INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Trabalho 2 - Sinais e Sistemas II

Transformada de Fourier de Tempo Discreto

Arthur Cadore Matuella Barcella

16 de dezembro de 2023

Sumário

1 Questões a serem desenvolvidas:

1. Usando a definição, obtenha a TFTD para os sinais a seguir:
   - $x[n] = (0,2)^n u[n-1]$
   - $x[n] = (2)^n u[-(n+1)]$
2. Usando a propriedade do deslocamento e sabendo que a TFTD de $a^n u[n]$ é $\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}$ para $|a| < 1$ obtenha a Transformada de Fourier dos sinais a seguir:
   - $x[n] = na^n u[n]$
   - $x[n] = (n-2)a^{2n} u[n-4]$
3. Considere um sistema caracterizado plea equação de diferença:

$$y[n] + 0,8y[n-1] + 0.12y[n-2] = 2x[n]$$

   Determine:
   - A resposta em frequência de $H[\omega]$
   - O valor de $y[n]$ para $x[n] = (0.2)^n u[n]$
4. Considere um sistema linear invariante ao deslocamento com resposta à amostra unitária $h[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$. Encontre a saída do sistema quando a entrada é $x[n] = 2 + \cos\left(\frac{\pi n}{10}\right)$
5. Sabendo que a resposta ao impulso de um sistema lienar invariante ao deslocamento é $h[n] = a^n u[n]$ com $|a| < 1$. Encontre a resposta à entrada $x[n] = 2$.
6. Considere o sistema da figura a seguir com a entrada x[n] e saída y[n]. Os sistemas LIT com resposta $H_lp(e^{j\omega})$ são filtros passa baixa ideais, com frequências de corte $\frac{\pi}{4}$ e ganho unitário na banda de passagem. Determine a resposta em frequência do sistema. Qual o tipo de filtro?

FONTE: Elaborado Pelo Autor

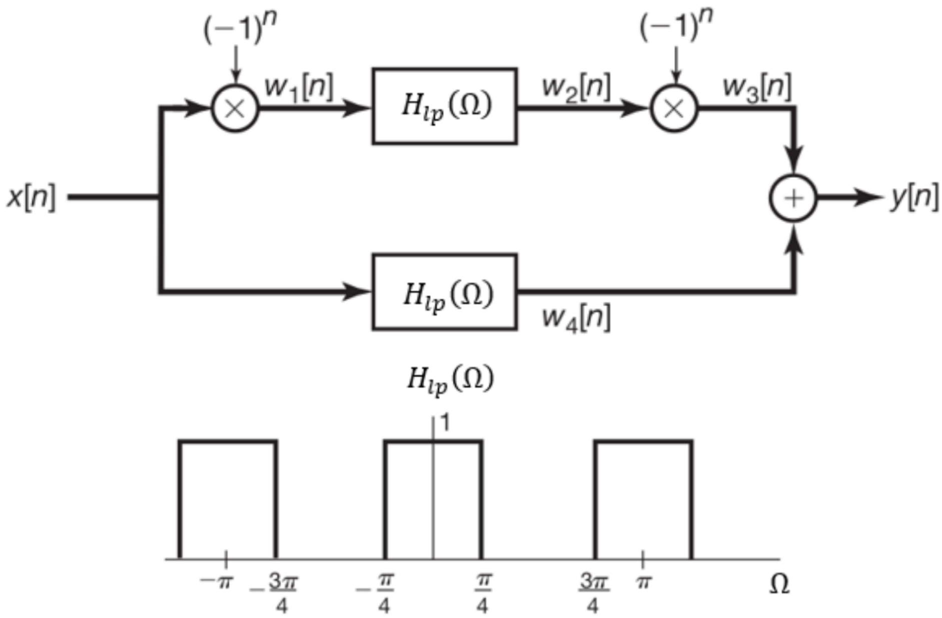

Figura 1: Plot Item 2

2 Desenvolvimento

NOTA: As questões abaixo apresentam o caractere "ω"como caractere da função para representação no dominio da frequência, devido a limitação do latex.

