INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Câmpus
São José

Avaliação I - Processos Estocasticos

Resolução teórica e simulação em Octave

Arthur Cadore Matuella Barcella

11 de setembro de 2023

Sumário

1 Questão a ser desenvolvida:

Considere uma variável aleatória X definida através do seguinte experimento probabilístico. Um dado honesto é lançado, onde as probabilidades de cada resultado estão descritas abaixo:

1.1 Condições de equacionamento:

- Se o resultado for 1 ou 2, então:

$$X\ Unif([1,4]); \tag{1}$$

- Se o resultado for 3, então:

$$X = 2; \tag{2}$$

- Se o resultado for 4, 5 ou 6, então:

$$X\ Unif(\{1,2,3,4\}) \tag{3}$$

1.2 Objetivos

1. Determine e esboce a PDF de X.
2. Determine e esboce a CDF de X.
3. Determine a média de X.
4. Determine Pr[X > 3].

2 Desenvolvimento

2.1 Esboçar a PDF de X:

De modo geral, a PDF de X teórica (para valores discretos de variáveis aletórias) é obtida através do equacionamento abaixo. Como a questão pede para considerar um lançamento de um Dado, ou seja, um evento com possibilidades discretas, podemos utilizar este equancionamento.

$$fX(x) = \sum_{u \epsilon Sx} pX(u)\delta(x-u) \tag{4}$$

Como o dado foi caracterizado como honesto, considera-se que a probabilidade para cada face do dado é a mesma, ou seja, a probabilidade para cada resultado é de:

$$Pr(resultado) = \frac{1}{6} \tag{5}$$

Pois no total, são 6 faces no Dado, sendo que todas as faces tem a mesma probabilidade de se apresentar como resultado em cada lançamento.

Como o problema trata de variaveis Aleatórias Mistas, dependendo do resultado obtido no sorteio do dado, será necessário fazer outro sorteio variando de acordo com a condição apresentada, assim para determinar a probabilidade dos casos, utiliza-se o teorema da probabilidade total:

$$fX(x) = [1 \leq x \leq 4] * \frac{2}{6} + [1\delta(x)] * \frac{1}{6} + [\frac{1}{4}\delta(x)] * \frac{3}{6} \tag{6}$$

Explicando os componentes da probabilidade total:

- Como o resultado 1 e 2 possuem a mesma condição caso ocorram, fiz a junção das probabilidades desses dois casos, trazendo assim a fração "2/6", e esta multiplica a distribuição da condição.

$$fX(x) = [1 \leq x \leq 4] * \frac{2}{6} + (...) \tag{7}$$

- Em seguida temos o valor do impulso multiplicado pela probabilidade "1/6", aqui não há nenhum valor multiplicando o impulso pois a probabilidade de ser o impulso quando ocorrer este evento é de 100%, visto que não há outro caso possivel.

$$fX(x) = (...) + [1\delta(x)] * \frac{1}{6} + (...) \tag{8}$$

- Por fim, para os casos onde o x é igual a 4, 5 ou 6, como são 3 diferentes possibilidades agrupadas, a fração é de "3/6", sendo que neste evento, 4 possibilidades de valor são possiveis ao executar a distribuição uniforme, dessa forma, o fator mutiplicativo é de "1/4".

$$fX(x) = (...) + \frac{1}{4}\delta(x)] * \frac{3}{6} \tag{9}$$

Dessa forma, a PDF de X teórica no matlab é dada pela seguinte expressão:

```
pdfX_teo = [(2/6) * (1/3) * [(x >= 1 & x <= 4)]]
```

A expressão acima refere-se apenas ao primeiro componente listado acima, pois os demais compontentes serão representados por impulsos mais a diante.

Dessa forma, o código para a PDF de X completo é dado por:

```
% Item a:

dx = 0.02;          % Definição do operador de passo utilizado
x = 0 : dx : 5;    % Definição dos limites de simulação

% Calculo de PDF de X (Simulada e Teórica):
pdfX_sim = hist(X, x) / (N * dx);
pdfX_teo = [(2/6) * (1/3) * [(x >= 1 & x <= 4)]];

% Impressao da PDF de simulada de X:
figure; hold on; grid on;
bar(x, pdfX_sim);

% Impressao da PDF teórica de X:
plot(x, pdfX_teo, 'b', 'LineWidth',3);

% Definição dos limites dos eixos:
xlim([-1 5]); ylim([-0.1 1]);

% Definição dos nomes de cada eixo:
xlabel('x'); ylabel('Fx(x)');
```

Após fazer plot da PDF de X, demos o seguinte resultado, note que em ’X=2’, dois impulsos foram representados, isto se dá apenas para ilustrar que nos componentes 2 e 3 do problema, há um impulso nesse valor de X.

