INSTITUTO FEDERAL
Santa Catarina
Câmpus
São José

Cálculo Numérico

Trabalho Final de Cálculo IV

Gabriel Luiz Espindola Pedro

Arthur Cadore Matuella Barcella

25 de novembro de 2022

Sumário

1 Introdução

Este trabalho tem o objetivo de explicar e aplicar métodos numéricos para obtenção de zeros de funções reais a uma função escolhida a fim de definir quais são as particularidades de cada método aplicado, suas vantagens e desvantagens e considerações existentes para aquele método.

2 Embasamento teórico

Métodos numéricos numéricos para obtenção de zeros de funções reais são algoritmos aplicados a funções com o objetivo de obter-se o valor de entrada da função que retorne o valor 0, ou seja o ponto em que ocorre o cruzamento do eixo x. Existem quatro principais métodos que podemos aplicar para atingir este objetivo que serão descritos e exemplificados a seguir.

2.1 Método da bissecção

O método da bissecção consiste em escolher dois pontos de uma função onde sabe-se que entre eles há um zero desta função e que esta função é contínua neste intervalo, e cortar esta distância ao meio até que atinja-se um ponto aproximado que respeite a precisão requerida, ou seja (b $-$ a) $< \epsilon$.

Passo a passo do algoritmo:

1. Define-se os valores iniciais: pontos a, b e precisão ϵ
2. Se (b $-$ a) $< \epsilon$, então escolha qualquer valor dentro do intervalo como solução e encerra o algoritmo
3. k = 1
4. M = f(a)
5. x = $\frac{a+b}{2}$
6. Se Mf(x) $>$ 0, faça a = x. Vá para o passo 8.
7. b = x
8. Se (b $-$ a) $< \epsilon$, então escolha como resposta qualquer valor x dentro do atual intervalo.
9. k = k + 1. Volte para o passo 5.

2.2 Método da posição falsa

O método da posição falsa consiste em realizar uma média aritmética ponderada entre os pontos escolhidos como pontos iniciais, utilizando como peso os respectivos valores da função naquele ponto.

$$x = \frac{a\,|f(b)| + b\,|f(a)|}{|f(b)| + |f(a)|} \tag{1}$$

Graficamente podemos dizer que o ponto x é a intersecção entre de uma reta que passe pelos pontos aplicados.

Passo a passo do algoritmo:

1. Define-se os dados iniciais: a, b, ϵ_1 e ϵ_2

2. Se (b-a) < ϵ_1, então escolha como respostsa qualquer valor pertencente aquele intervalo e finaliza-se o algoritmo, caso $|f(a)| < \epsilon_2$ ou $|f(b)| < \epsilon_2$ escolha a oub como responta e finaliza-se o algoritmo.

3. k = 1

4. M = f(a)

5. x = $\frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$

6. Se $|f(x)| < \epsilon_2$ escolha x como resposta e finaliza-se o algoritmo

7. Se $Mf(x) > 0$, faça a = x. Vá para o passo 9.

8. b = x

9. Se $(b - a) < \epsilon_1$, então escolha qualquer valor daquele intervalo como resposta e finaliza-se o algoritmo.

10. k = k + 1. Volte para o passo 5.

2.3 Método de Newton-Raphson

Pensado para a aceleração da convergência para o zero da função o método de Newton-Raphson utiliza da derivada da função para isto. Para aplicarmos precisamos que tanto a função escolhida no intervalo definido quanto suas derivadas de primeira e segunda ordem sejam contínuas.

O algoritmo que realiza este método é:

1. Defini-se os dados iniciais: a aproximação inicial x_0 e as precisões $\epsilon_1 e \epsilon_2$

2. Se $|f(x_0)|$ faça x_0 ser o resultado e finalize o algoritmo.

3. k = 1

4. $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

5. Se $|f(x_1)| < \epsilon_1$ ou ainda se $|f(x_1)| < \epsilon_2$ torne x_1 como resultado e finalize o algoritmo.

6. $x_0 = x_1$

7. k = k + 1. Volte ao passo 4.