2.1 Usando a definição, obtenha a TFTD para os sinal (item a):

$$x[n] = (0,2)^n u[n-1]$$

$$x[\omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=1}^{\infty}(0,2)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(0,2e^{-j\omega}\right)^n$$

Seguindo a definição de séries geométricas temos que:

$$\sum_{n=n1}^{\infty} r^n = \frac{r^{n1}}{1-r}$$

Desta forma, podemos considerar r = $\left(0,2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega}\right)^{\mathrm{n}}$ e n1 = 1, sendo assim:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(0,2e^{j\omega}\right)^n = \frac{\left(0,2e^{-j\omega}\right)^1}{1-\left(0,2e^{-j\omega}\right)} = 0,2\cdot\frac{e^{-j\omega}}{1-0,2e^{-j\omega}}$$

$$x[\omega] = 0,2\cdot\frac{e^{-j\omega}}{1-0,2e^{-j\omega}}$$

2.2 Usando a definição, obtenha a TFTD para os sinal (item b):

$$x[n] = (2)^n u[-(n+1)] = (2)^n u[-n-1]$$

$$x[\omega] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(2)^n e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(2^{-1}e^{j\omega}\right)^{-n}$$

Considerando $-$n = m temos que:

$$X[\omega] = \sum_{m=1}^{\infty}\left(2^{-1}e^{j\omega}\right)^m$$

Novamente, seguindo a definição de séries geométricas temos que:

$$\sum_{m=n1}^{\infty} r^m = \frac{r^{n1}}{1-r}$$

Desta forma, podemos considerar r = $\left(2^{-1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}\right)^{\mathrm{m}}$ e n1 = 1, sendo assim:

$$X[\omega] = \sum_{m=1}^{\infty}\left(2^{-1}e^{j\omega}\right)^m = \frac{\left(2^{-1}e^{j\omega}\right)^1}{1-\left(2^{-1}e^{j\omega}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{j\omega}}{1-\frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

$$X[\omega] = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{j\omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{j\omega}}$$

2.3 Usando a propriedade do deslocamento e sabendo que a TFTD de $\mathrm{a^n u[n]}$ é $\frac{\mathrm{e^{j\omega}}}{\mathrm{e^{j\omega}-a}}$ para $|\mathrm{a}| < 1$ obtenha a Transformada de Fourier do sinal (item a):

$$x[n] = na^n u[n] = n \cdot (a^n u[n])$$

Sabendo que $\mathrm{nx[n]} \longleftrightarrow \mathrm{j}\frac{\mathrm{dX(\omega)}}{\mathrm{d\omega}}$ podemos aplicar a transformada para o dominio da frequência, desta forma:

$$X[\omega] = j\frac{d\left(\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}\right)}{d\omega}$$

Agora, aplicando a regra do quociente para derivadas, $\frac{\mathrm{u}}{\mathrm{v}} \rightarrow \frac{\mathrm{u'v-u.v'}}{\mathrm{v^2}}$, dessa forma temos que:

$$X[\omega] = j\frac{d\left(\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-a}\right)}{d\omega} = \frac{je^{j\omega} \cdot (e^{j\omega} - a) - e^{j\omega} \cdot je^{j\omega}}{(e^{j\omega} - a)^2} = \frac{(je^{j\omega} \cdot e^{j\omega}) - (je^{j\omega} \cdot a) - (je^{j\omega} \cdot e^{j\omega})}{(e^{j\omega} - a)^2} = -\frac{je^{j\omega} \cdot a}{(e^{j\omega} - a)^2}$$

$$X[\omega] = -\frac{a \cdot je^{j\omega}}{(e^{j\omega} - a)^2}$$

2.4 Usando a propriedade do deslocamento e sabendo que a TFTD de $\mathrm{a^n u[n]}$ é $\frac{\mathrm{e^{j\omega}}}{\mathrm{e^{j\omega}-a}}$ para $|\mathrm{a}| < 1$ obtenha a Transformada de Fourier do sinal (item b):

$$x[n] = (n-2)a^{2n}u[n-4]$$

Assumindo $\mathrm{a^2 = b}$, temos que:

$$x[n] = (n-2)b^n u[n-4] = (n - 2 + (-2+2))b^{n(+4-4)}u[n-4]$$

$$x[n] = [(n-4)+2] \cdot b^4 b^{(n-4)}u[n-4] = (n-4)b^4 b^{(n-4)}u[n-4] + 2b^4 b^{(n-4)}u[n-4]$$

