INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Processamento de Sinais Digitais

Relatório 01

Arthur Cadore Matuella Barcella

31 de Março de 2024

Sumário

1 Questão 1

As duas sequencias de 8 pontos x1[n] e x2[n] mostradas na figura a seguir tem DFTs X1[k] e X2[k], respectivamente. Determine a relação entre X1[k] e X2[k].

FONTE: Elaborado Pelo Autor

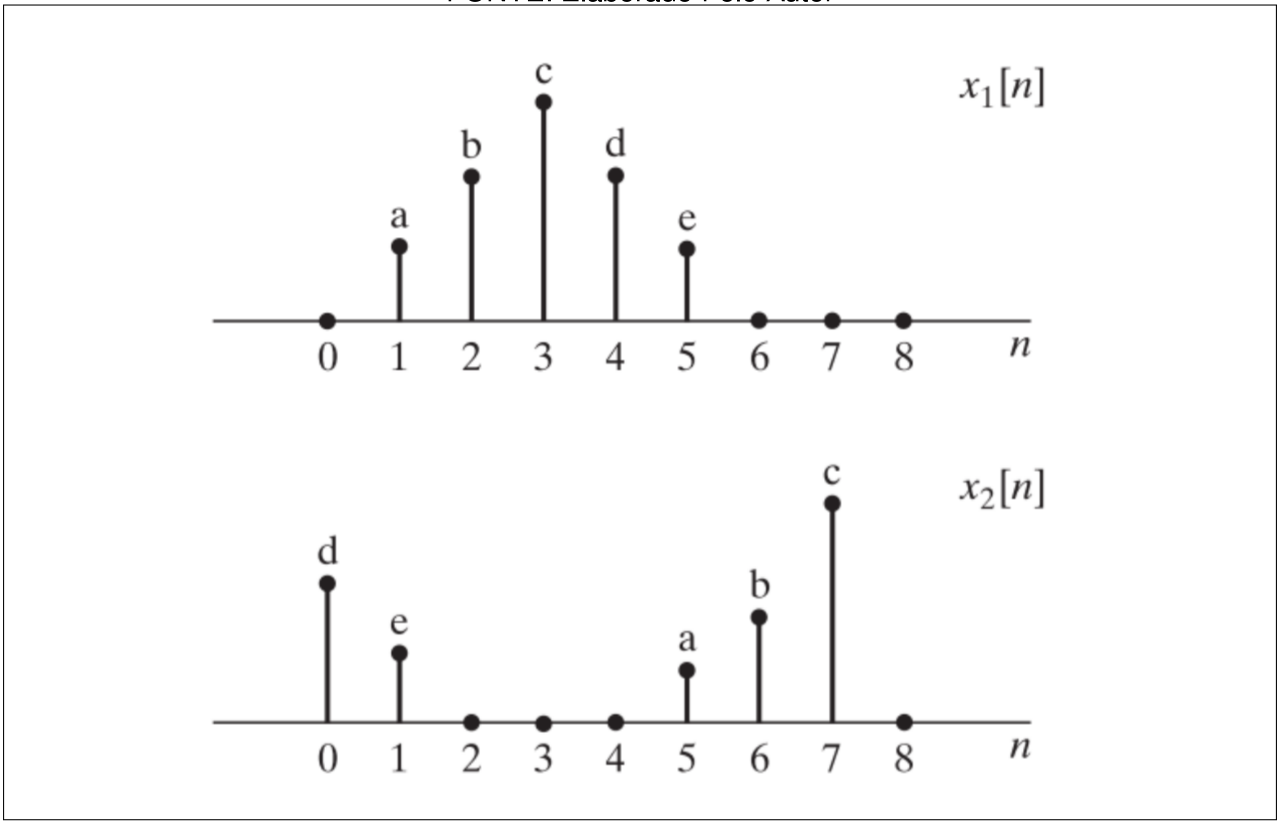

Figura 1: Figura Questão 1

1.1 Solucionando a questão:

Para a expressão de x1[n] temos:

$$x_1[n] = 0\delta[n] + 1\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + 1\delta[n-5] + 0\delta[n-6] + 0\delta[n-7] + 0\delta[n-8]$$

Para a expressão de x2[n] temos:

$$x_2[n] = 2\delta[n] + 1\delta[n-1] + 0\delta[n-2] + 0\delta[n-3] + 0\delta[n-4] + 1\delta[n-5] + 2\delta[n-6] + 3\delta[n-7] + 0\delta[n-8]$$

Simplificando as equações, temos que:

$$x_1[n] = 1\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 3\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + 1\delta[n-5]$$

$$x_2[n] = 2\delta[n] + 1\delta[n-1] + 1\delta[n-5] + 2\delta[n-6] + 3\delta[n-7]$$

Dessa forma, podemos determinar que a relação entre x1[n] e x2[n] é dada pelo deslocamento em 4 de x1[n]. Sendo assim, x2[n] = x1[n − 4]. Como sabemos o tamanho da janela (neste caso 8 pontos), temos portanto que:

$$x[(n-4)mod8] \rightarrow X2[k] = e^{\frac{-j2\pi}{8}4k} \cdot X1[k]$$

1.2 script utilizado:

Podemos verificar este resultado aplicando as entradas no matlab, conforme apresentado no script abaixo:

```
close all; clear all; clc;
pkg load signal;

% Definindo o comprimento da sequência da DFT
N=8;

% Definindo o vetor de índices do vetor:
k=0:N-1;
n=0:N-1;

% Define as sequências de entrada (dada pela questão):
% OBS: Na expressão original, tem 9 pontos, mas como a questão
% pede com 8 pontos, o ultimo ponto zerado foi desconsiderado.

x1 = [0,1,2,3,2,1,0,0];
x2 = [2,1,0,0,0,1,2,3];

% Calcula a Transformada Discreta de Fourier (DFT) da sequência:
X = fft(x1);

% Calcula a sequência modificada Y:
Y = exp(j*pi*2*4*k/8).*X;

% Calcula a Transformada Inversa Discreta de Fourier do resultante:
y = ifft(Y);

% Plota o gráfico da sequência x2:
subplot(211)
stem(n, x2, 'b', 'LineWidth', 3)
grid on
xlabel('n')
ylabel('Amplitude')
title('Sequência x2')

% Plota o gráfico da sequência y:
subplot(212)
stem(n, y, 'b', 'LineWidth', 3)
grid on
xlabel('n')
ylabel('Amplitude')
title('Sequência y')
```

Note que as saídas coincidem após realizar o deslocamento e as transformadas de furrier de tempo discreto, abaixo está os dois plots:

FONTE: Elaborado Pelo Autor

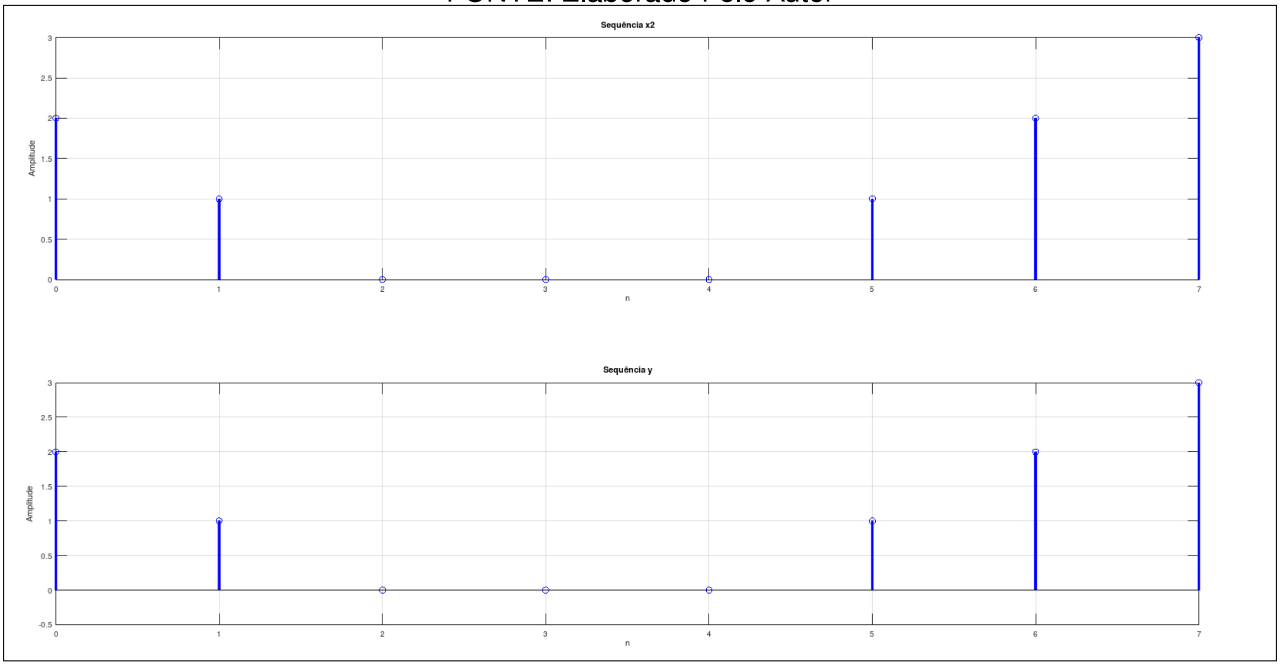

Figura 2: Figura Resultante - Questão 1

2 Questão 2

Suponha que temos duas sequências de quatro pontos x[n] e h[n], da seguinte forma:

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) \rightarrow n = 0, 1, 2, 3.$$

$$h[n] = 2^n \rightarrow n = 0, 1, 2, 3.$$

Calcule os seguintes itens:

- A DFT de quatro pontos X[k].
- A DFT de quatro pontos H[k].
- y[n] = x[n]4h[n] (realizando a convolução circular diretamente).
- y[n] do item anterior multiplicando as DFTs de x[n] e h[n] e realizando uma DFT inversa.

2.1 Solucionando a questão:

Para realizar o calculo da DFT de X[k], inicialmente é necessário saber os valores de x[n] correspondentes aos 4 pontos, sendo:

$$x[0] = \cos\left(\frac{\pi 0}{2}\right) \rightarrow 1$$

$$x[1] = \cos\left(\frac{\pi 1}{2}\right) \rightarrow 0$$

$$x[2] = \cos\left(\frac{\pi 2}{2}\right) \rightarrow -1$$

$$x[3] = \cos\left(\frac{\pi 3}{2}\right) \rightarrow 0$$

Do mesmo modo, temos o calculo para a DFT de H[k]:

$$h[0] = 2^0 \rightarrow 1$$
$$h[1] = 2^1 \rightarrow 2$$
$$h[2] = 2^2 \rightarrow 4$$
$$h[3] = 2^3 \rightarrow 8$$

Desta forma, para calcular a DFT de X[k], temos que:

$$X[k] = 1e^{-j\frac{2\pi}{4}0\cdot k} + 0e^{-j\frac{2\pi}{4}1\cdot k} + (-1e^{-j\frac{2\pi}{4}2\cdot k}) + 0e^{-j\frac{2\pi}{4}3\cdot k}$$
$$X[k] = 1 - e^{-j\frac{2\pi}{4}2\cdot k}$$

E para calcular a DFT de H[k], temos que:

$$H[k] = 1e^{-j\frac{2\pi}{4}0\cdot k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}1\cdot k} + 4e^{-j\frac{2\pi}{4}2\cdot k} + 8e^{-j\frac{2\pi}{4}3\cdot k}$$
$$H[k] = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}1\cdot k} + 4e^{-j\frac{2\pi}{4}2\cdot k} + 8e^{-j\frac{2\pi}{4}3\cdot k}$$

Uma vez calculadas as DFTs de X[k] e H[k], podemos calcular a convolução circular, para isso, podemos realizar o calculo através da seguinte forma:

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x[m]h[(n-m)_{mod4}]$$

Desta forma, temos que para uma convolução circular com a janela em 4, temos que:

$$y[n] = x[0]h[(n-0)_{mod4}] + x[1]h[(n-1)_{mod4}] + x[2]h[(n-2)_{mod4}] + x[3]h[(n-3)_{mod4}]$$

$$y[n] = h[(n-0)_{mod4}] - h[(n-2)_{mod4}]$$

Desta forma, temos que para os valores resultantes de y[n] da janela:

$$y[0] = h[0] - h[(0-2)_{mod4}] \rightarrow h[0] - h[2] \rightarrow 1 - 4 = -3$$
$$y[1] = h[1] - h[(1-2)_{mod4}] \rightarrow h[1] - h[3] \rightarrow 2 - 8 = -6$$
$$y[2] = h[2] - h[(2-2)_{mod4}] \rightarrow h[2] - h[0] \rightarrow 4 - 1 = 3$$
$$y[3] = h[3] - h[(3-2)_{mod4}] \rightarrow h[3] - h[1] \rightarrow 8 - 2 = 6$$

Desta forma, podemos representar o sinal resultante de y[n] com uma série de impulsos:

$$y[n] = -3\delta[n-0] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3]$$

O calculo de y[n] também pode ser obtido realizando a partir da multiplicação das DFTs obtidas nos itens anteriores, para isso, temos que:

$$Y[k] = X[k] \cdot H[k] \rightarrow Y[k] = \left[1 - e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}\right] \cdot H[k] \rightarrow Y[k] = \left[H[k] - H[k]e^{-j\frac{2\pi}{4}2k}\right]$$

Realizando a transformada inversa temos que:

$$y[n] = h[n] - h[(n-2)_{mod4}]$$

$$y[n] = (\delta[n] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 8\delta[n-3]) -$$
$$(1\delta[(n-2)_{mod4}] + 2\delta[(n-3)_{mod4}] + 4\delta[(n-4)_{mod4}] + 8\delta[(n-5)_{mod4}])$$

Desta forma, temos que:

$$y[n] = 1\delta[n-0] + 2\delta[n-1] + 4\delta[n-2] + 8\delta[n-3] - 1\delta[n-2] - 2\delta[n-3] - 4\delta[n-0] - 8\delta[n-1]$$

Simplificando, temos o seguinte resultado:

$$y[n] = -3\delta[n-0] - 6\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 6\delta[n-3]$$

2.2 script utilizado

Podemos comprovar esses resultados através do seguinte script matlab:

```
close all; clear all; clc;
pkg load signal;

% Definindo o comprimento da sequência da DFT
N = 4;

% Definindo o vetor de índices do vetor:
k = 0:N-1;
n = 0:N-1;

% Definindo as sequências de entrada (dada pela questão):
x = [1,0,-1,0];
h = [1,2,4,8];

% Calculando a Transformada Discreta de Fourier (DFT) das sequências dadas:
X = fft(x);
H = fft(h);

% Realizando a convolução circular diretamente (item c):
conv_c = cconv(x, h, 4);

% Realizando a convolução circular pela multiplicação (item d):
conv_d = ifft(X.*H);

% Plota o gráfico do item c:
figure(1)
subplot(211)
stem(n, conv_c,'b', 'LineWidth', 3);
xlabel('n');
ylabel('Amplitude');
title('Convolução Circular Direta');
grid on;

% Plota o gráfico do item d:
subplot(212)
stem(n, conv_d,'b', 'LineWidth', 3);
xlabel('n');
ylabel('Amplitude');
title('Convolução Circular pela Multiplicação');
grid on;
```