2.4 Método da secante

O método da secante veio com o objetivo de eliminar a necessidade do cálculo da derivada da função que o método de Newton-Raphson necessita. O que o método da secante faz é substituir a derivada da função por:

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \tag{2}$$

Onde x_k e x_{k-1} são aproximações para a raiz.

O algoritmo que realiza este processo é:

1. Define-se os dados inicias: aproximação inicial x_0 e precisões ϵ_1 e ϵ_2

2. Se $|f(x_0)| < \epsilon_1$ torne x_0 o valor da resposta e finalize o algoritmo.

3. Se $|f(x_1)| < \epsilon_1$ ou se $|x_1 - x_0| < \epsilon_2$ torne x_1 a resposta e finalize o algoritmo.

4. k = 1
5. $x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f(x_1)-f(x_0)}(x_1 - x_0)$
6. Se $|f(x_2)| < \epsilon_1$ ou se $|x_2 - x_1| < \epsilon_2$ torne x_2 o resultado e finalize o algorimto
7. $x_0 = x_1$ e $x_1 = x_2$
8. k = k + 1. Volte ao passo 5.

3 Aplicação

3.1 Apresentação da função

$$4cos(x) - e^{2x} = 0 \tag{3}$$

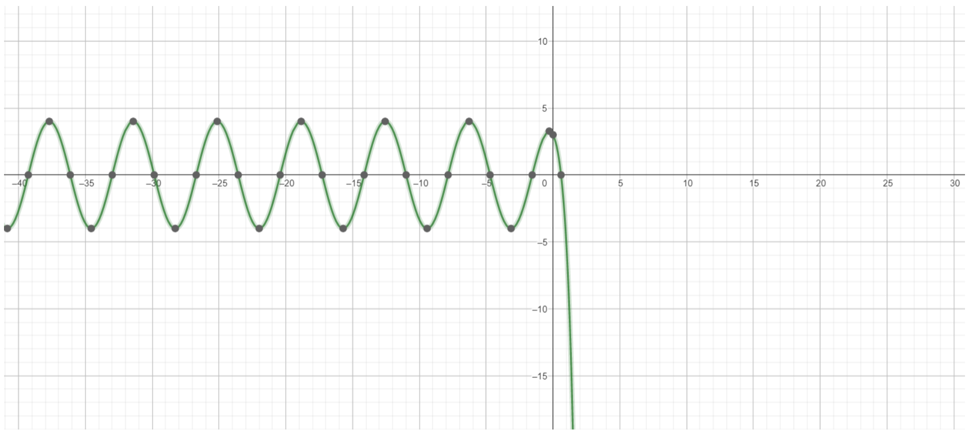

Figura 1: Função $f(x) = 4\cos(x) - e^{2x}$ simulada no Geogebra

Como visto na figura acima, simulado pelo aplicativo de simulação matemática gráfica, percebemos que a função escolhida apresenta um comportamento aparentemente periódico, semelhante a um cosseno, quando $x < 0$ e apresenta uma queda brusca em $x > 0$, como uma exponencial negativa. Ao analisarmos este gráfico percebemos que temos vários zeros para esta função, sendo eles a maioria antes de $x = 0$ e apenas um após $x = 0$. Para aplicarmos algum método escolhido devemos nos atentar a intervalos que possuam pelo menos um zero desta função, como por exemplo o intervalo $0 < x < 1$.

3.2 Aplicando os métodos

Utilizamos para construção e aplicação dos métodos apresentados a ferramenta Google Sheets, onde construímos para cada método uma planilha que popula as informações até chegarmos a um ponto de convergência onde podemos analisar e comparar com o gráfico gerado pelo Geogebra

3.2.1 Método da bissecção

Ao aplicarmos o método da bissecção utilizando o Google Sheets nos deparamos com uma limitação inerente à ferramenta, após um certo ponto chegamos em um estágio onde não havia-se mudanças, a pequena variação era desconsiderada pela ferramenta e mesmo assim persistia-se gerando cálculos.