$$x[n] = b^4(n-4)b^{(n-4)}u[n-4] + 2b^4 b^{(n-4)}u[n-4]$$

Seguindo a definição de transformadas vista na questão anterior para $\mathrm{x[n] = na^n u[n]}$ e $\mathrm{x[n] = a^n u[n]}$, e também a propriedade de deslocamento no tempo tal que $\mathrm{x[n-k] = X[\omega]e^{-jk\omega}}$, temos que:

$$x[\omega] = \left[\frac{-b \cdot je^{j\omega}}{(e^{j\omega} - b)^2} \cdot e^{-4j\omega}\right] + \left[2b^4 \cdot \frac{e^{j\omega}}{(e^{j\omega} - b)} \cdot e^{-j4\omega}\right]$$

Retornando o valor de $\mathrm{b = a^2}$, temos que:

$$x[\omega] = \left[\frac{-a^2 \cdot je^{j\omega}}{(e^{j\omega} - a^2)^2} \cdot e^{-4j\omega}\right] + \left[2a^8 \cdot \frac{e^{j\omega}}{(e^{j\omega} - a^2)} \cdot e^{-j4\omega}\right]$$

2.5 Considere um sistema caracterizado plea equação de diferença, determine a resposta em frequência de H[ω]:

$$y[n] + 0,8y[n-1] + 0.12y[n-2] = 2x[n]$$

Para encontrar a resposta em frequência, utlizamos a equação H[ω] = $\frac{Y[\omega]}{X\omega}$, desta forma temos que:

$$y[n] + 0,8y[n-1] + 0.12y[n-2] = 2x[n] \longleftrightarrow Y[\omega] + 0,8e^{-j\omega}Y[\omega] + 0,12e^{-2j\omega}Y[\omega] = 2X[\omega]$$

$$Y[\omega] + 0,8e^{-j\omega}Y[\omega] + 0,12e^{-2j\omega}Y[\omega] = 2X[\omega] = Y[\omega] \cdot [1 + 0,8e^{-j\omega} + 0,12e^{-2j\omega}] = 2X[\omega]$$

$$H[\omega] = \frac{Y\omega}{X[\omega]} = \frac{2}{[1 + 0,8e^{-j\omega} + 0,12e^{-2j\omega}]} = \frac{2}{[1 + 0,8e^{-j\omega} + 0,12e^{-2j\omega}]} \cdot \frac{e^{2j\omega}}{e^{2j\omega}}$$

$$H[\omega] = \frac{2 \cdot e^{2j\omega}}{e^{2j\omega} + 0,8e^{j\omega} + 0,12}$$

2.6 Considere um sistema caracterizado plea equação de diferença, determine o valor de y[n] para x[n] = $(0,2)^n$u[n]

Seguindo a explicação dada anteriormente, a transformada para o sinal e dada por:

$$x[n] = (0,2)^n u[n] \longleftrightarrow X[\omega] = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 0,2}$$

Desta forma, o valor Y[ω] é dado por:

$$Y[\omega] = H[\omega] \cdot X[\omega] = \frac{2 \cdot e^{2j\omega}}{e^{2j\omega} + 0,8e^{j\omega} + 0,12} \cdot \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 0,2}$$

Utilizando soma e produto temos que $1 + 0,8 + 0,12 = [x' = -0,2][x'' = -0,6]$, portanto temos que:

$$\frac{2 \cdot e^{2j\omega}}{e^{2j\omega} + 0,8e^{j\omega} + 0,12} = \frac{2 \cdot e^{2j\omega}}{(e^{j\omega} + 0,2)(e^{j\omega} + 0,6)}$$

Retomando o calculo...

$$Y[\omega] = \frac{2 \cdot e^{2j\omega}}{(e^{j\omega} + 0,2)(e^{j\omega} + 0,6)} \cdot \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 0,2} = \frac{Y[\omega]}{e^{j\omega}} = \frac{2 \cdot e^{2j\omega}}{(e^{j\omega} + 0,2)(e^{j\omega} + 0,6)(e^{j\omega} - 0,2)}$$

$$\frac{Y[\omega]}{e^{j\omega}} = \frac{2 \cdot e^{2j\omega}}{(e^{j\omega} + 0,2)(e^{j\omega} + 0,6)(e^{j\omega} - 0,2)} = \frac{A}{(e^{j\omega} + 0,2)} + \frac{B}{(e^{j\omega} + 0,6)} + \frac{C}{(e^{j\omega} - 0,2)}$$

