INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Avaliação VI - Processos Estocasticos

Processo estocástico com variáveis aleatórias idependentes

Arthur Cadore Matuella Barcella

19 de novembro de 2023

Sumário

1 Questão a ser desenvolvida:

Considere o processo estocástico $X(t) = A\text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right) + B\text{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right)$, onde A e B são variáveis aleatórias independentes, ambas uniformemente distribuídas sobre o conjunto finito $0, 2, 4$.

Determine:

- Determine e esboce três possíveis realizações (funções-amostra) do processo, á sua escolha.
- Determine e esboce a função média de X(t).
- Determine a função autocovariância de X(t).

2 Desenvolvimento

2.1 Determine e esboce três possíveis realizações (funções-amostra) do processo, á sua escolha:

A fim de criar 3 amostras utilizando o conjunto dado, irei variar os valores de A e B entre 0 e 2, visto que são os valores menores, portanto:

- Para A=0 e B=0:

FONTE: Elaborado pelo autor

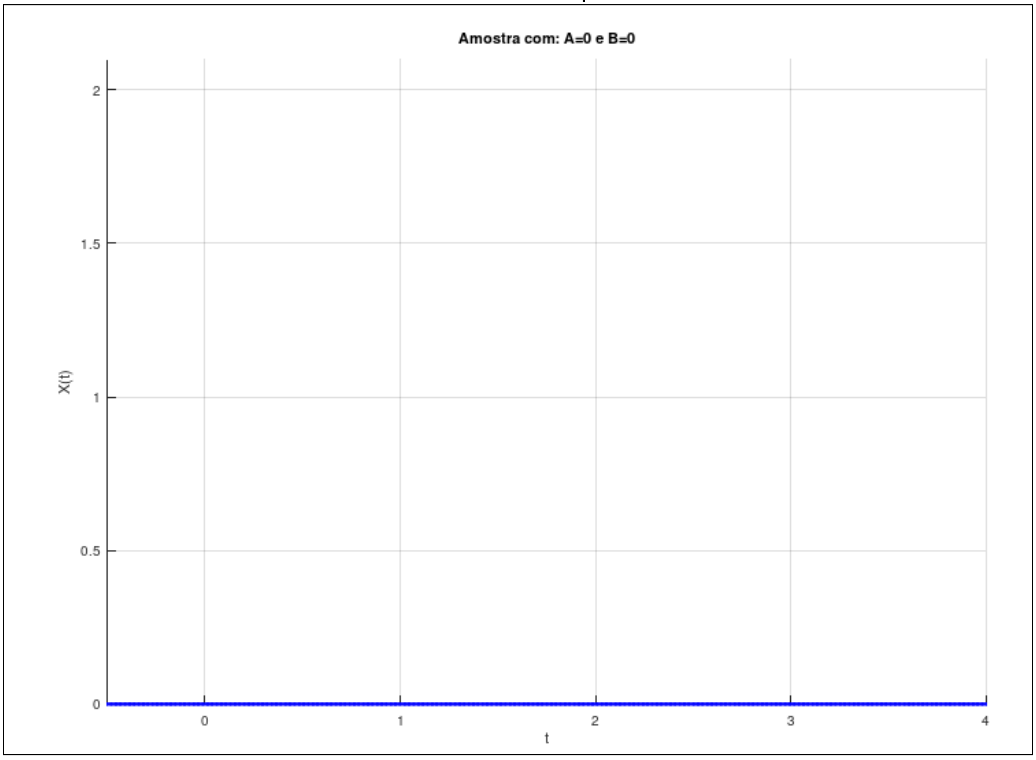

Figura 1: Amostra A=0 e B=0

- Para A=0 e B=2:

FONTE: Elaborado pelo autor

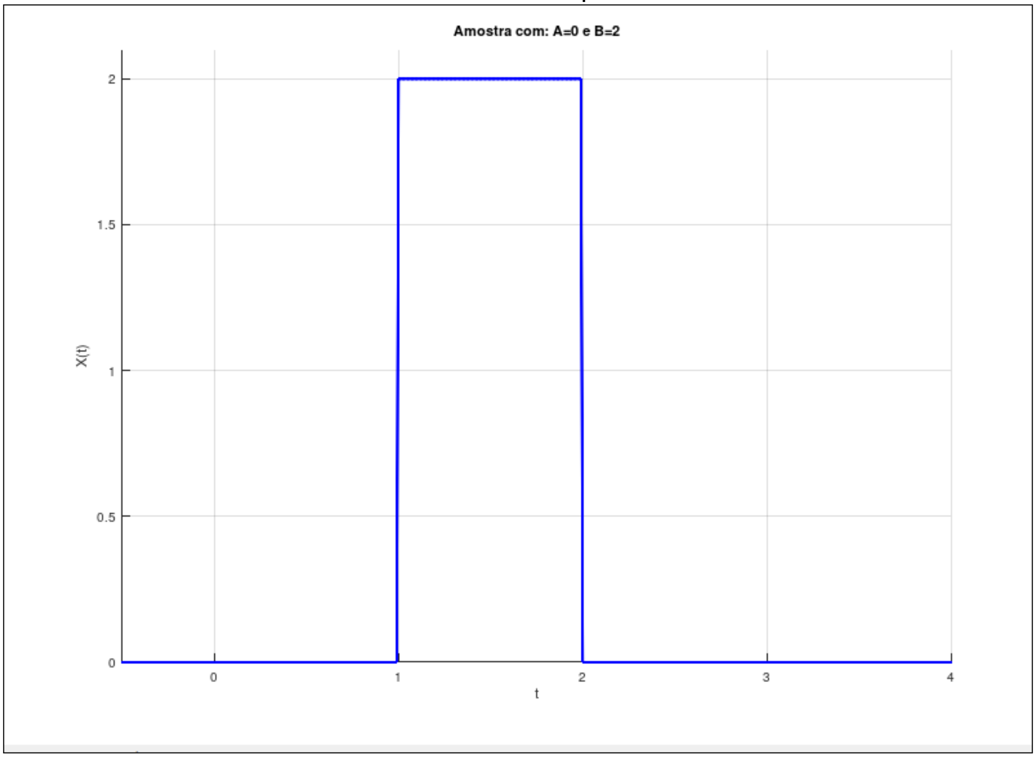

Figura 2: Amostra A=0 e B=2

- Para A=2 e B=0:

FONTE: Elaborado pelo autor

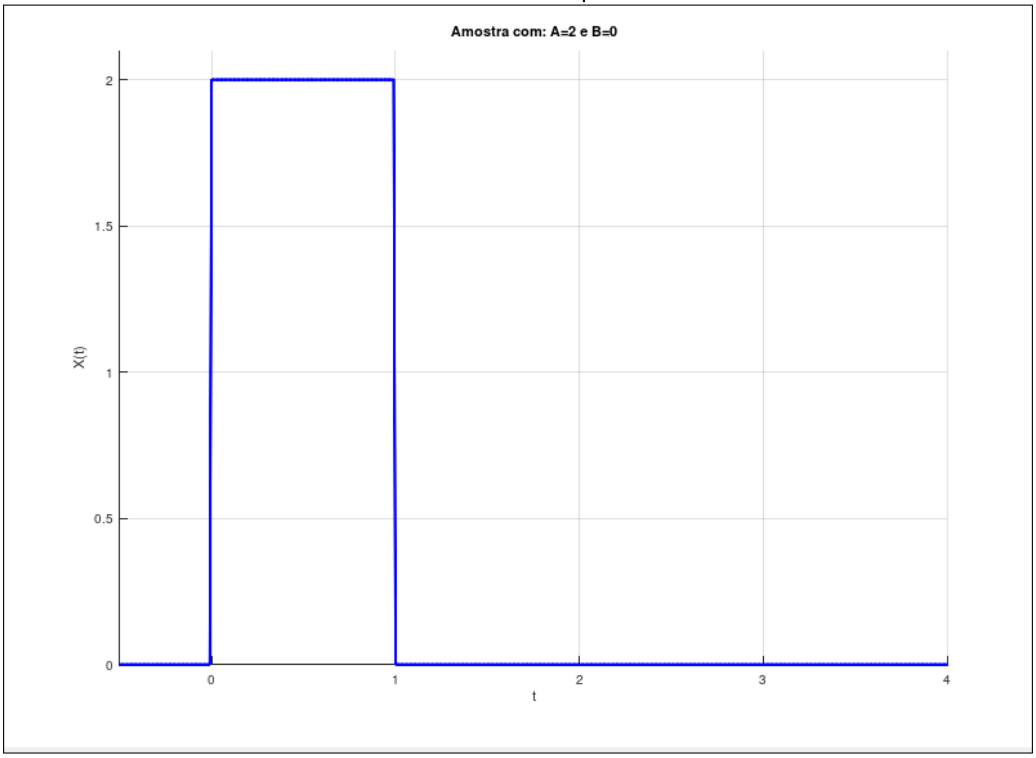

Figura 3: Amostra A=2 e B=0

Para realizar a plotagem e amostragem do eixo t, abaixo está o script utilizado:

```
% Aluno: Arthur Cadore M. Barcella
% github: arthurcadore
% Data: 19/11/2023
% ==============================================================================
clear all; close all ; clc;
pkg load statistics;

N = 1000;  % Número de experimentos probabilísticos
dt = 0.01;  % Passo do vetor de tempo
t = -5: dt :5; % limite minimo e máximo do vetor de tempo.
t1 = t; t2 = t;
Nt = length(t);

% ==============================================================================
% a) Determine e esboce três possíveis realizações (funções-amostra) do processo, à sua escolha:

% 1  amostra (A=0 e B=0):

A1_A = 0;
A1_B = 0;
A1_AB = A1_A * (0 <= t & t < 1) + A1_B * (1 <= t & t < 2);

figure; grid on; hold on;
plot(t, A1_AB, 'b', 'LineWidth', 2);
title('Amostra com: A=0 e B=0');
xlabel('t'); ylabel('X(t)');
ylim([0 2.1]);
xlim([-0.5 4]);

% 2  amostra (A=0 e B=2):

A2_A = 0;
A2_B = 2;
A2_AB = A2_A * (0 <= t & t < 1) + A2_B * (1 <= t & t < 2);

figure; grid on; hold on;
plot(t, A2_AB, 'b', 'LineWidth', 2);
title('Amostra com: A=0 e B=2');
xlabel('t'); ylabel('X(t)');
ylim([0 2.1]);
xlim([-0.5 4]);

% 3  amostra (A=2 e B=0):

A3_A = 2;
A3_B = 0;
A3_AB = A3_A * (0 <= t & t < 1) + A3_B * (1 <= t & t < 2);

figure; grid on; hold on;
plot(t, A3_AB, 'b', 'LineWidth', 2);
title('Amostra com: A=2 e B=0');
xlabel('t'); ylabel('X(t)');
ylim([0 2.1]);
xlim([-0.5 4]);
```

2.2 Determine e esboce a função média de X(t):

Para a segunda questão, deve-se determinar a função média, para isso, utiliza-se a equação abaixo:

$$\mu_X(t) = E[X(t)]$$

Então, aplicamos o X(t) dado no enunciado da questão:

$$\mu_X(t) = E\left[Arect\left(t - \frac{1}{2}\right) + Brect\left(t - \frac{3}{2}\right)\right]$$

$$\mu_X(t) = E\left[Arect\left(t - \frac{1}{2}\right)\right] + E\left[Brect\left(t - \frac{3}{2}\right)\right]$$

$$\mu_X(t) = rect\left(t - \frac{1}{2}\right) \times E[A] + rect\left(t - \frac{3}{2}\right) \times E[B]$$

Seguindo a definição vista em aula, temos que:

$$\mu_X(t) = rect\,(t - 0,5) \times E[A] + rect\,(t - 1,5) \times E[B] \rightarrow \mu_X(t) = \frac{1}{2}\,[0 <= t < 2]$$

Dessa forma, podemos plotar a média de X(t) da seguinte forma:

```
% ==============================================================================
% b) Determine e esboce a função média de X(t):

X = zeros(N, Nt);
for i = 1 : N
A = randi([0, 2])* 2;
B = randi([0, 2])* 2;

  X(i, :) = A * (0 <= t & t < 1) + B * (1 <= t & t < 2);
end

muX_sim = mean(X);
muX_teo = 2 * (0 <= t & t < 2);

figure; grid on; hold on;
plot(t, muX_sim, 'b', 'LineWidth', 4);
plot(t, muX_teo, 'b--', 'LineWidth', 2);
title('Função média'); xlabel('t'); ylabel('\mu_X(t)');
```