FONTE: Elaborado Pelo Autor

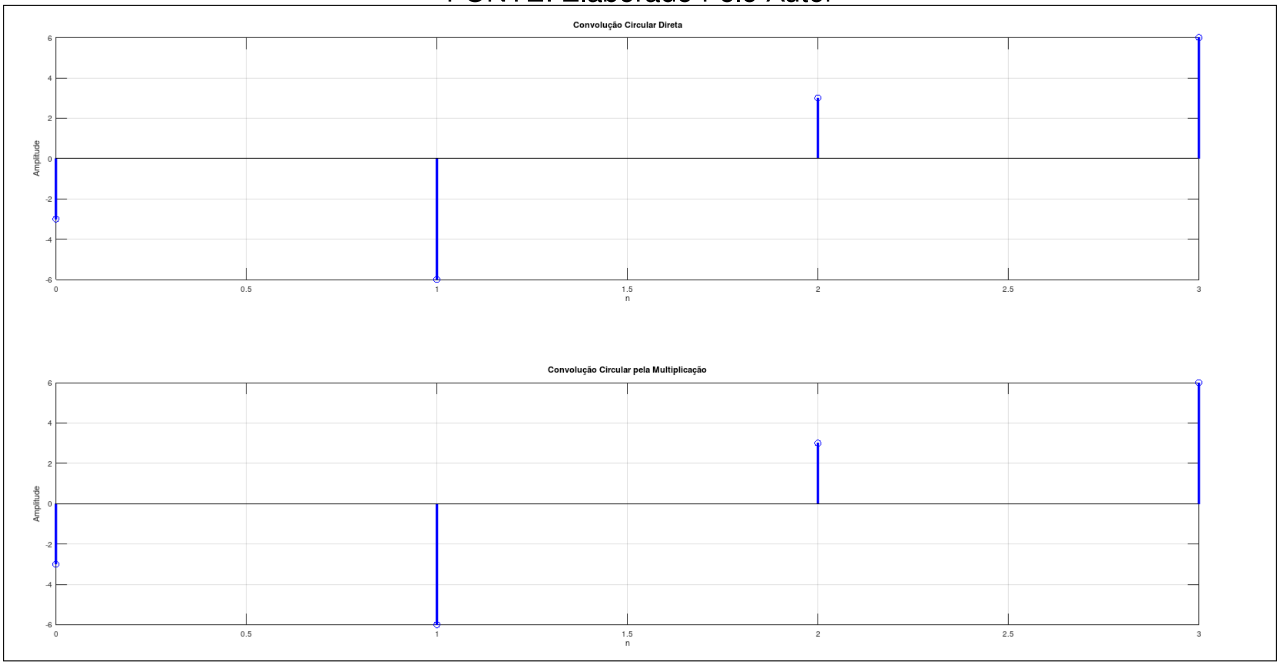

Figura 3: Figura Resultante - Questão 2

3 Questão 3

Dois sinais de comprimento finito, x1[n] e x2[n], são esboçados na figura a seguir. Suponha que x1[n] e x2[n] sejam nulos fora da região mostrada na figura. Seja x3[n] a convolução circular de oito pontos de x1[n] com x2[n]. Determine x3[2]

FONTE: Elaborado Pelo Autor

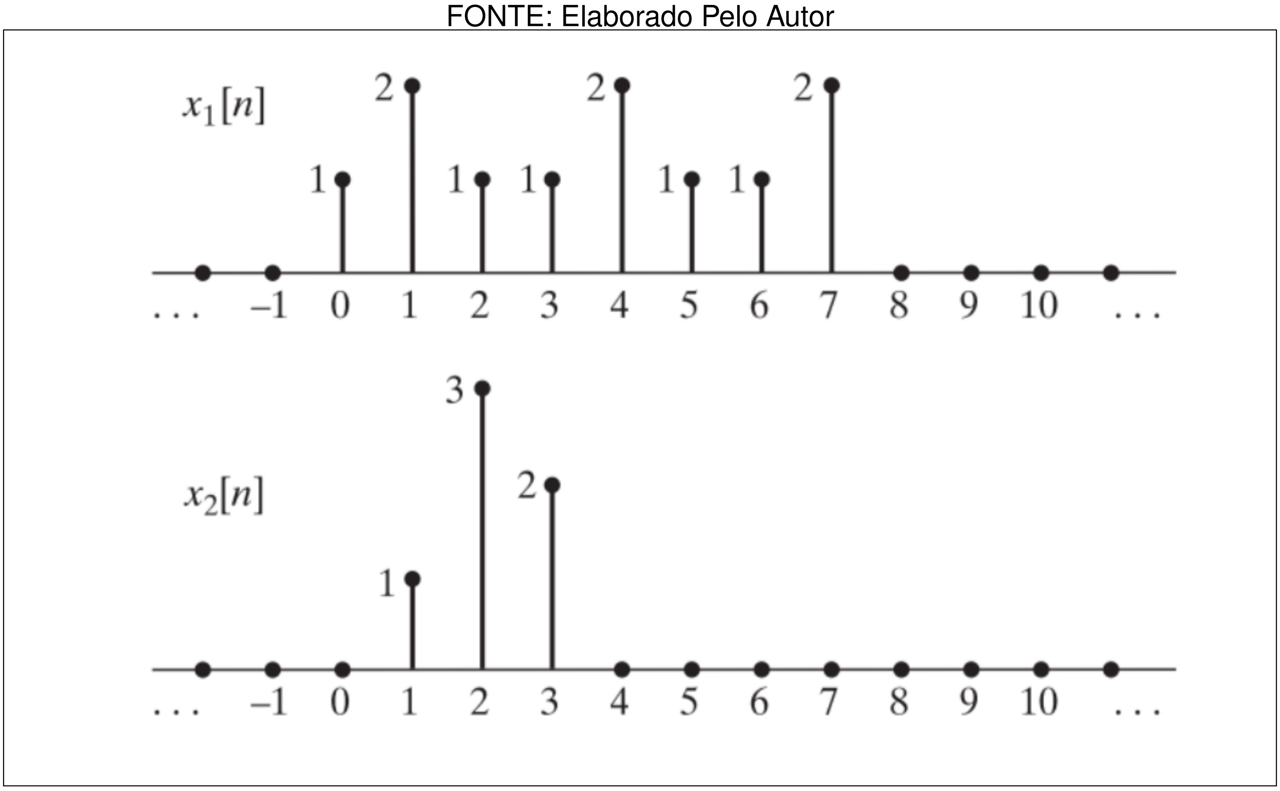

Figura 4: Figura Questão 3

3.1 Solucionando a questão:

Para a expressão de x1[n] temos:

$$x1[n] = \delta[n-0] + 2\delta[n-1] + 1\delta[n-2] + 1\delta[n-3] + 2\delta[n-4] + 1\delta[n-5] + 1\delta[n-6] + 2\delta[n-7]$$

Para a expressão de x2[n] temos:

$$x2[n] = \delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-3]$$

Para solucionar a questão podemos utilizar a formula de convolução circular (aplicando N = 8)

$$y[n] = \sum_{m=0}^{N-1} x1[m]x2[(n-m)_{modN}]$$

Portanto, ao aplicar a formula, temos que:

$$x3[2] = x1[0]\cdot x2[(2-0)_{mod8}] + x1[1]\cdot x2[(2-1)_{mod8}] + x1[2]\cdot x2[(2-2)_{mod8}] + x1[3]\cdot x2[(2-3)_{mod8}] +$$

$$x1[4]\cdot x2[(2-4)_{mod8}] + x1[5]\cdot x2[(2-5)_{mod8}] + x1[6]\cdot x2[(2-6)_{mod8}] + x1[7]\cdot x2[(2-7)_{mod8}]$$

Dessa forma, temos que:

$$x3[2] = x_1[0]x_2[2] + x_1[1]x_2[1] + x_1[2]x_2[0] + x_1[3]x_2[7] + x_1[4]x_2[6] + x_1[5]x_2[5] + x_1[6]x_2[4] + x_1[7]x_2[3]$$

$$x3[2] = 1\cdot 3 + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + 2\cdot 2 \rightarrow x3[2] = 9$$

3.2 Script Utilizado:

Podemos comprovar esses resultados através do seguinte script matlab:

```
close all; clear all; clc;
pkg load signal;

% Definindo o comprimento da sequência da DFT
N = 8;

% Definindo o vetor de índices do vetor:
k = 0:N-1;
n = 0:N-1;

% Definindo as sequências de entrada (dada pela questão):
x1 = [1,2,1,1,2,1,1,2]
x2 = [0,1,3,2,0,0,0,0]

% Realizando a convolução circular diretamente:
conv_c = cconv(x1,x2,8)

figure(1);
stem(n,conv_c, 'b', 'LineWidth', 3);
ylim([0 10]);
grid on;
xlabel('n');
ylabel('Amplitude');
title('Convolução Circular');
```

Note que o valor "9"é apresentado no plot da função, no ponto onde x = 2:

FONTE: Elaborado Pelo Autor

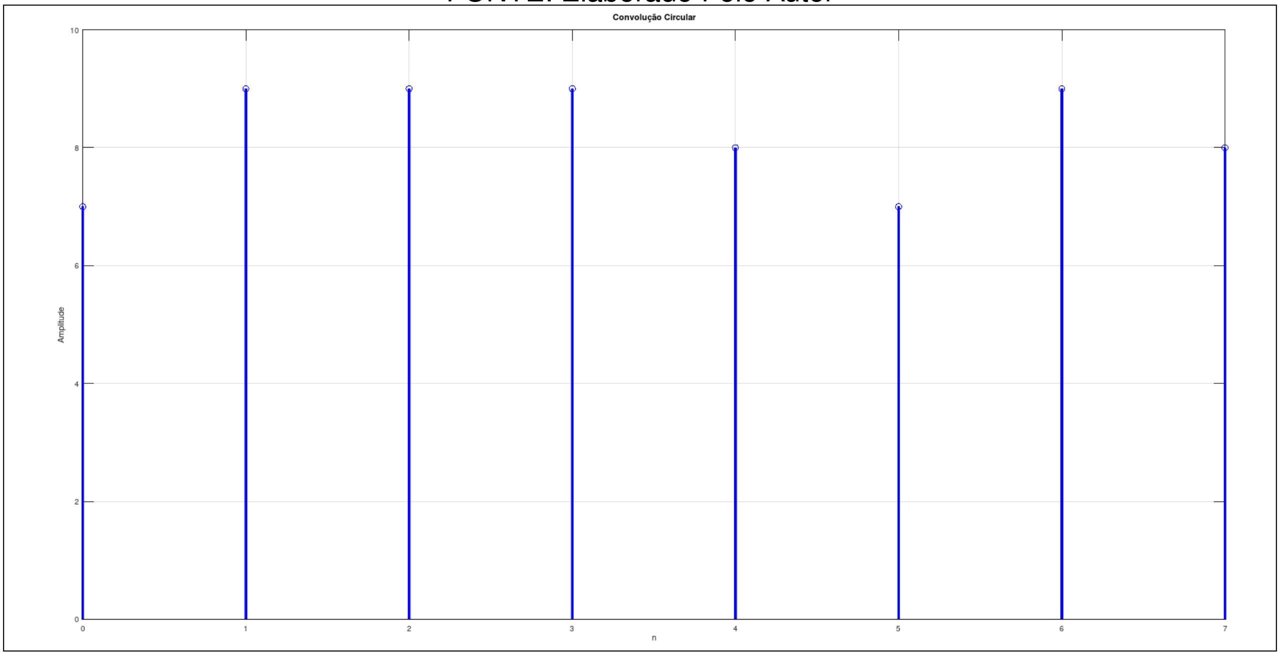

Figura 5: Figura Resultante - Questão 3

4 Questão 4

Na figura a seguir é mostrada uma sequência de tempo discreto com seis pontos x[n]. Suponha que x[n] = 0 fora do intervalo mostrado. O valor de x[4] não é conhecido e é representado como b. Observe que a amostra mostrada como b na figura não está necessáriamente na escala. Sejam X($e^{j\omega}$) a TFTD de x[n] e X1[k] as amostras de X($e^{j\omega}$) a cada $\frac{\pi}{2}$, isto é:

FONTE: Elaborado Pelo Autor

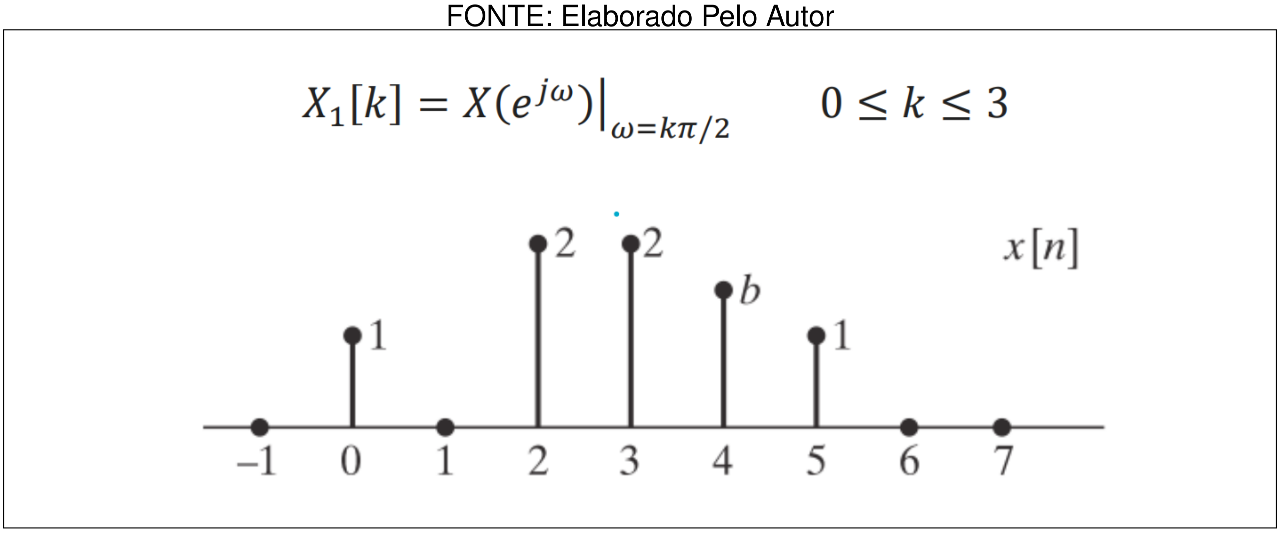

Figura 6: Figura 1 - Questão 4

A sequência com quatro pontos x1[n] que resulta da inversa com quatro pontos de X1[K] é mostrada a seguir. Com base nessa figura, você pode determinar b de modo único? Caso afirmativo, dê esse valor de b.

FONTE: Elaborado Pelo Autor

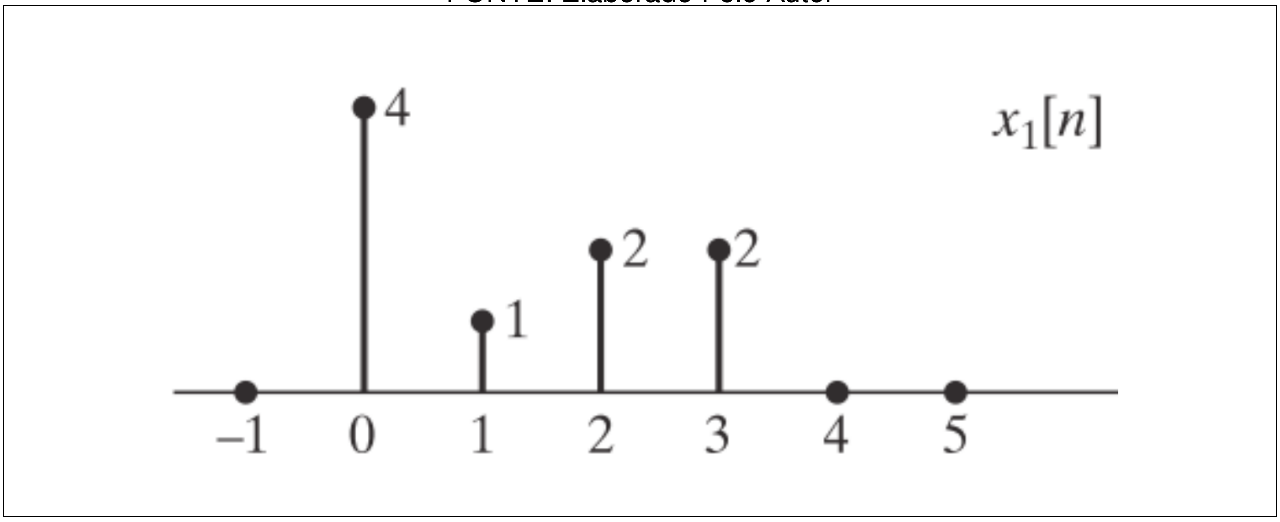

Figura 7: Figura 2 - Questão 4

4.1 Solucionando a questão:

Para a expressão de x[n] temos:

$$x[n] = 1\delta[n-0] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3] + b\delta[n-4] + 1\delta[n-5]$$

Para a expressão de x1[n] temos:

$$x1[n] = 4\delta[n-0] + 1\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 2\delta[n-3]$$

