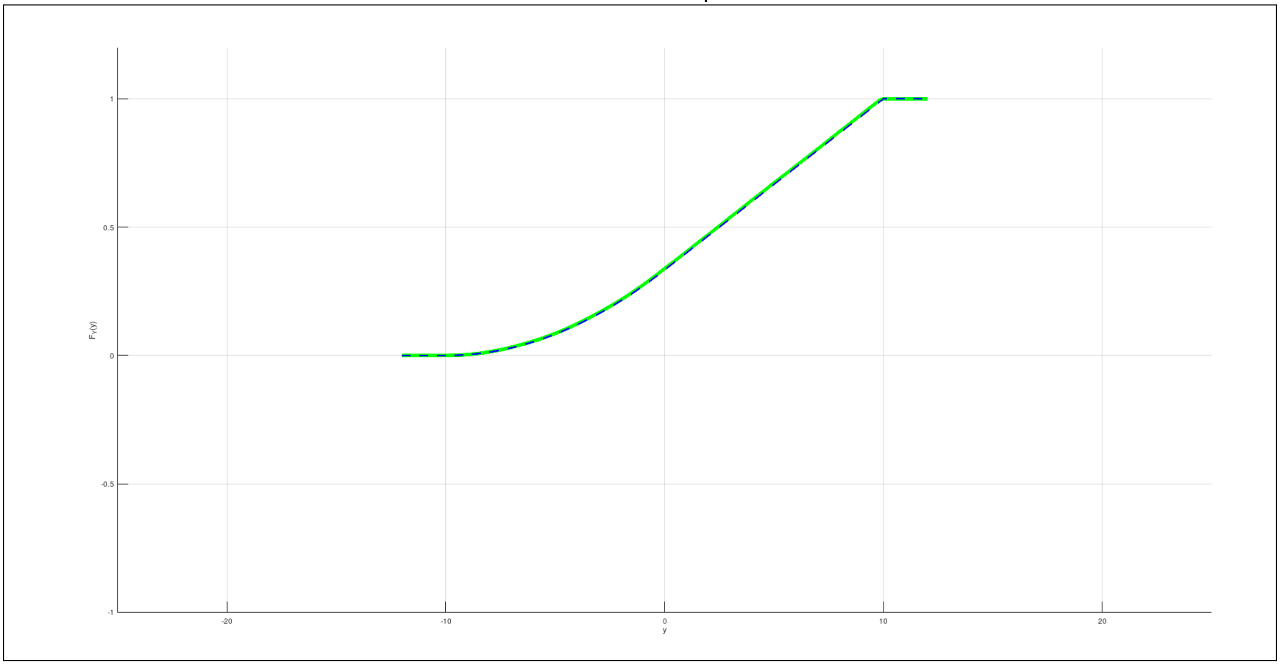

Figura 6: Gráfico da CDF Marginal de Y (Simulada e Teórica)

2.5 PDF condicional dado que X = 5

Para determinar a PDF condicional em X = 5, utilizamos a seguinte equação:

$$f(\frac{y}{X=x}) = \frac{fX,Y(x,y)}{fX(x)} \rightarrow f(\frac{y}{X=5}) = \frac{fX,Y(5,y)}{fX(5)}$$

Como o valor é aplicado em X = 5, o intervalo de integração de Y deve cobrir toda a região por onde o X = 5 está passando, como na figura abaixo:

FONTE: Elaborado pelo autor

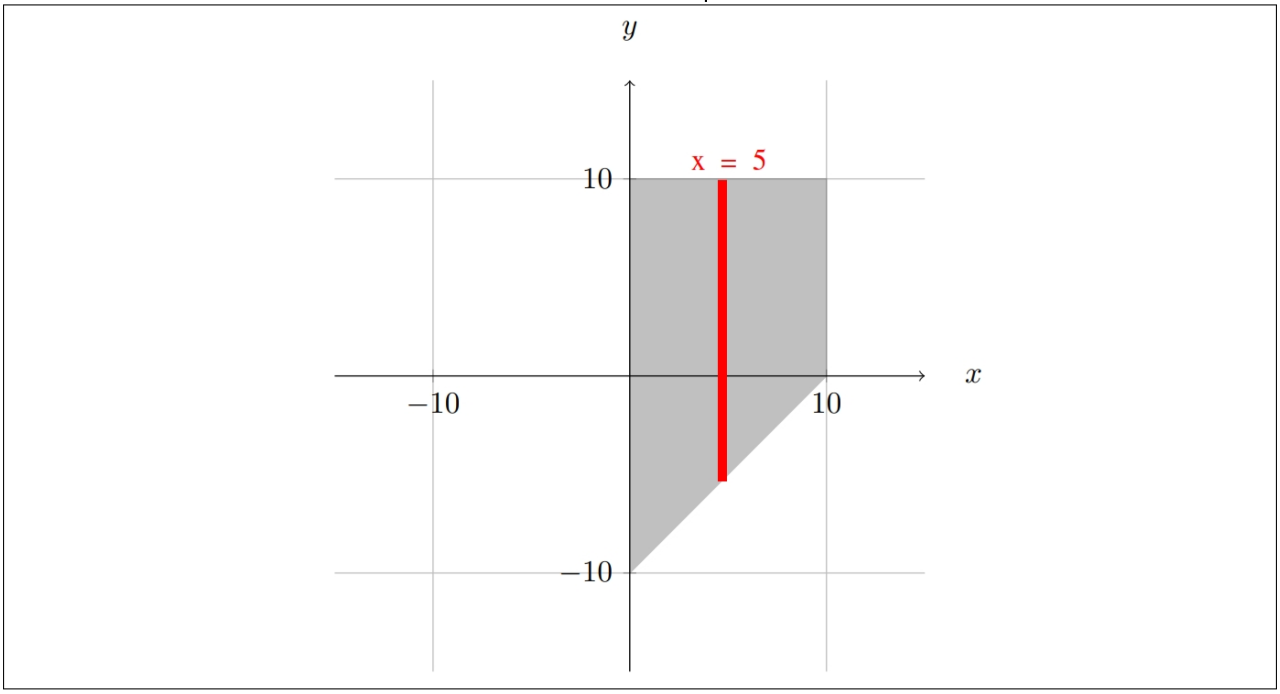

Figura 7: Faixa de integração da PDF condicional

Dessa forma o equacionamento da fX(x) é o seguinte:

$$fX(x) = \int_{y=-5}^{y=10} \frac{1}{150} dy = \left[\frac{y}{150}\right]_{-5}^{10} = \left[\frac{10}{150} - \frac{-5}{150}\right] = \left[\frac{15}{150}\right] \rightarrow \frac{1}{10}$$

Obtendo o valor da fX(x), podemos aplicar na formula, obtendo a condicional:

$$\frac{fX,Y(5,y)}{fX(5)} \left[\frac{fX,Y(5,y)}{\frac{1}{10}}\right]$$

Considrando toda a faixa de valores de x onde y é válido, temos a seguinte expressão:

$$\frac{fY(y)}{x=5} = \frac{1}{150}.\frac{10}{1} \rightarrow \frac{1}{15}$$

Dessa forma obtemos:

$$\frac{fY(y)}{x=5} = \frac{1}{15} \in [-5 \leq y \leq 10]$$

$$\frac{fY(y)}{x=5} = 0 \in [y < -5]|[y > 10]$$

FONTE: Elaborado pelo autor

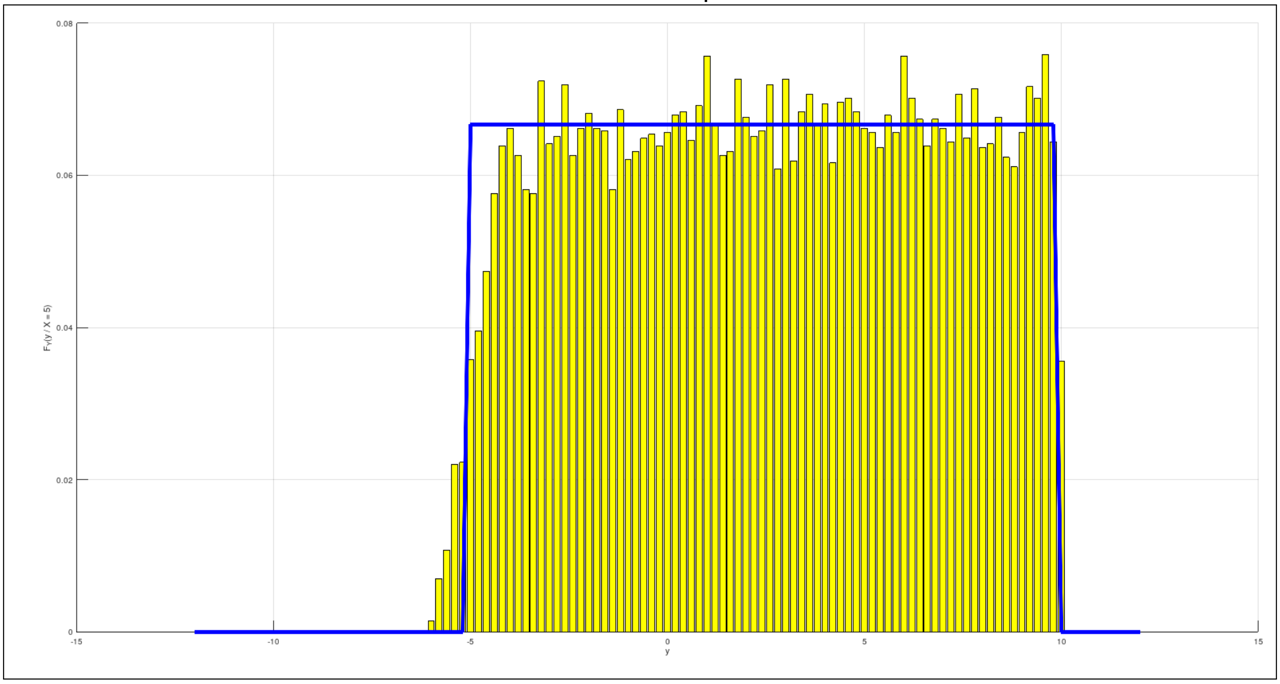

Figura 8: Gráfico da PDF condicional

Para calcular a PDF condicional dado X = 5, utilizei o seguinte script:

```
% e) PDF condicional de Y dado que X = 5.

idx = (4 <= X) & (X <= 6);
histY_condX = hist(Y(idx), y);
pdfY_condX_sim = histY_condX / trapz(y, histY_condX);
pdfY_condX_teo = 1/15 .*  (-5 <= y & y < 10);

figure
subplot(1, 1, 1); grid on; hold on;
bar(y, pdfY_condX_sim, 'y');
plot(y, pdfY_condX_teo, 'b', 'LineWidth', 4);
xlabel('y'); ylabel('F_Y(y / X = 5)');
```

2.6 Covariância entre X e Y:

Para calcular a covariância entre X e Y, utilizamos a seguinte equação:

$$cov[x, y] = E[xy] - E[x].E[y]$$

Dessa forma, o primeiro passo é calcular a E[x] e E[y] separadamente:

$$E[X] \int_{x=-\infty}^{x=+\infty} \int_{y=-\infty}^{y=+\infty} xfX, Y(x, y)dydx \rightarrow E[X] \int_{x=0}^{x=10} \int_{y=}^{y=+\infty} xfX, Y(x, y)dydx$$

Como a região de integração pode ser segmentada em soma de integrais, dividi em uma integral da área quadrada "AREA1"e a divisão por 2 da integral da área quadrada "AREA2":

$$E[X] = \int_{x=0}^{x=10} \int_{y=0}^{y=10} \frac{x}{150} dydx \rightarrow \int_{x=0}^{x=10} \frac{x}{150} [y]_0^{10} \, dx \rightarrow \int_{x=0}^{x=10} \frac{x}{150} [10 - 0] \, dx \rightarrow \left[\frac{x^2}{15}\right]_0^{10}$$

$$\left[\frac{100}{15} - \frac{0}{15}\right] \rightarrow \frac{20}{3}$$

$$E[X] = \int_{x=0}^{x=10} \int_{y=-10}^{y=0} \frac{x}{150} dydx \rightarrow \int_{x=0}^{x=10} \frac{x}{150} [y]_{-10}^{0} \, dx \rightarrow \int_{x=0}^{x=10} \frac{x}{150} [0-(-10)] \, dx \rightarrow \left[\frac{x^2}{15}\right]_0^{10}$$