Função			Precisão:	x0		0	
4cos(x) - e^2x			1,00E-15	x1		1	
Iteração	a	b	f(a)	x	f(x)	Precisão	Atende a solução?
1	0	1	---	0,5	7,92E-01	1,00E-15	NÃO
2	0,5	1	A é igual a X	0,75	-1,55E+00	1,00E-15	NÃO
3	0,5	0,75	B é igual a X	0,625	-2,46E-01	1,00E-15	NÃO
4	0,5	0,625	B é igual a X	0,5625	3,03E-01	1,00E-15	NÃO
5	0,5625	0,625	A é igual a X	0,59375	3,65E-02	1,00E-15	NÃO
6	0,59375	0,625	A é igual a X	0,609375	-1,03E-01	1,00E-15	NÃO
7	0,59375	0,609375	B é igual a X	0,6015625	-3,27E-02	1,00E-15	NÃO
8	0,59375	0,6015625	B é igual a X	0,59765625	2,04E-03	1,00E-15	NÃO
9	0,59765625	0,6015625	A é igual a X	0,599609375	-1,53E-02	1,00E-15	NÃO
10	0,59765625	0,599609375	B é igual a X	0,5986328125	-6,62E-03	1,00E-15	NÃO
11	0,59765625	0,5986328125	B é igual a X	0,5981445313	-2,29E-03	1,00E-15	NÃO
12	0,59765625	0,5981445313	B é igual a X	0,5979003906	-1,27E-04	1,00E-15	NÃO
13	0,59765625	0,5979003906	B é igual a X	0,5977783203	9,55E-04	1,00E-15	NÃO
14	0,5977783203	0,5979003906	A é igual a X	0,5978393555	4,14E-04	1,00E-15	NÃO
15	0,5978393555	0,5979003906	A é igual a X	0,597869873	1,44E-04	1,00E-15	NÃO
16	0,597869873	0,5979003906	A é igual a X	0,5978851318	8,29E-06	1,00E-15	NÃO
17	0,5978851318	0,5979003906	A é igual a X	0,5978927612	-5,93E-05	1,00E-15	NÃO
18	0,5978851318	0,5978927612	B é igual a X	0,5978889465	-2,55E-05	1,00E-15	NÃO
19	0,5978851318	0,5978889465	B é igual a X	0,5978870392	-8,62E-06	1,00E-15	NÃO
20	0,5978851318	0,5978870392	B é igual a X	0,5978860855	-1,64E-07	1,00E-15	NÃO
21	0,5978851318	0,5978860855	B é igual a X	0,5978856087	4,06E-06	1,00E-15	NÃO
22	0,5978856087	0,5978860855	A é igual a X	0,5978858471	1,95E-06	1,00E-15	NÃO
23	0,5978858471	0,5978860855	A é igual a X	0,5978859663	8,93E-07	1,00E-15	NÃO
24	0,5978859663	0,5978860855	A é igual a X	0,5978860259	3,65E-07	1,00E-15	NÃO
25	0,5978860259	0,5978860855	A é igual a X	0,5978860557	1,00E-07	1,00E-15	NÃO
26	0,5978860557	0,5978860855	A é igual a X	0,5978860706	-3,17E-08	1,00E-15	NÃO
27	0,5978860557	0,5978860706	B é igual a X	0,5978860632	3,44E-08	1,00E-15	NÃO
28	0,5978860632	0,5978860706	A é igual a X	0,5978860669	1,36E-09	1,00E-15	NÃO
29	0,5978860669	0,5978860706	A é igual a X	0,5978860687	-1,51E-08	1,00E-15	NÃO
30	0,5978860669	0,5978860687	B é igual a X	0,5978860678	-6,89E-09	1,00E-15	NÃO
31	0,5978860669	0,5978860678	B é igual a X	0,5978860673	-2,76E-09	1,00E-15	NÃO
32	0,5978860669	0,5978860673	B é igual a X	0,5978860671	-6,99E-10	1,00E-15	NÃO
33	0,5978860669	0,5978860671	B é igual a X	0,597886067	3,33E-10	1,00E-15	NÃO
34	0,597886067	0,5978860671	A é igual a X	0,5978860671	-1,83E-10	1,00E-15	NÃO
35	0,597886067	0,5978860671	B é igual a X	0,597886067	7,46E-11	1,00E-15	NÃO
36	0,597886067	0,5978860671	A é igual a X	0,597886067	-5,44E-11	1,00E-15	NÃO
37	0,597886067	0,597886067	B é igual a X	0,597886067	1,01E-11	1,00E-15	NÃO
38	0,597886067	0,597886067	A é igual a X	0,597886067	-2,21E-11	1,00E-15	NÃO
39	0,597886067	0,597886067	B é igual a X	0,597886067	-6,01E-12	1,00E-15	NÃO
40	0,597886067	0,597886067	B é igual a X	0,597886067	2,05E-12	1,00E-15	NÃO
41	0,597886067	0,597886067	A é igual a X	0,597886067	-1,98E-12	1,00E-15	NÃO
42	0,597886067	0,597886067	B é igual a X	0,597886067	3,69E-14	1,00E-15	NÃO
DEVIDO AO NÚMERO DE REPETIÇÕES COM O MESMO RESULTADO, OUTRO CRITÉRIO DE PARADA FOI UTILIZADO POIS A FERRAMENTA NÃO PERMITE APROXIMAR MAIS.							