Após a plotagem, o seguinte resultado foi obtido:

FONTE: Elaborado pelo autor

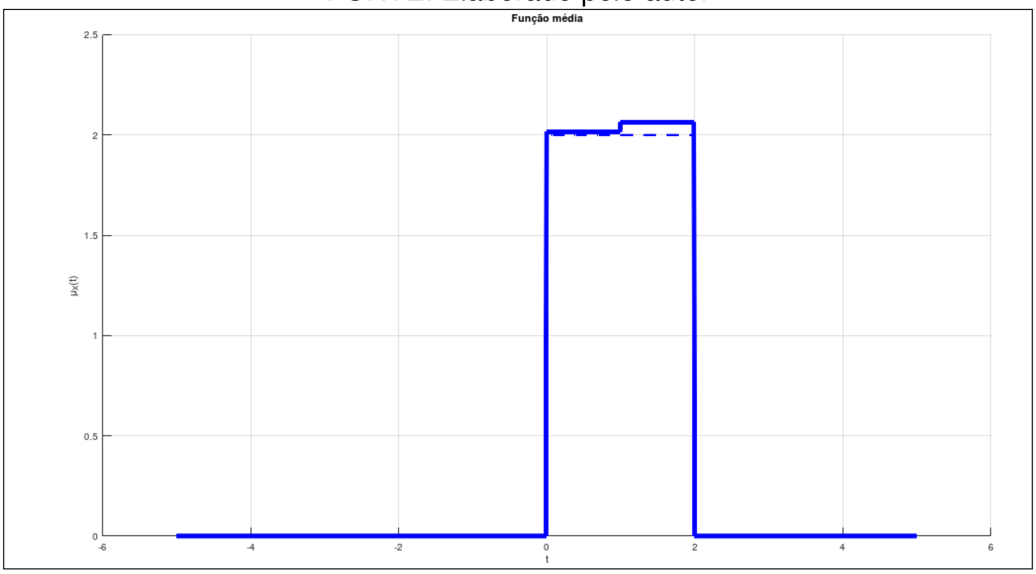

Figura 4: Média de x(t)

2.3 Determine a função autocovariância de X(t):

Para calcular a função autocovariância de X(t), temos que:

$$C_X(t1, t2) = cov[X(t1), X(t2)] \rightarrow C_X(t1, t2) = E[X(t1), X(t2)] - E[X(t1), X(t2)] \rightarrow$$

$$E[X(t1), X(t2)] = E\left[\left(Arect\left(t1 - \frac{1}{2}\right) + Brect\left(t1 - \frac{3}{2}\right)\right) \times \left(Arect\left(t2 - \frac{1}{2}\right) + Brect\left(t2 - \frac{3}{2}\right)\right)\right]$$

Agora, vamos calcular a expectativa E[X] usando a média dos valores possíveis, abaixo temos as 3 partes da equação dado que E[X(t1), X(t2)] =

$$E[A^2 rect(t1 - \frac{1}{2})rect(t2 - \frac{1}{2})+$$

$$ABrect(t1 - \frac{1}{2})rect(t1 - \frac{3}{2})rect(t2 - \frac{1}{2})+$$

$$B^2 rect(t1 - \frac{3}{2}rect(t2 - \frac{3}{2})]$$

Agora podemos calcular o valor de cada termo da equação separadamente:

$$E[A^2] = \frac{1}{3}(0^2 + 2^2 + 4^2) = \frac{20}{3} \rightarrow \frac{20}{3}\left(rect(t1 - \frac{1}{2})rect(t2 - \frac{1}{2})\right)$$

$$E[B] = \frac{1}{3}(0 + 2 + 4) = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{2}{3} * \frac{20}{3}\left(rect(t1 - \frac{1}{2})rect(t1 - \frac{3}{2})rect(t2 - \frac{1}{2})\right)$$

$$E[B^2] = \frac{1}{3}(0^2 + 2^2 + 4^2) = \frac{20}{3} \rightarrow \frac{20}{3}\left(rect(t1 - \frac{3}{2}rect(t2 - \frac{3}{2})\right)$$

