INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina

Câmpus
São José

Avaliação IV - Processos Estocasticos

Variáveis aleatórias sorteadas independentemente

Arthur Cadore Matuella Barcella

22 de outubro de 2023

Sumário

1 Questão a ser desenvolvida:

Sejam X1, X2, X3 Bern(1/3) variáveis aleatórias sorteadas independentemente.

1.1 item a:

- Y1 = X1X2,
- Y2 = X2X3,
- Y3 = X3X1.

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório:

$$Y = [Y1 Y2 Y3]^T$$

1.2 item b:

- Z1 = Y1,
- Z2 = Y1 + Y2,
- Z3 = Y1 + Y2 + Y3.

Determine o vetor média e a matriz covariância do vetor aleatório. Utilize a formulação matricial.

$$Y = [Y1 Y2 Y3]^T$$

2 Desenvolvimento

2.1 Item (a):

Para fazer o calculo do vetor média e da matriz covariância, inicialmente fiz o calculo da probabilidade de cada caso e o valor resultante de y para cada caso.

Como a questão pede bernoulli 1/3, significa que para o valor 1, teremos 33,33% de probabilidade, enquanto que para 0 teremos 66,66% de probabilidade, desa forma, é possivel montar a seguinte tabela, calculando todos os casos:

FONTE: Elaborado pelo autor

X1	X2	X3	px1,x2,x3(x)	Y1=X1 . X2	Y2=X2 . X3	Y3=X3 . X1
0	0	0	8/27	0	0	0
0	0	1	4/27	0	0	0
0	1	0	4/27	0	0	0
0	1	1	2/27	0	1	0
1	0	0	4/27	0	0	0
1	0	1	2/27	0	0	1
1	1	0	2/27	1	0	0
1	1	1	1/27	1	1	1
		PROBABILIDADE TOTAL =	27/27			

Figura 1: Tabela de probabilidades e valores de Y para cada caso

Em seguida, com os valores de Y obtidos para cada caso, é possivel calcular a média de cada variável aleatória, através da seguinte expressão:

$$E[Y_i] = \sum_j y_{ij} \times P(Y_i = y_{ij})$$

Dessa forma temos que para Y1:

$$E[Y1] = \frac{0.8}{27} + \frac{0.4}{27} + \frac{0.4}{27} + \frac{0.2}{27} + \frac{0.4}{27} + \frac{0.2}{27} + \frac{1.2}{27} + \frac{1.1}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

Agora para Y2:

$$E[Y2] = \frac{0.8}{27} + \frac{0.4}{27} + \frac{0.4}{27} + \frac{1.2}{27} + \frac{0.4}{27} + \frac{0.2}{27} + \frac{0.2}{27} + \frac{1.1}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

Agora para Y3:

$$E[Y3] = \frac{0.8}{27} + \frac{0.4}{27} + \frac{0.4}{27} + \frac{0.2}{27} + \frac{0.4}{27} + \frac{1.2}{27} + \frac{0.2}{27} + \frac{1.1}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

Dessa forma, o vetor média pode ser obtido juntando as médias separadas, conforme abaixo:

$$Y = [E[Y1], E[Y1], E[Y1]]^T \rightarrow Y = [\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9}]^T$$

Agora, deve-se encontrar as variâncias de Y1,Y2 e Y3, para isso, será utilizada a seguinte expressão:

$$\mathrm{Var}(Y_i) = E[(Y_i - E[Y_i])^2]$$

Dessa forma temos que para Y1:

$$E[Y1^2] = \frac{0^2.8}{27} + \frac{0^2.4}{27} + \frac{0^2.4}{27} + \frac{0^2.2}{27} + \frac{0^2.4}{27} + \frac{0^2.2}{27} + \frac{1^2.2}{27} + \frac{1^2.1}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

Agora para Y2:

$$E[Y2^2] = \frac{0^2.8}{27} + \frac{0^2.4}{27} + \frac{0^2.4}{27} + \frac{1^2.2}{27} + \frac{0^2.4}{27} + \frac{0^2.2}{27} + \frac{0^2.2}{27} + \frac{1^2.1}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

