INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Avaliação VII - Processos Estocasticos

Processos de Poisson

Arthur Cadore Matuella Barcella

26 de novembro de 2023

Sumário

1 Questão a ser desenvolvida:

Considere dois processos de Poisson, X1(t) e X2(t), independentes, de taxas $\lambda 1 = 2$ e $\lambda 2 = 1,5$ eventos/s, respectivamente. Seja X(t) = X1(t) + X2(t). As questões abaixo são todas referentes ao processo estocástico X(t).

Determine:

- Determine e esboce a função média do processo estocástico.
- Determine a probabilidade de ocorrer pelo menos seis eventos entre 9 e 11s, dado que ocorreu exatamente um evento entre 2 e 5s.
- Determine a probabilidade de que o tempo decorrido entre o segundo evento e o terceiro evento seja maior que $0,3$s.
- Determine a matriz covariância do vetor aleatório $[X(3)X(4)]^T$.

2 Desenvolvimento

2.1 Determine e esboce a função média do processo estocástico:

Para determinar a função média do processo estocastico X(t), utilizamos a definição vista em aula:

$$\mu_N(t) = \lambda t[t > 0]$$

Dessa forma, temos que:

$$\mu_X(t) = \lambda t[t > 0], \lambda = \lambda 1 + \lambda 2 \rightarrow \mu_X(t) = \lambda t[t > 0], \lambda = 2 + 1,5 \rightarrow \mu_X(t) = 3,5t[t > 0],$$

Assim a média de μ_X(t) é $3,5$t.

Para verificar este valor, utiliza-se o seguinte script:

```
==============================================================================
% a) Determine e esboce a função média do processo estocástico:
X = zeros(N,Nt);

for i = 1 : N
    T = 0;
    while T < t(end)
        T = T + exprnd(1/lambda);
        X(i,:) += (t > T);
    endwhile
endfor

muX_sim = mean(X);
muX_teo = lambda * t .*(t>=0);

figure; hold on; grid on;
% Plot de linha grossa/fina pra ver se estão uma sobre a outra
plot(t, muX_sim, 'y', 'LineWidth', 8);
plot(t, muX_teo, 'b', 'LineWidth', 1);
```

O script assima resultou no seguinte gráfico:

FONTE: Elaborado pelo autor

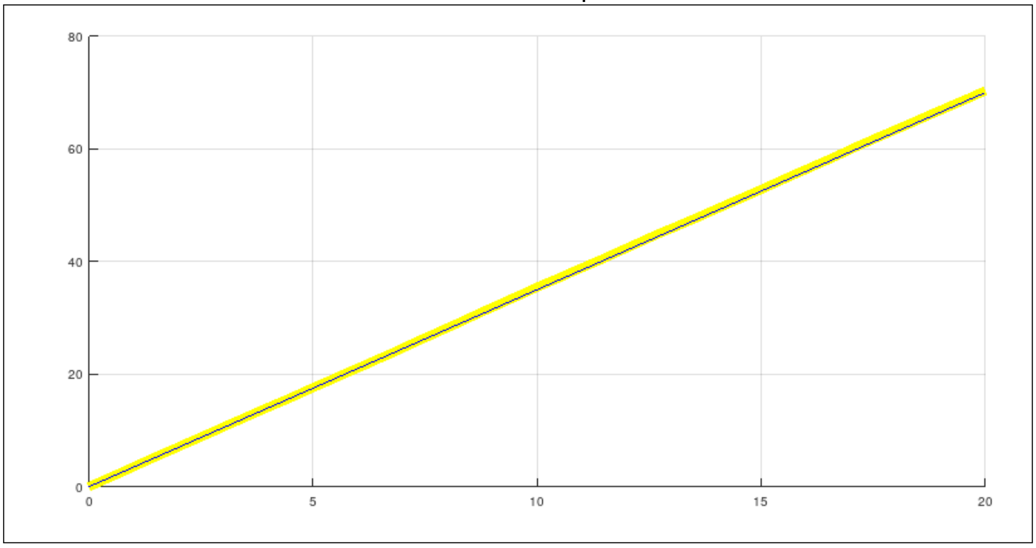

Figura 1: Plot Item A

2.2 Determine a probabilidade de ocorrer pelo menos seis eventos entre 9 e 11s, dado que ocorreu exatamente um evento entre 2 e 5s:

Para verificar a quantidade de eventos que ocorreram em um dado instante de tempo temos que $\Pr[X_{9,11} => 6|X_{2,5} = 1]$, dessa forma o equacionamento é o seguinte:

$$Pr[X_{9,11} >= 6|X_{2,5} = 1] \rightarrow Pr[X_{9,11} => 6], X_{9,11}\ Poisson(3,5(11-9))$$

Agora aplicamos a equação da distribuição de Poisson, vista em aula:

$$Px(x) = e^{-\mu}\frac{\mu^x}{\mu!}, Pr[X_{9,11} >= 6] \rightarrow \left(1 - e^{-7} \cdot \left(\frac{7^0}{0!} + \frac{7^1}{1!} + \frac{7^2}{2!} + \frac{7^3}{3!} + \frac{7^4}{4!} + \frac{7^5}{5!}\right)\right)$$

Utilizando calculadora para realizar o calculo apresentado acima, temos que:

$$Px(x) = 0,69929$$

Para verificar este resultado, utiliza-se o script abaixo:

```
% ==============================================================================
% b) Determine a probabilidade de ocorrer pelo menos seis eventos entre $9$ e $11s$,
% dado que ocorreu exatamente um evento entre $2$ e $5s$::

idx9 = (9 / dt) + 1;
idx11 = (11 / dt) + 1;

X9 = X(:, idx9);
X11 = X(:, idx11);

PrB_sim = mean(X11 - X9 >= 6)
PrB_teo = 0.69929
```

2.3 Determine a probabilidade de que o tempo decorrido entre o segundo evento e o terceiro evento seja maior que $0,3$s:

Para calcular a probabilidade para o tempo decorrido, temos que:

$$\Delta = T3 - T2, \Delta n = e^{\lambda}$$

$$Pr[\Delta > 0,3] = \int_{0,3}^{\infty} = 3,5 \cdot e^{-3,5x} dx \rightarrow e^{-3,5 \cdot \infty} - e^{-3,5 \cdot 0,3} \rightarrow 0 - e^{-3,5 \cdot 0,3} = 0,34993$$

```
% ==============================================================================
% c) Determine a probabilidade de que o tempo decorrido entre o segundo evento e o
% terceiro evento seja maior que $0,3s$.

T = diff(X')';

T3 = zeros(1, N);
T2 = zeros(1, N);
for i = 1 : size(T, 1)
    row = T(i, :);
    indices = find(row);
    T3(i) = (indices(3) - 1) * dt;
    T2(i) = (indices(2) - 1) * dt;
end;
deltaC_sim = mean((T3 - T2) > 0.3)
deltaC_teo = 0.34993
```

2.4 Determine a matriz covariância do vetor aleatório $[X(3)X(4)]^T$:

Para calcular a matriz covariância entre $[X(3)X(4)]^T$ temos que:

$$\vec{X} = [X(3)X(4)]^T \rightarrow c_x = \begin{pmatrix} \text{cov}(X(3), X(3)) & \text{cov}(X(3), X(4)) \\ \text{cov}(X(4), X(3)) & \text{cov}(X(4), X(4)) \end{pmatrix}$$

$$cov(x(3), x(3)) = 3,5 \cdot 3 = 10,5$$

$$cov(x(3), x(4)) = 3,5 \cdot 3 = 10,5$$

$$cov(x(4), x(3)) = 3,5 \cdot 3 = 10,5$$

$$cov(x(4), x(4)) = 3,5 \cdot 4 = 14$$

$$c_x = \begin{pmatrix} 10,5 & 10,5 \\ 10,5 & 14 \end{pmatrix}$$

```
% ==============================================================================
% d) Determine a matriz covariância do vetor aleatório $[X(3) X(4)]^T$:

idx3 = (3 / dt) + 1;
X3 = X(:, idx3);

idx4 = (4 / dt) + 1;
X4 = X(:, idx4);

Cx_sim = [cov(X3, X3) cov(X3, X4);
        cov(X3, X4) cov(X4, X4)]

Cx_teo = [10.5 10.5;
          10.5 14]
```

3 Referências bibliográficas

Processos Estocásticos - Vetores aleatórios gaussianos