Calculando A...

$$A = \frac{2 \cdot (-0,2)^2}{(-0,2+0,6)(-0,2-0,2)} = \frac{2(0,04)}{(0,4)(-0,4)} = \frac{0,08}{-0,16} = -0,5$$

Calculando B...

$$B = \frac{2 \cdot (-0,6)^2}{(-0,6+0,2)(-0,6-0,2)} = \frac{2 \cdot (0,36)}{(-0,4)(-0,8)} = \frac{0,72}{0,32} = 2,25$$

Calculando C...

$$C = \frac{2 \cdot (0,2)^2}{(0,2+0,2)(0,2+0,6)} = \frac{2(0,04)}{(0,4)(0,8)} = \frac{0,08}{0,32} = 0,25$$

$$\frac{Y[\omega]}{e^{j\omega}} = \frac{-0,5}{(e^{j\omega}+0,2)} + \frac{2,25}{(e^{j\omega}+0,6)} + \frac{0,25}{(e^{j\omega}-0,2)} = Y[\omega] = e^{j\omega}\left[\frac{-0,5}{(e^{j\omega}+0,2)} + \frac{2,25}{(e^{j\omega}+0,6)} + \frac{0,25}{(e^{j\omega}-0,2)}\right]$$

$$Y[\omega] = -0,5 \cdot \frac{e^{j\omega}}{(e^{j\omega}+0,2)} + 2,25 \cdot \frac{e^{j\omega}}{(e^{j\omega}+0,6)} + 0,25 \cdot \frac{e^{j\omega}}{(e^{j\omega}-0,2)}$$

Realizando a transformada de Y[ω] $\longleftrightarrow$ y[n], temos que:

$$y[n] = -0,5(-0,2)^n u[n] + 2,25(-0,6)^n u[n] + 0,25(0,2)^n u[n]$$

$$y[n] = \left[-0,5(-0,2)^n + 2,25(-0,6)^n + 0,25(0,2)^n\right] \cdot u[n]$$

2.7 Considere um sistema linear invariante ao deslocamento com resposta à amostra unitária h[n] = δ[n] + δ[n − 2]. Encontre a saída do sistema quando a entrada é x[n] = 2 + cos $\left(\frac{\pi n}{10}\right)$:

Para resolver a questão, pode-se utilizar a propriedade de convolução no tempo, onde o sinal x[n] convolvido com o sinal h[n] que produziria uma resposta y[n] são convertidos para o dominio da frequência de maneira a criar uma resposta Y[ω], desta forma temos que:

$$h[n] = \delta[n-0] + \delta[n-2]$$

$$x[n] = 2 + cos\left(\frac{\pi n}{10}\right)$$

Para encontrarmos y[n], pela definição temos que y[n] = x[n] $*$ h[n], portanto:

$$y[n] = \left[2 + cos\left(\frac{\pi n}{10}\right)\right] * [\delta[n-0] + \delta[n-2]]$$

$$y[n] = 2 * \delta[n-0] + 2 * \delta[n-2] + \left[cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) * \delta[n-0]\right] + \left[cos\left(\frac{\pi n}{10}\right) * \delta[n-2]\right]$$

$$y[n] = 2\delta[n] + 2\delta[n-2] + \delta[n] + \left[cos\left(\frac{\pi 2}{10}\right) \cdot \delta[n-2]\right]$$

Para validar a expressão apresentada acima, fiz o plot em Octave, o formato de onda está descrito abaixo:

FONTE: Elaborado Pelo Autor

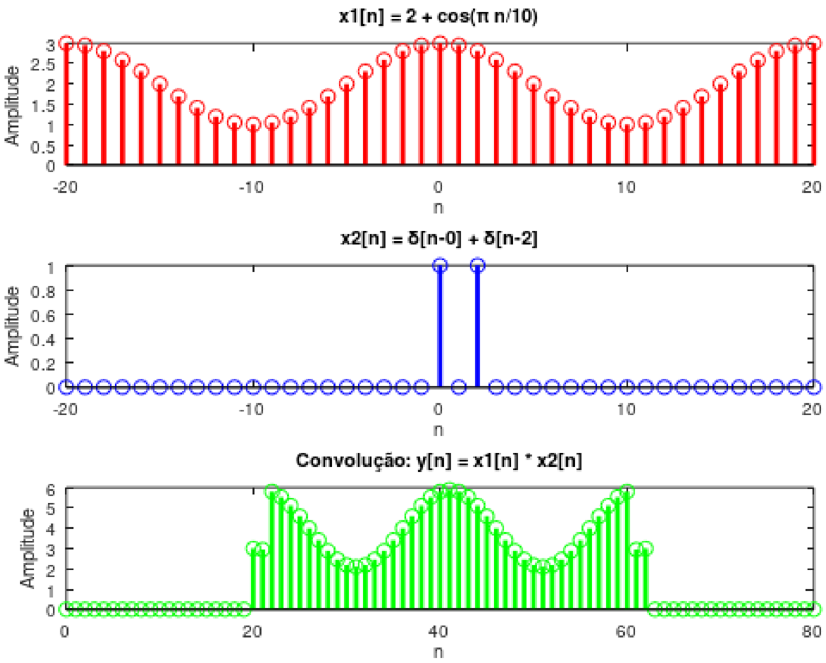

Figura 2: Plot Item 7

Para realizar o plot da imagem acima, utilizei o seguinte script:

```
pkg load symbolic

% Considere um sistema linear invariante ao deslocamento com resposta à amostra unitária $h[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$.
% Encontre a saída do sistema quando a entrada é $x[n] = 2 + cos \left( \frac{\pi n }{10}\right)$:

% Sinal x1[n] = 2 + cos(pi*n/10)
n = -20:20; % assumindo um intervalo arbitrário para n
x1 = 2 + cos(pi*n/10);

% Sinal x2[n] =  [n-0] +  [n-2]
x2 = zeros(size(n));
x2(n == 0) = 1; % delta[n-0]
x2(n == 2) = 1; % delta[n-2]

% Realizar a convolução usando a função conv
y = conv(x1, x2);

% Plotar os sinais e o resultado da convolução
figure(1);

subplot(3, 1, 1);
stem(n, x1, 'r', 'LineWidth', 2);
title('x1[n] = 2 + cos(\pi n/10)');
xlabel('n');
ylabel('Amplitude');

subplot(3, 1, 2);
stem(n, x2, 'b', 'LineWidth', 2);
title('x2[n] = \delta[n-0] + \delta[n-2]');
```

```
xlabel('n');
ylabel('Amplitude');

subplot(3, 1, 3);
stem(0:length(y)-1, y, 'g', 'LineWidth', 2);
title('Convolução: y[n] = x1[n] * x2[n]');
xlabel('n');
ylabel('Amplitude');
```

2.8 Sabendo que a resposta ao impulso de um sistema lienar invariante ao deslocamento é h[n] = $a^n u[n]$ com $|a| < 1$. Encontre a resposta à entrada x[n] = 2:

Para resolver a questão, podemos convolver a entrada x[n] = 2 com a resposta ao impulso h[n] = $a^n u[n]$, desta forma temos que:

$$x[n] * h[n] \longleftrightarrow X[\omega] \cdot H[\omega]$$

Para realizar a transformada de h[n] $\longleftrightarrow$ H[ω], pode-se utilizar diretamente a tabela, portanto:

$$h[n] = a^n u[n] \longleftrightarrow H[\omega] = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a}$$

Para realizar a transofrmada de x[n] = 2 pode-se também utilizar a tabela, tendo como transformada $2\pi 2\delta(\omega)$, desta forma temos:

$$Y[\omega] = 4\pi\delta(\omega) \cdot \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - a}$$

Agora realizando a transformada inversa dos componentes, temos a seguinte expressão:

$$y[n] = 2 \cdot a^n u[n]$$

Para validar a expressão apresentada acima, fiz o plot em Octave, o formato de onda está descrito abaixo:

FONTE: Elaborado Pelo Autor

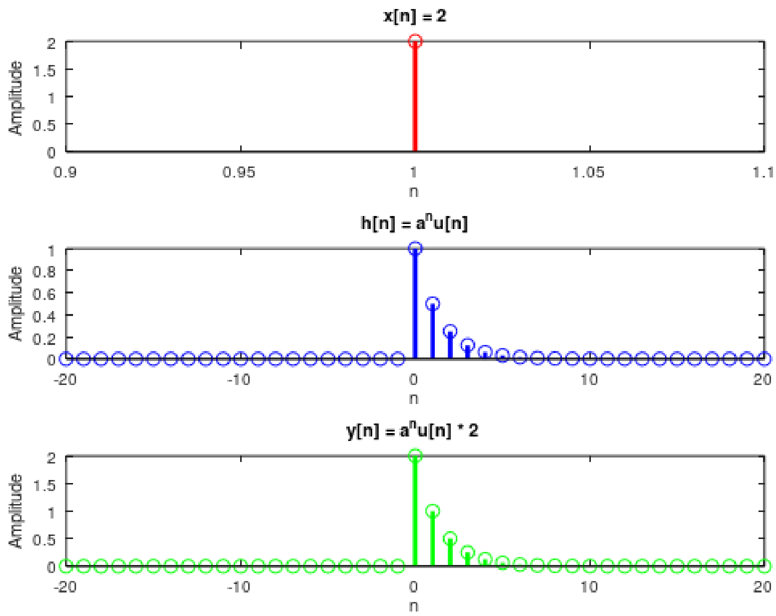

Figura 3: Plot Item 8

Para realizar o plot da imagem acima, utilizei o seguinte script:

```
pkg load symbolic

%Sabendo que a resposta ao impulso de um sistema lienar invariante ao deslocamento é $h[n] = a^nu[n]$ com $|a| < 1$.
%Encontre a resposta à entrada $x[n] = 2$:

% Definindo as variáveis
a = 0.5;  % Suponto a = 0.5
n = -20:20;  % Vetor de n para a convolução

x = 2;  % Sinal de entrada

% Resposta ao impulso h[n]:
h = a.^n .* (n >= 0);

% Convolução de x[n] com h[n]:
y = conv(x, h);

% Plotando os resultados
subplot(3,1,1);
stem(1, 2, 'r', 'LineWidth', 2);
title('x[n] = 2');
xlabel('n');
ylabel('Amplitude');

subplot(3,1,2);
stem(n, h, 'b', 'LineWidth', 2);
title('h[n] = a^nu[n]');
xlabel('n');
ylabel('Amplitude');

subplot(3,1,3);
stem(n, y, 'g', 'LineWidth', 2);
title('y[n] = a^nu[n] * 2 ');
xlabel('n');
ylabel('Amplitude');
```

2.9 Considere o sistema da figura a seguir com a entrada x[n] e saída y[n]. Os sistemas LIT com resposta $\mathrm{H_{lp}(e^{j\omega})}$ são filtros passa baixa ideais, com frequências de corte $\frac{\pi}{4}$ e ganho unitário na banda de passagem. Determine a resposta em frequência do sistema. Qual o tipo de filtro?

Apartir da figura apresentada, podemos montar as seguintes expressões:

$$(-1)^n + x[n] = w_1[n] \to H_{lp}(e^{j\omega}) \to w_2[n] + (-1)^n = w_3[n]$$

$$x[n] \to H_{lp}(e^{j\omega}) \to w_4[n]$$

$$w_3[n] + w_4[n] = y[n]$$

Dessa forma, temos a seguinte expressão:

$$y[n] = \left[((-1)^n + x[n]) \cdot H_{lp}(e^{j\omega}) + (-1)^n\right] + \left[x[n] \cdot H_{lp}(e^{j\omega})\right]$$

Considerando que trata-se de um filtro passa baixas de frequência de corte igual á $\frac{\pi}{2}$, pode-se subistitui-lo por um sinc que corresponte a um Ret com as mesmas caracteristicas na frequência, dessa forma temos que:

$$X[\omega] = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_c}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_c}\right) \rightarrow \omega_c = 2$$

Aplicando na transformada reversa do Ret, temos que:

$$n[n] = \frac{\omega_c}{\pi} sinc(\omega_c n) = \frac{2}{\pi} sinc(2n)$$

Retomando o calculo...