Desta forma, podemos realizar a transformada de DFT dos dos sinais (DFT de 4 pontos):

$$X[k] = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} + be^{-j\frac{2\pi}{4}0k} + 1e^{-j\frac{2\pi}{4}k} \rightarrow$$
$$X[k] = 1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} + b + 1e^{-j\frac{2\pi}{4}k}$$

$$X1[k] = 4 + 1e^{-j\frac{2\pi}{4}1k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}$$

Ao igualarmos os termos, podemos encontrar o valor de "b", para isso, temos que:

$$X[k] = X1[k]$$
$$1 + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k} + b + 1e^{-j\frac{2\pi}{4}k} = 4 + 1e^{-j\frac{2\pi}{4}1k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}2k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{4}3k}$$

Portanto, ao cortamos os termos dos dois lados da igualdade, temos:

$$X[k] = X1[k] \rightarrow 1 + b = 4 \rightarrow b = 4 - 1 \rightarrow b = 3$$

5 Questão 5

Na figura a seguir são mostradas duas sequências de comprimento finito x1[n] e x2[n]. Qual é o menor N tal que a convolução circular de N pontos de x1[n] e x2[n] seja igual à convolução linear dessas sequências?

FONTE: Elaborado Pelo Autor

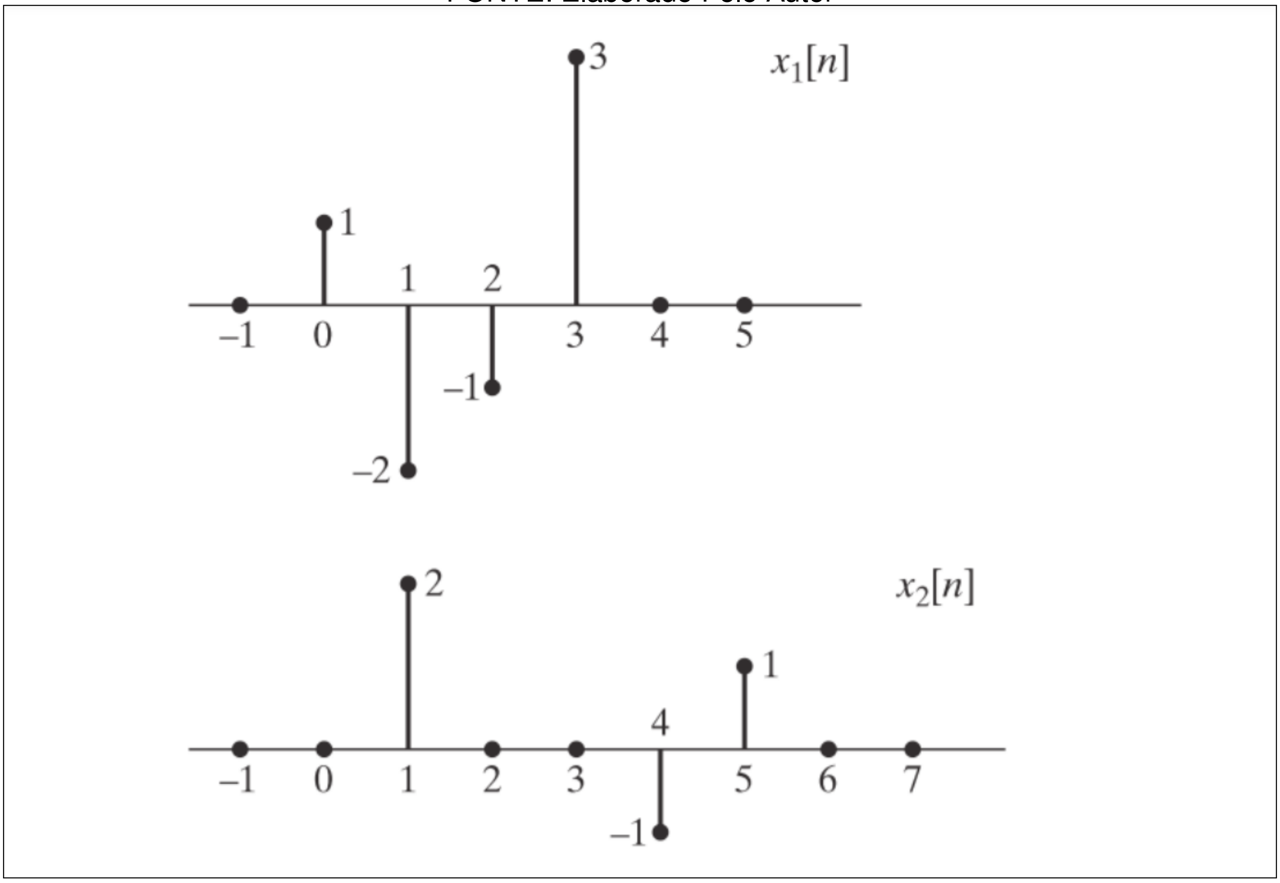

Figura 8: Figura 5

5.1 Solucionando a questão:

Para a expressão de x1[n] temos:

$$x1[n] = 1\delta[n-0] - 2\delta[n-1] - 1\delta[n-2] + 3\delta[n-3]$$

Para a expressão de x2[n] temos:

$$x1[n] = 2\delta[n-1] - 1\delta[n-4] + 1\delta[n-5]$$

Ao analisar as imagens é possivel detectar que a janela de amostras que contem o sinal são de:

- X1 = 4 pontos, sendo eles [1 -2 -1 3]
- X2 = 6 pontos, sendo eles [0 2 0 0 -1 1]

Sendo assim, podemos calcular o tamanho da convolução linear aplicando a seguinte formula:

$$N = N1 + N2 - 1 \rightarrow N = 4 + 6 - 1 \rightarrow N = 9$$

Dessa forma, podemos concluir que o menor valor do parâmetro "N"para que a convolução circular seja igual a convolução linear é igual á "9".

5.2 Script Utilizado:

Podemos comprovar esses resultados através do seguinte script matlab:

```
close all; clear all; clc;
pkg load signal;

% Definindo o comprimento da sequência da DFT
N = 9;

% Definindo o vetor de índices do vetor:
k = 0:N-1;
n = 0:N-1;

% Definindo as sequências de entrada (convolução circular):
x1 = [1,-2,-1,3,0,0,0,0,0]
x2 = [0,2,0,0,-1,1,0,0,0]

conv_c = cconv(x1,x2,9);

% Redefinindo as sequências de entrada (convolução linear):
x1 = [1,-2,-1,3]
x2 = [0,2,0,0,-1,1]
conv_l = conv(x1,x2);

figure(1)
subplot(211)
stem(n,conv_c, 'b', 'LineWidth', 3);
xlabel('n');
ylabel('Amplitude');
title('Convolução Circular');
grid on;

subplot(212)
stem(n,conv_l, 'b', 'LineWidth', 3);
xlabel('n');
ylabel('Amplitude');
title('Convolução Linear');
grid on;
```

A partir dos plots do script, podemos concluir que o resultado da convolução circular bate com o o resultado da convolução linear, conforme ilustrado abaixo:

FONTE: Elaborado Pelo Autor

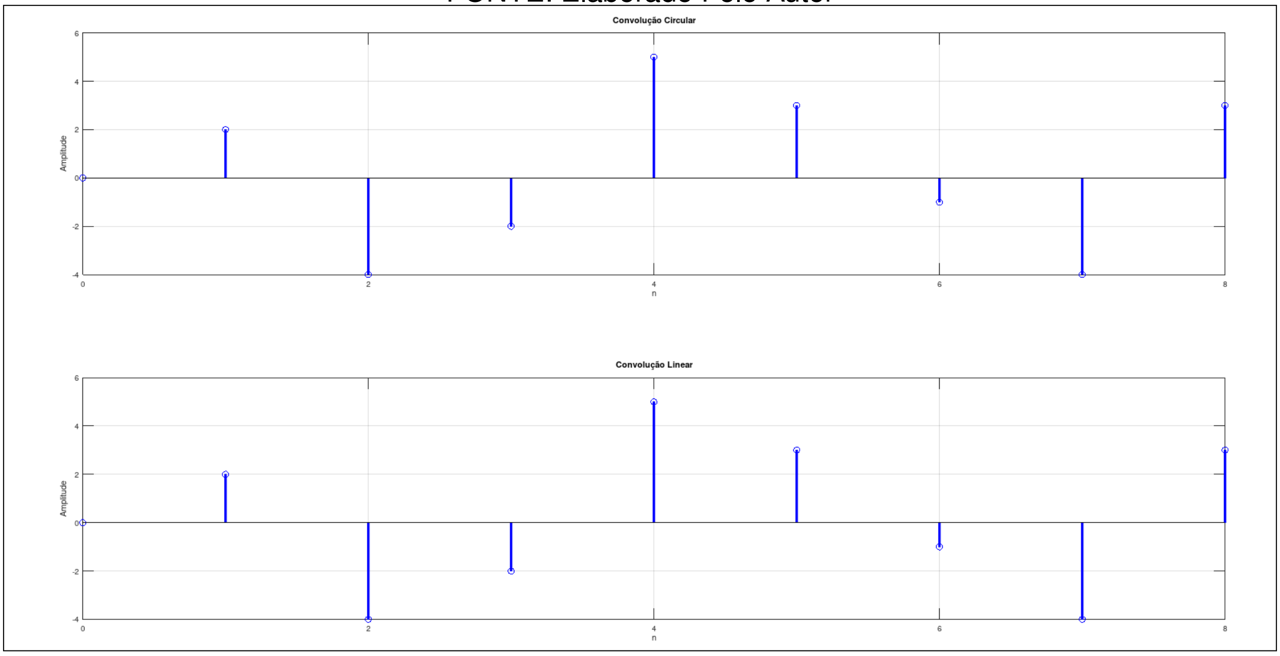

Figura 9: Figura Resultante - Questão 5

6 Questão 6

Na figura a seguir é mostrada uma sequência x[n] para a qual o valor de x[3] é uma constante desconhecida c.

FONTE: Elaborado Pelo Autor

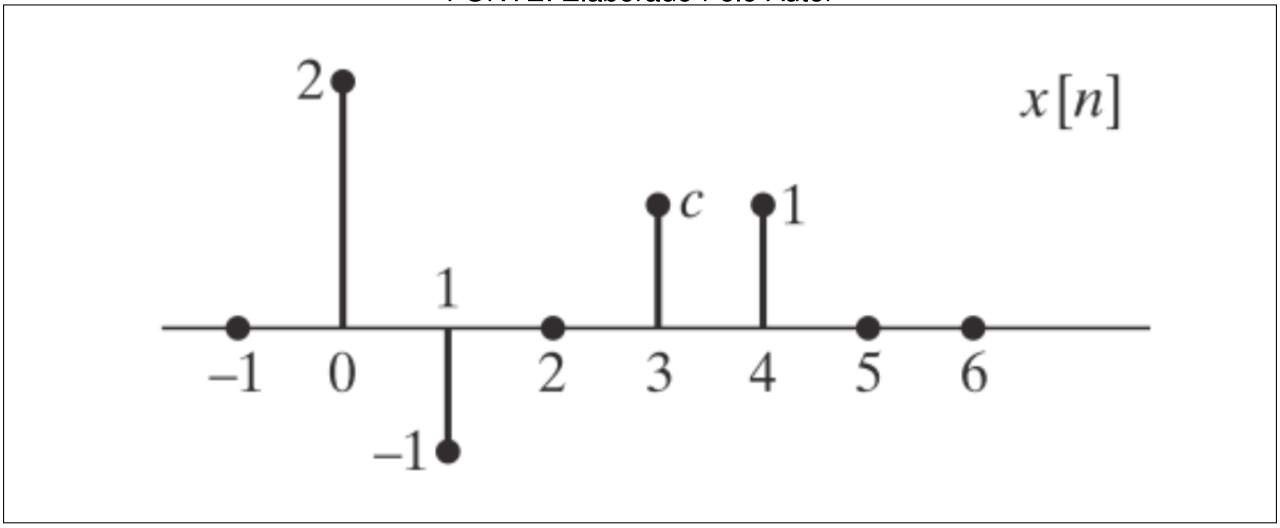

Figura 10: Figura 1 - Questão 6

O valor da amostra com amplitude c não está necessariamente representada na escala. Considere:

$$X1[k] = X[k]e^{j\frac{2\pi 3k}{5}}$$

Sendo X[k] a DFT de cinco pontos de x[n]. A sequência x1[n] representada na figura a seguir é a DFT inversa de X1[k]. Qual o valor de c?

FONTE: Elaborado Pelo Autor

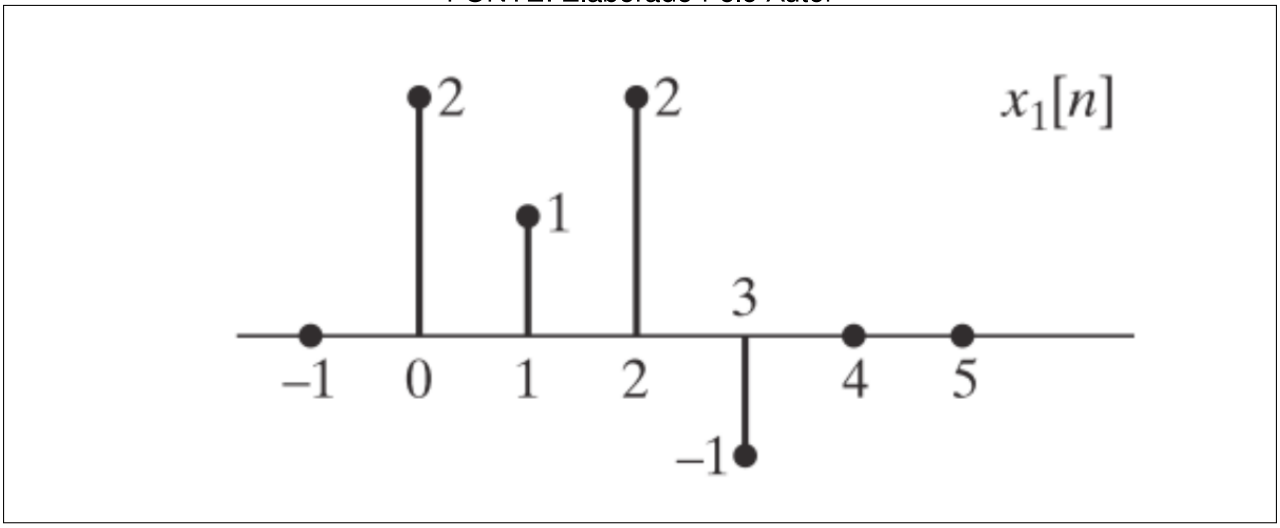

Figura 11: Figura 2 - Questão 6

6.1 Solucionando a questão:

Para a expressão x[n] temos:

$$x[n] = 2\delta[n-0] - 1\delta[n-1] + c\delta[n-3] + 1\delta[n-4]$$

Para a expressão x1[n] temos:

$$x1[n] = 2\delta[n-0] + 1\delta[n-1] + 2\delta[n-2] - 1\delta[n-3]$$

Como apontado na questão, o valor de "c"pode ser encontrado relacionando as duas expressões através da seguinte equação:

$$X1[k] = X[k] \cdot e^{j\frac{2\pi}{5}3k} \rightarrow X[k] = X1[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}$$

Realizando a DFT das duas expressões, temos que:

$$X[k] = 2e^{-j\frac{2\pi}{5}0k} - 1e^{-j\frac{2\pi}{5}1k} + ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k} + 1e^{-j\frac{2\pi}{5}4k}$$

$$X1[k] = 2e^{-j\frac{2\pi}{5}0k} + 1e^{-j\frac{2\pi}{5}1k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{5}2k} - 1e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}$$

Simplificando, temos que:

$$X[k] = 2 - e^{-j\frac{2\pi}{5}1k} + ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k} + e^{-j\frac{2\pi}{5}4k}$$

$$X1[k] = 2 + e^{-j\frac{2\pi}{5}1k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{5}2k} - e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}$$