O valor da PDF de X simulada está representado por barras na imagem abaixo, enquanto que a PDF teórica é dada pela linha azul:

FONTE: Elaborado pelo autor

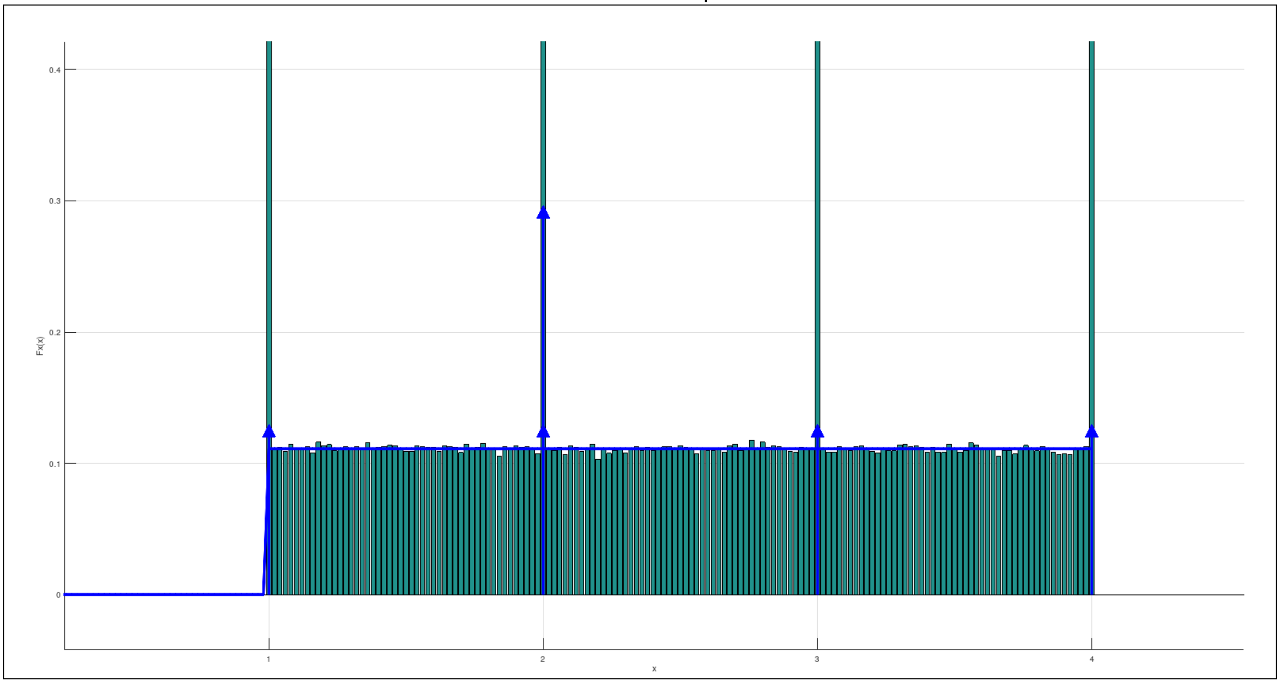

Figura 1: Plot da PDF de X simulada e teórica

O código utilizado para a representação dos impulsos no intervalo do problema está exibido abaixo:

```

%Desenho dos impulsos:
plot([2, 2], [1/8, 7/24], 'b', 'LineWidth', 3');
plot([2], [7/24], 'b^', 'MarkerSize', 12, 'MarkerFaceColor', 'b');

plot([1, 1], [0, 1/8], 'b', 'LineWidth', 3');
plot([1], [1/8], 'b^', 'MarkerSize', 12, 'MarkerFaceColor', 'b');

plot([2, 2], [0, 1/8], 'b', 'LineWidth', 3');
plot([2], [1/8], 'b^', 'MarkerSize', 12, 'MarkerFaceColor', 'b');

plot([3, 3], [0, 1/8], 'b', 'LineWidth', 3');
plot([3], [1/8], 'b^', 'MarkerSize', 12, 'MarkerFaceColor', 'b');

plot([4, 4], [0, 1/8], 'b', 'LineWidth', 3');
plot([4], [1/8], 'b^', 'MarkerSize', 12, 'MarkerFaceColor', 'b');
```

2.2 Esboçar a CDF de X:

Tendo os valores da PDF de ’X’, é possivel encontrar o valor da CDF de ’X’, levando em conta que basta somar os valores de cada sessão da PDF de X de maneira acumulativa até que toda a probabilidade tenha sido "mapeada", ou seja, que a soma acumulativa seja igual a 1.