3.2.2 Método da posição falsa

Ao aplicarmos este método notamos que houve uma necessidade razoável de iterações para poder atingirmos nosso objetivo, diferentemente do método da bissecção, conseguimos chegar a um valor sem que a ferramenta escolhida fosse incapacitante. Levamos 32 iterações para chegarmos no resultado.

Função			Precisão1:	Precisão2:	x0		0	
4cos(x) - e^2x			1E-15	1,00E-15	x1		1	
Iteração	a	b	M		x	f(x)	Precisão	Atende a solução?
1	0	1	3,00E+00		0,3646154389	1,66E+00	1,00E-15	NÃO
2	0,3646154389	1	1,66E+00		0,5179948128	6,57E-01	1,00E-15	NÃO
3	0,5179948128	1	6,57E-01		0,5718334645	2,25E-01	1,00E-15	NÃO
4	0,5718334645	1	2,25E-01		0,5895298629	7,35E-02	1,00E-15	NÃO
5	0,5895298629	1	7,35E-02		0,5952202493	2,36E-02	1,00E-15	NÃO
6	0,5952202493	1	2,36E-02		0,5970370754	7,52E-03	1,00E-15	NÃO
7	0,5970370754	1	7,52E-03		0,5976158345	2,39E-03	1,00E-15	NÃO
8	0,5976158345	1	2,39E-03		0,5978000676	7,62E-04	1,00E-15	NÃO
9	0,5978000676	1	7,62E-04		0,5978586999	2,43E-04	1,00E-15	NÃO
10	0,5978586999	1	2,43E-04		0,5978773583	7,72E-05	1,00E-15	NÃO
11	0,5978773583	1	7,72E-05		0,5978832958	2,46E-05	1,00E-15	NÃO
12	0,5978832958	1	2,46E-05		0,5978851852	7,82E-06	1,00E-15	NÃO
13	0,5978851852	1	7,82E-06		0,5978857864	2,49E-06	1,00E-15	NÃO
14	0,5978857864	1	2,49E-06		0,5978859777	7,92E-07	1,00E-15	NÃO
15	0,5978859777	1	7,92E-07		0,5978860386	2,52E-07	1,00E-15	NÃO
16	0,5978860386	1	2,52E-07		0,597886058	8,02E-08	1,00E-15	NÃO
17	0,597886058	1	8,02E-08		0,5978860642	2,55E-08	1,00E-15	NÃO