Substituindo na equação dada anteriormente, temos que:

$$2 - e^{-j\frac{2\pi}{5}1k} + ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k} + e^{-j\frac{2\pi}{5}4k} = \left(2 + e^{-j\frac{2\pi}{5}1k} + 2e^{-j\frac{2\pi}{5}2k} - e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\right) \cdot e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}$$

$$\left(2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\right) + \left(e^{-j\frac{2\pi}{5}1k} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\right) + \left(2e^{-j\frac{2\pi}{5}2k} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\right) - \left(e^{-j\frac{2\pi}{5}3k} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\right)$$

$$2 - e^{-j\frac{2\pi}{5}1k} + ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k} + e^{-j\frac{2\pi}{5}4k} = \left(2e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\right) + \left(e^{-j\frac{2\pi}{5}4k}\right) + \left(2e^{-j\frac{2\pi}{5}5k}\right) - \left(e^{-j\frac{2\pi}{5}6k}\right) =$$

$$2 - e^{-j\frac{2\pi}{5}1k} + ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k} + e^{-j\frac{2\pi}{5}4k} = \left(2e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\right) + \left(e^{-j\frac{2\pi}{5}4k}\right) + \left(2e^{-j\frac{2\pi}{5}0k}\right) - \left(e^{-j\frac{2\pi}{5}1k}\right) =$$

$$2 - e^{-j\frac{2\pi}{5}1k} + ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k} + e^{-j\frac{2\pi}{5}4k} = \left(2e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}\right) + \left(e^{-j\frac{2\pi}{5}4k}\right) + (2) - \left(e^{-j\frac{2\pi}{5}1k}\right) =$$

Portanto, ao cortamos os termos dos dois lados da igualdade, temos:

$$ce^{-j\frac{2\pi}{5}3k} = 2e^{-j\frac{2\pi}{5}3k} \rightarrow c = \frac{2e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}}{e^{-j\frac{2\pi}{5}3k}} \rightarrow c = 2$$

7 Questão 7

Suponha que tenhamos uma sequência de 1025 pontos de dados (1 a mais do que N = 2^10). Em vez de descartar o valor final, vamos preencher a sequência com zeros até que seu comprimento seja N = 2^11 , de modo que possamos usar um algoritmo FFT de raiz 2.

- Quantas multiplicações complexas são necessárias para se computar a DFT usando um algoritmo de FFT raiz 2?
- Quantas multiplicações complexas seriam necessárias para se computar diretamente a DFT de 1025?

7.1 Solucionando a questão:

Para solucionar quantas mutiplicações complexas são necessárias para se computar a DFT usando um algoritmo de FFT raiz 2, podemos utilizar a seguinte equação:

$$\frac{N}{2}\log_2 N$$

Considerando que a questão pede para calcularmos utilizando N = 2^{11} temos que:

$$\frac{2^{11}}{2}\log_2(2^{11}) \rightarrow 1024 \cdot 11 = 11264$$

Desta forma, são para solucionar o problema são necessárias 11264 multiplicações complexas usando um algoritmo de FFT raiz 2.

Para solucionar quantas mutiplicações complexas seriam necessárias para se computar diretamente a DFT de 1025 pontos, podemos utilizar a seguinte equação:

$$N^2$$

Desta forma, como a DFT possui 1025 pontos, ficamos com o seguinte resultado:

$$1025^2 = 1050625$$

Desta forma, são necessárias 1050625 multiplicações complexas usando um algoritmo de DFT padrão.

7.2 Script Utilizado:

Podemos comprovar esses resultados através do seguinte script matlab:

```
close all; clear all; clc;
pkg load signal;

% Definindo a ordem do expoente e o valor de N
exp = 10
N = 2^(exp) + 1

% Calculando o valor atraves da DFT e também da FFT:
multi_FFT = (N/2) * log2(N)
multi_DFT = (N)^2

%%% Resultados obtidos:
% exp = 10
% N = 1025
% multi_FFT = 5125.7
% multi_DFT = 1050625
```

8 Questão 8

Considere a sequência de comprimento finito real x[n] mostrada na Figura a seguir:

FONTE: Elaborado Pelo Autor

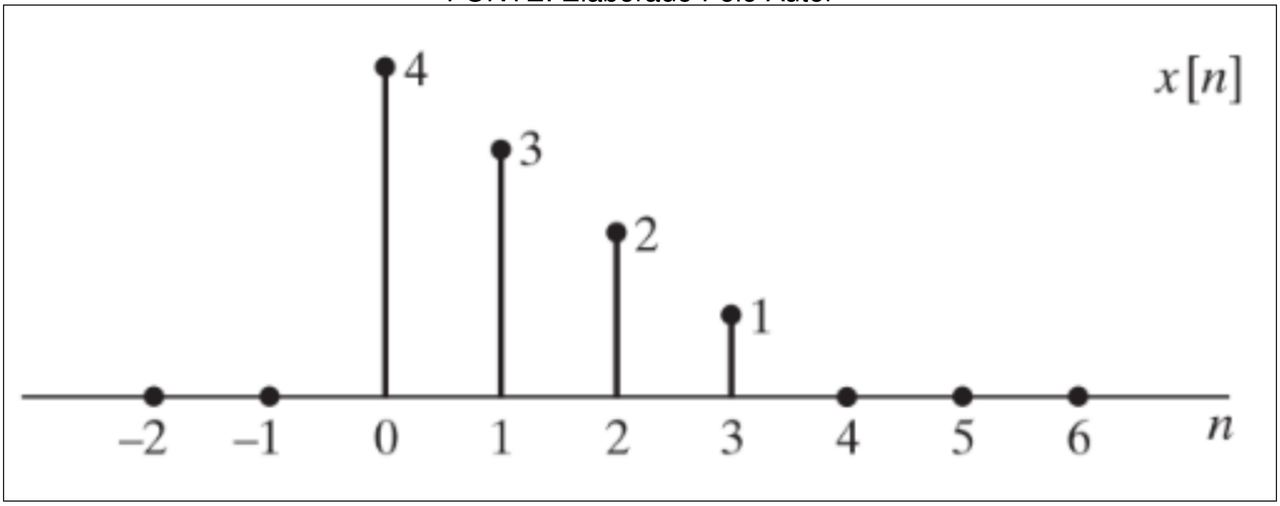

Figura 12: Figura 8

- Esboce a sequência de comprimento finito y[n] cuja DFT de seis pontos seja:

$$Y[k] = W_6^{5k} X[k] \rightarrow Y[k] = e^{-j\frac{2\pi}{6}5k}$$

  sendo X[k] a DFT de seis pontos de x[n].

- Esboce a sequência de comprimento finito w[n] cuja DFT de seis pontos seja:

$$W[k] = \Im\{X[k]\}$$

- Esboce a sequência de comprimento finito q[n] cuja DFT de três pontos seja:

$$Q[k] = X[2k + 1], k = 0, 1, 2$$

8.1 Solucionando a questão:

Para encontrar y[n], devemos tomar como ponto de partida a expressão x[n], para ela temos:

$$x[n] = 4\delta[n-0] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 1\delta[n-3]$$

Como determinado pela questão, sabemos que:

$$Y[k] = X[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{6}5k}$$

Desta forma, podemos realizar o calculo de y[n] através da seguinte expressão:

$$y[n] = x[(n-5)_{mod6}]$$

Desta forma, calculando, temos que:

$$y[n] = 4\delta[n-5] + 3\delta[(n-6)_{mod6}] + 2\delta[(n-7)_{mod6}] + 1\delta[(n-8)_{mod6}]$$

$$y[n] = 4\delta[n-5] + 3\delta[n-0] + 2\delta[n-1] + 1\delta[n-2]$$

Para calcular a sequencia de comprimento finito w[n] primeiramente, devemos passar o x[n] para X[k], portanto:

$$x[n] = 4\delta[n-0] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 1\delta[n-3] \rightarrow 4e^{j\frac{2\pi}{6}0k} + 3e^{j\frac{2\pi}{6}1k} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}2k} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3k}$$

Desta forma, podemos aplicar a equação dada pela questão:

$$W[k] = \Im\{X[k]\}$$

$$W[k] = \Im\left(4e^{j\frac{2\pi}{6}0k} + 3e^{j\frac{2\pi}{6}1k} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}2k} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3k}\right)$$

$$W[k] = \Im \cdot \left(4e^{j\frac{2\pi}{6}0k}\right) + \Im \cdot \left(3e^{j\frac{2\pi}{6}1k}\right) + \Im \cdot \left(2e^{j\frac{2\pi}{6}2k}\right) + \Im \cdot \left(1e^{j\frac{2\pi}{6}3k}\right)$$