Dessa forma, a função autocovariância pode ser expressa juntando os três termos novamente:

$$E[X(t1), X(t2)] = \frac{20}{3}\left(rect(t1 - \frac{1}{2})rect(t2 - \frac{1}{2})\right) + \frac{2}{3} * \frac{20}{3}\left(rect(t1 - \frac{1}{2})rect(t1 - \frac{3}{2})rect(t2 - \frac{1}{2})\right)$$
$$+\frac{20}{3}\left(rect(t1 - \frac{3}{2}rect(t2 - \frac{3}{2})\right)$$

Para realizar o plot da função apresentada acima, utiliza-se o seguinte script:

```
% ==============================================================================
% c) Determine a função autocovariância de X(t):

CX_sim = cov(X, X);
[T1, T2] = meshgrid(t1, t2);
CX_teo = 20/3  .* ((0 <= T1 & T1 < 1) .* (0 <= T2 & T2 < 1)  + (1 <= T1 & T1 < 2) .* (1 <= T2 & T2 < 2)) + ...
         40/9  .* ((0 <= T1 & T1 < 1) .* (1 <= T2 & T2 < 2)  + (1 <= T1 & T1 < 2) .* (0 <= T2 & T2 < 1)) + ...
         20/3  .* (0 <= T1 & T1 < 2) .* (0 <= T2 & T2 < 2);

figure;
subplot(1, 2, 1); grid on; hold on; view(30, 45);
surf(t1, t2, CX_sim);
shading flat;
title('Autocovariância (simulada)'); xlabel('t1'); ylabel('t2'); zlabel('CX(t1, t2)');

```

```
subplot(1, 2, 2); grid on; hold on; view(30, 45);T2
surf(t1, t2, CX_teo);
shading flat;
title('Autocovariância (teórica)'); xlabel('t1'); ylabel('t2'); zlabel('CX(t1, t2)');
```

Utilizando o script acima, temos o seguinte resultado:

FONTE: Elaborado pelo autor

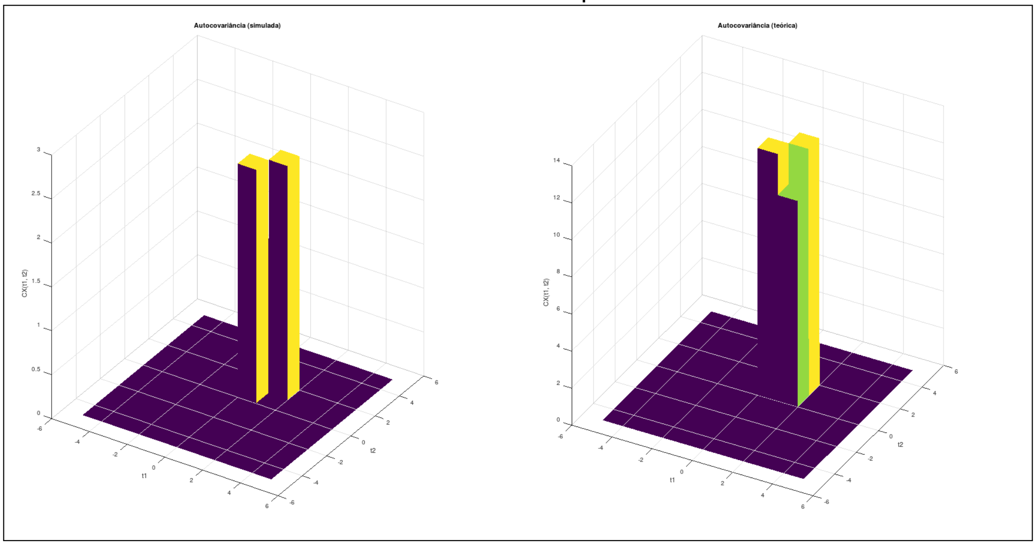

Figura 5: Autocovariância de x(t)

3 Referências bibliográficas

Processos Estocásticos - Vetores aleatórios gaussianos