$$y[n] = \left[\left(((-1)^n + x[n]) \cdot \frac{2}{\pi} sinc(2n) + (-1)^n\right) + \left(x[n] \cdot \frac{2}{\pi} sinc(2n)\right)\right]$$

$$y[n] = ((-1)^n + x[n]) \cdot \frac{2}{\pi} sinc(2n) + (-1)^n + x[n] \cdot \frac{2}{\pi} sinc(2n)$$

$$y[n] = (-1)^n \cdot \frac{2}{\pi} sinc(2n) + x[n] \cdot \frac{2}{\pi} sinc(2n) + (-1)^n + x[n] \cdot \frac{2}{\pi} sinc(2n)$$

$$y[n] = \left[\frac{1}{x[n]} \cdot (-1)^n \cdot \frac{2}{\pi} sinc(2n) + \frac{2}{\pi} sinc(2n) + \frac{1}{x[n]} \cdot (-1)^n + \frac{2}{\pi} sinc(2n)\right] \cdot x[n]$$

Sendo assim, a resposta em frequência do sistema é:

$$h[n] = \frac{y[n]}{x[n]} = \left[\frac{1}{x[n]} \cdot (-1)^n \cdot \frac{2}{\pi} sinc(2n) + \frac{2}{\pi} sinc(2n) + \frac{1}{x[n]} \cdot (-1)^n + \frac{2}{\pi} sinc(2n)\right]$$

O tipo de filtro apresentado é um filtro passa baixa, conforme a imagem abaixo onde vemos a saída do sinal de entrada inserido no sistema.

FONTE: Elaborado Pelo Autor

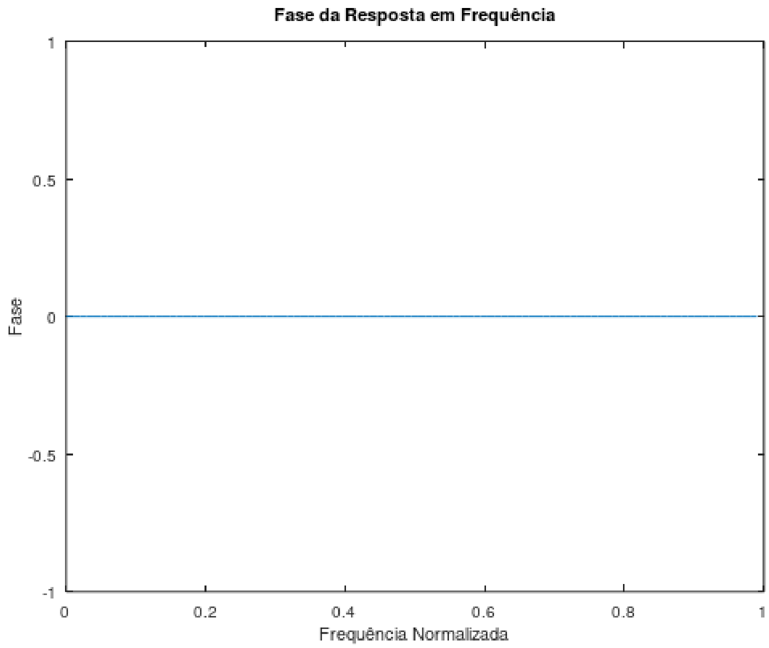

Figura 4: Plot Item 9

Para realizar o plot da imagem acima, utilizei o seguinte script, para realizar o teste utilizei uma entrada arbitrária $x[n] = (0,2)^n u[n-1]$:

```
% Item 9 - Considere o sistema da figura a seguir com a entrada $x[n]$ e saída $y[n]$.
% Os sistemas LIT com resposta $H_{lp}(e^{j\omega})$ são filtros passa baixa ideais, com frequências de corte $\frac{\pi}{4}$ e ganho unitário na banda de passagem.
% Determine a resposta em frequência do sistema. Qual o tipo de filtro?

n = 0:100;

% Entrada
x = (23).^n .* (n >= 1);

% Definindo a equação h[n]
h = (1 ./ x) .* (-1).^n .* (2/pi) .* sinc(2 * n) + (2/pi) .* sinc(2 * n) + (1 ./ x) .* (-1).^n + (2/pi) .* sinc(2 * n);

% Calculando a resposta em frequência:
N = length(h);
z = exp(1i * 2 * pi * (0:N-1) / N);

% Transformada de Fourier de h[n] usando FFT:
H = fft(h, N);

% Plotando a resposta em frequência
f = (0:N-1) * (1/N);
magnitude = angle(H);

figure(1);
plot(f, magnitude);
title('Resposta em Frequência');
xlabel('Frequência Normalizada');
ylabel('Módulo');
```