Considerando que $\Im\{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta}\} \rightarrow -\sin(\theta)$ podemos realizar a substituição dos valores:

$$W[k] = -4\sin\left(\frac{2\pi}{6}0k\right) - 3\sin\left(\frac{2\pi}{6}1k\right) - 2\sin\left(\frac{2\pi}{6}2k\right) - 1\sin\left(\frac{2\pi}{6}3k\right)$$

$$W[k] = -4\sin(0) - 3\sin\left(\frac{2\pi}{6}1k\right) - 2\sin\left(\frac{2\pi}{6}2k\right) - 1\sin\left(\frac{2\pi}{6}3k\right)$$

$$W[k] = -3\sin\left(\frac{2\pi}{6}1k\right) - 2\sin\left(\frac{2\pi}{6}2k\right) - 1\sin\left(\frac{2\pi}{6}3k\right)$$

Para calcular a sequencia de comprimento finito q[n] primeiramente, vamos utilizar o X[k] obtido anteriormente e aplica-lo na equação:

$$Q[k] = X[2k+1], k = 0, 1, 2$$

$$x[n] = 4\delta[n-0] + 3\delta[n-1] + 2\delta[n-2] + 1\delta[n-3] \rightarrow 4e^{j\frac{2\pi}{6}0k} + 3e^{j\frac{2\pi}{6}1k} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}2k} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3k}$$

Desta forma, podemos calcular o valor de Q[k] aplicando o intervalo finito dado na questão:

$$k = 0 \rightarrow X[2 \cdot (0) + 1] \rightarrow X[1] = 4e^{j\frac{2\pi}{6}0\cdot1} + 3e^{j\frac{2\pi}{6}1\cdot1} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}2\cdot1} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3\cdot1}$$
$$X[1] = 4 + 3e^{j\frac{2\pi}{6}1} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}2} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3}$$

$$k = 1 \rightarrow X[2 \cdot (1) + 1] \rightarrow X[3] = 4e^{j\frac{2\pi}{6}0\cdot3} + 3e^{j\frac{2\pi}{6}1\cdot3} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}2\cdot3} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3\cdot3}$$
$$X[1] = 4 + 3e^{j\frac{2\pi}{6}3} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}6} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}9} \rightarrow X[1] = 4 + 3e^{j\frac{2\pi}{6}3} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}1} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3}$$

$$k = 2 \rightarrow X[2 \cdot (2) + 1] \rightarrow X[5] = 4e^{j\frac{2\pi}{6}0\cdot5} + 3e^{j\frac{2\pi}{6}1\cdot5} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}2\cdot5} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3\cdot5}$$
$$X[1] = 4 + 3e^{j\frac{2\pi}{6}5} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}10} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}15} \rightarrow X[1] = 4 + 3e^{j\frac{2\pi}{6}5} + 2e^{j\frac{2\pi}{6}4} + 1e^{j\frac{2\pi}{6}3}$$

9 Questão 9 - Scripts Utilizados

Faça todas as questões anteriores também no MATLAB.

As questões com possibilidade de resolução via matlab foram aplicadas, e adicionado um script para cada questão com comentários.

10 Questão 10 - Comentários dos códigos

Comente os códigos feitos no MATLAB dos dois métodos de convolução fornecido pela professora. Faça testes usando essas funções fornecidas e compare com os resultados das funções cconv e conv.

```
function y=aggregation_algorithm(x,h,N)

% Define "L" como o comprimento do sinal de entrada "x"
% e "K" como o comprimento da resposta ao impulso "h"
L = length(x)
K = length(h)

% Define "B" como o número de blocos necessários para cobrir todo o sinal
B = ceil((L + K - 1)/(N - K + 1))

% Adiciona zeros ao sinal de entrada "x" para torná-lo um múltiplo de "N-K+1"
% e adiciona zeros à resposta ao impulso "h" para torná-la um múltiplo de "N"
x=[zeros(1,K-1) x zeros(1,B*(N-K+1))]

% Define "hm" como a concatenação de "h" e zeros para torná-lo um múltiplo de "N"
% e armazena o resultado na variável "hm"
hm = [h zeros(1,N-K)]

% Inicializa a matriz "X" com zeros
for i = 1:B
    % Armazena os blocos do sinal de entrada "x" na matriz "X"
    % e armazena o resultado na variável "X"
    X(i,:) = [x(1+(i-1)*(N-(K-1)):i*N-(i-1)*(K-1))];
end

% Inicializa o sinal de saída "y" com zeros
% e armazena o resultado na variável "y"
y = cconv(X(1,:),hm,N)

```

```
% Armazena os blocos do sinal de saída "y" na matriz "y"
y = y(K:N)

% Inicializa o sinal de saída "y" com zeros
for i = 2:B
    % Define "y_aux" como a convolução circular do sinal de entrada "x" e a resposta ao impulso "h
    "
    % e armazena o resultado na variável "y_aux"
    y_aux = cconv(X(i,:),hm,N)

    % Altera "y" para ser a concatenação de "y" e "y_aux"
    y = [y y_aux(K:N)]
end
```

```
function [yconv,yfft]=sum_algorithm(x,h,N)

% cria um vetor x de comprimento t_x e um vetor h de comprimento t_h
t_x = length(x);
t_h = length(h);

% cria uma variável block que é o número de blocos
% de tamanho N que cabem em t_x
block = t_x/N;

% cria uma matriz X de tamanho block x N
for i = 1:block

    % preenche a i-ésima linha de X com o i-ésimo bloco de x
    X(i,:) = [x(1+(i-1)*N:i*N) zeros(1,t_h-1)];
end

% cria uma matriz Y de tamanho block x (N+t_h-1)
hm = [h zeros(1,N-1)];

% cria uma matriz Y de tamanho block x (N+t_h-1)
for i = 1:block

    % preenche a i-ésima linha de Y com a convolução da i-ésima linha de X com h
    Y(i,:) = [zeros(1,(i-1)*N) cconv(X(i,:),hm,N+t_h-1) zeros(1,t_x-(i)*N)];
    YY(i,:) = [zeros(1,(i-1)*N) ifft(fft(X(i,:)).*fft(hm)) zeros(1,t_x-(i)*N)];
end

% cria um vetor yconv de comprimento (t_x+t_h-1)
yconv = zeros(1,t_x+t_h-1);

% cria um vetor yfft de comprimento (t_x+t_h-1)
yfft = zeros(1,t_x+t_h-1);


% soma as linhas de Y para obter yconv
for i = 1:block

    % adiciona a i-ésima linha de Y a yconv
    yconv = yconv+Y(i,:);

    % adiciona a i-ésima linha de Y a yfft
    yfft = yfft+YY(i,:);
end
```

11 Referências

11.1 Tabela de transformada de DFT

FONTE: Elaborado Pelo Autor

Sequência de comprimento finito (comprimento N)	TFD de N pontos (comprimento N)
1. $x[n]$	$X[k]$
2. $x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
3. $ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
4. $X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
5. $x[((n-m))_N]$	$W_N^{km}X[k]$
6. $W_N^{-\ell n}x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
7. $\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
8. $x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell]X_2[((k-\ell))_N]$
9. $x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
10. $x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$
11. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] + X^*[((-k))_N]\}$
12. $j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_{\text{op}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] - X^*[((-k))_N]\}$
13. $x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
14. $x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{I}m\{X[k]\}$
As propriedades 15-17 aplicam-se apenas quando $x[n]$ é real.	
15. Propriedades de simetria	$\begin{cases} X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \mathcal{R}e\{X[k]\} = \mathcal{R}e\{X[((-k))_N]\} \\ \mathcal{I}m\{X[k]\} = -\mathcal{I}m\{X[((-k))_N]\} \\ \lvert X[k]\rvert = \lvert X[((-k))_N]\rvert \\ \angle\{X[k]\} = -\angle\{X[((-k))_N]\} \end{cases}$
16. $x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
17. $x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{I}m\{X[k]\}$

Figura 13: Tabela de Transformadas DFT