Para encontrar a CDF teórica de X, devemos partir da soma das integrais de cada intervalo, conforme abaixo:

- Em (x < 1):

$$\int_{-\infty}^{1_-} 0du = 0$$

- Em (x == 1):

$$\int_{1_-}^{1_+} \frac{1}{8}\delta(u)du = \frac{1}{8}$$

- Em (1 < x & x < 2):

$$\int_{1_+}^{x} \frac{2}{18}du = \frac{2}{18}\Big|_1^x$$

$$\frac{2x}{18} - \frac{2}{18} = \frac{2x-2}{18}$$

- Em (x == 2):

$$\int_{2_-}^{2_+} \frac{1}{8} + 1\delta(u)du = 1/8$$

- Em (2 < x & x < 3):

$$\int_{2_+}^{x} \frac{2}{18}du = \frac{2}{18}\Big|_2^x$$

$$\frac{2x}{18} - \frac{4}{18} = \frac{2x-4}{18}$$

- Em (x == 3):

$$\int_{3_-}^{3_+} \frac{1}{8}\delta(u)du = \frac{1}{8}$$

- Em (2 < x & x < 3):

$$\int_{3_+}^{x} \frac{2}{18}du = \frac{2}{18}\Big|_3^x$$

$$\frac{2x}{18} - \frac{6}{18} = \frac{2x-6}{18}$$

- Em (x == 4):

$$\int_{4_-}^{4_+} \frac{1}{8}\delta(u)du = \frac{1}{8}$$

- Em (x > 4):

$$\int_{4_+}^{+\infty} 0du = 0$$

Somando todos os casos temos a probabilidade acumulativa igual a um, dada pela expressão abaixo:

$$\int_{-\infty}^{1-} 0du + \int_{1-}^{1+} \frac{1}{8}\delta(u)du + \int_{1+}^{2-} \frac{2}{18}du + \int_{2-}^{2+} \frac{1}{8} + 1\delta(u)du + \int_{2+}^{3-} \frac{2}{18}du$$

$$+\int_{3-}^{3+}\frac{1}{8}\delta(u)du+\int_{3+}^{4-}\frac{2}{18}du+\int_{4-}^{4+}\frac{1}{8}\delta(u)du+\int_{4+}^{+\infty}0du=1$$

Dessa forma a expressão montada no matlab para calcular a CDF teórica de X é dada pelo seguinte código:

```
cdfX_teo = 0                                                    .* (x < 1) + ...
           (1/8 + (2/18 * x - 2/18))                            .* (1 < x & x <= 2) + ...
           (2/8 + (4/18 -1/18) + (2/18 * x - 2/18))             .* (2 < x & x <= 3) + ...
           (3/8 + (4/18 - 1/18) + (3/18 - 2/18) + (2/18 * x - 3/18))   .* (3 < x & x < 4) + ...
            1                                                   .* (4 <= x);
```

O script completo para realizar o calculo da CDF teórica de X e também da CDF simulada está representado abaixo:

```
% Item b:

% Calculo de CDF de X (Simulada e Teórica):
cdfX_sim = cumsum(pdfX_sim) * dx;
cdfX_teo = 0                                                    .* (x < 1) + ...
           (1/8 + (2/18 * x - 2/18))                            .* (1 < x & x <= 2) + ...
           (2/8 + (4/18 -1/18) + (2/18 * x - 2/18))             .* (2 < x & x <= 3) + ...
           (3/8 + (4/18 - 1/18) + (3/18 - 2/18) + (2/18 * x - 3/18))   .* (3 < x & x < 4) + ...
            1                                                   .* (4 <= x);


% Impressao da CDF teórica e simulada de X:
figure; hold on;  grid on;
plot(x, cdfX_sim, 'y', 'LineWidth',9);
plot(x, cdfX_teo, 'b', 'LineWidth',2);
xlim([-1 5]); ylim([-0.1 1.2]);
xlabel('x'); ylabel('Fx(x)');
```

O valor da CDF de X simulada está representado pela linha amarela na imagem abaixo, enquanto que a CDF teórica é dada pela linha azul:

FONTE: Elaborado pelo autor

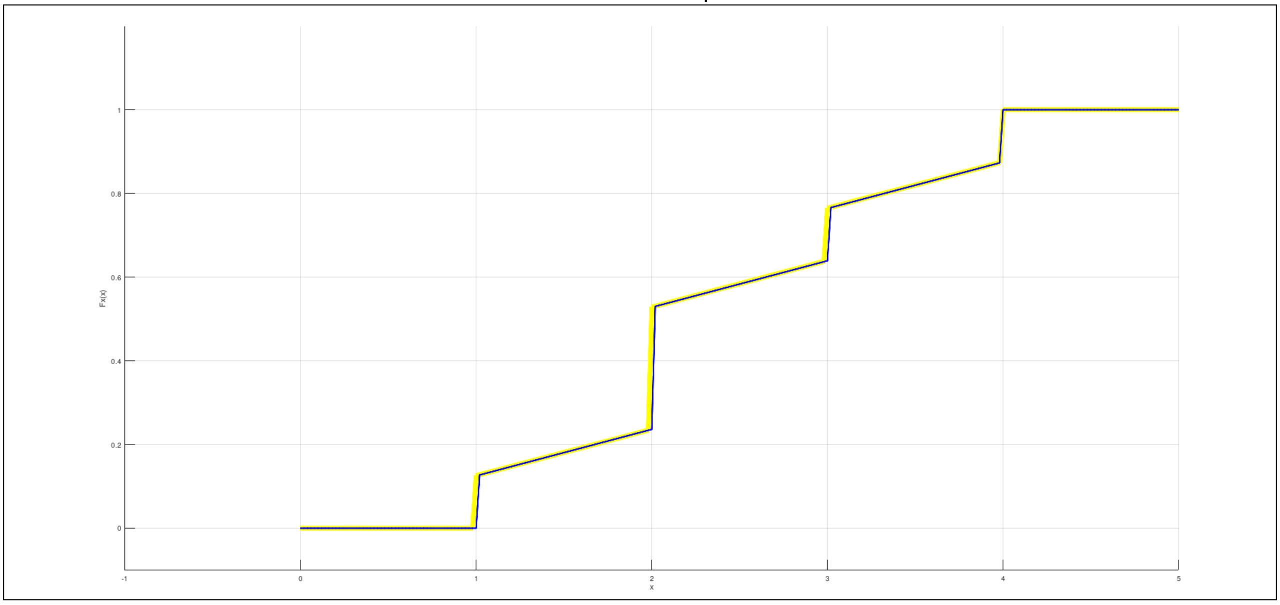

Figura 2: Plot da PDF de X simulada e teórica

2.3 Determinar a média de X:

Para retirar a média 'E(x)', vamos utilizar o teorema da probabilidade total. Para utiliza-lo, precisamos incialmente determinar qual será o valor da média de massa de cada caso possivel.

- No primeiro caso, onde o lançamento do dado é igual á 1 ou 2, o intervalo é de [1, 4] portanto:

$$E[X|u = 1ou2] = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2}$$

- O mesmo ocorre para o intervalo [1,2,3,4], pois a distribuição é uniforme e discreta, permitindo assim que a média seja calculada da mesma maneira vista anteriormente, dessa forma, a média massa será de 5/2 também.
- Para o caso onde X = 2, não há calculo a ser feito, pois como o intervalo é a própria constante, da média será a própria constante.

Dessa forma:

$$E[X] = (\frac{5}{2} * \frac{2}{6}) + (2 * \frac{1}{6}) + (\frac{5}{2} * \frac{3}{6}) = \frac{29}{12}$$

No matlab o calculo da média de X é dado pela função "mean(X)"enquanto que o valor teórico foi inserido manualmente, conforme a sessão do script apresentada abaixo:

```
% Item c:

% Calculo da Média total (simulada e teórica) de X:
EX_sim = mean(X)
EX_teo = 29/12
```

2.4 Determinar Pr[X > 3]:

O valor de Pr[X] tal que 'X > 3' pode ser obtido analisando a CDF de X.

Como a CDF de X exibe uma probabilidade acumulativa varrendo todo o eixo X, basta analisar a CDF de X onde X for menor que 3, portanto:

$$\iint_{-\infty}^{1-} 0du + \int_{1-}^{1+} \frac{1}{8}\delta(u)du + \int_{1+}^{2-} \frac{2}{18}du + \int_{2-}^{2+} \frac{1}{8} + 1\delta(u)du + \int_{2+}^{3-} \frac{2}{18}du$$

$$0 + \frac{1}{8} + (\frac{4}{18} - \frac{2}{18}) + \frac{1}{8} + (\frac{6}{18} - \frac{4}{18}) = \frac{2}{8} + \frac{(4-2+6-4)}{18} = \frac{2}{8} + \frac{4}{18} = \frac{46}{72} = \frac{23}{36}$$

```
% Item d:

% Calculo da probabilidade de X dado que X > 3:

PrX_lt3_sim = mean(X < 3)      % Probabilidade de X < 3 simulada
PrX_lt3_teo = 23/36              % Probabilidade de X < 3 calculada
```

3 Referências bibliográficas

Variáveis aleatórias
Valor esperado
Variáveis aleatórias mistas