Agora para Y3:

$$E[Y3^2] = \frac{0^2.8}{27} + \frac{0^2.4}{27} + \frac{0^2.4}{27} + \frac{0^2.2}{27} + \frac{0^2.4}{27} + \frac{1^2.2}{27} + \frac{0^2.2}{27} + \frac{1^2.1}{27} = \frac{3}{27} = \frac{1}{9}$$

Agora que obtivemos os valores de cada variável aleatória ao quadrado, podemos vacular as variâncias:

$$var[Y1] = E[Y1^2] - E[Y1]^2 = \frac{1}{9} - \frac{1^2}{9} = 0$$

$$var[Y2] = E[Y2^2] - E[Y2]^2 = \frac{1}{9} - \frac{1^2}{9} = 0$$

$$var[Y3] = E[Y3^2] - E[Y3]^2 = \frac{1}{9} - \frac{1^2}{9} = 0$$

Sendo assim, para calcular a covariância, temos que calcular também a média de variavel aleatória conjunta, para isso temos que:

$$E[Y1, Y2] = 1.\frac{1}{27} = \frac{1}{27}$$

$$E[Y2, Y3] = 1.\frac{1}{27} = \frac{1}{27}$$

$$E[Y3, Y1] = 1.\frac{1}{27} = \frac{1}{27}$$

Agora, calculando a covariância, temos que:

$$cov[Y1, Y2] = E[Y1, Y2] - E[Y1].E[Y2] = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$$
$$cov[Y2, Y3] = E[Y2, Y3] - E[Y2].E[Y3] = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$$
$$cov[Y3, Y1] = E[Y3, Y1] - E[Y3].E[Y1] = \frac{1}{27} - \frac{1}{9} = \frac{2}{27}$$

$$\mathbf{CY} = \begin{bmatrix} 0 & 2/27 & 2/27 \\ 2/27 & 0 & 2/27 \\ 2/27 & 2/27 & 0 \end{bmatrix}$$

Seguindo a determinação das posições da matriz covariância:

$$\mathbf{c}Z = \begin{bmatrix} \mathrm{Var(Y_1)} & \mathrm{Cov(Y_2, Y_1)} & \mathrm{Cov(Y_3, Y_1)} \\ \mathrm{Cov(Y_1, Y_2)} & \mathrm{Var(Y_2)} & \mathrm{Cov(Y_3, Y_2)} \\ \mathrm{Cov(Y_1, Y_3)} & \mathrm{Cov(Y_2, Y_3)} & \mathrm{Var(Y_3)} \end{bmatrix}$$

2.2 item(b):

Para calcularmos o valor do vetor média de maneira matricial temos que:

$$[Z1 = Y1]$$

$$[Z2 = Y1 + Y2]$$

$$[Z3 = Y1 + Y2 + Y3]$$

Dessa forma, podemos representar na seguinte expressão matricial:

$$\begin{pmatrix} Z1 \\ Z2 \\ Z3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} Y1 \\ Y2 \\ Y3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/27 \\ 2/27 \\ 2/27 \end{pmatrix}$$

Dessa forma, para calcular uZ, seguindo o equacionamento dado pela questão, temos que:

$$uZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1/9 \\ 1/9 \\ 1/9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/27 \\ 2/27 \\ 2/27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/27 \\ 8/27 \\ 11/27 \end{pmatrix}$$

Agora, para calcular o valor da covariância, temos que a matriz covariância é a seguinte:

$$CZ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2/27 & 2/27 \\ 2/27 & 0 & 2/27 \\ 2/27 & 2/27 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$CZ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2/27 & 2/27 \\ 2/27 & 0 & 2/27 \\ 2/27 & 2/27 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/27 & 4/27 & 4/27 \\ 8/27 & 2/9 & 2/9 \\ 10/27 & 8/27 & 2/9 \end{pmatrix}$$

3 Referências bibliográficas

Variáveis aleatórias conjuntamente distribuídas
Vetores Aleatórios