17	0,597886058	1	8,02E-08	0,5978860642	2,55E-08	1,00E-15	NÃO
18	0,5978860642	1	2,55E-08	0,5978860661	8,12E-09	1,00E-15	NÃO
19	0,5978860661	1	8,12E-09	0,5978860667	2,58E-09	1,00E-15	NÃO
20	0,5978860667	1	2,58E-09	0,5978860669	8,22E-10	1,00E-15	NÃO
21	0,5978860669	1	8,22E-10	0,597886067	2,62E-10	1,00E-15	NÃO
22	0,597886067	1	2,62E-10	0,597886067	8,32E-11	1,00E-15	NÃO
23	0,597886067	1	8,32E-11	0,597886067	2,65E-11	1,00E-15	NÃO
24	0,597886067	1	2,65E-11	0,597886067	8,43E-12	1,00E-15	NÃO
25	0,597886067	1	8,43E-12	0,597886067	2,68E-12	1,00E-15	NÃO
26	0,597886067	1	2,68E-12	0,597886067	8,52E-13	1,00E-15	NÃO
27	0,597886067	1	8,52E-13	0,597886067	2,72E-13	1,00E-15	NÃO
28	0,597886067	1	2,72E-13	0,597886067	8,70E-14	1,00E-15	NÃO
29	0,597886067	1	8,70E-14	0,597886067	2,80E-14	1,00E-15	NÃO
30	0,597886067	1	2,80E-14	0,597886067	9,33E-15	1,00E-15	NÃO
31	0,597886067	1	9,33E-15	0,597886067	2,22E-15	1,00E-15	NÃO
32	0,597886067	1	2,22E-15	0,597886067	4,44E-16	1,00E-15	SIM

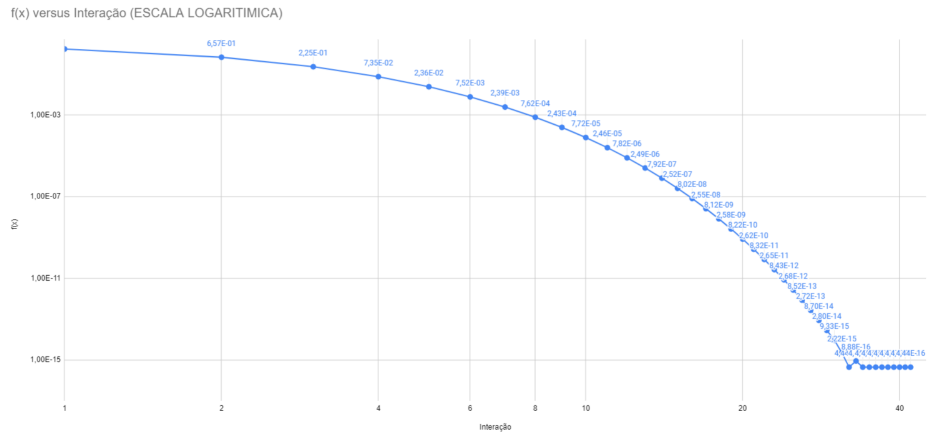

Figura 2: Gráfico de convergência para o método da posição falsa aplicada a função

3.2.3 Método da secante

O método da secante demonstrou um avanço muito grande em relação aos métodos aplicados anteriormente, em apenas 8 iterações fomos capazes de atingir chegar num valor com a precisão estabelecida

Função				Precisão:	x0		0	
4cos(x) - e^2x				1,00E-15	x1		1	
Iteração	x0	x1	f(x0)	f(x1)	x2	f(x2)	Precisão	Atende a solução?
1	0	1	3,00E+00	-5,23E+00	0,3646154389	1,66E+00	1,00E-15	NÃO
2	1	0,3646154389	-5,23E+00	1,66E+00	0,5179948128	6,57E-01	1,00E-15	NÃO
3	0,3646154389	0,5179948128	1,66E+00	6,57E-01	0,6181995464	1,83E-01	1,00E-15	NÃO
4	0,5179948128	0,6181995464	6,57E-01	-1,83E-01	0,5963320648	1,38E-02	1,00E-15	NÃO
5	0,6181995464	0,5963320648	-1,83E-01	1,38E-02	0,5978568749	2,59E-04	1,00E-15	NÃO
6	0,5963320648	0,5978568749	1,38E-02	2,59E-04	0,5978861094	3,75E-07	1,00E-15	NÃO
7	0,5978568749	0,5978861094	2,59E-04	-3,75E-07	0,597886067	1,02E-11	1,00E-15	NÃO
8	0,5978861094	0,597886067	-3,75E-07	1,02E-11	0,597886067	4,44E-16	1,00E-15	SIM