$$\left[\frac{100}{15} - \frac{0}{15}\right] \rightarrow \frac{20}{3} \rightarrow \left[\frac{\frac{20}{3}}{2}\right] \rightarrow \frac{20}{6} \rightarrow \frac{10}{3}$$

$$E[X] = \frac{20}{3} + \frac{10}{3} = \frac{30}{3} \rightarrow 10$$

Agora repetimos o processo para E[Y]:

$$E[Y] = \int_{x=0}^{x=10} \int_{y=0}^{y=10} \frac{y}{150} dydx \rightarrow \int_{x=0}^{x=10} \left[\frac{y^2}{150}\right]_0^{10} dx \rightarrow \int_{x=0}^{x=10} \left[\frac{100}{150} - \frac{0}{150}\right] dx \rightarrow \left[\frac{2x}{3}\right]_0^{10}$$

$$\left[\frac{20}{3} - \frac{0}{3}\right] \rightarrow \frac{20}{3}$$

$$E[Y] = \int_{x=0}^{x=10} \int_{y=-10}^{y=0} \frac{y}{150} dydx \rightarrow \int_{x=0}^{x=10} \left[\frac{y^2}{150}\right]_{-10}^{0} dx \rightarrow \int_{x=0}^{x=10} \left[\frac{100}{150} - \frac{0}{150}\right] dx \rightarrow \left[\frac{2x}{3}\right]_0^{10}$$

$$\left[\frac{20}{3} - \frac{0}{3}\right] \rightarrow \frac{20}{3} \rightarrow \left[\frac{\frac{20}{3}}{2}\right] \rightarrow \frac{20}{6} \rightarrow \frac{10}{3}$$

$$E[Y] = \frac{20}{3} + \frac{10}{3} = \frac{30}{3} \rightarrow 10$$

Agora com os valores de E[X] e E[Y] calculados, devemos calcular o valor de E[XY] para então aplicar na formula da covariância e obter seu valor, dessa forma o valor de E[XY] é dado pelo seguinte equacionamento:

$$E[XY] = \int_{x=0}^{x=10} \int_{y=0}^{y=10} \frac{xy}{150} dydx \rightarrow \int_{x=0}^{x=10} x \left[\frac{y^2}{150}\right]_0^{10} dx \rightarrow \int_{x=0}^{x=10} x \left[\frac{100}{150} - \frac{0}{150}\right] dx \rightarrow \left[\frac{2(x^2)}{3}\right]_0^{10}$$

$$\left[\frac{2(100)}{3} - \frac{2(0)}{3}\right] \rightarrow \frac{200}{3}$$

$$E[X] = \int_{x=0}^{x=10} \int_{y=-10}^{y=0} \frac{xy}{150} dydx \rightarrow \int_{x=0}^{x=10} x \left[\frac{y^2}{150}\right]_{-10}^{0} dx \rightarrow \int_{x=0}^{x=10} x \left[\frac{100}{150} - \frac{0}{150}\right] dx \rightarrow \left[\frac{2(x^2}{3}\right]_0^{10}$$

$$\left[\frac{2(100)}{3} - \frac{2(0)}{3}\right] \rightarrow \frac{200}{3} \rightarrow \left[\frac{\frac{200}{3}}{2}\right] \rightarrow \frac{200}{6} \rightarrow \frac{100}{3}$$

$$E[XY] = \frac{200}{3} + \frac{100}{3} = \frac{300}{3} \rightarrow 100$$

Agora, podemos aplicar os valores encontrados na formula da covariância original, obtendo o seguinte valor:

$$cov[x, y] = E[xy] - E[x].E[y] \rightarrow cov[x, y] = [100 - (10.10)] = 0$$

Para verificar o valor da covariância, utilizei o seguinte script:

```
% f) Covariância entre X e Y

rhoXY_sim = cov(X, Y) / sqrt(var(X) * var(Y))
covXY_teo = 0
```

3 Referências bibliográficas

Variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas
Processos Estocásticos - Distribuição condicional