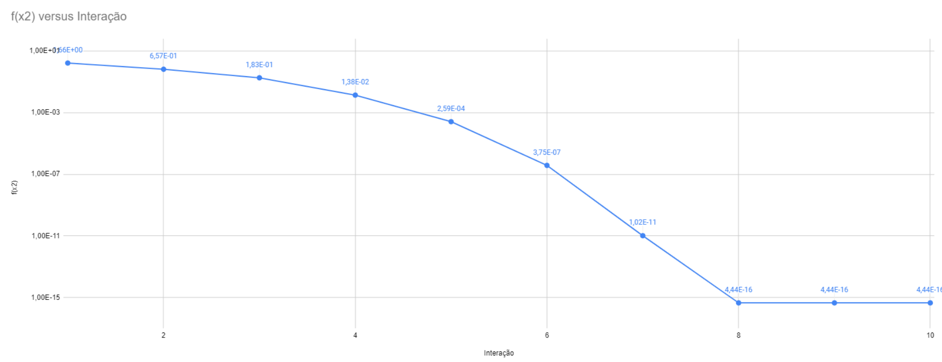

Figura 3: Gráfico de convergência para o método da secante aplicada a função

3.2.4 Método de Newton-Raphson

Este método foi o método com a convergência mais rápida dentre os quais aplicamos, em apenas 4 iterações conseguimos atingir o objetivo. Vale ressaltar que ele depende do cálculo da derivada da função o que eleva um pouco o custo computacional.

Função	F'(x)	Precisão:	Precisão:	x0	x1	Ponto médio:
4cos(x) - e^2x	-4sin(x) - 2e^2x	1,00E-15	1,00E-15	0	1	0,5

Iteração	x0	x1	f(x0)	f'(x0)	f(x1)	Precisão	Atende a solução?
1	0,5	0,607699183	7,92E-01	-7,354265811	8,78E-02	1,00E-15	NÃO
2	0,607699183	0,5979750873	-8,78E-02	-9,027194225	7,89E-04	1,00E-15	NÃO
3	0,5979750873	0,5978860744	-7,89E-04	-8,865276775	6,55E-08	1,00E-15	NÃO
4	0,5978860744	0,597886067	-6,55E-08	-8,863805248	8,88E-16	1,00E-15	SIM

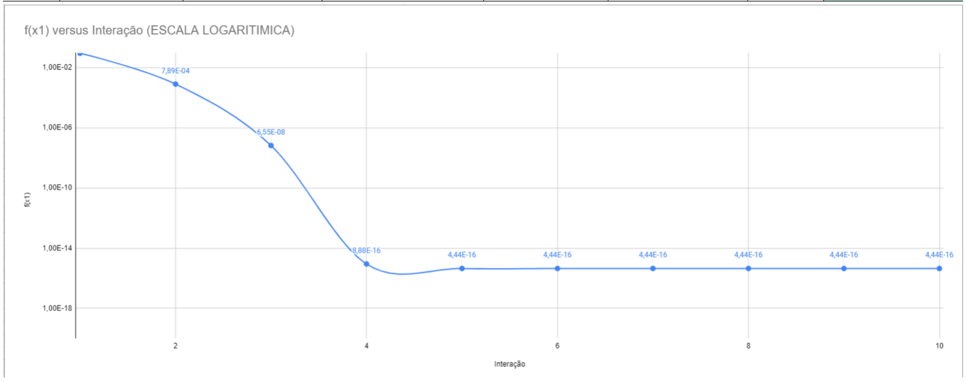

Figura 4: Gráfico de convergência para o método de Newton-Raphson aplicada a função

4 Considerações finais

Com o desenvolver deste projeto, pudemos analisar estes diferentes métodos para obtenção de zeros de funções, validamos que métodos muito simples como o método da bissecção apesar de ser de fácil compreensão, computacionalmente, pode não ser a melhor escolha para a maioria dos casos, assim como apesar de métodos sofisticados que possuem rápida convergência para o resultado pode não ser a melhor opção para casos onde a função varia constantemente, pois existe a necessidade do cálculo de derivadas da função avaliada. Aprendemos que a escolha do método é situacional, variando de acordo com as informações que possuímos e com a forma da função que estamos lidando.